Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский Государственный Университет

имени М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

На правах рукописи

УДК 519.7

Калинина Инна Сергеевна

Системы функциональных уравнений счетнозначной логики

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор С.С. Марченков

Москва — 2015

Оглавление

Введение

Общая характеристика исследования

Уравнение — одно из самых распространенных понятий в математике, уступающее по частоте использования, возможно, лишь понятию функции.

По отношению к основным (предметным) переменным все уравнения можно условно разделить на две группы: к первой группе относятся уравнения, в которых разыскиваются значения неизвестных предметных переменных (линейные, алгебраические, матричные и другие уравнения), во вторую группу входят функциональные уравнения, в которых неизвестными являются функции от предметных переменных, и наряду с предметными переменными в них присутствуют известные функциональные константы.

Функциональное уравнение — это один из самых распространенных способов задания функций в математике, оно выражает связь между значением функции в одной или нескольких точках с ее значениями в других точках. Предметные переменные в функциональных уравнениях указывают на универсальный характер этих связей и всегда находятся под действием кванторов общности (т.е. уравнение должно оставаться верным при любых значениях входящих в него предментых переменных).

Функциональные уравнения представляют собой весьма общий класс уравнений, ими, по существу, являются дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, уравнения конечных разностных схем и ряд других, хотя само название «функциональные уравнения» к уравнениям этих типов обычно не относят. Решениями функциональных уравнений могут быть как конкретные функции, так и множества функций, зависящие от некоторых параметров, в частности, от функций, определяемых этими же уравнениями. Несколько функциональных уравнений можно объединить в систему функциональных уравнений. Решением системы считается набор функций, являющийся решением каждого уравнения.

В целом можно сказать, что функциональные уравнения применяются практически во всех разделах математики: от теории множеств и общей (универсальной) алгебры до сугубо прикладных направлений математической физики. Особенно часто системы функциональных уравнений используются в разделах математики, включающих теории функций той или иной природы. Для специальных нужд в различных областях знаний формулируются функциональные уравнения и системы функциональных уравнений, исследуются вопросы о существовании решения вообще, а также о существовании решения, удовлетворяющего заданным свойствам, или о единственности решения, или о свойствах множества решений. Приведем некоторые примеры.

Одними из простейших функциональных уравнений являются функциональные уравнения Коши: $f(x+y) = f(x)+f(y)$ (этому уравнению удовлетворяют все линейные однородные функции $f(x) = C \cdot x$) и $f(x+y) = f(x)f(y)$ (этому уравнению удовлетворяют все показательные функции $f(x) = C^x$), где C — произвольная константа.

В качестве примера системы функциональных уравнений можно привести одну из постановок задачи Коши из теории дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Здесь $f(x, y)$ и y_0 — функциональные константы (известные функции), а $y(x)$

— искомая неизвестная функция. Если функциональная константа $f(x, y)$ непрерывна и липшицева на прямоугольнике, а начальная точка принадлежит прямоугольнику, то в нем будет существовать единственное решение данной системы функциональных уравнений.

К функциональным уравнениям также относятся многочисленные рекуррентные соотношения, которые содержат неизвестные функции от целочисленных переменных и оператор сдвига. Пример подобного соотношения — $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Хорошо известные законы коммутативности и ассоциативности из общей алгебры также можно рассматривать как функциональные уравнения. В привычной записи эти законы выглядят следующим образом:

$$x \circ y = y \circ x, \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

где $\circ$ — символ некоторой бинарной операции. Однако, если представить эту операцию в виде $f(x, y)$, то получатся как раз функциональные уравнения:

$$f(x, y) = f(y, x), \qquad f\big(f(x, y), z\big) = f\big(x, f(y, z)\big).$$

Решениями данных функциональных уравнений будут совокупности всех коммутативных или ассоциативных функций.

Свойство рефлексивности для бинарного отношения R также можно переписать в виде функционального уравнения $\chi_R(x, x) = 1$, где χ_R — характеристическая функция отношения R.

Еще несколько простейших, хорошо известных примеров из математического анализа: периодические функции с периодом T — это функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x + T) = f(x)$, четные функции — уравнению $f(x) = f(-x)$, нечетные функции — уравнению $f(x) = -f(-x)$.

В теории функций комплексной переменной функциональные уравнения часто применяются для введения новых классов функций. Например, автоморфные функции описываются функциональными уравнениями вида $f(s_a z) = f(z)$, где s_a есть элемент некоторой счетной подгруппы группы дробно-линейных преобразований комплексной плоскости.

Постановка задач математической физики заключается в построении математических моделей, описывающих основные закономерности изучаемого класса физических явлений. Такая постановка состоит в определении функциональных уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных или алгебраических), которым удовлетворяют функции, характеризующие физический процесс. Характерным примером является уравнение $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, являющееся канонической формой уравнения теплопроводности. Если добавить к нему уравнения, определяющие начальное и граничные условия, то можно получить систему функциональных уравнений, определяющую задачу теплопроводности на отрезке, луче или прямой.

Обратимся к примерам из дискретной математики. В теории булевых функций и теории функций многозначной логики функциональные уравнения представлены достаточно широко. Все линейные булевы функции, зависящие от n переменных, могут быть определены как решения функционального уравнения

$$\varphi(x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n) \oplus \varphi(0, \ldots, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \oplus \varphi(y_1, \ldots, y_n),$$

где 0 и $\oplus$ суть заданные функциональные константы нуль и сложение по модулю два. Все самодвойственные булевы функции от n переменных — это решения функционального уравнения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bar{\varphi}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Само задание булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ табличным способом есть ни что иное, как система функциональных уравнений, состоящая из 2^n уравнений с функциональными константами 0 и 1 и одной функциональной переменной — определяемой функцией f.

Если обратиться к математической кибернетике, то можно увидеть, что целые теории строятся и развиваются на базе подходящих языков функциональных уравнений.

Так, например, действие операции суперпозиции (на множестве функций любой природы) может быть представлено в виде функционального уравнения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_p)),$$

где $f, f_1, \ldots, f_m$ — функциональные константы.

Действие оператора примитивной рекурсии может быть выражено в виде системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ \varphi(x_1, \ldots, x_n + 1) = f_2(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \end{cases}$$

с функциональными константами $0, x + 1, f_1, f_2$.

Более того, одним из первых определений рекурсивной функции в теории алгоритмов явилось эрбран-геделевское определение, основанное на решениях систем функциональных уравнений специального вида [48-50]. Данный формализм будет описан в работе ниже.

Системы канонических уравнений в теории автоматов (см. [2]) представляют собой основной инструмент как для задания и изучения собственно конечно-автоматных функций, так и для исследования разнообразных их обобщений (см. [14]). Как правило, эти системы канонических уравнений имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\ q_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_r(t) = g_r(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\ q_1(0) = \ldots = q_r(0) = 0, \end{cases}$$

где $f, g_1, \ldots, g_r$ — (булевы) функциональные константы.

Краткая история развития поставленной задачи

Несмотря на то, что в теории булевых функций и теории функций многозначной логики имеется большое число примеров функциональных уравнений и систем функциональных уравнений, систематическое исследование функциональных булевых уравнений и функциональных уравнений многозначной логики началось сравнительно недавно.

В данном направлении можно отметить несколько результатов о функциональных уравнениях, рассматриваемых на множестве булевых функций: O. Ekin, S. Foldes, P. L. Hammer, L. Hellerstein в работе [45] вывели уравнения, задающие множества рефлексивных, полярных, супермодулярных, субмодулярных, билинейных, квадратичных и принадлежащих классам Хорна булевых функций, а также доказали критерий задания класса булевых функций функциональным уравнением: класс булевых функций, замкнутый относительно операции добавления и изъятия несущественных переменных, может быть описан функциональным уравнением тогда и только тогда, когда этот класс замкнут относительно операции отождествления переменных. В работе [46] этот критерий был усилен, а в работе [47] доказано существование классов, определяемых системой с бесконечным числом функциональных уравнений (например, как класс линейных пороговых функций).

Также необходимо обратить внимание на работы С.С. Марченкова и В. С. Федоровой [19, 32-34], в которых функциональные уравнения рассматриваются на множестве функций многозначной логики. В данных работах, в частности, полностью решены вопросы о выразимости одних функций через другие с помощью систем функциональных уравнений (в другой терминологии — описание всех классов функций многозначной логики, замкнутых относительно систем функциональных уравнений), а также о сложности решения проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений.

В счетнозначной логике системы функциональных уравнений уже использовались (однако в иной постановке) в теории алгоритмов и продемонстрировали часть своих возможностей.

Функциональные уравнения являются удобным средством для задания оператора замыкания. Изучению оператора замыкания, базирующегося на системах функциональных уравнений (коротко — оператор FE-замыкания), в данной работе уделяется особое внимание. Рассмотрение различных операторов замыкания помогает разбивать все множество функций на замкнутые классы. Подобная классификация позволяет выделять свойства отдельных множеств функций, а также исследовать вопросы о выразимости одних множеств функций через другие.

Исследования в данном направлении начались в работах Э. Поста [57-58] с описания счетной решетки всех замкнутых относительно суперпозиции классов булевых функций. Логичным продолжением и обобщением подобных исследований является изучение замыкания относительно суперпозиции на множестве функций многозначной логики. Однако в случае многозначной логики мощность множества всех замкнутых относительно суперпозиции классов континуальна (следует из работы [43]). Этот факт значительно ограничивает возможности получения некоторого полного описания, поэтому во многих работах исследуются лишь отдельные фрагменты решетки. Чаще всего рассматриваются все замкнутые (либо предполные) классы, содержащие некоторое множество функций, представляющих наибольший интерес. Например, в работе [29] описаны все классы, содержащие тернарный дискриминатор, в работе [36] — все предполные классы, содержащие класс полиномов, а в работе [59] — все минимальные классы, включающие в себя целиком множество селекторных функций.

В случае многозначной логики для создания решетки замкнутых классов простой структуры вводятся более «сильные» операторы замыкания, такие, как оператор параметрического замыкания (см., например, [8]), оператор позитивного замыкания (см., например, [27]), оператор $1L$-замыкания (см., например, [24, 30]). Действие этих «сильных» операторов замыкания, как правило, начинается с исследования случая булевых функций (см. [25]). Исследования в данном направлении актуальны и в последнее время. К примеру, в работе [1] рассматривается замыкание относительно операции расширенной суперпозиции, в работе [38] исследуется замыкание относительно суперпозиции и перестановки с множеством наборов специального вида, в работе [35] рассматриваются классы функций, допускающих неявное представление над некоторой системой функций.

В данной диссертации исследуются функциональные уравнения счетнозначной логики и оператор замыкания, основанный на системах функциональных уравнений. Сам термин «счетнозначная логика» предложен С.В. Яблонским (см. [40-41]) для обозначения функциональной системы с операцией суперпозиции, функции которой заданы на множестве натуральных чисел. Получение первых нетривиальных результатов в счетнозначной логике потребовало привлечения теоретико-множественных конструкций большой технической сложности. В этом направлении следует выделить работы

Г.П. Гаврилова (см. [5-6]) и С.С. Марченкова (см. [17]), в которых исследуются вопросы полноты и выразимости относительно операции суперпозиции. Следует также отметить, что в настоящее время исследований по счетнозначной логике проводится крайне мало, что, вероятно, отчасти связано с тем, что мощность множества предполных относительно суперпозиции классов функций счетнозначной логики гиперконтинуальна (см. [17]), а, как сказано выше, даже континуальная мощность существенно ограничивает круг подобных исследований. Таким образом, в исследовании класса функций счетнозначной логики (например, посредством подходящих операторов замыкания) имеются лишь первоначальные результаты, которые связаны с операцией суперпозиции, и которые пока не получили дальнейшего развития.

Как и в случае многозначной логики, в случае счетнозначной логики вводятся другие, отличные от суперпозиции, операции. Подобные операции чаще всего используются вместе с операцией суперпозиции, причем рассматриваются замыкания лишь некоторых множеств функций. Самыми простыми примерами могут служить множество примитивно-рекурсивных функций, которое получаются в результате замыкания системы функций $\{0, x+1, I_k^n(x_1, \ldots, x_n)\}$ с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии, и множество частично-рекурсивных функций, которое получаются также из системы $\{0, x+1, I_k^n(x_1, \ldots, x_n)\}$ в результате замыкания по суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации (см., например, [52]). Также отметим счетное семейство классов Гжегорчика $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2 \ldots$ (см. [7, 28]), порождаемых операциями суперпозиции и ограниченной рекурсии из множеств вида $\{0, x+1, I_k^n(x_1, \ldots, x_n), f_k\}$, где $\{f_k(x_1, x_2)\}$ — специальным образом выбранная последовательность монотонных примитивно- рекурсивных функций. Эти классы образуют возрастающую иерархию множества всех примитивно-рекурсивных функций.

Также следует привести пример, в котором в качестве исходных функций рассматривается множество функций $\{x+1, I_k^n(x_1, \dots, x_n), x \dot{-} y\}$. Если в качестве порождающих операций взять операции суперпозиции и ограниченного суммирования, то образуется класс функций, элементарных по Сколему (см. [28, 60]). Если к порождающим операциям добавить еще операцию ограниченного мультиплицирования, то получится класс функций, элементарных по Кальмару (см. [28, 51]), который совпадает с классом $\mathcal{E}^3$ Гжегорчика. Вопрос о порождении различных подмножеств множества рекурсивных функций актуален и в настоящее время. В частности, в работе [4] рассматривается задача о порождающих множествах в группах рекурсивных перестановок.

Изучение структуры множества рекурсивных функций, не принадлежащих классу примитивно-рекурсивных, началось с примера В. Аккермана (см. [44]) функции, являющейся всюду определенной и вычислимой, но не примитивно-рекурсивной. Дальнейшее развитие это иследование получило в работе [54] Р. Петер, в которой она изучала счетную иерархию вложенных классов, определяемых рекурсиями различных ступеней.

Обращаясь к примеру замыкания относительно систем функциональных уравнений, следует отметить, что еще в середине 1930-х годов Ж.Эрбран и К.Гедель [48-50] предложили одну из первых формализаций понятия алгоритмически вычислимой функции — формализацию, основанную на логическом выводе из системы функциональных уравнений. Однако, несмотря на схожесть формулировок этого исследования с темой данной работы, такая формализация пригодна лишь для построений алгоритмического характера и почти не связана с определимостью функций, базирующейся на решениях систем функциональных уравнений.

Отметим, что в большинстве случаев (в том числе, для описанных выше примеров) исследуемые множества функций счетнозначной логики не выходят за пределы множества рекурсивных (вычислимых) функций. Следует еще обратить внимание на то, что в вопросах классификации функций счетнозначной логики (в терминах, например, графиков функций), можно применять различные типы алгоримической сводимости (m-сводимость, табличную сводимость, сводимость по Тьюрингу, сводимость по перечислимости и др. [37], главы 7–9), что приводит к разнообразным по объему и свойствам классификациям. В этом же русле находятся классификации, основанные на классах арифметической иерархии Клини-Мостовского и аналитической иерархии Клини (см. [37], главы 15–16).

В диссертации в силу больших выразительных возможностей оператора FE-замыкания (в частности из-за того, что множество рекурсивных функций не является FE-замкнутым) приходится рассматривать классы функций счетнозначной логики, далеко выходящие за пределы класса вычислимых функций (и даже класса функций, арифметических по Клини-Мостовскому).

Основные цели и результаты

В диссертации изучаются решения систем функциональных уравнений счетнозначной логики, на основе систем функциональных уравнений определяется оператор FE-замыкания и рассматривается действие оператора FE-замыкания на множестве P_N функций счетнозначной логики. В данной работе прежде всего ставятся следующие вопросы:

- Что представляют собой множества решений систем функциональных уравнений? Как эти множества связаны с известными классами функций, рассматриваемыми в теории алгоритмов?

- Как зависят решения систем функциональных уравнений от функциональных констант, используемых в уравнениях?

- Что дает расширение языка функциональных уравнений с помощью дополнительных логических связок?

- Насколько сложным может быть поиск решения системы функциональных уравнений? В частности, какова сложность решения проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений?

- Что можно сказать о совокупности всех решений заданной системы уравнений?

- Что дает применение функциональных уравнений в вопросах классификации функций счетнозначной логики?

- Насколько сильным является оператор FE-замыкания? Каковы оценки числа замкнутых и предполных классов, которые он порождает?

Цель настоящей диссертации — постараться найти ответы на сформулированные выше вопросы.

Основными результатами диссертации являются следующие положения:

- Доказано, что для всякого общерекурсивного оператора $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ найдется такая система уравнений с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$, которая для любого выбора функциональных констант $f_1, \ldots, f_m$ определяет (по выделеной функциональной переменной) функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.

- Установлено, что FE-замыкание систем, подобных системе $\{0, x+1\}$, а также каждой из систем $\{\chi_<\}$, $\{\chi_\leq\}$, $\{\chi_>\}$, $\{\chi_\geq\}$, совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини.

- Исследована сложность проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений над множествами $\{p(x,y,z)\}$ и $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — константы. Доказано, что данная проблема алгоритмически неразрешима и принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.

- Получены оценки мощности множеств FE-замкнутых и FE-предполных классов. Доказано, что мощность семейства всех FE-замкнутых классов гиперконтинуальна, а семейства всех FE-предполных классов — не менее чем континуальна.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена оператору FE-замыкания и состоит из 6 параграфов. В первом параграфе вводятся базовые определения, используемые в дальнейшем изложении. В параграфе 2 определяется оператор замыкания, основанный на формализме Эрбрана- Геделя (оператор HG-замыкания), и доказывается теорема: для всякого общерекурсивного оператора $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ найдется такая система уравнений (в формализме FE) с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$, которая для любого выбора функциональных констант $f_1, \ldots, f_m$ определяет (по своей главной функциональной переменной) функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.

В третьем параграфе доказывается принцип сопряженности для оператора FE-замыкания, формулируются важные следствия из него и доказывается теорема о том, что любой FE-замкнутый класс, содержащий нетривиальную однородную функцию, целиком включает класс H однородных функций.

В четвертом параграфе доказывается теорема о том, что класс отношений RFE, определимых в формализме FE, совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини. Кроме того, устанавливается справедливость теоремы о том, что замыкания систем функций, подобных системе $\{0, x+1\}$, дают класс Σ_1^1, в следствии из этой теоремы доказывается, что замыкания систем, подобных системе $\{x+1\}$, также дают класс Σ_1^1.

В пятом параграфе исследуются системы, содержащие характеристические функции хорошо известных бинарных отношений. Доказывается, что FE-замыкание каждого из множеств функций $\{\chi_<\}$, $\{\chi_\leq\}$ совпадает с классом Σ_1^1, а FE-замыкание множества функций $\{0, 1, \chi_=\}$ совпадает с FE-замыканием множества функций $\{\chi_=\}$, содержит класс H однородных функций, включается в класс функций Σ_1^1 и не совпадает с классом Σ_1^1.

В шестом параграфе расширяются выразительные возможности языка FE-замыкания путем добавления логических связок. Доказываются равенства $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$, $\mathrm{FE}_{\&\to}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$ и $\mathrm{FE}_{\&\sim}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$, где p — тернарный дискриминатор. Также доказываются утверждения о том, что классы $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\max(x, y)]$ и $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\min(x, y)]$ совпадают с классом Σ_1^1. Устанавливается справедливость теоремы: FE-замыкание множества $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками $a_1, \ldots, a_k$. Выводится следствие из этой теоремы: FE-замыкание множества $\{\chi_=\}$ совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками $0, 1$.

В главе 2 исследуются FE-замкнутые и FE-предполные классы. Глава состоит из двух параграфов. В первом параграфе доказывается несколько вспомогательных утверждений и основная теорема о том, что мощность множества FE-замкнутых классов гиперконтинуальна. Во втором параграфе рассматриваются FE-предполные классы. Демонстрируется, как некоторые FE-замкнутые классы можно расширить до FE-предполных. Доказывается теорема о том, что мощность множества FE-предполных классов не менее чем континуальна.

Глава 3 состоит из трех параграфов. В ней изучается вопрос о сложности проблемы выполнимости систем функциональных уравнений. В первом параграфе доказывается теорема о том, что проблема выполнимости систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z)\}$ алгоритмически неразрешима. Во втором параграфе доказывается теорема о том, что проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z)\}$ принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского. В качестве следствий из теоремы выводятся утверждения, говорящие, что множества всех выполнимых систем функциональных уравнений над множествами $\{p(x, y, z)\}$ и $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$— константы, являются m-полными множествами в классе Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского. В третьем параграфе исследуется множество всех решений системы функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z)\}$. Доказывается, что множество всех решений системы функциональных уравнений над $\{p(x, y, z)\}$ содержится внутри объединения всех множеств вида F_β, где последовательности β построены для различных бесконечных ветвей дерева решений Δ.

Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах из списка ВАК (работы [9-11, 31]) и в сборниках тезисов конференций (работа [12]).

Результаты диссертации излагались на конференции «Ломоносовские чтения» в 2013 и 2014 г., на конференции «Тихоновские чтения» в 2014 г., докладывались на семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ и на семинаре лаборатории ПОИС факультета компьютерных наук ВШЭ.

Глава 1

Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике

В этой главе вводятся основные понятия и терминология, принятые при изложении результатов (параграф 1.1), проводится сравнение операторов FE-замыкания и HG-замыкания (параграф 1.2), доказывается принцип сопряженности для оператора FE-замыкания и некоторые свойства замыкания систем, содержащих однородные функции (параграф 1.3), исследуется замыкание системы $\{x+1, 0\}$ и подобных ей систем (параграф 1.4), исследуется замыкание некоторых систем, содержащих характеристические функции (параграфы 1.5 и 1.6), расширяется язык оператора FE-замыкания за счет введения новых логических связок и исследуются выразительные возможности получающихся языков (параграф 1.6).

Результаты второго и третьего параграфов опубликованы в работе [31], результаты четвертого параграфа — в работах [9, 31], результаты пятого параграфа — в работе [9], результаты шестого параграфа — в работе [11].

1.1 Основные понятия и терминология

Введем основные понятия и терминологию, используемые в диссертации. Пусть $N = \{0, 1, \ldots\}$ (расширенный натуральный ряд), P_N — множество всех функций на N (множество функций счетнозначной логики). Если $Q \subseteq P_N$ и $n \geq 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q, зависящих от n переменных. Для любых $n \geq 1$ и i, $1 \leq i \leq n$, рассматриваем селекторную функцию $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. На множестве P_N предполагаем заданной операцию суперпозиции [42]. Множества функций из P_N, замкнутые относительно операции суперпозиции, называем замкнутыми классами.

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [9-11, 31-34]. Предполагаем, что каждая функция из P_N имеет индивидуальное обозначение (в качестве обозначения можно выбрать некоторую латинскую букву с действительным числом в качестве индекса). Для обозначения n-местных функций из P_N используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем функциональными константами. Наряду с функциональными константами рассматриваем функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ со значениями в области $P_N^{(n)}$. Кроме функциональных переменных используем обычные предметные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений N.

Иногда для обозначения функциональных констант мы будем использовать символы g, h и другие (с индексами или без них), а также символы y_i, z_j и другие для обозначения предметных переменных.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие терма над Q. Всякая предметная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1,\ldots,t_n),\quad \varphi_j^{(n)}(t_1,\ldots,t_n)$$

суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q считаем также функциональными уравнениями над Q. Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)},\ldots,\varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. Решением уравнения $t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)},\ldots,f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_N, которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение предметных переменных). Если Ξ — конечная система уравнений, то решением системы уравнений Ξ называем систему функций из P_N, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Для того чтобы с помощью решений системы уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы Ξ, которую назовем главной функциональной переменной системы Ξ. Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $Q \subseteq P_N^{(n)}$. Говорим, что множество функций Q определяется системой уравнений Ξ, если Q является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Замыканием множества Q относительно систем функциональных уравнений (коротко: FE-замыканием) называем множество всех функций из P_N, которые определяются как одноэлементные множества системами функциональных уравнений над Q. FE-замыкание множества Q обозначаем через FE$[Q]$. Множество Q называем FE-*замкнутым*, если $Q =$FE$[Q]$.

Нетрудно убедиться в том, что для любого множества Q (в том числе при

$Q = \emptyset$) множеству FE$[Q]$ принадлежат все селекторные функции и множество FE$[Q]$ замкнуто относительно операции суперпозиции (см. также [42]).

Легко видеть, что FE-замыкание удовлетворяет известным аксиомам замыкания (здесь R, R_1, R_2 — произвольные множества функций счетнозначной логики):

1) $R \subseteq [R]$,

2) если $R_1 \subseteq R_2$, то $[R_1] \subseteq [R_2]$ (монотонность),

3) $[[R]] = [R]$ (идемпотентность).

1.2 Операторы FE-замыкания и HG-замыкания

Рассматриваем еще один оператор замыкания, который также основан на системах функциональных уравнений, оператор HG-замыкания. По существу, это оператор, который может быть определен в формализме Эрбрана–Гёделя [13, 48-50], изначально предложенного для задания (частично) рекурсивных функций. Мы несколько отступаем от канонических определений из работ [13, 48-50] с целью приблизить определение оператора HG-замыкания к определению оператора FE-замыкания.

Язык оператора HG-замыкания совпадает с языком оператора FE-замыкания. То же самое относится к понятиям терма и равенства (уравнения). Пусть t_1, t_2 — термы. Частным случаем равенства $t_1 = t_2$ называем любое равенство вида $t_1' = t_2'$, где выражения t_1', t_2' получаются из термов t_1, t_2 подстановкой вместо всех предметных переменных некоторых элементов из N. При этом все вхождения одной и той же предметной переменной в термы t_1, t_2 замещаются одним и тем же элементом из N.

Пусть Ξ — конечная система равенств. Последовательность равенств $E_1, \ldots, E_s$, не содержащих предметных переменных, называется выводом из системы равенств Ξ, если каждое равенство E_i этой последовательности удовлетворяет одному из следующих условий:

1) E_i есть частный случай одного из равенств системы Ξ;

2) для некоторого $j < i$ равенство E_i получается из равенства E_j заменой выражения вида $f^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$ элементом a, где $a = f^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$;

3) для некоторых $j, l < i$ равенство E_i получается из равенства E_j заменой выражения вида $\varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$ элементом a, при этом равенство E_l имеет вид $a = \varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)$.

Будем говорить, что равенство E, не содержащее предметных переменных, выводимо из системы равенств Ξ, если существует вывод из системы равенств Ξ, который содержит E в качестве одного из равенств. Систему равенств Ξ называем корректной, если из нее невозможно вывести два равенства вида

$$a = \varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n), \quad b = \varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n),$$

где $a \neq b$.

Пусть $Q \subseteq P_N$, Ξ — корректная система равенств над Q, $\varphi^{(n)}$ — функциональная переменная, входящая в Ξ. Говорим, что (частичная) функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ определяется системой равенств Ξ по функциональной переменной φ, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ равенство $\varphi^{(n)}(a_1, \ldots, a_n) = a$ выводимо из системы равенств Ξ в том и только том случае, когда $g(a_1, \ldots, a_n) = a$. Множество всех функций, определяемых системой равенств Ξ над Q, обозначим через $\Xi(Q)$. Положим

$$\mathrm{HG}[Q] = \bigcup \Xi(Q),$$

где объединение берется по всем корректным системам равенств Ξ над Q. Множество $\mathrm{HG}[Q]$ называем HG-*замыканием* множества Q.

Отметим, что в теории алгоритмов преимущественно рассматривается множество $\mathrm{HG}[\{0, x+1\}]$, которое в этом случае совпадает с классом всех частично рекурсивных функций ([16], глава 3). Однако в формализме Эрбрана–Гёделя, как и в любом другом формализме рекурсивных функций, можно определять не только частично рекурсивные функции, но и частично рекурсивные, рекурсивные и общерекурсивные операторы. Нас будут интересовать общерекурсивные операторы (частично рекурсивные операторы, которые определены на соответствующих множествах всюду определенных функций и переводят наборы функций из указанных множеств во всюду определенные функции ([37], глава 1).

Чтобы задать в формализме HG общерекурсивный оператор $\Phi(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)})$ на множестве $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$, следует рассмотреть систему равенств Ξ, которая помимо функциональных констант $0, x+1$ содержит также функциональные константы $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$ (которые в данном случае играют роль функциональных переменных оператора Φ) и некоторые функциональные переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. В случае выполнения равенства

$$\Phi(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}) = f$$

система равенств Ξ должна корректно определять (по главной функциональной переменной) функцию f через функции $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$.

Нетрудно понять, что отмеченное отношение между общерекурсивными операторами и системами корректных равенств указанного вида является взаимно однозначным соответствием. В частности, всякая корректная система равенств Ξ с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$, которая при любом выборе констант $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)}$ определяет некоторую функцию из P_N, задает общерекурсивный оператор на множестве $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$.

Теорема 1. *Для всякого общерекурсивного оператора* $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ *найдется такая система уравнений (в формализме* FE*) с функциональными константами* $0, x+1$ *и* $f_1, \ldots, f_m$, *которая для любого выбора функциональных констант* $f_1, \ldots, f_m$ *определяет (по своей главной функциональной переменной) функцию* $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.

Доказательство.

Как отмечалось, оператор Φ можно задать в формализме HG корректной системой равенств Ξ, имеющей функциональные константы $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$ (последние в этом случае рассматриваются как функциональные переменные). Хорошо известно (см. [16], глава 5). Это верно и для других формализаций понятия общерекурсивного оператора, например, с помощью машин Тьюринга или с использованием понятия μ-рекурсивной функции), что для общерекурсивного оператора Φ соответствующую систему равенств Ξ можно выбрать так, что при действии оператора Φ на систему всюду определенных функций $(f_1, \ldots, f_m)$ для любой функциональной переменной φ_i из системы Ξ выводятся все равенства, которые определяют подходящую (по переменной φ_i) и единственную функцию класса P_N. Иными словами, система равенств Ξ может быть выбрана так, что при вычислении функции $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ используются лишь всюду определенные «вспомогательные» функции.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — все функциональные переменные системы равенств Ξ, а $g_1, \ldots, g_s$ — соответствующие им функции, которые «вычисляются» системой Ξ при выводе значений функции $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ (среди них имеется и функция $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$). Тогда, конечно, система функций $(g_1, \ldots, g_s)$ образует решение системы уравнений Ξ (в формализме FE). Вместе с тем никакого другого решения у системы уравнений Ξ в этом случае быть не может — этот факт легко доказывается индукцией по длине вывода из системы равенств Ξ.

Таким образом, система уравнений Ξ имеет единственное решение $(g_1, \ldots, g_s)$, состоящее из всюду определенных функций, и тем самым определяет единственную функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$. Теорема доказана.

Теорема 1 обеспечивает начальное представление о выразительных возможностях оператора FE-замыкания, а также наглядно демонстрирует связь оператора FE-замыкания с известным ранее оператором HG-замыкания. Фактически из теоремы следует, что класс рекурсивных функций, который можно получить из базовой системы функций $\{0, x+1, I_k^n(x_1, \ldots, x_n)\}$ с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации (в данной работе мы рассматриваем только всюду определенные функции), содержится в FE-замыкании базовой системы функций.

1.3 Принцип сопряженности для оператора FE-замыкания

Сначала введем необходимые определения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_N$, π — перестановка на множестве N и π^{-1} — перестановка, обратная к перестановке π. Функция

$$f^\pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n)))$$

называется *сопряженной* с функцией f с помощью перестановки π. Если $f = f^\pi$, то функция f носит название *самосопряженной* с помощью перестановки π. Множество всех функций из P_N, самосопряженных с помощью перестановки π, обозначим через S_π. Легко убедиться в том, что множество S_π образует замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс. Положим

$$H = \bigcap_\pi S_\pi,$$

где пересечение рассматривается по всем перестановкам π на множестве N. Функции из множества H носят название *однородных* функций (см. [18, 26, 56]).

Из определения следует, что множество H образует замкнутый класс. Легко видеть, что классу H принадлежат все селекторные функции. Определим еще ряд однородных функций:

$$p(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$d(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ z & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$l_n(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если значения } x_1,\ldots,x_n \text{ попарно различны,} \\ x_n & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$(n = 3, 4, \ldots)$. Функция p называется *тернарным дискриминатором.*

Однородность приведенных функций можно установить как непосредственно с использованием исходных определений, так и с учетом того, что значениями данных функций являются значения переменных, которые выбираются в соответствии с отношением равенства/неравенства между переменными.

Для большинства изучаемых операторов замыкания, действующих на множествах булевых функций, функций многозначной логики или функций счетнозначной логики, рассматривается принцип сопряженности, являющийся одной из важнейших характеристик оператора замыкания. Ниже в тексте устанавливается истинность принципа сопряженности для оператора FE-замыкания.

Утверждение 1. (принцип сопряженности для FE-замыкания). *Пусть система Ξ функциональных уравнений над множеством функций $\{f_1,\ldots,f_s\}$*

определяет функцию f и π — перестановка на множестве N. Тогда система уравнений Ξ^π, полученная из системы Ξ заменой каждой функциональной константы f_i, $1 \le i \le s$, соответствующей функциональной константой f_i^π, определяет функцию f^π.

Доказательство.

Подобное утверждение для случая многозначной логики было сформулировано в работе [33], и приводимое доказательство в значительной степени аналогично доказательству из указанной работы. Пусть в системе Ξ с главной функциональной переменной φ присутствуют функциональные переменные $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$. И пусть набор функций $\{g, g_1, \ldots, g_l\}$ — решение данной системы уравнений. Согласно определению решения системы уравнений, при подстановке функций $\{g, g_1, \ldots, g_l\}$ вместо соответствующих функциональных переменных $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$ все уравнения системы обращаются в тождество относительно всех входящих в систему предметных переменных.

В полученной системе заменим все вхождения функциональных констант $g, g_1, \ldots, g_l, f_1, \ldots, f_s$ на функциональные констаны $g^\pi, g_1^\pi, \ldots, g_l^\pi, f_1^\pi, \ldots, f_s^\pi$. Из принципа двойственности для оператора суперпозиции (см. [42]) следует, что после подобной замены полученные равенства также останутся тождествами.

Следовательно, набор функций $g_1^\pi, \ldots, g_l^\pi$ будет являться решением системы Ξ^π. Единственность решения по главной функциональной переменной системы Ξ^π будет следовать из единственности решения по главной функциональной переменной системы в системе Ξ, так как можно с помощью перестановки π^{-1} перейти от системы Ξ^π к системе Ξ.
Утверждение доказано.

Следствие 1. *Для любой перестановки π класс S_π является* FE-

замкнутым.

Следствие 2. *Класс H однородных функций* FE-*замкнут.*

Следствие 3. *Пусть все функции из множества $\{f_1, \dots, f_s\}$ являются самосопряженными относительно любой перестановки π из группы G. Тогда множество решений $\{g_1, \dots, g_s, \dots\}$ любой системы уравнений над множеством функциональных констант $\{f_1, \dots, f_s\}$ замкнуто относительно перехода $g_i \to g_i^\pi$.*

Однородные функции играют важную роль в универсальной алгебре и теории функций многозначной логики. В связи с этим интерес представляют FE-замкнутые классы, включающие однородные функции. Так, к примеру, в работе [18] исследуются похожие вопросы для случая оператора замыкания по суперпозиции. Выясним, какие нетривиальные (неселекторные) однородные функции могут содержать FE-замкнутые классы.

Теорема 2. *Любой* FE-*замкнутый класс, содержащий нетривиальную однородную функцию, целиком включает класс H однородных функций.*

Доказательство.

В работе [18] установлено, что класс H порождается (в смысле операции суперпозиции) тернарным дискриминатором p. Кроме того, в [18] доказано, что любой замкнутый (относительно суперпозиции) класс функций из H, отличный от класса селекторных функций, содержит либо функцию d, либо какую-нибудь функций l_n. Поэтому теорема 2 будет доказана, если мы установим, что каждая из функций d, l_n FE-порождает функцию p.

Начнем с функции d. Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$\varphi(x, x, y) = y, \quad \varphi(x, y, x) = x, \quad \varphi(x, y, y) = x, \quad \varphi(x, y, d(x, y, z)) = x.$$

Первые три уравнения этой системы правильно определяют функцию p на всех наборах, содержащих не более двух различных значений. Четвертое уравнение определяет функцию p, в частности, на наборах (x, y, z), где $x \neq y$. Отметим, что четвертое уравнение согласовано с первыми тремя на наборах, содержащих не более двух значений.

Покажем далее, что функция l_3 FE-порождает функцию d. Соответствующая система функциональных уравнений имеет следующий вид:

$$\varphi(x, x, y) = x, \quad \varphi(x, y, x) = x, \quad \varphi(x, y, y) = y,$$

$$l_3(x, \varphi(x, y, z), z) = z, \quad l_3(y, \varphi(x, y, z), z) = z.$$

Первые три уравнения данной системы правильно определяют функцию d на всех наборах, содержащих не более двух различных значений. Остальные два уравнения обеспечивают равенство $d(x, y, z) = z$ на наборах, состоящих из трех различных значений. Нетрудно также убедиться, что последние два уравнения согласованы с первыми тремя уравнениями на наборах, содержащих не более двух различных значений.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, как при $n \geq 3$ из функции l_{n+1} получить функцию l_n. Выпишем сначала систему уравнений, которая обеспечивает второй пункт определения функции l_n («в остальных случаях»):

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_n, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Затем добавим к ней уравнение, которое «отвечает» за первый пункт определения функции l_n:

$$\varphi(l_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}), x_3, \ldots, x_{n+1}) = l_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Теорема доказана.

1.4 FE-замыкание множеств типа $\{0, x+1\}$

К проблеме построения FE-замыкания довольно близко примыкают вопросы выразимости отношений в языке функциональных уравнений. Будем рассматривать функциональные уравнения над множеством функциональных констант $\{0, x+1\}$. Тогда согласно теореме 1 всякий общерекурсивный оператор (а в частности, и всякую общерекурсивную функцию) можно определить подходящей системой функциональных уравнений. Однако с помощью функциональных уравнений можно определять и отношения R на множествах вида $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$. В самом деле, рассмотрим систему функциональных уравнений Ξ с функциональными переменными

$$\varphi_1^{(n_1)},\ \ldots,\ \varphi_m^{(n_m)},\ \varphi_{m+1}^{(n_{m+1})},\ \ldots,\ \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})},$$

из которых переменные $\varphi_1^{(n_1)}, \ldots, \varphi_m^{(n_m)}$ будем считать «главными» переменными. Будем далее считать, что система Ξ определяет отношение R на множестве $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$, если для любого набора функций $(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{n_m)})$ из $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$ найдется такой набор функций $(f_{m+1}^{(n_{m+1})}, \ldots, f_{m+l}^{(n_{m+l})})$ из $P_N^{(n_{m+1})} \times \ldots \times P_N^{(n_{m+l})}$, что при замене функциональных переменных $\varphi_1^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})}$ системы уравнений Ξ соответствующими функциональными константами $f_1^{(n_1)}, \ldots, f_{m+l}^{(n_{m+l})}$ полученная система равенств будет тождественно истинной (относительно всех входящих в систему предметных переменных) в том и только том случае, когда отношение R истинно на наборе $(f_1^{(n_1)}, \ldots, f_m^{(n_m)})$.

Обозначим через RFE класс всех отношений (на декартовых произведениях множеств вида $P_N^{(n)}$), которые определяются в указанном выше смысле системами функциональных уравнений над множеством функциональных констант $\{0, x+1\}$. Далее мы хотим сравнить класс RFE с начальным классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини (см. [37], глава 16), который будем рассматривать только для отношений на множествах вида $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$. Класс Σ_1^1 аналитической иерархии Клини определяется как класс всех отношений, представимых в форме

$$(\exists f_{m+1}) \ldots (\exists f_{m+l})(\forall x_1) \ldots (\forall x_k) R(f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+l}, x_1, \ldots, x_k), \quad (1)$$

где

$$f_1 \in P_N^{(n_1)}, \ \ldots, \ f_m \in P_N^{(n_m)}, \ f_{m+1} \in P_N^{(n_{m+1})}, \ \ldots, \ f_{m+l} \in P_N^{(n_{m+l})}$$

и R — рекурсивное отношение на множестве

$$P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)} \times P_N^{(n_{m+1})} \times \ldots \times P_N^{(n_{m+l})} \times N^k.$$

Определения классов RFE и Σ_1^1 имеют довольно много общего. Это подтверждает следующая

Теорема 3. *Классы отношений* RFE *и* Σ_1^1 *совпадают.*

Доказательство.

Включение RFE $\subseteq \Sigma_1^1$ почти очевидно: система уравнений языка FE, определяющая отношение на множестве $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_m)}$ представляет собой, безусловно, простейший тип рекурсивного отношения на множестве $P_N^{(n_1)} \times \ldots \times P_N^{(n_{m+l})} \times N^k$.

Обратно, чтобы установить включение $\Sigma_1^1 \subseteq$ RFE, обратимся к формализму Эрбрана–Гёделя и определим рекурсивное отношение R, входящее в формулу (1), с помощью системы равенств Ξ над множеством функций $\{0, x+1\}$, которое содержит «главные» функциональные переменные $\varphi_1^{(n_1)}, \ldots, \varphi_m^{(n_m)}$, «вспомогательные» функциональные переменные $\varphi_{m+1}^{(n_{m+1})}, \ldots, \varphi_{m+l}^{(n_{m+l})}$ и предметные переменные $x_1, \ldots, x_k$. Это можно сделать на основе теоремы 1, поскольку формализм Эрбрана–Гёделя позволяет, в частности, определять рекурсивные отношения рассматриваемого типа.

Теорема доказана.

Следствие 4. FE-*замыкание системы* $\{x+1\}$ *совпадает с классом* Σ_1^1.

Доказательство. Заметим, что константа 0 — это единственная константа, не входящая в множество значений функции $x+1$. Используя этот факт, определим константу 0 через функциональную константу $x+1$ с помощью следующей системы уравнений (она получается в качестве решения по функциональной переменной φ):

$$\varphi(x) = \varphi(y), \quad \varphi_1(x,x,y) = y, \quad \varphi_1(\varphi(x), x+1, y) = x+1.$$

Следствие доказано.

В следующей теореме посредством f^n обозначена n-кратная суперпозиция функции f.

Теорема 4. *Пусть* $a \in N$ *и* $f(x)$ *— такая функция из класса* Σ_1^1, *что* $\{f^n(a) : \ n = 1, 2, \ldots\} = N \setminus \{a\}$. *Тогда* FE-*замыкание множества* $\{a, f(x)\}$ *совпадает с классом* Σ_1^1.

Доказательство.

Поскольку $f \in \Sigma_1^1$, из теоремы 3 получаем, что $\mathrm{FE}[\{a, f\}] \subseteq \Sigma_1^1$.

В другую сторону: определим перестановку π на множестве N соотношениями $\pi(0) = a$ и $\pi(n) = f^n(a)$ при $n > 0$. Понятно, что перестановка π также принадлежит классу Σ_1^1. Функции 0 и $x+1$ являются сопряженными с функциями a и $f(x)$ относительно перестановки π. Поэтому в силу утверждения 1 FE-замыкание множества $\{a, f\}$ будет состоять из всех функций, которые сопряжены с функциями из класса Σ_1^1 относительно перестановки π. Однако перестановка π входит в класс Σ_1^1. Значит, класс Σ_1^1 переходит в себя при сопряжении с помощью перестановки π.

Теорема доказана.

Замечание 1. *По аналогии со следствием 4 из теоремы 3, в указанной системе можно оставить лишь функцию f, так как константа a* FE-*выразима через функцию f.*

Исходя из теорем 3 и 4, можно сделать некоторые выводы о выразительной способности оператора FE-замыкания: оператор FE-замыкания является очень «сильным» оператором замыкания, так как даже замыкание такого простого множества, как $\{x+1\}$ (и подобных ему множеств), совпадает с классом функций, лежащим далеко за пределами множества вычислимых функций. В частности, теорема 3 также показывает, что класс рекурсивных функций не является FE-замкнутым.

1.5 FE-замыкание множеств, содержащих характеристические функции

Характеристической функцией отношения $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ назовем функцию $\chi(x_1, \ldots, x_n)$, которая принимает лишь значения 0 и 1, причем значение 1 — только на наборах, удовлетворяющих отношению ρ. Характеристические функции отношений $x_1 = x_2$, $x_1 < x_2$, $x_1 \leq x_2$ обозначим соответственно $\chi_=$, $\chi_<$, $\chi_\leq$.

Далее в тексте рассматриваются вопросы о FE-замыкании систем, содержащих характеристические функции некоторых часто используемых бинарных отношений — отношений сравнения (равенства и неравенства).

Теорема 5. FE-*замыкание каждого из множеств функций $\{0, 1, \chi_<\}$, $\{0, 1, \chi_\leq\}$ совпадает с классом Σ^1_1.*

Доказательство.

Заметим, что ограничение на множество $\{0,1\}$ любой функции, удовлетворяющей системе уравнений

$$\varphi_1(0)=1, \quad \varphi_1(1)=0,$$

представляет собой булево отрицание. Поэтому, имея одну из функций $\chi_<$, $\chi_\leq$, мы можем получить и другую функцию.

Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_2(x,x,y)=x, \quad \varphi_2(x,y,x)=x, \quad \varphi_2(y,x,x)=x.$$

Каждая функция, удовлетворяющая данной системе уравнений, обладает «медианным» свойством: на любом наборе, содержащем не более двух различных значений, она принимает значение, которое встречается в наборе по крайней мере два раза. Теперь с использованием функциональной переменной φ_2 и функциональных констант $\chi_<$, $\chi_\leq$ выпишем два уравнения, которые определяют функцию $x+1$:

$$\chi_<(x,\varphi(x))=1, \quad \varphi_2(1,\chi_\leq(y,x),\chi_\leq(\varphi(x),y))=1.$$

Первое уравнение гарантирует, что $\varphi(x)>x$ для любых значений x, а второе — что не существует такого y, что $x<y<\varphi(x)$. Таким образом, мы имеем обе функции 0 и $x+1$. Далее применяем теорему 3.
Теорема доказана.

Следствие 5. FE-*замыкание каждого из множеств функций* $\{\chi_<\}$, $\{\chi_\leq\}$ *совпадает с классом* Σ_1^1.

Доказательство.

Имеем $\chi_<(x,x)=0$. Уравнение $\varphi_1(x)=\varphi_1(y)$ определяет множество всех функций-констант. Добавляя к этому уравнению еще два уравнения

$$\varphi_2(x,x,y)=x, \quad \varphi_2(0,\varphi_1(x),y)=y,$$

замечаем, что полученной системе по переменной φ_1 будут удовлетворяеть лишь все функции-константы, отличные от 0. Значит, $\chi_<(0, \varphi_1(x)) = 1$ и мы приходим к уже известной системе $\{0, 1, \chi_<\}$.

Подобным образом получаем $\chi_\leq(x, x) = 1$ и с помощью дополнительных двух уравнений определяем (по переменной φ_1) множество всех функций-констант, отличных от 1. Далее уравнение $\chi_\leq(1, \varphi_1(x)) = \varphi_1(x)$ выделяет из этого множества констант только одну константу 0.
Следствие доказано.

Замечание 2. *Данное следствие также остается верным для систем* $\{\chi_>\}$, $\{\chi_\geq\}$, *содержащих характеристические функции предикатов* $x_1 > x_2$ *и* $x_1 \geq x_2$ *соответственно.*

Теорема 6. FE-*замыкание множества функций* $\{0, 1, \chi_=\}$ *содержит класс* H *однородных функций, лежит внутри класса* Σ_1^1 *и не совпадает с* Σ_1^1.

Доказательство.

Вначале отметим тот факт, что согласно [18, 56] замыкание функции $p(x, y, z)$ по суперпозиции дает весь класс H однородных функций. А значит, согласно следствию из принципа сопряженности FE-замыкание функции $p(x, y, z)$ также совпадает с классом H.

Функции данной системы являются самосопряженными относительно любой перестановки, имеющей неподвижные точки 0 и 1. В силу принципа сопряженности этим свойством будут обладать все функции из FE-замыкания рассматриваемой системы. Отсюда вытекает справедливость второго утверждения теоремы.

Обратимся к первой части теоремы. Будем строить систему уравнений, определяющую тернарный дискриминатор p. Сначала выпишем уравнение, которое задает значения $p(x,x,z)$:

$$\varphi(x,x,z)=z. \tag{2}$$

Затем заметим, что второй пункт определения функции p можно изобразить логической формулой $(x\neq y)\to(p(x,y,z)=x)$. Эту же формулу можно представить иначе, если воспользоваться функцией $\chi_=$:

$$t(\chi_=(x,y),\chi_=(x,p(x,y,z)))=1,$$

где $t(u,v)$ — булева функция, которая принимает значение 1 только на наборе $(0,1)$. Однако булеву функцию t определяет система уравнений

$$\varphi_1(0,0)=0,\quad \varphi_1(0,1)=1,\quad \varphi_1(1,0)=0,\quad \varphi_1(1,1)=0. \tag{3}$$

Следовательно, функция p будет определяться системой уравнений, состоящей из уравнений (2),(3) и уравнения

$$\varphi_1(\chi_=(x,y),\chi_=(x,\varphi(x,y,z)))=1.$$

Третье утверждение теоремы (вложенность данного замыкания в класс Σ_1^1) следует из того, что функция $\chi_=$ FE-выразима через систему функций $\{\chi_<,0,1\}$ с помощью системы

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(\chi_<(x,y),\chi_<(y,x)),\quad \varphi_1(0,0)=1,$$

$$\varphi_1(0,1)=0,\quad \varphi_1(1,0)=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. FE-*замыкание множества функций* $\{0,1,\chi_=\}$ *совпадает с* FE-*замыканием множества* $\{\chi_=\}$.

Доказательство.

Константы 0 и 1 получаются подобно доказательству следствия 5 из теоремы 5. Имеем $\chi_=(x,x) = 1$. Уравнение $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$ определяет множество всех функций-констант. Добавляя к этому уравнению еще два уравнения

$$\varphi_2(x,x,y) = x, \quad \varphi_2(1,\varphi_1(x),y) = y,$$

замечаем, что полученной системе по переменной φ_1 будут удовлетворять лишь все функции-константы, отличные от 1. Значит, $\chi_=(1,\varphi_1(x)) = 0$ и мы приходим к уже известной системе $\{0,1,\chi_=\}$.
Замечание доказано.

Теорема 5 и ее следствия также наглядно демонстрируют большую выразительную способность оператора FE-замыкания. Из теоремы 6 вытекает, что класс функций, FE-порожденный системой $\{\chi_=\}$, существенно отличается от FE-замыканий других систем, рассмотренных в данном параграфе. Это в первую очередь связано с истинностью принципа сопряженности для оператора FE-замыкания, который, несмотря на большую выразительную способность данного оператора, накладывает существенные ограничения на FE-порождаемый класс функций.

1.6 Язык FE-замыкания с логическими связками

Расширим логические возможности языка FE: будем вносить в язык FE некоторое множество M логических связок. Полученный в результате язык обозначим через FE_M. Формулы языка FE_M образуем из элементарных формул (равенств термов) с помощью логических операций из множества M. Если множество M совпадает с полной системой логических связок $\&, \vee, \neg$, то полученный в результате язык обозначим через FEC.

В работе С.С. Марченкова (см. [22]) уже исследовался вопрос о расширении выразительной способности оператора FE-замыкания с помощью добавления в язык оператора полной системы логических связок (язык FEC). В работе [22] доказана теорема о том, что FEC замыкание пустого множества совпадает с FE замыканием системы с единственной функциональной константой — тернарным дискриминатором $p(x, y, z)$. В теореме 7 этот результат усиливается: оказывается, что можно отказаться от логической связки $\neg$ без потери силы выразительной способности. Также результат работы [22] обобщается на случай некоторых других логических связок.

Теорема 7. *Имеет место равенство* $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$.

Доказательство.

В работе [22] доказано, что $\mathrm{FE}[p]$ совпадает с $\mathrm{FE}_{\&\vee\neg}[\emptyset]$, а значит, $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\emptyset] \subseteq \mathrm{FE}[p]$. Для доказательства обратного включения выразим дискриминатор p следующей формулой языка $\mathrm{FE}_{\&\vee}$:

$$(\varphi(x, x, y) = y) \,\&\, ((x = y) \vee \varphi(x, y, z) = x).$$

Теорема доказана.

Следствие 6. *Имеют место равенства* $\mathrm{FE}_{\&\to}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$ *и* $\mathrm{FE}_{\&\sim}[\emptyset] = \mathrm{FE}[p]$.

Доказательство.

Первое равенство следует из того, что булева функция $x \to y$ порождает (в смысле операции суперпозиции) булеву функцию $x \vee y$, второе равенство — из того, что функции $x \,\&\, y$ и $x \sim y$ также порождают функцию $x \vee y$. Следствие доказано.

Теорема, сформулированная и доказанная ниже в тексте, приведена (скорее в качестве иллюстрации) для ознакомления с выразительными способностями оператора FE-замыкания с логическими связками.

Теорема 8. *Класс* $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\max(x,y)]$ *совпадает с классом* Σ^1_1 *аналитической иерархии Клини.*

Доказательство.

Согласно теореме 7, имеет место равенство $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\max] = \mathrm{FE}[\max, p]$. А так как все функции из множества $\{\max, p\}$ рекурсивны, то согласно теореме 3 класс $\mathrm{FE}[\max, p]$ целиком содержится в классе Σ^1_1.

Обратно, константа 0 получается в качестве решения системы уравнений

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(y), \quad \max(\varphi_0(x), x) = x.$$

Далее, поскольку $\mathrm{FE}[p] = \mathrm{FE}_{\&\vee\neg}[\emptyset]$, то $x+1$ получаем как единственную функцию, удовлетворяющую следующей формуле:

$$(\max(x,\varphi(x)) = \varphi(x)) \,\&\, (x \neq \varphi(x)) \,\&\, ((\max(x,y) = y) \,\&\, (x \neq y) \to$$

$$\to (\max(y,\varphi(x)) = y).$$

Таким образом, мы имеем обе функции 0 и $x+1$. Далее применяем теорему 3.

Теорема доказана.

Следствие 7. *Класс* $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\min(x,y)]$ *совпадает с классом* Σ^1_1*.*

Доказательство.

Рекурсивность функций min и p гарантирует включение класса $\mathrm{FE}_{\&\vee}[\min]$ в класс Σ^1_1. Обратно, функция max выражается формулой через функцию min:

$$(\varphi(x,y) = x \vee \varphi(x,y) = y) \,\&\, ((\varphi(x,y) = x) \sim (\min(x,y) = y)).$$

Следствие доказано.

Наряду с простым сравнением операторов FE-замыкания с логическими связками и без них, теорема 7 создает удобный аппарат для дальнейших исследований FE-замыканий (без логических связок) различных систем. А именно, при доказательстве утверждений удобно перейти к FE-замыканию с логическими связками и оперировать уже не функциональными уравнениями, а формулами. Таким образом, этот метод используется при доказательстве многих утверждений, сформулированных в данной работе, и в частности, при доказательстве теоремы 9.

Теорема 9. FE-*замыкание множества* $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$, *где* $a_1, \ldots, a_k$ *— константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками* $a_1, \ldots, a_k$.

Доказательство.

Рассмотрим $E_{a_1,\ldots,a_k}$ — класс всех функций, отвечающих группе $\Gamma_{a_1,\ldots,a_k}$. Согласно принципу сопряженности, класс $E_{a_1,\ldots,a_k}$ FE-замкнут, а FE-замыкание системы с функциональными константами из множества $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$ содержится внутри $E_{a_1,\ldots,a_k}$ (поскольку все функции множества $\{p(x,y,z), a_1, \ldots, a_k\}$ являются самосопряженными относительно всех перестановок группы $\Gamma_{a_1,\ldots,a_k}$).

Докажем обратное включение. Выберем в классе $E_{a_1,\ldots,a_k}$ произвольную функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из множества N^n. Если $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, то в силу включения $g \in E_{a_1,\ldots,a_k}$ для любой перестановки π из $\Gamma_{a_1,\ldots,a_k}$ должно выполняться равенство

$$g(\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Если же $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, то для некоторого i должно быть $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_i$. При этом, конечно, $g(\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)) = \pi(\alpha_i)$, если только $\pi \in \Gamma_{a_1,\ldots,a_k}$.

Согласно работе [22], язык функциональных уравнений с функциональной константой p эквивалентен по выразимости языку QFEC с полной системой логических связок и кванторами по предметным переменным. Аналогичное утверждение будет верно и при внесении в языки дополнительно функций-констант $a_1, \ldots, a_k$. С использованием полной системы логических связок можно построить логические формулы, которые однозначным образом распознают тип набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: определяют, есть ли в наборе элементы $a_1, \ldots, a_k$, в каких позициях они расположены, какие элементы набора равны между собой, а какие нет. Пусть

$$\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_l(x_1, \ldots, x_n)$$

— все такие логические формулы. К примеру, если переменные x_1, x_2 принимают равные значения, отличные от значений $a_1, \ldots, a_k$, переменные $x_2, \ldots, x_{n-2}$ — попарно различные значения, также отличные от значений $a_1, \ldots, a_k$, а переменные x_{n-1}, x_n — соответственно значения a_1, a_2, то некоторая формула Φ_i будет истинной на наборах данного типа и ложной на наборах всех остальных типов.

Как отмечено выше, на всех наборах одного и того же типа функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ либо совпадает с некоторой из констант $a_1, \ldots, a_k$, либо с некоторой переменной из числа $x_1, \ldots, x_n$. Для формулы Φ_i (и задаваемого ею типа наборов) обозначим через $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ соответствующую ей функцию (некоторые переменные здесь могут быть фиктивными). Тогда функцию g можно определить следующей формулой языка QFEC:

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, (\varphi(x_1, \ldots, x_n) = h_1(x_1, \ldots, x_n)) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \Phi_l(x_1,\ldots,x_n) \,\&\, (\varphi(x_1,\ldots,x_n) = h_l(x_1,\ldots,x_n))).$$

Поскольку каждая из функций $h_i(x_1,\ldots,x_n)$ либо является одной из констант $a_1,\ldots,a_k$, либо равна одной из переменных $x_1,\ldots,x_n$, получаем, что функция g принадлежит FE-замыканию множества $\{p, a_1,\ldots,a_k\}$.
Теорема доказана.

В пятом параграфе данной главы устанавливаются некоторые свойства класса, FE-порожденного системой $\{\chi_=\}$. В следствии 8, сформулированном ниже, даннный класс определяется точно.

Следствие 8. FE-*замыкание множества* $\{\chi_=\}$ *совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками* $0, 1$.

Доказательство.

Пусть класс E — класс всех функций, отвечающих группе $\Gamma_{0,1}$. Согласно принципу сопряженности, класс E FE-замкнут, а FE-замыкание системы с функциональной константой $\chi_=$ содержится внутри E (поскольку функция $\chi_=$ является самосопряженной относительно всех перестановок группы $\Gamma_{0,1}$).

Докажем обратное включение. Сначала с помощью функции $\chi_=$ получим константы 0,1 (в нижеследующей системе уравнений они отвечают функциональным переменным φ_0, φ_1):

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(y), \quad \varphi_1(x) = \chi_=(x,x), \quad \varphi(x,x,y) = x,$$

$$\varphi(\varphi_0(x), \varphi_1(x), y) = y, \quad \varphi_0(x) = \chi_=(\varphi_0(x), \varphi_1(x)).$$

Согласно теореме 6, FE-замыкание системы $\{\chi_=, 0, 1\}$ содержит все однородные функции, а значит, и функцию $p(x,y,z)$.
Следствие доказано.

Глава 2

Оценки числа FE-замкнутых и FE-предполных классов

В данной главе вводится понятие FE-предполного класса. В параграфе 2.1 доказано, что мощность семейства FE-замкнутых классов гиперконтинуальна. В параграфе 2.2 показано, как некоторые FE-замкнутые классы можно расширить до FE-предполных, и устанавлена нижняя оценка для числа FE-предполных классов.

Результаты первого параграфа опубликованы в работе [9], результаты второго параграфа — в работах [9, 11].

2.1 FE-замкнутые классы

Данный параграф посвящен оценке числа FE-замкнутых классов. В работе [17] доказано, что мощность множества замкнутых относительно суперпозиции (довольно «слабого» оператора замыкания в случае функций счетнозначной логики) классов функций гиперконтинуальна. Многие результаты первой главы иллюстрируют очень большую выразительную способность оператора FE-замыкания, однако, несмотря на это, мощность множества FE-замкнутых классов также оказывается гиперконтинуальной.

Для доказательста этого факта рассматриваются специальные структуры теоретико-множественного характера, на основе которых строятся особые классы фунций, обладающие необходимыми свойствами.

Пусть M есть произвольное подмножество из N. Обозначим через $C(M)$ множество всех функций f, которые являются самосопряженными относительно любых перестановок, тождественных на $N \setminus M$ и произвольных на M. Если F – некоторая совокупность подмножеств множества N, то пусть

$$C(F) = \bigcup_{M \in F} C(M).$$

Далее будем рассматривать не произвольные совокупности множеств, а только те, которые являются фильтрами. *Фильтром* (на N) назовем совокупность F подмножеств множества N, удовлетворяющую двум условиям:

1. Если $M_1, M_2 \in F$, то $M_1 \cap M_2 \in F$.

2. Если $M_1 \in F$ и $M_1 \subset M_2$, то $M_2 \in F$.

Утверждение 2. *Для любого фильтра F множество H однородных функций содержится в $C(F)$.*

Доказательство.

Согласно второму свойству фильтра множество N принадлежит фильтру F. Следовательно, класс $C(F)$ содержит все функции из $C(N)$. Однако $C(N)$ совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок на N, т.е. с классом H.
Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Для любого фильтра F класс $C(F)$ является* FE-*замкнутым классом.*

Доказательство.

Пусть функции $g_1, \dots, g_s$ принадлежат классу $C(F)$, а $M_1, \dots, M_s$ — такие множества из F, что $g_1 \in C(M_1), \dots, g_s \in C(M_s)$. Если $M = M_1 \cap \dots \cap M_s$, то согласно определению фильтра F получаем $M \in F$. Обозначим через $G_1, \dots, G_s, G$ группы перестановок, соответствующие множествам $M_1, \dots, M_s, M$ (в определениях множеств $C(M_1), \dots, C(M_s), C(M)$). Из определений следует, что группа G содержится в каждой из групп $G_1, \dots, G_s$. В свою очередь, из этого вытекает, что класс $C(M)$ целиком включает каждый из классов $C(M_1), \dots, C(M_1)$. Если теперь функция f определяется системой функциональных уравнений над множеством $\{g_1, \dots, g_s\}$, то функция f будет как минимум самосопряженной относительно любой перестановки из группы G. Поскольку $M \in F$, приходим к заключению, что $f \in C(F)$.
Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Для любого фильтра F, не содержащего одноэлементных множеств, множество $C(F)$ отлично от множества P_N.*

Доказательство.

Пусть $f \in C(F)$. Тогда для некоторого множества M из F имеем $f \in C(M)$. По условию, множество M содержит по крайней мере два элемента. Значит, функция f будет самосопряженной относительно группы перестановок, отличной от единичной группы. В частности, функция f не может совпадать с функцией $x + 1$.
Утверждение доказано.

Фильтр называется *главным*, если он состоит из всех надмножеств некоторого множества (случаи множеств $\emptyset$ и N не исключаются).

Утверждение 5. *Если F_1 и F_2 — два различных неглавных фильтра, то $C(F_1) \neq C(F_2)$.*

Доказательство.

Пусть, например, $M \in F_1$ и $M \notin F_2$. Фильтру F_2 не может принадлежать никакое подмножество множества M — в противном случае по свойствам фильтров в F_2 будет входить и множество M. Таким образом, всякое множество из F_2 пересекается с дополнением к множеству M.

Заметим, что множество $\bar{M}$ можно считать состоящим не менее чем из двух элементов. В самом деле, если $\bar{M}$ состоит только из одного элемента, то ввиду неглавности фильтра F_1, в F_1 должно входить еще хотя бы одно множество M_1, отличное от множеств M и N. Тогда множество $M \cap M_1$ входит в F_1, а дополнение к этому множеству содержит не менее двух элементов. Вместе с тем, как отмечалось, множество $M \cap M_1$ не может входить в фильтр F_2.

Определим в множестве $C(M)$ функцию $f(x)$. На множестве M зададим функцию f как тождественную функцию. Далее, если множество $\bar{M}$ бесконечно и $m_0, m_1, \ldots$ — его прямой пересчет (пересчет в порядке возрастания), то пусть для любого i выполняется $f(m_i) = m_{i+1}$. Если же множество $\bar{M}$ конечно, $\bar{M} = \{m_0, m_1, \ldots, m_l\}$, где $l \geq 1$, то пусть

$$f(m_0) = m_1, \quad f(m_1) = m_2, \quad \ldots, \; f(m_l) = m_0.$$

Тогда функция f не входит в множество $C(F_2)$. Действительно, пусть $M_2 \in F_2$. Тогда, как мы выяснили, $\bar{M} \cap M_2 \neq \emptyset$. Поскольку фильтр F_2 неглавный, множество M_2 обязано быть бесконечным. Поэтому любая функция $g(x)$ из $C(M_2)$ является тождественной на множестве M_2. Вместе с тем функция f переводит любой элемент из множества $\bar{M} \cap M_2$ в отличный от него элемент. Таким образом, функция f не может входить в множество $C(M_2)$.
Утверждение доказано.

Назовем *гиперконтинуальной* мощность множества всех подмножеств континуального множества.

Теорема 10. *Мощность семейства всех* FE*-замкнутых классов гиперконтинуальна.*

Доказательство:

В работе [17] установлено, в частности, что мощность множества всех фильтров на N гиперконтинуальна. Так как мощность множества главных фильтров континуальна, то мощность множества неглавных фильтров гиперконтинуальна. Согласно утверждениям 3–5 каждому из неглавных фильтров F соответствует FE-замкнутый класс $C(F)$, отличный от класса P_N. При этом разным неглавным фильтрам будут отвечать различные FE-замкнутые классы. Таким образом, множество всех FE-замкнутых классов имеет мощность не меньше гиперконтинуальной. Такая же оценка сверху следует из оценки мощности множества всех подмножеств континуального множества P_N.

Теорема доказана.

2.2 FE-предполные классы

В этом параграфе исследуются некоторые FE-предполные классы, полученные посредством расширения описанных в предыдущем параграфе FE-замкнутых классов. Также устанавливается нижняя оценка числа FE-предполных классов. Результаты настоящего параграфа позволяют сделать некоторые выводы о структуре FE-разбиения множества функций счетнозначной логики.

Класс функций Q назовем FE-*предполным*, если он FE-замкнут, отличен от P_N, и при добавлении любой функции из $P_N \setminus Q$ образует систему, FE-полную в классе P_N. В работе [5] для оператора суперпозиции была доказана лемма теоретико-множественного характера, которая оказалась верной для любого оператора замыкания, в том числе для оператора FE-замыкания.

Лемма 1. *Пусть Q — FE-замкнутый класс, отличный от P_N. Если существует конечное множество $\{f_1, \ldots, f_m\}$ функций, не принадлежащих классу Q, такое, что система $Q \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$ является FE-полной в классе P_N, то класс Q можно расширить до FE-предполного класса.*

Доказательство. Можно считать, что Q не является FE-предполным классом. Рассмотрим семейство $\{P\}$ всех тех подмножеств из P_N, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) $Q \cap P = \emptyset$,

2) $\mathrm{FE}[Q \cup P] \neq P_N$.

Поскольку Q не является предполным классом, семейство $\{P\}$ содержит хотя бы одно непустое множество. Будем предполагать, что семейство $\{P\}$ частично упорядочено отношением теоретико-множественного включения.

Возьмем произвольную цепь (т.е. линейно упорядоченное множество) δ в этом семействе. Согласно известной теореме Хаусдорфа [15] цепь δ можно включить в максимальную цепь δ^+, составленную из множеств этого семейства. Утверждается, что множество $Q' = \mathrm{FE}[Q \cup D']$, где

$$D' = \bigcup_{D \in \delta^+} D,$$

является FE-предполным классом.

В самом деле, предположим сначала, что множество Q' является FE-полным в P_N. Тогда должны существовать такие конечные множества $M_1, \ldots, M_m$, не пересекающиеся с Q, что $f_i \in \mathrm{FE}[Q \cup M_i]$ при $1 \leq i \leq m$. Пусть $M_1 \cup \ldots \cup M_m = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Возьмем множества $D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}$, принадлежащие цепи δ^+, которые удовлетворяют условиям $g_j \in \mathrm{FE}[Q \cup D_{i_j}]$

$(1 \le j \le n)$ (такие множества существуют, поскольку функции $g_1, \ldots, g_n$ не входят в класс Q, а множество Q' по предположению является FE-полным). Так как δ^+ — цепь, найдется такое q, что $D_{i_j} \subseteq D_{i_q}$ при любом $j = 1, \ldots, n$. Очевидно, что $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \mathrm{FE}[Q \cup D_{i_q}]$. Отсюда следует, что множество $Q \cup D_{i_q}$ FE-полно в P_N. Это противоречит условию 2).

Предположим теперь, что существует такая функция f из множества $P_N \setminus Q'$, которая вместе с множеством Q' не образует FE-полной системы в классе P_N. Легко видеть, что множество $D' \cup \{f\}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) а, кроме того, $D' \subset D' \cup \{f\}$ (включение строгое). Таким образом, цепь δ^+ можно расширить элементом $D' \cup \{f\}$, который больше всех элементов цепи δ^+. Это противоречит максимальности цепи δ^+. Итак, множество Q' действительно является предполным классом в P_N.

Лемма доказана.

Теорема 11. *Если фильтр F не содержит одноэлементных множеств, но содержит можество с бесконечным дополнением, то* FE-*замкнутый класс функций $C(F)$ можно расширить до* FE-*предполного класса.*

Доказательство.

Пусть в F входит множество M с бесконечным дополнением. Обозначим через $g_1(x)$ функцию, которая перечисляет множество $\bar{M}$ в порядке возрастания, а через $g_2(x)$ — какую-либо функцию, удовлетворяющую тождеству $g_2(g_1(x)) = x$. Заметим, что множество $C(M)$ содержит, например, все функции $g(x)$, которые тождественны на множестве M и произвольным образом отображают множество $\bar{M}$ в множество $\bar{M}$. Отсюда сразу следует, что для любой функции $f(x)$ из P_N найдется такая функция $g(x)$ из $C(M)$, что справедливо тождество $g_2(g(g_1(x))) = f(x)$. Если взять какую-либо инъективную функцию $c(x, y)$ (например, функцию $(x + y)^2 + x$), то система функций

$C(M) \cup \{g_1, g_2, c\}$ будет полной в классе P_N относительно одной лишь операции суперпозиции. Таким образом, добавление к классу $C(M)$ трех функций g_1, g_2, c приводит к системе, FE-полной в классе P_N. Далее применяем сформулированную выше лемму.

Теорема доказана.

Разобьем множество N на счетное число попарно не пересекающихся неупорядоченых пар (i_1, i_2). Пусть π — перестановка на N, которая переставляет местами элементы i_1 и i_2 каждой пары. Обозначим через Π множество всех таких перестановок π. Множество Π континуально по построению.

Обозначим через S_π класс всех функций, самосопряженных относительно перестановки π из Π .

Лемма 2. *Для любой перестановки* $\pi \in \Pi$ *класс* S_π *FE-предполон в* P_N.

Доказательство.

Согласно принципу сопряженности для FE-замыкания класс S_π является FE-замкнутым. Докажем теперь, что класс S_π FE-предполон в P_N.

Возьмем произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_N \backslash S_\pi$. Тогда существует такой набор $(a_1, \ldots, a_n)$, что

$$f(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)) \neq \pi(f(a_1, \ldots, a_n)).$$

Обозначим через Q класс функций, являющихся FE-замыканием системы $\{f(x_1, \ldots, x_n) \cup S_\pi\}$, и исследуем его.

Построим функцию $g(x)$ следующим образом: если $n = 1$, то пусть $g(x) = f(x)$, а если это не так, то выберем в классе S_π такие функции $g_2(x), \ldots, g_n(x)$, чтобы при любом j $(2 \leq j \leq n)$ выполнялись равенства

$$g_j(a_1) = a_j, \quad g_j(\pi(a_1)) = \pi(a_j).$$

Тогда $g(x) = f(x, g_2(x), \ldots, g_n(x))$. Из определения следует, что функция $g(x)$ принадлежит классу Q, но не входит в класс S_π.

Для функции g возможны два случая: либо $g(a_1) = g(\pi(a_1))$, либо найдутся такие неравные пары $(k_1, k_2), (l_1, l_2)$, что

$$g(a_1) \in \{k_1, k_2\}, \quad g(\pi(a_1)) \in \{l_1, l_2\},$$

т.е. значения $g(a_1)$ и $g(\pi(a_1))$ попадают в разные пары выбранного разбиения.

Построим функцию $q(x)$ следующим образом: если выполнен первый случай, то пусть $q(x) = g(x)$, иначе выберем в классе S_π такую функцию $h(x)$, чтобы выполнялись равенства

$$h(g(a_1)) = h(g(\pi(a_1))) = 0.$$

Тогда функция $q(x) = h(g(x))$ будет удовлетворять первому случаю и также принадлежать классу Q.

Используя функцию $q(x)$, образуем в классе Q константу $b = f(a_1)$. Для этого выберем в классе S_π такую функцию $d(x)$, чтобы каждая пара вида (i_1, i_2) отображалась функцией d в пару $(a_1, \pi(a_1))$. Тогда $q(d(x))$ есть искомая константа b.

Если теперь $r(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольная функция из класса P_N, то в классе S_π имеется такая функция $r'(y, x_1, \ldots, x_m)$, что справедливо тождество

$$r'(b, x_1, \ldots, x_m) = r(x_1, \ldots, x_m).$$

Значит, $r(x_1, \ldots, x_m) \in Q$ и поэтому класс Q совпадает с классом P_N. Иными словами, класс S_π является FE-предполным в P_N.

Лемма доказана.

Теорема 12. *Мощность семейства* FE-*предполных классов не менее чем континуальна.*

Доказательство.

Поскольку класс Π состоит из континуального числа перестановок, для доказательства теоремы достаточно установить, что для любых двух различных перестановок π_1 и π_2 из класса Π соответствующие им классы функций S_{π_1} и S_{π_2} различны.

Пусть пара (l_1, l_2) из разбиения перестановки π_1 не является парой разбиения перестановки π_2. Тогда найдутся такие различные числа m_1, m_2, что разбиению перестановки π_2 принадлежат различные пары (l_1, m_1) и (l_2, m_2). Возьмем в классе S_{π_1} функцию $f(x)$, которая переставляет элементы l_1, l_2 и тождественна на множестве $N \setminus \{l_1, l_2\}$. Покажем, что функция f не принадлежит классу S_{π_2}.

Предположим, что это не так. Тогда из определения функции f и самосопряженности ее относительно перестановки π_2 вытекают соотношения

$$f(\pi_2(l_1)) = \pi_2(l_2), \quad f(m_1) = m_2.$$

Последнее равенство невозможно, поскольку числа m_1, m_2 не принадлежат множеству $\{l_1, l_2\}$.

Теорема доказана.

Глава 3

Сложность проблемы выполнимости систем функциональных уравнений

В данной главе исследуется проблема выполнимости систем функциональных уравнений с функциональной константой $p(x, y, z)$. В работе [39] исследуется проблема выполнимости для систем функциональных уравнений булевых функций и устанавливаются весьма серьезные оценки сложности данной задачи, однако при этом для случая булевых функций проблема выполнимости не выходит за рамки разрешимости. Как показано в данной главе, в случае систем функциональных уравнений счетнозначной логики, проблема выполнимости оказывается неразрешимой.

В параграфе 3.1 доказывается алгоритмическая неразрешимость данной проблемы. В параграфе 3.2 устанавливается принадлежность этой проблемы классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского. Фактически результаты первого и второго параграфа данной главы дают точную оценку сложности данной проблемы. В параграфе 3.3 исследуются все решения таких систем функциональных уравнений — строится множество функций, включающее в себя все решения системы функциональных уравнений. Также все доказанные результаты обобщаются (и остаются верными) на случай системы $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные константы.

Описывается метод (сложности Π_1) поиска решений этих систем функциональных уравнений посредством построения дерева решений.

Результаты первого и второго параграфов опубликованы в работе [10], результаты третьего параграфа — в работе [12].

3.1 Неразрешимость проблемы выполнимости

Проблемой выполнимости для системы функциональных уравнений назовем проблему существования хотя бы одного решения для данной системы уравнений. В дальнейшем будем рассматривать только системы функциональных уравнений над множествами, содержащими функциональную константу $p(x, y, z)$. Неразрешимость проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений установим путем сведения к ней проблемы разрешимости для чистого исчисления предикатов (ЧИП) (см. [3]).

Алфавит чистого исчисления предикатов состоит из следующих символов:

- символы предметных переменных $x_1, x_2, \ldots$;
- символы предикатных переменных $Q_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$;
- пропозициональные связки $\&, \vee, \neg, \rightarrow$;
- кванторы общности $\forall$ и существования $\exists$;
- служебные символы (скобки, запятые).

Определим по индукции понятие формулы в языке ЧИП (см. [3]).

- Если $Q_i^{(n)}$ — n-местный предикатный символ и $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ — символы предметных переменных, то $Q_i^{(n)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ — формула.
- Пусть F_1, F_2 — формулы и x_j — символ предметной переменной, тогда $F_1 \& F_2$, $F_1 \vee F_2$, $\neg F_1$, $F_1 \rightarrow F_2$, $(\forall x_j)F_1$ и $(\exists x_j)F_1$ — формулы.

Теорема 13. *Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений с единственной функциональной константой $p(x, y, z)$ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство.

Воспользуемся тем, что язык QFEC по выразимости эквивалентен языку FE над системой с константой p. Вместо систем функциональных уравнений будем рассматривать в языке QFEC логические формулы, которые построены по обычным логическим правилам из элементарных формул — равенств термов. Выполнимость (замкнутой) формулы в языке QFEC понимается стандартным образом: как существование функций из P_N, которые после замены ими всех функциональных переменных рассматриваемой формулы обращают ее в истинное высказывание.

В работе [3] показано, как эффективно по произвольной (замкнутой) формуле языка QFEC построить эквивалентную ей по выполнимости систему функциональных уравнений над множеством $\{p\}$. В связи с этим в доказательстве данной теоремы мы будем рассматривать проблему выполнимости для замкнутых формул языка QFEC.

Нетрудно видеть, что формуле

$$(\forall x)(\forall y)((\varphi_0(x) = \varphi_0(y)) \mathbin{\&} (\varphi_1(x) = \varphi_1(y)) \mathbin{\&} (\varphi_0(x) \neq \varphi_1(x))) \tag{4}$$

по переменным φ_0, φ_1 удовлетворяют лишь любые две неравные друг другу константы (формулу $\neg(\varphi_0(x) = \varphi_1(x))$ мы записываем в виде $\varphi_0(x) \neq \varphi_1(x)$). Обозначим эти константы через v_0 и v_1 соответственно.

Далее v_0 и v_1 будут играть роль истинностных значений «ложь» и «истина». В связи с этим определим на множестве $\{v_0, v_1\}$ «логические связки» отрицание φ_2 и дизъюнкцию φ_3:

$$(\forall x)(\varphi_2(\varphi_0(x)) = \varphi_1(x) \mathbin{\&} \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_0(x)),$$

$$(\forall x)(\varphi_3(\varphi_0(x),\varphi_0(x))=\varphi_0(x)\,\&\,\varphi_3(\varphi_0(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)\&$$
$$\varphi_3(\varphi_1(x),\varphi_0(x))=\varphi_1(x)\,\&\,\varphi_3(\varphi_1(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)). \qquad (5)$$

Другие логические связки (в частности, конъюнкция) могут быть определены обычным образом через отрицание и дизъюнкцию.

Мы бы хотели в дальнейшем ограничиться рассмотрением функций, которые принимают лишь «значения» v_0 и v_1. С этой целью для всякой используемой функциональной переменной $\varphi_i^{(n)}$ будем конъюнктивно добавлять к рассматриваемым формулам формулу

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\varphi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n)=\varphi_0(x_1)\vee\varphi_i^{(n)}(x_1,\dots,x_n)=\varphi_1(x_1)). \qquad (6)$$

Понятно, что такие «ограниченные» функциональные переменные $\varphi_i^{(n)}$ можно считать n-местными предикатными переменными. В этой связи стоит заметить, что хотя формуле (4) удовлетворяют любые две неравные константы, однако если в рассматриваемой формуле Φ конъюнктивно присутствует только одна формула (4), а всякая используемая в формуле Φ функциональная переменная ограничена условием (5), то в формуле Φ значения v_0, v_1 можно считать фиксированными. Это позволяет «изобразить» в языке QFEC язык ЧИП.

В самом деле, пусть Γ — замкнутая формула ЧИП, содержащая только символы предикатных переменных $Q_1,\dots,Q_r$. Будем предполагать, что формула Γ находится в предваренной нормальной форме. Введем функциональные переменные $\psi_1,\dots,\psi_r$ от тех же предметных переменных, что и предикатные переменные $Q_1,\dots,Q_r$. Определяем аналог формулы Γ — формулу Φ': сначала заменяем в формуле Γ каждый символ Q_i соответствующим символом ψ_i, а затем с помощью функциональных переменных φ_2 и φ_3 последовательно исключаем из полученной формулы логические связки. Образуется терм T, который состоит только из символов предметных переменных и символов функциональных переменных $\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \ldots, \psi_r$. Теперь образуем из терма T формулу $(\exists x)(T = \varphi_1(x))$, где переменная x не входит в формулу Γ. Для получения формулы Φ' остается к последней формуле приписать кванторную приставку из формулы Γ.

Нетрудно видеть, что формула Φ' полностью «моделирует» формулу Γ, если только считать, что переменные $\psi_1, \ldots, \psi_r$ «принимают» лишь «значения» v_0, v_1, а переменные φ_2, φ_3 на множестве $\{v_0, v_1\}$ «изображают» отрицание и дизъюнкцию. Поэтому далее мы конъюнктивно добавляем к формуле Φ' формулы (4),(5) (считая, что переменные $\varphi_0 - \varphi_3$ отличны от переменных $\psi_1, \ldots, \psi_r$) и r формул вида (6) — по формуле на каждый функциональный символ ψ_i. Получаем формулу Φ языка QFEC.

Из проведенного построения сразу следует, что формула Γ выполнима на множестве N тогда и только тогда, когда на множестве N выполнима формула Φ. Однако, формула Γ выполнима (на непустом множестве) в том и только том случае, когда она выполнима на счетном множестве N. Таким образом, мы эффективно свели (на самом деле, m-свели, см. [38], глава 7) проблему выполнимости формул ЧИП к проблеме выполнимости формул языка QFEC. Хорошо известно, что множество выполнимых формул ЧИП неразрешимо (оно даже является m-полным множеством в классе Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского, см. [3,12]). Поэтому неразрешимым будет множество выполнимых формул языка QFEC и, вместе ним, множество выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p\}$.
Теорема доказана.

3.2 Проблема выполнимости и класс Π_1

Классом Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского (см. [37], глава 15) называется класс всех отношений, которые представимы в виде $(\forall x_1)\ldots(\forall x_m)R(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_l)$, где $R(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_l)$ — рекурсивное отношение.

Теорема 14. *Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x,y,z)\}$ принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.*

Доказательство.

Пусть Ξ — произвольная система функциональных уравнений над множеством $\{p\}$. По системе Ξ эффективным образом будем строить дерево Δ (вообще говоря, бесконечное), все вершины которого имеют конечную степень. В каждой вершине дерева Δ, за исключением его корня, для всякой функциональной переменной φ_i, входящей в систему Ξ, будут определяться в конечном числе точек значения соответствующей функции f_i. Некоторые ветви дерева Δ в процессе построения будут отсекаться (точнее, будут целиком отсекаться некоторые поддеревья, «растущие» из вершин дерева Δ). Мы покажем, что система уравнений Ξ выполнима тогда и только тогда, когда в данном дереве Δ имеется хотя бы одна бесконечная ветвь. Существование бесконечной ветви в дереве Δ будет выражено формулой класса Π_1.

Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — все предметные переменные, входящие в систему Ξ. Зафиксируем вычислимую «канторовскую» нумерацию множества N^n, в которой нулевой набор имеет номер 0, а далее номера присваиваются последовательно в «блоках», состоящих из всех наборов с заданной суммой координат (см., например, [16], глава 4). Набор с номером k в этой нумерации будем обозначать через $\mathbf{x}_k$. Отметим, что в наборе $\mathbf{x}_k$ все компоненты не превосходят величины k. Выделим в системе Ξ все вхождения функциональных переменных и обозначим их $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ (одна и та же функциональная переменная может входит в уравнения системы Ξ несколько раз).

Опишем первый шаг в построении дерева Δ — определение вершин первого яруса (вершины, связанные ребрами с корнем дерева). Рассмотрим набор $\mathbf{x}_0$ и придадим всем предметным переменным $x_1, \dots, x_n$ системы Ξ значение 0. Далее, каждому вхождению функциональной переменной в систему Ξ «придадим» одно из значений $0, 1, \dots, m$. Отметим, что при фиксировании набора $\mathbf{x}_0$ для «означивания» всех термов системы Ξ (включая термы вида $p(t_1, t_2, t_3)$) достаточно значений из множества $\{0, 1, \dots, m\}$.

Всего имеется $(m+1)^m$ таких присвоений, этим присвоениям будут отвечать в дереве Δ $(m+1)^m$ вершин первого яруса. Как видно, в результате одного присвоения каждая функция f_i (отвечающая функциональной переменной φ_i) будет определена в конечном числе точек. В самом деле, если в систему Ξ входит терм вида $\varphi_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$, то функция f_i будет определена на нулевом наборе. Если же в систему Ξ входит терм вида $\varphi_i(t_1, \dots, t_s)$, где $t_1, \dots, t_s$ — термы, и в результате присвоения термы $t_1, \dots, t_s$ получили значения $a_1, \dots, a_s$, то функция f_i получит значение на наборе $(a_1, \dots, a_s)$. (Мы не рассматриваем отдельно термы, которые начинаются символом функциональной константы p, поскольку вычисление значений таких термов проводится очевидным образом.)

При выполнении присвоений следует соблюдать следующее естественное условие: если для нескольких различных вхождений одной и той же функциональной переменной φ_i в результате присвоения определяются значения функции f_i на одном и том же наборе, то эти значения должны быть равны.

Для каждого присвоения проверяем, может ли оно обеспечить истинность всех равенств системы (напомним, что на первом шаге всем предметным переменным присвоено значение 0). Если возникло противоречие, то прекращаем дальнейшее построение дерева Δ из данной вершины. Если же противоречивых равенств из системы Ξ не получено, то фиксируем значения, присвоенные функциональным переменным на рассматриваемых наборах (т.е. фактически значения функций f_i), и переходим к построению вершин второго яруса.

Предположим, что мы уже определили все вершины k-го яруса дерева Δ (все те вершины, к которым в построенном фрагменте дерева Δ ведут из корня пути длины k). Будем также считать, что на всех вершинах дерева с 1-го по k-й ярусы в операциях присвоения были использованы числа только из множества $\{0, 1, \ldots, k(m+1)-1\}$. Кроме того, предполагаем, что в результате предыдущих присвоений в каждой из построенных вершин дерева Δ соответствующие функции f_i уже корректно определены на некоторых наборах из декартовых степеней множества $\{0, 1, \ldots, k(m+1)-1\}$.

На всех вершинах $(k+1)$-го яруса будем рассматривать набор $\mathbf{x}_k$, все компоненты которого не превосходят k. Выберем в k-м ярусе вершину v. Присвоим переменным $x_1, \ldots, x_n$ соответствующие значения из набора $\mathbf{x}_k$. Будем далее присваивать всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ функциональных переменных независимым образом всевозможные значения из множества $\{0, 1, \ldots, (k+1)(m+1)-1\}$. При этом присвоения должны быть корректными (см. шаг 1 в построения дерева Δ) и согласованными с уже имеющимися в вершине v значениями функций f_i. Образуется не более $(k+1)^m(m+1)^m$ вершин $(k+1)$-го яруса, которые будут соединены в дереве Δ ребрами с вершиной v. Как и на шаге 1, для всякого присвоения осуществляем проверку выполнимости всех равенств системы Ξ. В случае невыполнения какого-либо из равенств системы Ξ (с присвоенными значениями) обрываем построение дерева Δ в соответствующей вершине. В противном случае рассматриваем набор $\mathbf{x}_{k+1}$ и переходим к построению яруса $k+2$.

Нетрудно видеть, что процесс построения дерева Δ является полностью эффективным: существует алгоритм, который по «координате» произвольной вершины дерева Δ определяет, является ли данная вершина «концевой», а если нет, то вычисляет значения функций f_i во всех рассматриваемых точках.

Предположим теперь, что в дереве Δ имеется бесконечная ветвь B. Проходя по всем вершинам ветви B, мы сможем для любой функциональной переменной φ_i системы Ξ корректно определить значения соответствующей функции f_i на некотором множестве точек F_i. При этом, как легко понять, набор функций f_i будет удовлетворять системе уравнений Ξ. Единственная возникающая здесь проблема состоит в том, что множество F_i не обязано быть полным (т.е. совпадать с надлежащей декартовой степенью множества N). Иными словами, определяемые на ветви B функции f_i будут, вообще говоря, частичными. Эту проблему можно легко решить, если заметить, что полученная система функций f_i удовлетворяет системе уравнений Ξ при всех значениях предметных переменных. Это означает, в частности, что наборы, не входящие в множество F_i, в данном решении системы уравнений Ξ вообще не используются. Поэтому на них значения функции f_i можно определить произвольным образом.

Обратно, предположим, что система уравнений Ξ имеет решение. Покажем, что в этом случае в дереве Δ существует хотя бы одна бесконечная ветвь.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ — все функциональные переменные системы уравнений Ξ, а набор функций $(f_1, \ldots, f_l)$ из P_N удовлетворяет системе Ξ. Рассмотрим сначала нулевой набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если заменить в системе Ξ все предметные переменные значением 0 и затем рассматривать последовательно все термы системы Ξ, содержащие функциональные переменные, то с использованием функций $f_1, \ldots, f_l$ можно для всех вхождений

$\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ функциональных переменных в систему Ξ найти соответствующие значения $a_1, \ldots, a_m$ (это, разумеется, значения функций $f_1, \ldots, f_l$, вычисленные на тех наборах, которые имплицируются в системе Ξ равенствами $x_1 = \ldots = x_n = 0$). Отметим, что в последовательности $a_1, \ldots, a_m$ некоторые значения могут совпадать.

Заменим числа из последовательности $a_1, \ldots, a_m$ наименьшими числами из множества $\{0, 1, \ldots, m\}$ (с сохранением отношения равенства/неравенства между элементами последовательности $a_1, \ldots, a_m$), причем так, чтобы сохранить нулевые значения, если они имеются. Образуется набор $b_1, \ldots, b_m$. Этот набор вместе с нулевыми значениями всех предметных переменных будет удовлетворять системе Ξ, поскольку при определении истинностных значений равенств системы Ξ важны лишь соотношения равенства/неравенства между значениями термов, входящих в Ξ (учитываем также аналогичное свойство тернарного дискриминатора p). Таким образом, на первом шаге построения дерева Δ на одной из вершин первого яруса всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ будут присвоены соответственно значения $b_1, \ldots, b_m$.

Далее продолжаем по индукции. Предположим, что для числа k имеется вершина v дерева Δ, расположенная в $(k+1)$-м ярусе дерева, которая удовлетворяют следующим условиям. Для любого набора $\mathbf{x}_j$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$ в вершине v всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ присвоены значения $b_1, \ldots, b_m$, которые принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, (j+1)(m+1)-1\}$, и которые отвечают набору $\mathbf{x}_j$ согласно алгоритму построения дерева Δ. Кроме того, если на основе функций $(f_1, \ldots, f_l)$ для набора $\mathbf{x}_j$ вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ приписаны значения $a_1, \ldots, a_m$, то отношения равенства/неравенства между элементами наборов $\mathbf{x}_j$ и $(a_1, \ldots, a_m)$ с одной стороны и элементами наборов $\mathbf{x}_j$ и $(b_1, \ldots, b_m)$ с другой стороны идентичны.

Пусть теперь для функций $(f_1, \ldots, f_l)$ и набора $\mathbf{x}_{k+1}$ вхождениям

$\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ отвечают значения $a'_1, \ldots, a'_m$. Заметим, что в соответствии с принятой нумерацией наборов из множества N^n набор $\mathbf{x}_{k+1}$ может содержать максимум одно значение, не входящее в наборы $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$. Поэтому в наборах $\mathbf{x}_{k+1}$ и $(a'_1, \ldots, a'_m)$ может быть максимум $m+1$ значений, которые не содержатся в наборах $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$ и отвечающих им наборах $(a_1, \ldots, a_m)$. Это позволяет согласно алгоритму построения дерева Δ найти в $(k+2)$-м ярусе дерева Δ вершину v' (соединенную ребром с вершиной v), которой, в частности, будут приписаны значения $b'_1, \ldots, b'_m$ из множества $\{0, 1, \ldots, (k+2)(m+1)-1\}$. Кроме того, значения $b'_1, \ldots, b'_m$ будут находиться в том же отношении равенства/неравенства с остальными значениями, приписанными вершине v', как и значения $a'_1, \ldots, a'_m$ с остальными значениями a_i, отвечающими функциям $(f_1, \ldots, f_l)$ и наборам $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Из проведенных рассуждений следует, что если система уравнений Ξ имеет решение, то в дереве Δ существует бесконечная ветвь.

Теперь формально опишем условие существования бесконечной ветви в дереве Δ. Нетрудно заметить, что бесконечная ветвь в дереве Δ существует в том и только том случае, когда для всякого k в дереве Δ имеется хотя бы одна вершина k-го яруса. В связи с этим вводим предикат $R(k)$, истинный тогда и только тогда, когда k-й ярус дерева Δ содержит хотя бы одну вершину. Поскольку построение дерева Δ проводится полностью эффективно, предикат R будет рекурсивным. Отсюда немедленно следует, что проблема существования бесконечной ветви в дереве Δ выражается формулой $(\forall k)R(k)$. Остается заметить, что как дерево Δ, так и предикат R определяются по системе функциональных уравнений Ξ эффективно, что полностью подходит под определение класса Π_1.

Теорема доказана.

Множество A m-сводится к множеству B, если существует такая общерекурсивная функция $f(x)$, что произвольное x принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда $f(x)$ принадлежит множеству B. Множество называется m-полным в классе K, если к нему m-сводимо любое множество из класса K (см. [37], глава 7).

Следствие 9. *Множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z)\}$ является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.*

Доказательство.

Необходимо заметить, что множество всех общезначимых формул ЧИП является m-полным множеством (m-полным в классе Σ_1). Отсюда следует, что множество всех формул, выполнимых на N, есть m-полное множество в классе Π_1.

Следствие доказано.

Следствие 10. *Множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$— константы, является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.*

Доказательство.

Неразрешимость проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$ следует, согласно теореме 13, из неразрешимости этой проблемы над множеством $\{p(x, y, z)\}$. Докажем теперь принадлежность этой проблемы классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.

Пусть Ξ — произвольная система функциональных уравнений над множеством $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$. Отметим, что согласно принципу сопряженности для оператора FE-замыкания, множество решений данной функциональной системы замкнуто относительно перехода $f \to f^{\pi}$, где π — произвольная перестановка с неподвижными точками $a_1, \ldots, a_k$.

Аналогично теореме 14 по системе Ξ эффективным образом будем строить бесконечное дерево Δ, все вершины которого имеют конечную степень. Повторим построение дерева из теоремы 14, модифицируя некоторые моменты.

На первом шаге в построении дерева Δ, как и ренее, рассмотрим набор $\mathbf{x}_0$ и придадим всем предметным переменным $x_1, \ldots, x_n$ системы Ξ значение 0. Далее, каждому вхождению функциональной переменной в систему Ξ придадим одно из значений $0, 1, \ldots, m$ или значение из множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Отметим, что при фиксировании набора $\mathbf{x}_0$ для «означивания» всех термов системы Ξ (включая термы вида $p(t_1, t_2, t_3)$) достаточно значений из множества $\{0, 1, \ldots, m, a_1, \ldots, a_k\}$.

Всего имеется конечное число таких присвоений и, как и ранее, этим присвоениям будет отвечать в дереве Δ также конечное число вершин первого яруса. На вершинах последующих ярусов будем присваивать всем вхождениям $\varphi^1, \ldots, \varphi^m$ функциональных переменных независимым образом всевозможные значения из множества, определенного в теореме 14, а также значения из множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$. В остальном целиком повторяем алгоритм построения дерева Δ из теоремы 14. Нетрудно заметить, что такие модификации не влияют на эффективность процесса построения дерева Δ.

Итак, можно утверждать, что полученная в результате подобных построений система функций будет являться решением системы Ξ, а также то, что в случае существования решения $\{f_1, \ldots, f_m\}$ системы Ξ в дереве Δ на некоторой бесконечной ветви будет получено множество $\{f'_1, \ldots, f'_m\}$, также являющееся решением системы Ξ. Чтобы в этом убедиться, необходимо просто повторить соответствующую часть доказательства теоремы 14, заменяя произвольную перестановку на перестановку с неподвижными точками

$a_1, \ldots, a_k$. Тем самым мы показали, что, модифицируя построение дерева Δ из теоремы 14 указанным образом для случая систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, мы получим метод того же порядка сложности, что и метод построения дерева Δ из теоремы 14. Тем самым получаем, что множество всех выполнимых систем функциональных уравнений над $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$ также является m-полным множеством в классе Π_1 иерархии Клини-Мостовского.
Следствие доказано.

3.3 Все решения системы функциональных уравнений

Проанализируем доказательство теоремы 14. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — все функциональные переменные системы уравнений Ξ. И пусть B — бесконечная ветвь в дереве Δ, которая определяет решение $(f_1, \ldots, f_r)$ (вообще говоря, частичное) системы уравнений Ξ. При построении дерева Δ некоторым термам вида $\varphi_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$, где $a_1, \ldots, a_{n_i} \in N$, присваиваются значения из N. Для каждой переменной φ_i выделим все те наборы $\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \ldots$, на которых термам $\varphi_i(\mathbf{a}_{ij})$ будут присвоены значения из N. Это множество, вообще говоря, не совпадает с множеством всех наборов из N^{n_i}.

Отметим следующее обстоятельство: поскольку система Ξ состоит только из равенств термов, при получении решения $(f_1, \ldots, f_r)$ важными являются не сами значения функций f_i на наборах вида $\mathbf{a}_{ij}$, а лишь соотношения равенства/неравенства между значениями функций на этих наборах и значениями термов-переменных и термов, начинающихся символами функциональных констант. Иными словами, если при определении решения $(f_1, \ldots, f_r)$ мы изменим значения функций на упомянутых наборах, но сохраним отношения равенства/неравенства между перечисленными значениями термов, то вновь получим решение системы уравнений Ξ. Фактически именно это преобразование мы проделали во второй части доказательства теоремы 14.

Мы хотим далее сосредоточиться только на значениях термов вида $\varphi_i(\mathbf{a}_{ij})$. Для этого зафиксируем нумерацию (с основанием N) всех пар термов вида

$$(\varphi_i(\mathbf{a}_{ij}), \varphi_l(\mathbf{a}_{lm})), \tag{7}$$

где при $i = l$ должно быть $j \neq m$. Обозначим через $\beta = \beta_0\beta_1\dots$ двоичную последовательность, в которой $\beta_t = 1$ в том и только том случае, когда в паре термов (7) с номером t значения термов совпадают. Пусть F_β обозначает множество всех наборов функций $(g_1, \dots, g_r)$, где функции g_i и f_i зависят от одного и того же числа переменных, $1 \leq i \leq r$ и двоичная последовательность, построенная для набора функций $(g_1, \dots, g_r)$, совпадает с последовательностью β. Очевидно, что набор функций $(f_1, \dots, f_r)$ принадлежит множеству F_β, и этому множеству принадлежат все решения системы Ξ, «подобные» решению $(f_1, \dots, f_r)$. Множество F_β мы рассматриваем как «накрывающее» множество для всех решений системы Ξ, «подобных» решению $(f_1, \dots, f_r)$ (и определяемых бесконечной ветвью B).

Проведенные выше рассуждения приводят к следующему утверждению - следствию из теоремы 14.

Следствие 11. *Множество всех решений ситемы функциональных уравнений над $\{p(x, y, z)\}$ содержится внутри объединения всех множеств F_β, где последовательности β построены для различных бесконечных ветвей дерева Δ.*

Заключение

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказано, что для всякого общерекурсивного оператора $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ найдется такая система уравнений (в формализме FE) с функциональными константами $0, x+1$ и $f_1, \ldots, f_m$, которая для любого выбора функциональных констант $f_1, \ldots, f_m$ определяет (по своей главной функциональной переменной) функцию $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$.

2. Доказано, что FE-замыкание систем, подобных системе $\{0, x + 1\}$, а также каждой из систем $\{\chi_<\}$, $\{\chi_\leq\}$, $\{\chi_>\}$, $\{\chi_\geq\}$, совпадает с классом Σ^1_1 аналитической иерархии Клини.

3. Доказано, что проблема выполнимости для систем функциональных уравнений над множествами $\{p(x, y, z)\}$ и $\{p(x, y, z), a_1, \ldots, a_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — константы, алгоритмически неразрешима и принадлежит классу Π_1 арифметической иерархии Клини-Мостовского.

4. Доказано, что мощность семейства всех FE-замкнутых классов гиперконтинуальна, а семейства всех FE-предполных классов — не менее чем континуальна.

Дальнейшие исследования могут быть продолжены по трем основным направлениям: изучение FE-замыканий множеств функций, отличных от рассмотренных, а также их обобщений; исследование фрагментов решетки замкнутых классов, порожденных оператором FE-замыкания; определение сложности проблемы выполнимости для систем, отличных от рассмотренных.

Особенно интересны вопросы о расположении класса H однородных функций в решетке замкнутых классов, порожденных оператором FE-замыкания, об обобщении результатов, полученных для рассмотренных характеристических функций предикатов сравнения, на случай характеристических функций произвольных отношений эквивалентности и отношений частичного порядка, об обобщении выводов о сложности задачи выполнимости для систем функциональных уравнений в зависимости от множества заданных функциональных констант.

Список литературы

[1] Акулов Я. В. О полноте систем функций для классов расшиненной суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2011. № 1. 36–41.

[2] Барздинь Я.М., Трахтенброт Б.А. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970. С. 13–24.

[3] Верещагин Н. К., Шень А. Языки и исчисления М.: МЦНМО, 2012. С. 178–195.

[4] Волков С. А. Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 4. С. 61–78.

[5] Гаврилов Г.П. О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 1965. С. 5–64.

[6] Гаврилов Г.П. Мощность множества классов конечной высоты в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 29. М.: Наука, 1974. С. 5–26.

[7] Гжегорчик А. Некоторые классы рекурсивных функций // Проблемы математической логики. М.: Мир. 1970. С. 9–49.

[8] Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397-416.

[9] Калинина И.С. О действии оператора FE-замыкания на множестве функций счетнозначной логики // Вестник Московского ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и кибернет. 2014. № 3. С. 46-51.

[10] Калинина И.С., Марченков С.С. О сложности проблемы выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 8. С. 25-32.

[11] Калинина И.С. О некоторых свойствах оператора FE-замыкания в счетнозначной логике // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Вып. 4, 2014. С. 37-46.

[12] Калинина И. С. Проблема выполнимости для систем функциональных уравнений счетнозначной логики // Тезисы докладов научной конференции «Тихоновские чтения». М: МАКС ПРЕСС, 2014, С. 45-46.

[13] Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. С. 195–220, 234–274.

[14] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1986. С. 151–164, 253–264.

[15] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. С. 28–32.

[16] Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986. 367 с.

[17] Марченков С.С. О мощности множества предполных классов в некоторых классах функций счетнозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 109–116.

[18] Марченков С.С. Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 85–106.

[19] Марченков С.С. Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 4. С. 18–31.

[20] Марченков С.С. О классификациях функций многозначной логики с помощью групп автоморфизмов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 4. С. 66–76.

[21] Марченков С.С. О решениях систем функциональных уравнений автоматного типа // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 86–98.

[22] Марченков С.С. Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 4. С. 13–23.

[23] Марченков С.С. О функциональных уравнениях для функций действительных переменных // Вестник Московского ун-та. Серия 15. Вычислит. матем. и кибернет. 2014. № 1. С. 26–32.

[24] Марченков С. С. Операторы замыкания логико-функционального типа. М.: МАКС ПРЕСС. 2012. С. 66–75.

[25] Марченков С. С. Основы теории булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2014. С. 92–110.

[26] Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминатроных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. 1997. Т. 61. № 3. С. 359–366.

[27] Марченков С. С. Критерий позитивной полноты в трехзначной логике // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 27–39.

[28] Марченков С. С. Элементарные рекурсивные функции. М.: МЦНМО. 2003. С. 50–71, 78-82.

[29] Марченков С.С. FE-классификация функций многозначной логики // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2011. № 2. С. 32–39.

[30] Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, № 4. С. 110-126.

[31] Марченков С. С., Калинина И. С. Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет. 2013. № 3. С. 42–47.

[32] Марченков С. С., Федорова В. С. О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 6. С. 48–57.

[33] Марченков С. С., Федорова В. С. О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Доклады РАН. 2009. Т. 426, № 4. С. 448–449.

[34] Марченков С. С., Федорова В. С. Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестник. Московского ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2009. № 4. С. 29–33.

[35] Михайлец Е. В. О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2008. № 2. С. 65–70.

[36] Нечаев А. А. Критерий полноты системы функций p^n-значной логики, содержащий операции сложения и умножения по модулю p^n // Методы

дискретного анализа в решении комбинаторных задач. 1980. Вып. 34. С. 74–89.

[37] Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972. 624 с.

[38] Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. 2004. Вып. 13. С. 59–112.

[39] Федорова В.С. О сложности проблемы выполнимости системы функциональных булевых уравнений // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 3. С. 84–100.

[40] Яблонский С.В. О предельных логиках // Доклады АН СССР. 1958. Т. 118, № 4. С. 657–660.

[41] Яблонский С.В. О некоторых свойствах счетных замкнутых классов из $P_{\aleph_0}$ // Доклады АН СССР. 1958. Т. 124, № 5. С. 990–993.

[42] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. С. 14–32.

[43] Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.

[44] Ackermann W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen // Math. Annalen. 1928. V. 99. S. 118–133.

[45] Ekin O., Foldes S., Hammer P. L., Hellerstein L. Equational characterizations of Boolean function classes // Discrete Math. 2000. V. 211. P. 27–51.

[46] Foldes S. Equational classes of Boolean functions via the HSP Theorem // Algebra Univers. 2000. V. 44. P. 309–324.

[47] Hellerstein L. Ongeneralized constraints and certificates // Rutcor Reserch Report 26 98. Rutcor, Rutgers University, 1999. P. 1–53.

[48] Herbrand J. Sur le probléme fondamental de la logique mathématique // Compt. rend. Soc. Sci. Lettr. Vars. Classe III. 1931. V. 24. P. 12–56.

[49] Herbrand J. Sur la non-contradiction de l'arithmétique // J. reine und angew. Math. 1931. Bd. 166. P. 1–6.

[50] Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I // Monatsh. Math. und Phys. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

[51] Kalmar L. Ein einfaches Beispiel fur unentscheibares Problem // Matematikai e s fizikai lapok. 1943. B. 50. S. 1–23.

[52] Kleene S. The theory of recursive functions, approaching its centennial // Bulletin of the American Mathematical Society. 1981. V. 5, № 1. P. 43-61.

[53] Marczewski E. Homogeneous operations and homogeneous algebras // Fund. Math. 1964. V. 56, № 1. P. 81–103.

[54] Peter R. Uber die mehrfache Rekursion // Mathematische Annalen. Vol. 113. Ger., 1937. S. 489-527.

[55] Pippenger N. Galois theory for minors of finite functions // Discrete Math. 2002. V. 254. P. 405–419.

[56] Pixley A.F. The ternary discriminator function in universal algebra // Math. Ann. 1971. Bd. 191, P. 167–180.

[57] Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. V. 43. № 3. P. 163–185.

[58] Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton-London: Princeton Univ. Press. 1941. V. 5. P. 122.

[59] Rosenberg I. G. Minimal clones I: The five types // Lectures in Universal Algebra (Proc. Conf. Szeged 1983). 1986. V. 43. P. 405–427.

[60] Skolem Th. Proof of some theorems on recursively enumerable sets // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1962. V. 3, N 2. P. 65–74.