

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Казанцев Александр Евгеньевич

Многопетлевые вычисления и точные результаты в $\mathcal{N} = 1$
суперсимметричных теориях

01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Пронин Петр Иванович

Содержание

Введение	4
Глава 1. Функция Адлера $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД	10
1.1. Точная формула для D -функции	10
1.2. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД: действие, регуляризация и перенормировка	15
1.3. Трехпетлевая D -функция Адлера	19
1.4. Двухпетлевая аномальная размерность суперполей материи	22
1.5. НШВЗ-подобная схема вычитаний	25
1.6. НШВЗ-подобная схема в трехпетлевом приближении	27
1.7. Заключение к главе	31
Глава 2. Вклад в β-функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, от диаграмм, содержащих две юкавские вершины, в трехпетлевом приближении	33
2.1. Новая форма НШВЗ-соотношения	33
2.2. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, ее квантование и регуляризация	37
2.3. Вклад в β -функцию	43
2.4. Вычисление аномальных размерностей	48
2.5. НШВЗ-схема вычитаний	55
2.6. Заключение к главе	60
Глава 3. Калибровочная зависимость однопетлевого поляризаационного оператора квантового калибровочного суперполя	61
3.1. Описание теории и квантования	61
3.2. Поляризаационный оператор квантового калибровочного суперполя в однопетлевом приближении	63
3.3. Заключение к главе	69
Глава 4. Двойные полные производные в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике	71
4.1. Двойные полные производные из тождества для функций Грина	71

4.2. Действие $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами и ее регуляризация	72
4.3. Проверка тождества между двухточечными функциями Грина в трехпетлевом приближении	77
4.4. Заключение к главе	88
Заключение	89
Приложение А. Супердиаграммы, дающие вклад в D -функцию Адлера . .	92
Приложение Б. Суперграфы, дающие вклад в двухточечную функцию Грина на суперполях материи	94
Приложение В. Вычисление интегралов	96
Приложение Г. Супердиаграммы, дающие вклад в аномальные размерности квантового калибровочного суперполя и киральных суперполей материи . .	99
Приложение Д. Детали вычисления аномальной размерности материи . .	101
Литература	107

Введение

Актуальность работы.

Суперсимметричные калибровочные теории являются одним из наиболее вероятных возможных обобщений Стандартной модели. Поэтому исследование квантовых свойств суперсимметричных теорий приобретает особую актуальность. Известно, что на квантовом уровне суперсимметричные теории обладают рядом очень интересных особенностей, например, в них существуют так называемые теоремы о перенормировке. (Назовем самые известные: $\mathcal{N} = 1$ суперпотенциал не получает бесконечных квантовых поправок [1], $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса получает расходящиеся квантовые поправки лишь в однопетлевом приближении [2], а $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса конечна [3, 4].) Но даже там, где суперсимметрия не приводит к сокращению расходимостей, она приводит к тому, что расходимости разного рода оказываются связанными друг с другом. Здесь необходимо упомянуть точную β -функцию Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (НШВЗ)[5–8], которая связывает β -функцию калибровочной константы связи с аномальной размерностью суперполей материи в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, а также некоторые другие аналогичные соотношения (см., например, результат для точной перенормировки массы калибрино в работе [9]). Однако пока неясно, в какой регуляризации и в какой схеме вычитаний эти соотношения справедливы, поэтому их точный смысл пока не определен до конца. В настоящее время самой распространенной и разработанной техникой вычислений по теории возмущений является размерная редукция [10], дополненная (модифицированными) минимальными вычитаниями, но в ней соотношение для НШВЗ β -функции не воспроизводится [11]. Хотя при этом и удалось в четырехпетлевом приближении найти связь между схемой минимальных вычитаний и схемой, в которой НШВЗ соотношение справедливо [12, 13], общего предписания для получения последней в размерной редукции до сих пор нет. При этом некоторые надежды подают вычисления с использованием регуляризации высшими ковариантными производными. С использованием такой регуляризации удалось во всех порядках теории возмущений строго показать, как возникает НШВЗ соотношение в абелевом случае [14, 15] для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи, и сформулировать перенормировочное предписание [16] для схемы, в которой оно выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи. Случай общей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса остается в этом смысле пока не исследованным, однако

есть основания полагать, что метод высших ковариантных производных и здесь позволит связать точные соотношения и результаты, даваемые теорией возмущений.

Цели и задачи диссертации.

Целью работы является выявление связи между некоторыми точными соотношениями и входящими туда величинами и результатами явных вычислений по теории возмущений в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Вычисление ренормгрупповых функций $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса с применением регуляризации высшими ковариантными производными до порядка, в котором проявляется их схемная зависимость.
2. Проверка справедливости некоторых предложенных точных соотношений между ними, сформулированных в терминах голых констант связи.
3. Поиск схемы вычитаний, в которой предложенные точные соотношения справедливы для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи.
4. Попутная проверка гипотезы о структуре вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных неабелевых калибровочных теорий, а именно того, что они даются интегралами от двойных полных производных в импульсном пространстве (при использовании регуляризации высшими производными).
5. Исследование калибровочной зависимости вычисляемых ренормгрупповых функций.

Научная новизна.

В ходе исследований были использованы новые методы и получены некоторые новые результаты, относящиеся к вычислениям по теории возмущений в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях.

1. Впервые удалось простым и естественным образом получить НШВЗ и НШВЗ-подобные соотношения в неабелевых теориях в тех порядках теории возмущений, где существенна схемная зависимость.
2. Впервые для многопетлевых вычислений по теории возмущений в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях была применена регуляризация высшими производными, сохраняющая БРСТ-инвариантность.

3. Был получен трехпетлевой вклад в D -функцию Адлера $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД и исследована его схемная зависимость. Проверена связь трехпетлевой D -функции и двухпетлевой аномальной размерности суперполей материи.
4. С использованием БРСТ-инвариантной регуляризации высшими производными были получены трехпетлевые вклады в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, квадратичные по юкавским константам, и соответствующие им вклады в аномальные размерности квантовых суперполей.
5. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, была исследована факторизация вкладов, дающих β -функцию в трехпетлевом приближении, в интегралы от двойных полных производных.
6. На однопетлевом уровне исследована калибровочная зависимость поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной БРСТ-инвариантной версией регуляризации высшими производными.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты для D -функции Адлера могут быть использованы при сравнении феноменологических следствий суперсимметрии с экспериментальными данными, в частности, при анализе вкладов суперсимметричных частиц в аномальный магнитный момент мюона. Результаты, касающиеся β -функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса являются нетривиальной проверкой общего утверждения, связывающего β -функцию этой теории и аномальные размерности всех квантовых суперполей, пока строго не доказанного [17]. Результаты, полученные при исследовании калибровочной зависимости поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя, стали отправной точкой для более общей теоремы о неперенормировке вершин с одной внешней линией квантового калибровочного суперполя и двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова [17]. При этом в работе используется метод регуляризации высшими ковариантными производными, который находит здесь свое применение не в теоретических построениях, а в явных трехпетлевых вычислениях по теории возмущений. Тем самым данная работа вносит вклад в развитие методов квантовой теории поля в общем и в исследование структуры суперсимметричных теорий на квантовом уровне в частности.

Достоверность и обоснованность результатов.

Работа находится в строгом соответствии с применяемой практикой вычислений по теории возмущений в квантовой теории поля и опирается на хорошо разработанную теорию перенормировок и теорему о перенормируемости суперсимметричных калибровочных теорий. Полученные результаты находятся в соответствии с общими утверждениями, доказанными для суперсимметричных калибровочных теорий, включающими теоремы о неперенормировке и точные соотношения для ренормгрупповых функций.

Положения, выносимые на защиту.

1. В трехпетлевом приближении вычислена D -функция Адлера $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД, регуляризованной высшими ковариантными производными, для нее проверено точное соотношение, связывающее ее с аномальной размерностью суперполей материи в случае, когда обе ренормгрупповые функции определены в терминах голой константы связи; найдено перенормировочное предписание, фиксирующее схему вычитаний, в которой точное соотношение для D -функции выполняется на перенормированном языке (НШВЗ-схему).
2. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с материей, регуляризованной высшими ковариантными производными, вычислены вклады в β -функцию, квадратичные по юкавскому взаимодействию, для них проверено предполагаемое точное соотношение, сформулированное на языке голых констант связи, связывающее их с вкладами в аномальные размерности суперполей теории; в этом случае проверено предложенное перенормировочное предписание, фиксирующее НШВЗ-схему.
3. В однопетлевом приближении получено явное выражение для калибровочно-зависимой части поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в случае использования БРСТ-инвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными.
4. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД, регуляризованной высшими производными, в трехпетлевом приближении проверено доказанное во всех порядках утверждение о факторизации вкладов в β -функцию в интегралы от двойных полных производных по петлевому импульсу; получены явные выражения для этих интегралов.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях.

1. International Workshop “Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS’2017”, ОИЯИ, Дубна, 31 июля – 5 августа 2017;
2. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2017», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10–14 апреля 2017;
3. International conference “Quantum Field Theory and Gravity (QFTG’2016)”, Томский государственный педагогический университет, Россия, 1–7 августа 2016;
4. XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2016», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11–15 апреля 2016;
5. 17-я Международная Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 20–26 августа 2015.

Результаты работы также были доложены 14 февраля 2018 г. на семинаре отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова.

Публикации.

Основные результаты диссертации были опубликованы в 4 статьях в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Казанцев А.Е., Степаньянц К.В. Соотношение между двухточечными функциями Грина $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, в трехпетлевом приближении // ЖЭТФ. — 2015. — Т. 147. — С. 714–728.
2. S.S. Aleshin, A.E. Kazantsev, M.B. Skoptsov, K.V. Stepanyantz. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 014.
3. Kazantsev A.E., Skoptsov M.B., Stepanyantz K.V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for $\mathcal{N} = 1$ SYM regularized by higher derivatives // Modern Physics Letters A. — 2017. — Vol. 32. — P. 1705194.
4. Kataev A.L., Kazantsev A.E., Stepanyantz K.V. The Adler D -function for $\mathcal{N} = 1$ SQCD regularized by higher covariant derivatives in the three-loop approximation // Nucl. Phys. B. — 2018. — Vol. 926. — P. 295–320.

а также в тезисах докладов:

1. Казанцев А.Е. Применение БРСТ-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными для вычисления перенормировки квантового калибровочного поля в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса // XXIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов–2016». Секция «Физика». Сборник тезисов. — Т. 2. — Физический факультет МГУ, Москва, 2016. — С. 185–187.
2. Казанцев А.Е. Соотношение между расходимостями в двухточечных функциях Грина $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в трехпетлевом приближении // XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов–2017». Секция «Физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2017. — С. 285–287.

Личный вклад автора.

Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, 5 приложений, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 113 страниц, из них 106 страниц текста, включающего 9 рисунков. Библиография содержит 94 наименования на 7 страницах.

Глава 1

Функция Адлера $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД1.1. Точная формула для D -функции

D -функция Адлера [18] тесно связана с нормированным сечением электрон-позитронной аннигиляции в адроны, а именно со знаменитым отношением

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi \text{Im} \Pi(s), \quad (1.1)$$

где $\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 4\pi\alpha_*^2/3s$, а α_* — постоянная тонкой структуры квантовой электродинамики. $\Pi(s)$ — вычисленное по теории возмущений выражение для адронного поляризационного оператора фотона, который играет важную роль в изучении вкладов сильных взаимодействий в различные физические величины. В частности, он необходим для определения вкладов сильных взаимодействий в теоретическое выражение для аномального магнитного момента мюона (современное обсуждение можно найти в [19]). D -функция связана с отношением $R(s)$ с помощью дисперсионного соотношения

$$D(Q^2) = -12\pi^2 Q^2 \frac{d}{dQ^2} \Pi(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} \quad (1.2)$$

и может быть использована для сравнения теоретических предсказаний КХД с имеющимися экспериментальными данными для $R(s)$ [20]. В области, где применима теория возмущений теоретическое выражение для D -функции определяется суммой диаграмм с двумя внешними линиями абелева калибровочного суперполя, в то время как внутренние линии представлены лишь кварками и глюонами.

Безмассовые теоретические выражения для D -функции известны для нескольких калибровочных моделей. В КХД на трехпетлевом уровне (в порядке $O(\alpha_s^2)$) она была вычислена аналитически в [21, 22] и численно в [23]. На уровне $O(\alpha_s^3)$ D -функция была аналитически вычислена в [24]. Этот результат бы подтвержден в [25, 26]. В настоящий момент аналитическое выражение для D -функции КХД известно до порядка $O(\alpha_s^4)$ [27, 28]. В работе [29] поправки к D -функции порядка α_s^2 были аналитически вычислены в теоретической модели сильных взаимодействий, которая в дополнение к КХД также содержала цветовые мультиплеты скалярных полей.

Более самосогласованной теоретической моделью сильных взаимодействий, содержащей скалярные поля, является $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД, которая продолжает привлекать внимание как теоретиков, так и экспериментаторов (см. обзор [30]). В этой модели поправка к D -функции порядка $O(\alpha_s)$ была вычислена в [31, 32].

В работах [33, 34] была предложена, а затем во всех порядках теории возмущений доказана формула, связывающая D -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД с аномальной размерностью суперполей материи в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными [35–38]. Это уравнение справедливо для D -функции и аномальной размерности, определенных в терминах голой константы связи, и имеет вид

$$D(\alpha_{s0}) = \frac{3}{2} N \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_{\alpha}^2 \left(1 - \gamma(\alpha_{s0})\right), \quad (1.3)$$

где N_f ароматов суперполей материи с электрическими зарядами q_{α} лежат в фундаментальном представлении группы $SU(N)$ ¹. Доказательство основывалось на методе, использованном в работе [14] для получения НШВЗ β -функции [5–7, 40], определенной в терминах голой константы связи в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике, регуляризованной высшими ковариантными производными, путем непосредственного суммирования фейнмановских суперграфов. Основная идея этого метода заключается в том, что, как было замечено в [41, 42], если суперсимметричная калибровочная теория регуляризована высшими производными, квантовые поправки к двухточечной функции Грина калибровочного суперполя факторизуются в интегралы от полных и даже двойных полных производных в импульсном пространстве в пределе нулевого внешнего импульса. Это позволяет явно вычислить интеграл по одному из петлевых импульсов в данном вкладе в β -функцию в n -петлевом приближении и соотнести его с вкладом в аномальную размерность в $(n - 1)$ -петлевом приближении. Эта идея была полностью реализована двумя различными способами в работах [14, 15], где во всех петлях было доказано, что β -функция действительно дается интегралами от двойных полных производных по петлевому импульсу. Благодаря этому свойству, она соотносится с аномальной размерностью суперполей материи через НШВЗ-соотношение, если обе ренормгрупповые (РГ) функции определены в терминах голой константы связи ². Эти результаты были проверены явным трехпетлевым вычислением в работе [44].

¹ Отметим, что хотя соотношение (1.3) может показаться очень похожим на точную НШВЗ β -функцию для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики [8, 39], аномальная размерность в правой части вычисляется для неабелевой теории.

² Аналогичная факторизация в двойные полные производные происходит для интегралов, определя-

Отметим, что в размерной редукции факторизации в двойные полные производные не происходит [45] и ренормгрупповые функции, определенные в терминах голой константы связи, НШВЗ-соотношению не удовлетворяют [46].

Сама формула (1.3) является аналогом НШВЗ β -функции для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с материей,

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2(3C_2 - T(R) + C(R)_i^j \gamma(\alpha)_j^i / r)}{2\pi(1 - C_2\alpha/(2\pi))}, \quad (1.4)$$

где $\text{tr}(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}$, $C(R)_i^j = (T^A T^A)_i^j$, $C_2\delta^{CD} = f^{ABC}f^{ABD}$, $r = \delta^{AA}$ ³. Это соотношение было получено различными методами, включая вычисление инстантонных вкладов [6, 7, 47], анализ супермультиплетов аномалий [5, 40, 48] и теорему о неперенормировке топологического члена [49]. Непосредственные вычисления вкладов многопетлевых фейнмановских диаграмм, выполненные с использованием размерной редукции [10, 50] и схемы вычитаний $\overline{\text{DR}}$, дали β -функцию в трех- [11, 12, 51, 52] и даже четырехпетлевом приближении [53]. Результат совпадал с (1.4) лишь в двухпетлевом приближении. В более высоких порядках тождество (1.4) выполняется лишь после специально подобранной конечной перенормировки константы связи, которую необходимо делать в каждом порядке теории возмущений [11–13]. Отметим, что сам факт существования такой конечной перенормировки довольно нетривиален, поскольку, как было замечено в работе [11], НШВЗ-соотношение накладывает определенные схемно-независимые ограничения на расходимости [54, 55]. Общие уравнения, описывающие схемную зависимость НШВЗ-соотношения были получены в [55, 56].

В настоящий момент в случае использования размерной редукции не существует общего предписания, приводящего к схеме вычитаний, в которой НШВЗ-соотношение было бы справедливо во всех порядках (НШВЗ-схема вычитаний). Более того, размерная редукция математически противоречива [50], а попытка убрать математические противоречия приводит к нарушению суперсимметрии квантовыми поправками в высших порядках [57, 58]. Однако на настоящий момент не ясно, в каком порядке это происходит. Напротив, регуляризация высшими ковариантными производными оказалась замечательным инструментом для вычислений по теории возмущений в суперсимметричных калибровочных теориях, см., ющих перенормировку массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике [43].

³ В уравнении (1.4) мы пока не оговариваем ни определения входящих в него ренормгрупповых функций, ни их аргумент.

например, [44, 59–62]. Впервые она была введена в работах [35, 36] и впоследствии обобщена на суперсимметричные теории в работах [37, 38]. Она математически самосогласованна и сохраняет как калибровочную симметрию, так и суперсимметрию. Использование регуляризации высшими ковариантными производными в многопетлевых вычислениях позволило построить НШВЗ-схему вычитаний в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике [16]. Чтобы сформулировать соответствующее перенормировочное предписание, необходимо зафиксировать значение величины $x = \ln(\Lambda/\mu)$, где Λ — размерный параметр регуляризованной теории, μ — масштаб перенормировки, положив $x = x_0$, где x_0 — произвольное конечное число, и потребовать, чтобы константы перенормировки удовлетворяли соотношению

$$Z(\alpha, x_0) = 1; \quad Z_3(\alpha, x_0) = 1. \quad (1.5)$$

Тогда можно показать, что в этой схеме перенормировки β -функция и аномальная размерность, определенные в терминах перенормированной константы связи, совпадают с соответствующими ренормгрупповыми функциями, определенными в терминах голой константы связи, во всех порядках теории возмущений [16]. Если известно, что для последних НШВЗ-соотношение справедливо, его справедливость также непосредственно следует и для первых. Неабелевый аналог граничных условий (1.5) был предложен в [17]. То, что они правильно фиксируют схему вычитаний, было проверено явными трехпетлевыми вычислениями для вкладов четвертой степени по юкавским константам в [62]. Это вычисление нетривиально, поскольку рассматриваемая часть трехпетлевой β -функции зависит от схемы вычитаний. Результат в точности подтверждает правильность выбора предписания для НШВЗ-схемы, предложенного в [17]. Схема вычитаний, в которой перенормировка массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД удовлетворяет НШВЗ-подобному соотношению [9, 63, 64], также может быть построена аналогичным образом [65].

Доказательство соотношения (1.3) в [34] является исчерпывающим, однако довольно технически сложным. Поэтому необходимо проверить его справедливость в низших порядках теории возмущений.

Мы вычисляем трехпетлевую D -функцию Адлера и двухпетлевую аномальную размерность в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД, регуляризованной высшими ковариантными производными, и проверяем соотношение (1.3) в соответствующем приближении. Проверив явным вычислением справедливость (1.3) для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи в трехпетлевом приближении, мы строим схему вычи-

таний, в которой D -функция Адлера и аномальная размерность, определенные в терминах перенормированной константы связи, удовлетворяют (1.3) во всех порядках теории возмущений, и иллюстрируем ее применение трехпетлевым вычислением. Наш результат отличается от результата, полученного для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД в [16], только тем, что нам приходится накладывать условие, аналогичное (1.5), еще и на константу перенормировки сильной константы связи.

Скажем несколько слов по поводу используемой версии регуляризации высшими ковариантными производными. Введение высших ковариантных производных в действие значительно модифицирует вершины взаимодействия, что делает трудным использование регуляризации такого рода в практических вычислениях. Но это обстоятельство смягчается за счет структуры квантовых поправок в суперсимметричных калибровочных теориях, о которой мы ранее говорили. Кроме того, вычисления можно упростить еще больше, если использовать версию регуляризации высшими производными, которая нарушает БРСТ-инвариантность (двухпетлевое вычисление с такой регуляризацией было проделано в [59]). В результате справедливость тождеств Славнова–Тейлора нужно восстанавливать путем введения в действие дополнительных контрчленов (соответствующая процедура перенормировки была построена как для несуперсимметричной, так и для суперсимметричной теории Янга–Миллса в [66, 67] и [68, 69] соответственно). С другой стороны, может оказаться полезным пожертвовать удобством вычислений в пользу БРСТ-инвариантности. Например, недавнее вычисление [61] с сохраняющей БРСТ-инвариантность версией регуляризации высшими производными в теории Янга–Миллса позволило обнаружить в однопетлевом приближении неперенормировку тройной вершины с двумя линиями духов Фаддеева–Попова и одной линией квантового калибровочного суперполя, что впоследствии развернулось в теорему об отсутствии перенормировки, доказанную во всех петлях в [17]. При этом доказательство в большой степени полагалось на тождества Славнова–Тейлора. В нашей работе мы регуляризуем теорию высшими ковариантными производными, не нарушая БРСТ-инвариантность, что сильно усложняет вершины взаимодействия, но тем не менее ведет к выражениям, поддающимся вычислению.

1.2. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД: действие, регуляризация и перенормировка

Рассмотрим $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную неабелеву калибровочную теорию с произвольной простой калибровочной группой G , взаимодействующую с внешним абелевым полем. Будем предполагать, что киральные суперполя материи ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$ для каждого значения $\alpha = 1, \dots, N_f$ лежат в представлении $R + \bar{R}$ группы G . Голое действие теории в безмассовом пределе имеет вид

$$S = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a + \sum_{\alpha=1}^{N_f} \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left(\phi_\alpha^+ e^{2V+2q_\alpha \mathbf{V}} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^+ e^{-2V-2q_\alpha \mathbf{V}} \tilde{\phi}_\alpha \right). \quad (1.6)$$

Эта теория инвариантна относительно калибровочных преобразований группы $G \times U(1)$. Суперполе V здесь — неабелево калибровочное суперполе, g_0 — соответствующая голая константа связи. В первом слагаемом действия (1.6) $V = g_0 V^A t^A$, где t^A — генераторы фундаментального представления группы G , нормированные так, что $\text{tr}(t^A t^B) = \delta^{AB}/2$. В слагаемых действия, содержащих суперполя материи $V = g_0 V^A T^A$, где T^A — генераторы представления R . Внешнее абелево калибровочное суперполе обозначается как $\mathbf{V}$, а e_0 — голая константа связи, соответствующая группе $U(1)$. Каждое из киральных суперполей материи ϕ_α принадлежит представлению R группы G и обладает зарядом q_α по отношению к группе $U(1)$. Суперполя $\tilde{\phi}_\alpha$ принадлежат представлению $\bar{R}$ и обладают зарядами $-q_\alpha$ по отношению к $U(1)$.

Регуляризация осуществляется введением в действие слагаемых, содержащих высшие ковариантные производные:

$$S_\Lambda = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a \left[R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) - 1 \right] W_a, \quad (1.7)$$

где Λ — параметр размерности массы регуляризованной теории, играющий роль ультрафиолетового обрезания. Функция $R(y)$ такая, что $R(0) = 1$, является регулятором, быстро растущим на бесконечности; кроме того, мы также вводим ковариантные производные в киральном представлении

$$\bar{\nabla}_{\dot{a}} = \bar{D}_{\dot{a}} \quad \nabla_a = e^{-2V} D_a e^{2V}. \quad (1.8)$$

Отметим, что введение регуляризующих слагаемых такого рода сохраняет БРСТ-инвариантность полного действия [70, 71], остающуюся после фиксации калибровки.

Член, фиксирующий калибровку, имеет вид

$$S_{gf} = -\frac{1}{16\xi_0 g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \bar{D}^2 V R(\partial^2/\Lambda^2) D^2 V, \quad (1.9)$$

где ξ_0 — голый калибровочный параметр. Благодаря тождествам Славнова–Тейлора, квантовые поправки к двухточечной функции Грина калибровочного суперполя V являются поперечными, так что член, фиксирующий калибровку не перенормируется. Это означает, что перенормировка калибровочного параметра определяется перенормировкой калибровочной константы связи g и суперполя V . В соответствии с результатом работы [61] однопетлевая перенормировка калибровочного параметра описывается уравнением

$$\frac{1}{\xi_0 g_0^2} = \frac{1}{\xi g^2} + \frac{C_2(1-\xi)}{12\xi\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + a_1 \right) + O(g^2), \quad (1.10)$$

где ξ и g — перенормированный калибровочный параметр и перенормированная константа связи соответственно. Выбирая для простоты калибровку Фейнмана $\xi = 1$, мы можем в рассматриваемом здесь приближении в члене, фиксирующем калибровку, сделать замену $\xi_0 g_0^2 \rightarrow g^2$. Тогда пропагатор калибровочного суперполя V^A будет даваться выражением

$$2i \left(\frac{1}{\partial^2 R} - \frac{g^2 - g_0^2}{16g_0^2} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \frac{1}{\partial^4 R} \right) \delta^8(x_1 - x_2) \delta^{AB}. \quad (1.11)$$

Действие для духов Фаддеева–Попова имеет вид

$$S_{FP} = \frac{1}{g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (\bar{c} + \bar{c}^+) \left[\left(\frac{V}{1 - e^{2V}} \right)_{Adj} c^+ + \left(\frac{V}{1 - e^{-2V}} \right)_{Adj} c \right], \quad (1.12)$$

где индекс « Adj » означает, что духи лежат в присоединенном представлении неабелевой группы.

После добавления слагаемого S_Λ к действию S сохраняются лишь однопетлевые расходимости [72]. Их нужно регуляризовать методом Паули–Вилларса [73]. Однопетлевые расходимости, приходящие из петель материи, могут быть регуляризованы введением единственного набора антикоммутирующих суперполей Паули–Вилларса Φ_α и $\tilde{\Phi}_\alpha$ с действием

$$S_{PV} = \sum_{\alpha=1}^{N_f} \left[\frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \left(\Phi_\alpha^+ e^{2V+2q_\alpha V} \Phi_\alpha + \tilde{\Phi}_\alpha^+ e^{-2V-2q_\alpha V} \tilde{\Phi}_\alpha \right) + \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \tilde{\Phi}_\alpha^t \Phi_\alpha + \text{c.c.} \right) \right], \quad (1.13)$$

где $M = a\Lambda$, а параметр a безразмерен и не зависит от константы связи. Следуя работе [61], для сокращения расходимостей, приходящих из петель калибровочного суперполя V и духов Фаддеева–Попова в однопетлевом приближении, мы вводим дополнительный набор (коммутирующих) полей Паули–Вилларса с действием

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \varphi_1^+ \left[e^{2V} R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) \right]_{Adj} \varphi_1 + \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \varphi_2^+ [e^{2V}]_{Adj} \varphi_2 + \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \varphi_3^+ [e^{2V}]_{Adj} \varphi_3 + \frac{1}{2} \left(\text{tr} \int d^4x d^2\theta M_\varphi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \text{c.c.} \right), \quad (1.14)$$

где $M_\varphi = a_\varphi \Lambda$, а параметр a_φ аналогичен параметру a и также не зависит от константы связи. Благодаря явной инвариантности действия относительно калибровочных преобразований группы $U(1)$, квантовые поправки к двухточечной функции Грина поля $\mathbf{V}$ поперечны,

$$\Delta \Gamma_{\mathbf{V}}^{(2)} = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta \mathbf{V}(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(p, \theta) \left(d^{-1}(\alpha_0, \alpha_{s0}, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right). \quad (1.15)$$

Здесь $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$ — голая константа связи, соответствующая группе $U(1)$, $\alpha_{s0} = g_0^2/4\pi$ — голая константа связи, соответствующая группе G и

$$\Pi_{1/2} = -\frac{D^a \bar{D}^2 D_a}{8\partial^2} \quad (1.16)$$

является поперечным проектором. Аналогично, квантовые поправки к двухточечной функции Грина неабелева квантового калибровочного суперполя также поперечны благодаря БРСТ-симметрии. Этот факт может быть доказан обычным образом с использованием тождеств Славнова–Тейлора [74, 75].

Квантовые поправки к двухточечной функции Грина киральных суперполей материи входят в эффективное действие следующим образом:

$$\Gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta \left(\phi_\alpha^{*i}(-p, \theta) G_i^j(\alpha_{s0}, \Lambda/p) \phi_{\alpha j}(p, \theta) + \tilde{\phi}_{\alpha j}^*(-p, \theta) G_i^j(\alpha_{s0}, \Lambda/p) \tilde{\phi}_\alpha^i(p, \theta) \right). \quad (1.17)$$

Перенормированные константы связи $\alpha(\alpha_0, \alpha_{s0}, \Lambda/\mu)$, $\alpha_s(\alpha_{s0}, \Lambda/\mu)$ и константы перенормировки для киральных суперполей материи $Z_i^j(\alpha_s, \Lambda/\mu)$ такие, что

$$\phi_{\alpha i} = (\sqrt{Z})_i^j (\phi_R)_{\alpha j}, \quad \tilde{\phi}_\alpha^i = (\sqrt{Z})_j^i (\tilde{\phi}_R)_\alpha^j, \quad (1.18)$$

определяются обычным образом⁴. Вместо функций $\alpha(\alpha_0, \alpha_{s0}, \Lambda/\mu)$ и $\alpha_s(\alpha_{s0}, \Lambda/\mu)$ можно

⁴ Константы перенормировки для суперполей ϕ и $\tilde{\phi}$ совпадают, поскольку одновременная замена $\phi \leftrightarrow \tilde{\phi}^*$, $V \rightarrow -V$, $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ и $D \leftrightarrow \bar{D}$ не изменяет действие.

также использовать константы перенормировки

$$Z_\alpha \equiv \alpha/\alpha_0 \quad \text{и} \quad Z_{\alpha_s} \equiv \alpha_s/\alpha_{s0} \quad (1.19)$$

соответственно.

В однопетлевом приближении константа связи α_s перенормируется следующим образом:

$$\frac{1}{\alpha_{s0}} - \frac{1}{\alpha_s} = \frac{1}{2\pi} \left[3C_2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) - 2N_f T(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right] + O(\alpha_s), \quad (1.20)$$

где b_{11} и b_{12} — константы, чьи конкретные значения зависят от используемой схемы вычитаний.

Следуя работам [33, 34], определим D -функцию Адлера в терминах голой константы связи следующим образом:

$$D(\alpha_{s0}) = - \frac{3\pi}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \alpha_0^{-1}(\alpha, \alpha_s, \Lambda/\mu) \Big|_{\alpha, \alpha_s = \text{const}}. \quad (1.21)$$

Она также может быть определена через двухточечную функцию Грина абелева калибровочного суперполя $\mathbf{V}$,

$$D(\alpha_{s0}) = \frac{3\pi}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[d^{-1}(\alpha_0(\alpha, \alpha_s, \Lambda/\mu), \alpha_{s0}(\alpha_s, \Lambda/\mu), \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}(\alpha, \alpha_s, \Lambda/\mu) \right] \Big|_{\alpha, \alpha_s = \text{const}; p=0}. \quad (1.22)$$

Это равенство следует из того факта, что производная функции d^{-1} , выраженной в терминах перенормированных констант связи, по $\ln \Lambda$ при фиксированных α и α_s стремится к нулю в пределе $p \rightarrow 0$. Этот предел необходим, с тем чтобы избавиться от конечных слагаемых, пропорциональных $(p/\Lambda)^k$, где k — положительное целое число. Отметим, что в уравнениях (1.21) и (1.22) учитывается лишь ведущий порядок по электромагнитной константе связи, что означает учет лишь эффектов сильного взаимодействия.

Аналогично, аномальная размерность каждого из суперполей материи ϕ_α (которая одна и та же для всех $\alpha = 1, \dots, N_f$), определенная в терминах голой константы связи, также может быть выражена через двухточечную функцию Грина киральных суперполей материи,

$$\gamma_i^j(\alpha_{s0}) = - \frac{d \ln Z_i^j}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha_s = \text{const}} = \frac{d \ln G_i^j(\alpha_{s0}(\alpha_s, \Lambda/\mu), \Lambda/q)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha_s = \text{const}; q=0}. \quad (1.23)$$

Мы утверждаем, что для теории (1.6) в трехпетлевом приближении D -функция и аномальная размерность суперполей материи связаны друг с другом посредством соотношения

$$D(\alpha_{s0}) = \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) - \text{tr } \gamma(\alpha_{s0}) \right), \quad (1.24)$$

где $\dim(R)$ — размерность представления R . Это тождество является обобщением (1.3) на рассматриваемый случай. В самом деле, если киральные суперполя материи ϕ_α лежат в фундаментальном представлении группы $SU(N)$, тогда

$$\dim(R) = N \quad \text{и} \quad \gamma_i^j(\alpha_{s0}) = \gamma(\alpha_{s0}) \delta_i^j, \quad (1.25)$$

так что

$$\text{tr}(\gamma) = \gamma_i^i(\alpha_{s0}) = N\gamma(\alpha_{s0}). \quad (1.26)$$

Подстановка этих соотношений в уравнение (1.24) дает тождество (1.3), полученное в работах [33, 34].

1.3. Трехпетлевая D -функция Адлера

В соответствии с уравнением (1.22) функция Адлера, определенная в терминах голой константы связи, может быть вычислена по двухточечной функции Грина суперполя $\mathbf{V}$. Поэтому D -функция получает вклады от супердиаграмм с двумя внешними линиями абелева калибровочного суперполя (и которые не содержат его на внутренних линиях). В трехпетлевом приближении существует большое число таких диаграмм. Поэтому отобразить их все на одном рисунке довольно затруднительно. Вместо этого на рисунке 1.1 мы отобразили лишь все диаграммы без внешних линий. Присоединяя две внешние линии абелева калибровочного суперполя $\mathbf{V}$ к петлям суперполей материи на этих диаграммах всеми возможными способами, мы получаем полный трехпетлевой вклад в D -функцию Адлера.

На рисунке 1.1 сплошные линии обозначают пропагаторы суперполей материи и соответствующих суперполей Паули–Вилларса, волнистые линии соответствуют пропагаторам неабелева калибровочного суперполя V и штриховые линии обозначают пропагаторы духов Фаддеева–Попова. Пунктирные линии соответствуют пропагаторам суперполей Паули–Вилларса φ_i . Они рассматриваются отдельно от суперполей Паули–Вилларса Φ_α и $\tilde{\Phi}_\alpha$, потому что φ не взаимодействуют с внешним абелевым калибровочным суперполем $\mathbf{V}$ в отличие от Φ_α и $\tilde{\Phi}_\alpha$.

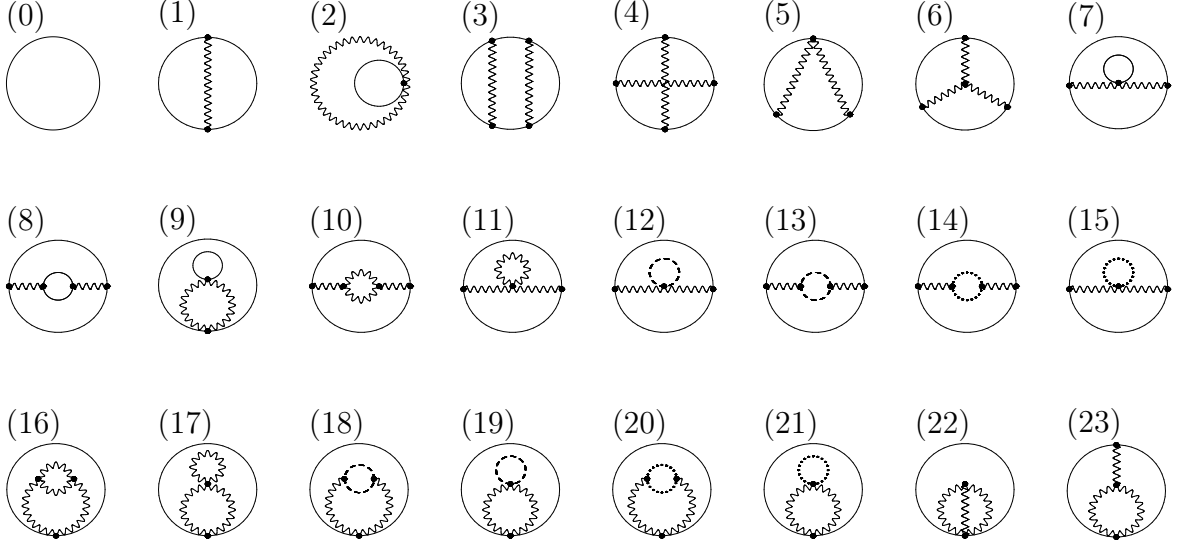


Рис. 1.1. Диаграммы, дающие вклад в D -функцию Адлера в трехпетлевом приближении. Отметим, что для простоты некоторые диаграммы, которые заведомо дают нуль в рассматриваемой (фейнмановской) калибровке, не представлены на этом рисунке.

Чтобы получить D -функцию в рассматриваемом приближении, необходимо присоединить две внешние линии суперполя $\mathbf{V}$ к сплошным линиям на этих диаграммах и вычислить величину (1.22), предварительно получив функцию $d^{-1} - \alpha_0^{-1}$ с помощью (1.15).

Результаты для вкладов диаграмм, представленных на рисунке 1.1, в выражение (1.22) собраны в Приложении А. Все эти выражения даются интегралами от двойных полных производных. Их сумма может быть записана в виде

$$D(\alpha_{s0}) = \frac{3\pi}{2} \cdot 4\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\dim(R) I_0(q) + \text{tr } C(R) I_1(q) \right. \\ \left. + \text{tr } (C(R)^2) I_2(q) + C_2 \text{tr } C(R) (I_3(q) + I_4(q)) + N_f T(R) \text{tr } C(R) I_5(q) \right], \quad (1.27)$$

где I_i , $i = 1, \dots, 4$, даются разностью безмассовых вкладов обычных суперполей материи ϕ , $\tilde{\phi}$ и массивных вкладов суперполей Паули–Вилларса Φ , $\tilde{\Phi}$,

$$I_i(q) = I_i(q, m = 0) - I_i(q, m = M), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.28)$$

Вклад $I_5(q)$ приходит от диаграмм (7), (8) и (9), в которых присутствуют две петли суперполей материи, и поэтому имеет несколько иную структуру. Явные выражения для интегралов $I_1(q, m), \dots, I_4(q, m), I_5(q)$, а также для однопетлевого вклада $I_0(q)$ имеют вид

$$I_0(q) = \frac{1}{2q^2} \ln \left(1 + \frac{M^2}{q^2} \right); \quad (1.29)$$

$$I_1(q, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_0^2}{R_k k^2 (q^2 + m^2) ((q+k)^2 + m^2)}; \quad (1.30)$$

$$I_2(q, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (q^2 + m^2) ((q+k)^2 + m^2) ((q+l)^2 + m^2)} \\ \times \left(\frac{2(q^2 - m^2)}{q^2 + m^2} + \frac{(2q+k+l)^2 + 2m^2}{(q+k+l)^2 + m^2} - 4 \right); \quad (1.31)$$

$$I_3(q, m) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (q^2 + m^2) ((q+k)^2 + m^2) ((q+l)^2 + m^2)} \\ \times \left(-\frac{(2q+k+l)^2 + 2m^2}{2((q+k+l)^2 + m^2)} + 1 - \frac{2((q+k)^\mu (q+l)_\mu + m^2)}{(l-k)^2} - \frac{4}{(l-k)^2 R_{l-k}} \frac{R_l - R_k}{l^2 - k^2} \right. \\ \left. \times (q^2 (q+k)^\mu l_\mu + l^2 (q+k)^\mu q_\mu + m^2 (q+k+l)^\mu l_\mu) \right); \quad (1.32)$$

$$I_4(q, m) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^4 f(k/\Lambda)}{R_k^2 k^2 (q^2 + m^2) ((q+k)^2 + m^2)}; \quad (1.33)$$

$$I_5(q) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^4}{k^2 R_k^2} \left(\frac{1}{q^2 (q+k)^2} - \frac{1}{(q^2 + M^2) ((q+k)^2 + M^2)} \right) \\ \times \left(\frac{1}{l^2 (k+l)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2) ((k+l)^2 + M^2)} \right). \quad (1.34)$$

Функция $f(k/\Lambda)$, входящая в выражение для $I_4(q, m)$, определяется однопетлевым вкладом в поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя и была вычислена в работе [76]. Она дается выражением (A.10) в Приложении А.

Из (1.27) видно, что в рассматриваемом приближении D -функция Адлера дается интегралами от двойных полных производных по импульсу q^μ петли материи. Это находится в полном согласии с результатами работ [33, 34]. Такая структура петлевых интегралов позволяет точно вычислить интеграл по $d^4 q$. Отметим, что хотя вклады в D -функцию и являются интегралами от полных производных, они не равны нулю из-за сингулярностей подынтегральных выражений. При вычислении каждого из интегралов нужно окружить особые точки сферами бесконечно малого радиуса и превратить интеграл из интеграла по объему в сумму поверхностных интегралов по этим сферам и по сфере бесконечно большого радиуса. Последний можно отбросить, если подынтегральная функция убывает на бесконечности достаточно быстро,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{F(q^2)}{q^2} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R} \frac{dS}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu}{q} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{F(q^2)}{q^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\varepsilon} \frac{dS}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu}{q} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{F(q^2)}{q^2} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \lim_{q \rightarrow \infty} (F'(q^2)q^2 - F(q^2)) - \frac{1}{4\pi^2} \lim_{q \rightarrow 0} (F'(q^2)q^2 - F(q^2)) = \frac{F(0)}{4\pi^2},
\end{aligned} \tag{1.35}$$

где предполагается, что функция $F(q^2)$ не имеет особых точек и достаточно быстро убывает на бесконечности. Используя это уравнение, можно вычислить все интегралы по $d^4 q$ в выражении (1.27). Затем после некоторых преобразований результат для D -функции Адлера можно записать в виде

$$\begin{aligned}
D(\alpha_{s0}) &= \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left[\dim(R) + \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\text{tr } C(R) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^2}{k^4 R_k} \left(1 - 2C_2 \frac{g_0^2 f(k/\Lambda)}{R_k} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - N_f T(R) \text{tr } C(R) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^4 R_k^2} \left(\frac{1}{l^2(k+l)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2)((k+l)^2 + M^2)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{tr } (C(R)^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{l^2 k^2} - \frac{2}{l^2(l+k)^2} \right) \right) \right] + O(g_0^6).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Отметим, что в (1.36) производная по $\ln \Lambda$ должна быть взята перед интегрированием. Это необходимо, с тем чтобы избавиться от инфракрасных расходимостей и получить хорошо определенные интегралы. При этом дифференцировать нужно при фиксированном значении перенормированной константы связи α_s в соответствии с уравнением (1.22).

1.4. Двухпетлевая аномальная размерность суперполей материи

В соответствии с уравнением (1.24) функция Адлера в трехпетлевом приближении связана с аномальной размерностью суперполей материи в двухпетлевом приближении. Поэтому чтобы проверить справедливость этого тождества, необходимо вычислить двухпетлевые вклады в двухточечную функцию Грина суперполей материи. Соответствующие диаграммы представлены на рисунке 1.2. Отметим, что они могут быть получены из диаграмм на рисунке 1.1 разрезанием петель материи всеми возможными способами. При этом, поскольку мы вычисляем вклад в эффективное действие, мы должны оставить лишь одночастично-неприводимые диаграммы. Выражения для квантовых поправок, которые $G(\alpha_{s0}, \Lambda/q)$ получает от этих диаграмм, собраны в Приложении Б. Используя эти результаты, аномальную размерность, определенную в терминах голой константы связи α_{s0} можно вычислить с помощью уравнения (1.23). А именно, необходимо продифференцировать сумму всех вкладов в $\ln G$ по $\ln \Lambda$ и взять предел нулевого внешнего импульса. Получаем

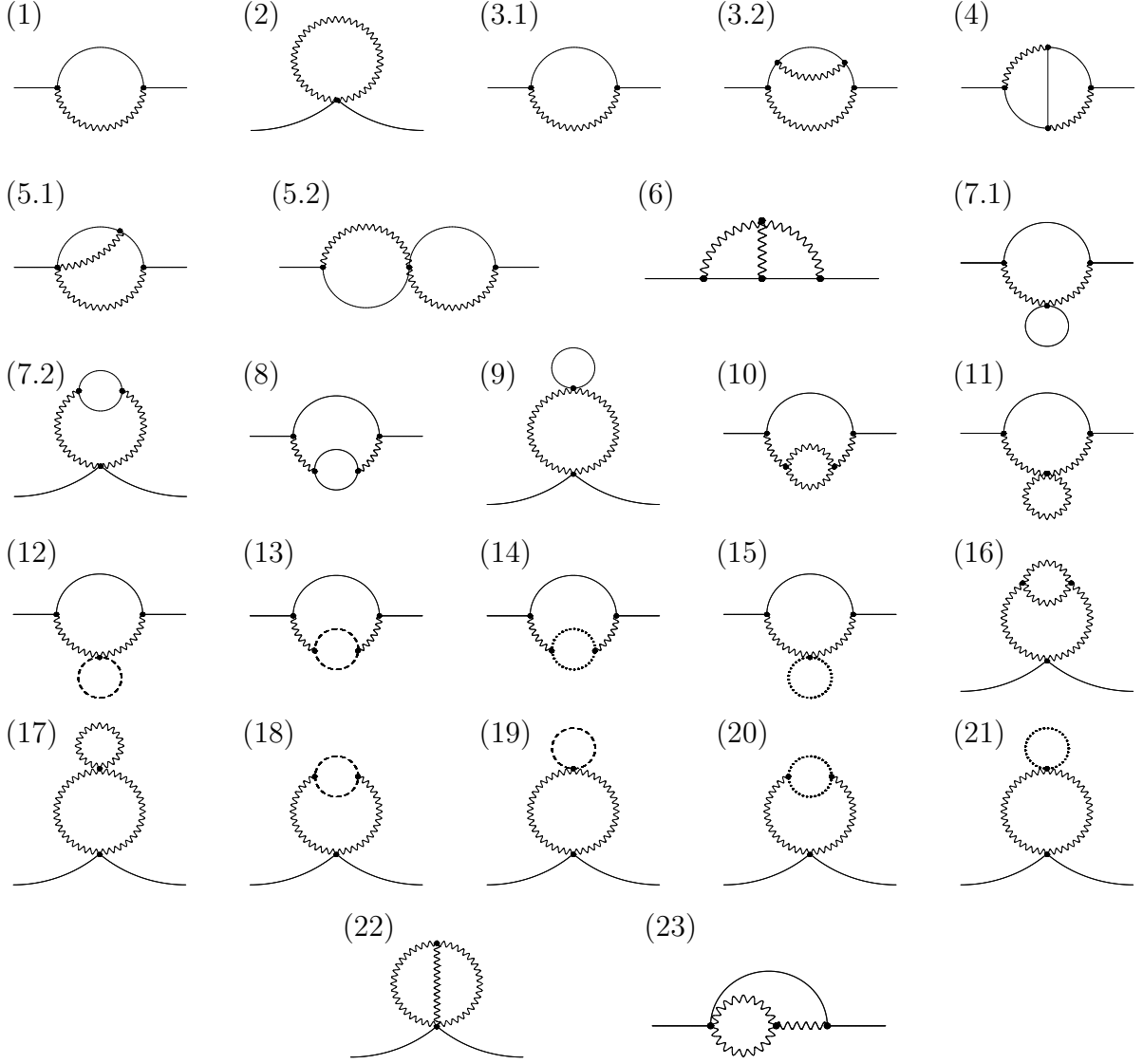


Рис. 1.2. Диаграммы, дающие вклад в аномальную размерность в двухпетлевом приближении. Каждую диаграмму на этом рисунке можно получить из соответствующей диаграммы на рисунке 1.1 разрезанием линии суперполей материи. Для простоты некоторые диаграммы, заведомо дающие нулевой вклад, не отображены, так же как на рисунке 1.1

$$\begin{aligned}
\gamma_i^j(\alpha_{s0}) = & -C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^2}{k^4 R_k} + C_2 C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^4 R_k^2} f(k/\Lambda) \\
& + N_f T(R) C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^4 R_k^2} \left(\frac{1}{l^2(l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2)((l+k)^2 + M^2)} \right) \\
& - (C(R)^2)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{l^2 k^2} - \frac{2}{l^2(l+k)^2} \right) + O(g_0^6), \quad (1.37)
\end{aligned}$$

где функция $f(k/\Lambda)$ та же, что и в уравнении (1.36), и дается выражением (A.10).

Сравнивая выражения (1.36) и (1.37), можно легко удостовериться, что НШВЗ-подобное соотношение (1.24) справедливо в рассматриваемом приближении для РГ-функций,

определенных в терминах голой константы связи α_{s0} ,

$$D(\alpha_{s0}) = \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) - \text{tr } \gamma(\alpha_{s0}) \right) + O(\alpha_{s0}^3). \quad (1.38)$$

Равенство справедливо, потому что обе части этого уравнения даются одними и теми же интегралами, так что оно выполняется независимо от схемы вычитаний. Это следует в общем случае из того факта [16], что РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, схемно-независимы при фиксированной регуляризации. Это можно проверить явным вычислением в рассматриваемом приближении при выборе простейшей формы регулятора $R(y)$ (см. (1.7)). Выберем его в виде

$$R(y) = 1 + y^n, \quad (1.39)$$

где n — положительное целое число. Тогда возможно найти явное выражение для РГ-функций, входящих в уравнение (1.38), вычисляя интегралы в выражении (1.37). Подробности этого вычисления описаны в Приложении В, а результат имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_{s0})_i^j = & -\frac{\alpha_{s0}}{\pi} C(R)_i^j - \frac{3\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} C_2 C(R)_i^j \left(\ln a_\varphi + 1 \right) + \frac{\alpha_{s0}^2}{\pi^2} N_f T(R) C(R)_i^j \left(\ln a + 1 \right) \\ & + \frac{\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} (C(R)^2)_i^j + O(\alpha_{s0}^3), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где

$$a \equiv \frac{M}{\Lambda}; \quad a_\varphi \equiv \frac{M_\varphi}{\Lambda}. \quad (1.41)$$

Поэтому из уравнения (1.38) мы заключаем, что при выборе регулятора в форме (1.39) трехпетлевая D -функция Адлера, определенная в терминах голой константы связи, дается выражением

$$\begin{aligned} D(\alpha_{s0}) = & \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left[\dim(R) + \frac{\alpha_{s0}}{\pi} \text{tr } C(R) + \frac{3\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} C_2 \text{tr } C(R) \left(\ln a_\varphi + 1 \right) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_{s0}^2}{\pi^2} N_f T(R) \text{tr } C(R) \left(\ln a + 1 \right) - \frac{\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} \text{tr } (C(R)^2) \right] + O(\alpha_{s0}^3). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Видно, что конечные константы, определяемые схемой вычитаний (такие как b_{11} и b_{12} в уравнении (1.20)) не входят в выражения (1.40) и (1.42). Следовательно, эти функции схемно-независимы (при фиксированной регуляризации) в согласии с общим утверждением, доказанным в работе [16].

1.5. НШВЗ-подобная схема вычитаний

Ренормгрупповые функции, входящие в соотношение (1.24), определены в терминах го-лой константы связи и поэтому не зависят от выбора схемы вычитаний при фиксированной регуляризации [16]. С другой стороны, ренормгрупповые функции обычно определяются как функции перенормированных констант связи [77] и зависят от перенормировочного предписания. Это означает, что соотношение (1.24) не справедливо для D -функции Адлера и аномальной размерности, определенных в терминах перенормированной константы связи, в произвольной схеме вычитаний. Мы покажем, что схема, в которой (1.24) выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи (НШВЗ-подобная схема), может быть построена путем наложения простых условий на константы перенормировки. А именно, зафиксируем значение $\ln(\Lambda/\mu)$ в точке x_0 и наложим требование, чтобы все константы перенормировки удовлетворяли уравнениям

$$Z(\alpha_s, x_0)_i^j = \delta_i^j; \quad Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, x_0) = 1; \quad Z_{\alpha_s}(\alpha_s, x_0) = 1. \quad (1.43)$$

В частном случае, когда $x_0 = 0$, это требование является аналогом минимальных вычитаний (см., например, [78]) в том смысле, что константы перенормировки содержат лишь слагаемые, пропорциональные $(\ln \Lambda/\mu)^n$, где $n \geq 1$ — натуральное число. Мы будем называть эту схему HDMSL (от слов Higher Derivatives + Minimal Subtraction of Logarithms, т.е. минимальные вычитания логарифмов при использовании регуляризации высшими ковариантными производными).

Докажем сначала, что такая схема существует. Для удобства введем новую переменную $x = \ln(\Lambda/\mu)$. Рассмотрим тогда какое-нибудь перенормировочное предписание и найдем для него функции $\alpha_0(\alpha, \alpha_s, x)$, $\alpha_{s0}(\alpha_s, x)$ и $Z(\alpha_s, x)_i^j$. Вообще говоря, условия (1.43) не будут удовлетворяться, так что

$$\alpha_0(\alpha, \alpha_s, x_0) = a(\alpha, \alpha_s); \quad \alpha_{s0}(\alpha_s, x_0) = b(\alpha_s); \quad Z(\alpha_s, x_0)_i^j = g(\alpha_s)_i^j. \quad (1.44)$$

Очевидно, что для конечного фиксированного значения x_0 функции $a(\alpha, \alpha_s)$, $b(\alpha_s)$ и $g(\alpha_s)_i^j$ конечны в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Выберем тогда новые перенормированные константы связи α' , α'_s и новые константы перенормировки для суперполей материи Z'_i^j , такие что

$$\alpha'(\alpha, \alpha_s) = a(\alpha, \alpha_s); \quad \alpha'_s(\alpha_s) = b(\alpha_s); \quad Z'(\alpha'_s, x)_i^j = g^{-1}(\alpha_s(\alpha'_s))_i^k Z(\alpha_s(\alpha'_s), x)_k^j. \quad (1.45)$$

По построению перенормированные функции Грина, выраженные в терминах перенормированных констант связи α и α_s , конечны. Очевидно, что они остаются конечными и после конечной перенормировки (1.45). Более того, из уравнений (1.44) и (1.45) мы заключаем, что константы перенормировки $Z'_\alpha = \alpha'/\alpha_0$, $Z'_{\alpha_s} = \alpha'_s/\alpha_{s0}$ и $Z'(\alpha'_s, x)_i^j$ удовлетворяют условиям (1.43). Это означает, что схема, зафиксированная условиями (1.43), существует. Поэтому остается лишь показать, что в этой схеме тождество (1.24) справедливо для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи.

D -функция Адлера и аномальная размерность определяются в терминах перенормированной константы связи с помощью уравнений

$$\tilde{D}(\alpha_s) = -\frac{3\pi}{2} \frac{d}{d \ln \mu} \alpha^{-1}(\alpha_0, \alpha_{s0}, \Lambda/\mu) \Big|_{\alpha_0, \alpha_{s0} = \text{const}}; \quad (1.46)$$

$$\tilde{\gamma}(\alpha_s)_i^j = \frac{d \ln Z(\alpha_s, \Lambda/\mu)_i^j}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_{s0} = \text{const}}. \quad (1.47)$$

Из определения (1.47) мы получаем

$$\tilde{\gamma}(\alpha_s)_i^j = -\frac{d \ln Z(\alpha_s, x)_i^j}{dx} \Big|_{\alpha_s = \text{const}} - \frac{\partial \ln Z(\alpha_s, x)_i^j}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s(\alpha_{s0}, x)}{\partial x}. \quad (1.48)$$

Положим $x = x_0$ в этом уравнении. Тогда второе слагаемое в этом выражении исчезнет, потому что в соответствии с первым уравнением в (1.43)

$$\frac{\partial \ln Z(\alpha_s, x_0)_i^j}{\partial \alpha_s} = 0. \quad (1.49)$$

Более того, третье уравнение из (1.43) дает $\alpha_s(\alpha_{s0}, x_0) = \alpha_{s0}$. Поэтому из уравнения (1.48) получаем

$$\tilde{\gamma}(\alpha_s)_i^j \Big|_{\alpha_s = \alpha_{s0}} = \gamma(\alpha_{s0})_i^j. \quad (1.50)$$

Это означает, что оба определения аномальной размерности дают одну и ту же функцию, если удовлетворяются граничные условия (1.43).

Аналогичное утверждение можно доказать и для D -функции. С этой целью перепишем определение (1.46) в эквивалентной форме

$$\tilde{D}(\alpha_s) = \frac{3\pi}{2\alpha} \frac{d}{d \ln \mu} \ln Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, \Lambda/\mu) \Big|_{\alpha_0, \alpha_{s0} = \text{const}}. \quad (1.51)$$

Как и ранее, дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\alpha_s) = & -\frac{3\pi}{2\alpha} \left(\frac{d \ln Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, x)}{dx} \Big|_{\alpha, \alpha_s = \text{const}} + \frac{\partial \ln Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, x)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha(\alpha_0, \alpha_{s0}, x)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \ln Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, x)}{\partial \alpha_s} \frac{\partial \alpha_s(\alpha_{s0}, x)}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Полагая $x = x_0$, мы видим, что последние два слагаемых равны нулю благодаря граничным условиям (1.43), в то время как $\alpha_s(\alpha_{s0}, x_0) = \alpha_{s0}$ и $\alpha(\alpha_0, \alpha_{s0}, x_0) = \alpha_0$. Следовательно получаем

$$\tilde{D}(\alpha_s) \Big|_{\alpha_s = \alpha_{s0}} = -\frac{3\pi}{2\alpha_0} \frac{d \ln Z_\alpha(\alpha, \alpha_s, x)}{dx} \Big|_{\alpha, \alpha_s = \text{const}} = D(\alpha_{s0}). \quad (1.53)$$

Поэтому при граничных условиях (1.43) ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированной константы связи совпадают с соответствующими ренормгрупповыми функциями, определенными в терминах голой константы связи. Принимая во внимание тот факт, что последние удовлетворяют НШВЗ-подобному соотношению в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными, мы заключаем, что первые также ему удовлетворяют в схеме вычитаний, определенной предписанием (1.43). Это означает, что условия (1.43) фиксируют НШВЗ-подобную схему во всех порядках теории возмущений с использованием регуляризации высшими ковариантными производными.

1.6. НШВЗ-подобная схема в трехпетлевом приближении

Проверим общие утверждения, доказанные в предыдущем разделе, на явном трехпетлевом вычислении. Начнем с уравнения (1.40) и проинтегрируем для него уравнение ренормгруппы (1.23). Решая это уравнение относительно $\ln Z$, учитывая при этом соотношение (1.20), описывающее однопетлевую эволюцию константы связи α_s , мы получаем

$$\begin{aligned} \ln Z_i^j = & \frac{\alpha_s}{\pi} C(R)_i^j \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_1 \right) + \frac{3\alpha_s^2}{4\pi^2} C_2 C(R)_i^j \left[-\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left(\ln a_\varphi + 1 - b_{11} \right) \right. \\ & \left. + g_{21} \right] - \frac{\alpha_s^2}{2\pi^2} N_f T(R) C(R)_i^j \left[-\ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + 2 \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left(\ln a + 1 - b_{12} \right) + g_{22} \right] - \frac{\alpha_s^2}{2\pi^2} (C(R)^2)_i^j \\ & \times \left[\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{23} \right] + O(\alpha_s^3), \end{aligned} \quad (1.54)$$

где g_1 , g_{21} , g_{22} и g_{23} — произвольные конечные константы⁵. Существование этих произвольных констант следует из произвольности выбора схемы вычитаний. Фиксируя значения этих

⁵ Три различные константы g_{21} , g_{22} и g_{23} в двухпетлевом приближении возникают благодаря существованию трех различных групповых множителей.

констант и других аналогичных констант, можно зафиксировать схему вычитаний.

Конечные константы не входят в ренормгрупповые функции, определенные в терминах голой константы связи, но они присутствуют в схемно-зависимых выражениях для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи. Чтобы вычислить аномальную размерность, определенную как функция перенормированной константы связи, необходимо переписать уравнение (1.54) в терминах α_{s0} , продифференцировать его по $\ln \mu$ и выразить результат в терминах α_s . Это дает

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\alpha_s)_i^j &= \left. \frac{d \ln Z_i^j}{d \ln \mu} \right|_{\alpha_{s0}=\text{const}} = -\frac{\alpha_s}{\pi} C(R)_i^j + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[-\frac{3}{2} C_2 C(R)_i^j \left(\ln a_\varphi + 1 + g_1 - b_{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + N_f T(R) C(R)_i^j \left(\ln a + 1 + g_1 - b_{12} \right) + \frac{1}{2} (C(R)^2)_i^j \right] + O(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Присутствие конечных констант g_1 , b_{11} и b_{12} подтверждает схемную зависимость этой ренормгрупповой функции.

Уравнение (1.55) можно сравнить с результатом, полученным с использованием размерной редукции в $\overline{\text{DR}}$ -схеме, см. работу [11] и содержащиеся в ней ссылки. В наших обозначениях его можно записать в виде

$$\tilde{\gamma}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha_s)_i^j = -\frac{\alpha_s}{\pi} C(R)_i^j + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[-\frac{3}{4} C_2 C(R)_i^j + \frac{1}{2} N_f T(R) C(R)_i^j + \frac{1}{2} (C(R)^2)_i^j \right] + O(\alpha_s^3). \quad (1.56)$$

Видно, что схемно-независимые слагаемые, пропорциональные $C(R)^2$ совпадают, в то время как остальные слагаемые совпадают, если выбрать значения конечных констант так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\ln a_\varphi + 1 + g_1 - b_{11} = \frac{1}{2}; \quad \ln a + 1 + g_1 - b_{12} = \frac{1}{2}. \quad (1.57)$$

Это означает, что наш результат согласуется с результатом работы [11], поскольку разница в выборе регуляризации может быть скомпенсирована подходящим выбором схемы вычитаний.

Интегрируя РГ уравнение (1.21) (фиксируя значение α_s) можно получить связь между перенормированной константой связи α (соответствующей группе $U(1)$) и голой константой связи α_0 ,

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{-1} - \alpha^{-1} = & -\frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + d_1 \right) + \frac{\alpha_s}{\pi} \operatorname{tr} C(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + d_2 \right) - \frac{3\alpha_s^2}{2\pi^2} C_2 \operatorname{tr} C(R) \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} - \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left(\ln a_\varphi + 1 - b_{11} \right) + d_{31} \right] + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} N_f T(R) \operatorname{tr} C(R) \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} - \ln \frac{\Lambda}{\mu} \left(\ln a + 1 \right. \right. \\
& \left. \left. - b_{12} \right) + d_{32} \right] - \frac{\alpha_s^2}{2\pi^2} \operatorname{tr} (C(R)^2) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + d_{33} \right) \Big) + O(\alpha_s^3). \tag{1.58}
\end{aligned}$$

Как уже было сказано, произвольные константы d_1 , d_2 , d_{31} , d_{32} и d_{33} , которые появились здесь как константы интегрирования, а также g_1 , g_{21} , g_{22} , g_{23} , b_{11} и b_{12} фиксируют схему вычитаний в рассматриваемом приближении.

Из уравнения (1.58) мы получаем константу перенормировки $Z_\alpha = \alpha/\alpha_0$.

Выражая правую часть уравнения (1.58) в терминах α_{s0} , дифференцируя обе его части по $\ln \mu$, а затем возвращаясь к α_s , получим D -функцию Адлера в терминах перенормированной константы связи,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}(\alpha_s) = & -\frac{3\pi}{2} \frac{d\alpha^{-1}}{d\ln \mu} \Big|_{\alpha_0, \alpha_{s0}=\text{const}} = \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) + \frac{\alpha_s}{\pi} \operatorname{tr} C(R) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{tr} (C(R)^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{2} C_2 \operatorname{tr} C(R) \left(\ln a_\varphi + 1 + d_2 - b_{11} \right) - N_f T(R) \operatorname{tr} C(R) \left(\ln a + 1 + d_2 - b_{12} \right) \right] + O(\alpha_s^3) \right). \tag{1.59}
\end{aligned}$$

В силу присутствия конечных констант это выражение схемно-зависимо⁶. Однако из уравнений (1.55) и (1.59) видно, что слагаемые, пропорциональные $(C(R)^2)_i^j$, в двухпетлевой аномальной размерности и слагаемые, пропорциональные $\operatorname{tr} (C(R)^2)$, в D -функции схемно-независимы. Схемная независимость таких членов для различных РГ-функций обсуждается в работах [54, 79–81] в абелевом случае и в работе [55] в неабелевом.

Зафиксируем теперь значения конечных констант, наложив граничные условия (1.43). Во-первых, зафиксируем значение x_0 и рассмотрим уравнение $Z_{\alpha_s}(\alpha_s, x_0) = 1$. Выражение для $Z_{\alpha_s} = \alpha_s/\alpha_{s0}$ может быть получено из уравнения (1.20) и имеет вид

$$Z_{\alpha_s}(\alpha_s, \ln \Lambda/\mu) = \frac{\alpha_s}{\alpha_{s0}} = 1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[3C_2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) - 2N_f T(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right] + O(\alpha_s^2). \tag{1.60}$$

Тогда рассматриваемое граничное условие дает $b_{11} = b_{12} = -x_0$.

⁶ Отметим, что константы d_{31} , d_{32} и d_{33} не существенны в рассматриваемом приближении.

Аналогично, второе граничное условие в (1.43) можно эквивалентным образом переписать в виде $\alpha_0^{-1}(\alpha, x_0) - \alpha^{-1} = 0$. Тогда уравнение (1.58) дает $d_1 = d_2 = -x_0$ ⁷. Накладывая первое условие из (1.43) на функции (1.54), мы получаем уравнение $g_1 = -x_0$. Поэтому

$$g_1 - b_{11} = 0; \quad g_1 - b_{12} = 0; \quad d_2 - b_{11} = 0; \quad d_2 - b_{12} = 0. \quad (1.61)$$

Следовательно D -функция Адлера, определенная в терминах перенормированной константы связи в НШВЗ-подобной схеме, полученная с использованием регуляризации высшими ковариантными производными, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\alpha_s) = \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) + \frac{\alpha_s}{\pi} \text{tr } C(R) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \text{tr } (C(R)^2) + \frac{3}{2} C_2 \text{tr } C(R) (\ln a_\varphi + 1) \right. \right. \\ \left. \left. - N_f T(R) \text{tr } C(R) (\ln a + 1) \right] + O(\alpha_s^3) \right). \end{aligned} \quad (1.62)$$

В частном случае, когда калибровочной группой является $SU(N)$, а суперполя материи лежат в ее фундаментальном (ϕ) и антифундаментальном ($\tilde{\phi}$) представлении, имеем

$$C_2 = N; \quad T(R) = \frac{1}{2}; \quad C(R)_i^j = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_i^j; \quad \dim(R) = N, \quad (1.63)$$

поэтому в НШВЗ-подобной схеме аномальная размерность ($\tilde{\gamma}(\alpha_s)_i^j \equiv \tilde{\gamma}(\alpha_s) \delta_i^j$) и D -функция Адлера приобретают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\alpha_s) = -\frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2 - 1}{2N} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{N^2 - 1}{2N} \right)^2 - \frac{3}{4} (N^2 - 1) (\ln a_\varphi + 1) + \frac{N_f}{4N} (N^2 - 1) \right. \\ \left. \times (\ln a + 1) \right] + O(\alpha_s^3); \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\alpha_s) = \frac{3}{2} N \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{N^2 - 1}{2N} + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{N^2 - 1}{2N} \right)^2 + \frac{3}{4} (N^2 - 1) (\ln a_\varphi + 1) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{N_f}{4N} (N^2 - 1) (\ln a + 1) \right] + O(\alpha_s^3) \right). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Сравнивая (1.40) с (1.55) и (1.42) с (1.59), приходим к выводу, что условия (1.61) приводят к тождественному равенству как между γ и $\tilde{\gamma}$, так и между D и $\tilde{D}$ в рассматриваемом приближении. Это в точности совпадает с общим утверждением, доказанным в предыдущем разделе

⁷ Значения для d_{3i} и g_{2i} не будут вычислены, так как они не входят в выражения для $\tilde{\gamma}(\alpha_s)$ и $\tilde{D}(\alpha_s)$ в рассматриваемом приближении.

ле. Более того, очевидно, что в схеме вычитаний (1.43) ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированной константы связи, удовлетворяют НШВЗ-подобному соотношению

$$\tilde{D}(\alpha_s) = \frac{3}{2} \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \left(\dim(R) - \text{tr } \tilde{\gamma}(\alpha_s) \right) \quad (1.66)$$

в рассматриваемом приближении.

1.7. Заключение к главе

В трехпетлевом приближении для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД, регуляризованной высшими ковариантными производными, мы проверили справедливость НШВЗ-подобного соотношения (1.3) (и его более общей версии (1.24)), которое связывает D -функцию Адлера с аномальной размерностью суперполей материи, когда обе ренормгрупповые функции определены в терминах голой константы связи. Более того, мы получили явное выражение для функции Адлера в НШВЗ-подобной схеме в порядке $O(\alpha_s^2)$.

В полном соответствии с работой [34] трехпетлевая D -функция, определенная в терминах голой константы связи дается интегралами от двойных полных производных. После интегрирования по импульсу петли материи получившиеся интегралы совпадают с интегралами, дающими двухпетлевую аномальную размерность. Отметим, что в вычислениях мы используем БРСТ-инвариантную версию регуляризации высшими ковариантными производными. Хотя это и приводит к сложным выражениям, при выборе регулятора в форме (1.39) ренормгрупповые функции в рассматриваемом приближении могут быть явно вычислены. В отличие от ренормгрупповых функций, определенных в терминах голой константы связи, которые удовлетворяют НШВЗ-подобному соотношению независимо от схемы перенормировки при регуляризации высшими ковариантными производными, для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи, это соотношение справедливо только в некоторой схеме вычитаний. В нашей работе мы предлагаем предписание, фиксирующее эту схему во всех петлевых порядках. То, что это предписание действительно фиксирует НШВЗ-подобную схему, мы также проверили явным вычислением в трехпетлевом приближении.

Было бы также интересно вычислить вклад в D -функцию Адлера порядка $O(\alpha_s^2)$ в схеме $\overline{\text{DR}}$. Принимая во внимание результаты работ [11, 12], можно предположить, что НШВЗ-подобное соотношение (1.66) не выполняется в схеме $\overline{\text{DR}}$, и необходима специально

подобранная конечная перенормировка, чтобы получить ренормгрупповые функции, для которых оно справедливо.

Глава 2

**Вклад в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории
Янга–Миллса, регуляризованной высшими
ковариантными производными, от диаграмм,
содержащих две юкавские вершины, в трехпетлевом
приближении**

2.1. Новая форма НШВЗ-соотношения

Наличие суперсимметрии в калибровочной теории значительно улучшает ее ультрафиолетовое поведение. В качестве примера можно говорить об отсутствии квадратичных расходимостей в квантовых поправках к массам скалярных частиц, а также о знаменитых теоремах о неперенормировке. Одна из них гласит, что суперпотенциал не получает расходящихся квантовых поправок [1], другая говорит о том, что β -функция $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса получает вклады лишь в однопетлевом приближении [2], еще одна утверждает, что $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса конечна [3, 4]. Конечно, столь привлекательные свойства теорий с расширенной суперсимметрией делают их интересным объектом для изучения. Тем не менее реалистические суперсимметричные теории физики частиц при доступных энергиях основываются прежде всего на суперсимметричных теориях Янга–Миллса с $\mathcal{N} = 1$. (Связано это прежде всего с тем, что фермионы Стандартной модели со спиральностью $+1/2$ лежат в комплексном представлении группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, в то время как в теориях с расширенной суперсимметрией им приходится лежать в действительных представлениях калибровочной группы.) Однако и в этом случае лишь одной суперсимметрии достаточно, чтобы получить некоторые соотношения между расходимостями и, следовательно, ренормгрупповыми функциями. Мы говорим здесь в первую очередь об НШВЗ-соотношении (1.4). Кроме того, можно установить аналогичные ему соотношения для функции Адлера [33, 34], как мы видели в предыдущей главе, или даже для массы калибрино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной калибровочной теории [9, 43].

Поскольку ренормгрупповые функции, входящие в подобные соотношения, зависят от

выбора схемы вычитаний (β -функция с трех петель, аномальная размерность с двух), необходимо в первую очередь задаться вопросом, в какой схеме вычитаний они справедливы. В настоящее время самой популярной регуляризацией, используемой для практических вычислений в суперсимметричных теориях, является размерная редукция [10], идущая бок о бок с соответствующей модифицированной схемой минимальных вычитаний, так называемой $\overline{\text{DR}}$ -схемой. Однако, как уже отмечалось, с использованием этой регуляризации не удалось построить общего предписания, фиксирующего схему, в которой выполняется НШВЗ-соотношение (НШВЗ-схема). Размерная редукция обладает и другими недостатками, о которых уже говорилось выше [50, 57, 58]. С другой стороны, можно работать с регуляризацией высшими ковариантными производными [38]. Кроме того, можно также определять ренормгрупповые функции в терминах голых зарядов, как это делалось в некоторых оригинальных работах (см., например, [6]). Преимуществом использования высших ковариантных производных является сохранение максимального числа симметрий и особая структура петлевых интегралов, о которой говорилось в разделе 1.1, а преимуществом использования ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых зарядов, является их независимость от схемы вычитаний при фиксированной регуляризации [16]. Тогда, чтобы зафиксировать НШВЗ (или НШВЗ-подобную) схему вычитаний, необходимо сначала доказать во всех порядках теории возмущений, что НШВЗ (или НШВЗ-подобное) соотношение выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых зарядов, а затем попытаться наложить подходящие граничные условия на константы перенормировки, так чтобы ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, совпадали по форме с ренормгрупповыми функциями, определенными в терминах голых констант связи.

Эта программа уже была выполнена для β -функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД [14–16], для D -функции Адлера $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД [33, 34, 82] и даже для массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД [43, 65]. При этом в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КЭД было показано, что НШВЗ-соотношение является прямым следствием более общего соотношения между двухточечными функциями Грина калибровочного суперполя и суперполей материи, о котором мы будем говорить несколько позже [15]. Случай β -функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса остается пока неразрешенным.

Одна из сложностей на пути к полному доказательству соотношения для НШВЗ β -функции в неабелевом случае до недавнего времени заключалась в следующем. Точное

соотношение для D -функции Адлера (1.3), обсуждавшееся в предыдущей главе, связывает вклад в D -функцию в некотором порядке теории возмущений с вкладом в аномальную размерность суперполей материи в предыдущем порядке. На уровне диаграмм возникновение этого соотношения можно интерпретировать следующим образом. Взяв граф без внешних линий и присоединив к нему две линии абелева калибровочного суперполя всеми возможными способами, мы получаем диаграммы, дающие вклад в D -функцию Адлера. Взяв тот же граф и разрезав в нем линии материи всеми возможными способами, мы получим диаграммы, которые дают вклад в аномальную размерность. Связать вклад в D -функцию с соответствующим вкладом в аномальную размерность позволяет факторизация вкладов в D -функцию в интегралы от двойных полных производных. В случае общей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса соотношение для НШВЗ β -функции (1.4), как видно, связывает вклад в β -функцию в некотором порядке теории возмущений со вкладами в аномальную размерность суперполей материи во всех предыдущих порядках из-за знаменателя, представляющего собой сумму бесконечной геометрической прогрессии. Поэтому интерпретация, которую мы использовали для случая D -функции Адлера, здесь не работает.

Однако эту трудность удастся обойти. Мы уже говорили о том, что высшие ковариантные производные можно вводить в действие с сохранением или без сохранения БРСТ-инвариантности. Использование БРСТ-неинвариантной версии регуляризации несколько упрощает вычисления (см., например, [59]), однако БРСТ-инвариантность может сыграть важную роль при доказательстве НШВЗ-соотношения для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в терминах голых констант связи. В частности, использование тождеств Славнова–Тейлора, являющихся следствием БРСТ-инвариантности, позволило доказать теорему о неперенормировке для вершин с линией квантового калибровочного суперполя и двумя линиями духов Фаддеева–Попова [17]. Это, в свою очередь, позволило переписать НШВЗ-соотношение в несколько ином виде:

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi}(3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0) - 2C_2\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) + C(R)_i^j \gamma_j^i(\alpha_0, \lambda_0)/r). \quad (2.1)$$

Особенностью этого соотношения по сравнению с первоначальной формой НШВЗ-соотношения (1.4) является то, что в уравнении (1.4) в правой части содержится лишь аномальная размерность суперполей материи, в то время как в уравнении (2.1) в правой части также присутствует аномальная размерность духов Фаддеева–Попова γ_c и квантового калибровочного суперполя γ_V . При этом, как видно, оно не содержит знаменателя. Такая

форма НШВЗ-соотношения значительно упрощает его получение в вычислениях по теории возмущений, равно как и доказательство во всех порядках теории возмущений, поскольку допускает такую же интерпретацию, как и в случае D -функции Адлера. Входящие в него ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи, можно легко представить в виде производных по логарифму параметра обрезания от соответствующих двухточечных функций Грина в пределе нулевого внешнего импульса. Поэтому эту версию НШВЗ-соотношения можно записать в виде ограничения непосредственно на функции Грина [17]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} (d^{-1} - \alpha_0^{-1})|_{\alpha, \lambda = \text{const}, p \rightarrow 0} &= -\frac{3C_2 - T(R)}{2\pi} \\ &- \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} (-2C_2 \ln G_c - C_2 \ln G_V + C(R)_i^j (\ln G)_j^i / r)|_{\alpha, \lambda = \text{const}, q \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

(Отметим, что в случае использования размерной редукции предел нулевого внешнего импульса для функций Грина плохо определен.) В этом случае это ограничение можно представить как ограничение на фейнмановские амплитуды в пределе нулевого внешнего импульса, которое очень наглядно изображается графически в виде правила разрезания, аналогичного обсуждавшемуся в предыдущей главе. Единственное отличие заключается в том, что тогда как ранее мы разрезали лишь линии материи, то теперь также необходимо разрезать линии квантового калибровочного суперполя и духов Фаддеева–Попова. Как соотношение (2.1), так и (2.2) еще строго не доказаны во всех порядках теории возмущений. Они были проверены непосредственным вычислением в двухпетлевом приближении при использовании БРСТ-неинвариантной версии регуляризации высшими ковариантными производными [83]. Однако, как известно, схемная зависимость β -функции проявляется начиная с трехпетлевого приближения. Поэтому по-настоящему нетривиальная проверка соотношения (2.1) (или (2.2)) начинается с вычисления β -функции, определенной в терминах голых констант связи, в трехпетлевом приближении. Тогда если она будет удовлетворять соотношению (2.1) (или, эквивалентно, (2.2) будет найдено справедливым), то к НШВЗ-схеме вычитаний приведет простое граничное условие на константы перенормировки [17]

$$\begin{aligned} Z_\alpha(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) &= 1, \quad Z_i^j(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) = \delta_i^j, \quad Z_c(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) = 1, \\ Z_V(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) &= 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где x_0 — произвольное фиксированное конечное число, которое можно положить равным

нулю, Z_α — константа перенормировки калибровочной константы связи, Z_i^j — константа перенормировки для суперполей материи, Z_c — константа перенормировки для духов Фаддеева-Попова, Z_V — константа перенормировки для квантового калибровочного суперполя. Таким образом, нам необходимо «лишь» выражение для β -функции в трехпетлевом приближении. Такое вычисление технически очень сложно, однако его можно провести для отдельных слагаемых в β -функции, зависящих от схемы вычитаний. В работе [62] в трехпетлевом приближении были вычислены вклады в β -функцию четвертого порядка по юкавским константам, для них было проверено соотношение (2.1) и зафиксирована НШВЗ-схема вычитаний. В этой главе мы приводим вычисление вкладов в β -функцию от диаграмм второй степени по юкавским константам и, одновременно проверяя работу условия (2.3), фиксируем НШВЗ-схему вычитаний для соответствующих слагаемых в β -функции в трехпетлевом приближении.

2.2. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, ее квантование и регуляризация

Как было сказано, эта глава посвящена вычислению вкладов в β -функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса от диаграмм, квадратичных по юкавским константам, в трехпетлевом приближении. Действие для этой теории с материей в произвольном представлении (приводимом или неприводимом) простой калибровочной группы с суперпотенциалом третьей степени по киральным суперполям в безмассовом пределе имеет вид

$$S = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{2V} \phi + \left(\frac{1}{6} \int d^4x d^2\theta \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{с.с.} \right). \quad (2.4)$$

Здесь W_α — киральное спинорное суперполе, содержащее тензор напряженности неабелева калибровочного поля и поле калибрино. Мы уже обсуждали, как оно выражается через производные калибровочного суперполя V в предыдущей главе. Символом g_0 мы обозначаем голую калибровочную константу связи и предполагаем, что в интеграле со следом в (2.4) и суперполе V , и суперполе W_α стандартным образом раскладываются по генераторам фундаментального представления, умноженным на g_0 и нормированным на $1/2$.

Кроме того, у нас также имеется суперпотенциал со взаимодействием третьей степени, коэффициенты при котором, юкавские константы связи, удовлетворяют следующему

условию, необходимому для калибровочной инвариантности действия:

$$\lambda_0^{ijl}(T_A)_l^k + \lambda_0^{ilk}(T_A)_l^j + \lambda_0^{ljk}(T_A)_l^i = 0. \quad (2.5)$$

Для вычислений по теории возмущений в калибровочных теориях удобнее всего использовать метод фонового поля, поскольку фоновая калибровочная инвариантность действия гарантирует в этом случае калибровочную инвариантность эффективного действия. Как известно, в несуперсимметричной теории Янга–Миллса введение фонового поля производится путем замены векторного поля в действии на сумму классической и квантовой частей [84]. Однако в суперсимметричном случае эта процедура осуществляется нелинейно [85]:

$$e^{2V} \rightarrow e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}, \quad (2.6)$$

где V — квантовое калибровочное суперполе, а суперполя Ω и Ω^+ вместе образуют классическое калибровочное суперполе,

$$e^{2V} = e^{\Omega^+} e^{\Omega}. \quad (2.7)$$

После того как замена (2.6) в действии (2.4) произведена, мы получаем действие, зависящее и от классического, и от квантового суперполя, в виде

$$S = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \phi + \left(\frac{1}{6} \int d^4x d^2\theta \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{с.с.} \right), \quad (2.8)$$

где суперполе напряженности W_α можно, как и обычный тензор напряженности для калибровочного поля, представить в виде суммы квантовой и классической частей

$$W_\alpha = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-\Omega} e^{-2V} e^{-\Omega^+} D_\alpha e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega}) = \frac{1}{8} \bar{D}^2 (e^{-2V} D_\alpha e^{2V}) + \frac{1}{8} e^{-\Omega} \bar{\nabla}^2 (e^{-2V} \nabla_\alpha e^{2V}) e^{\Omega}. \quad (2.9)$$

Здесь на квантовое калибровочное суперполе V действуют фоновые ковариантные спинорные производные

$$\nabla_\alpha = e^{-\Omega^+} D_\alpha e^{\Omega^+}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e^{\Omega} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-\Omega}. \quad (2.10)$$

Используя фоновую калибровочную инвариантность можно перейти в калибровку, в которой $\Omega = \Omega^+ = V$ [85].

Теперь определим полные (в отличие от фоновых) ковариантные спинорные производные, которые нам будут необходимы для регуляризации действия БРСТ-инвариантным образом,

$$\nabla_\alpha = e^{-2V} \bar{\nabla}_\alpha e^{2V}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}. \quad (2.11)$$

При вычислении фейнмановских амплитуд комбинация $(\bar{\nabla}^2 \nabla^2)^n$, где n — натуральное число, фактически превращается в $(\partial^2)^n$ [38]. С учетом этого мы вводим в действие (2.4) такого рода комбинации следующим образом

$$S_\Lambda = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr Re} \int d^4x d^2\theta e^\Omega W^\alpha e^{-\Omega} \left[R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) - 1 \right]_{Adj} e^\Omega W_\alpha e^{-\Omega} + \\ + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ e^{\Omega^+} e^{2V} \left[F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) - 1 \right] e^\Omega \phi, \quad (2.12)$$

где $R(x)$ и $F(x)$ — некоторые произвольные функции, которые стремятся к бесконечности при $x \rightarrow \infty$ и удовлетворяют условию $R(0) = F(0) = 1$. Нам также потребуется, чтобы они были хотя бы трижды дифференцируемыми, но для простоты мы будем считать, что это полиномы с положительными коэффициентами. Индекс «*Adj*» означает, что оператор, несущий такой индекс, действует на поле, преобразующееся по присоединенному представлению калибровочной группы. В уравнении (2.12) мы также ввели размерный параметр обрезания Λ .

После введения высших степеней ковариантных производных (2.12) действие по-прежнему обладает и квантовой, и фоновой калибровочной инвариантностью. Фоновые калибровочные преобразования имеют вид

$$V \rightarrow e^{iK} V e^{-iK}, \quad e^\Omega \rightarrow e^{iK} e^\Omega e^{-iA_0}, \quad e^{-\Omega^+} \rightarrow e^{iK} e^{-\Omega^+} e^{-iA_0^+}, \quad \phi \rightarrow e^{iA_0} \phi, \quad (2.13)$$

где K — произвольное эрмитово суперполе, A_0 — произвольное киральное суперполе, т.е. $\bar{D}_{\dot{\alpha}} A_0 = 0$. Квантовые калибровочные преобразования имеют вид

$$e^{-2V} \rightarrow e^{iA} e^{-2V} e^{-iA^+}, \quad \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Omega^+ \rightarrow \Omega^+, \quad \phi \rightarrow e^{-\Omega} e^{iA} e^\Omega \phi, \quad (2.14)$$

где A — фово-киральное суперполе, т.е. $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} A = 0$. Под действием фоновых калибровочных преобразований как фоновые ковариантные, так и полные ковариантные производные имеют одинаковый закон преобразования:

$$\nabla_\alpha \rightarrow e^{iK} \nabla_\alpha e^{-iK}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{iK} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} e^{-iK} \quad (2.15)$$

плюс то же самое для $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}$ и $\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}$. При квантовых калибровочных преобразованиях фоновые ковариантные производные не преобразуются, а полные ковариантные производные преобразуются по закону

$$\nabla_{\alpha} \rightarrow e^{iA} \nabla_{\alpha} e^{-iA}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{iA} \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} e^{-iA}. \quad (2.16)$$

Теперь, чтобы провести квантование по методу Фаддеева–Попова, нам необходимо добавить к действию член, фиксирующий калибровку, который будет нарушать квантовую калибровочную инвариантность, но будет инвариантен по отношению к фоновым калибровочным преобразованиям. Выберем его в виде

$$S_{gf} = -\frac{1}{16\xi_0 g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right)_{Adj} \bar{\nabla}^2 V, \quad (2.17)$$

где ξ_0 — голый калибровочный параметр.

Далее к действию необходимо добавить действие для духов Фаддеева–Попова и для духов Нильсена–Каллош. Действие для духов Фаддеева–Попова имеет вид

$$S_{FP} = \frac{1}{g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta (e^{\Omega} \bar{c} e^{-\Omega} + e^{-\Omega^+} \bar{c}^+ e^{\Omega^+}) \times \left(\left(\frac{V}{1-e^{2V}} \right)_{Adj} e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}} \right)_{Adj} e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right), \quad (2.18)$$

а для духов Нильсена–Каллош вид

$$S_{NK} = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta e^{-\Omega^+} b^+ e^{\Omega^+} R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right)_{Adj} e^{\Omega} b e^{-\Omega}. \quad (2.19)$$

Вклады последних ограничиваются однопетлевым приближением, а первые в трехпетлевом приближении никак не фигурируют в диаграммах, квадратичных по юкавским константам.

Действие после фиксации калибровки обладает инвариантностью относительно БРСТ-преобразований:

$$\begin{aligned} \delta V &= -\varepsilon \left(\left(\frac{V}{1-e^{2V}} \right)_{Adj} e^{-\Omega^+} c^+ e^{\Omega^+} + \left(\frac{V}{1-e^{-2V}} \right)_{Adj} e^{\Omega} c e^{-\Omega} \right), & \delta \Omega &= \delta \Omega^+ = 0, \\ \delta \bar{c} &= -\frac{\varepsilon}{16\xi_0} \left[e^{-\Omega} \bar{\nabla}^2 R \left(-\frac{\nabla^2 \bar{\nabla}^2}{16\Lambda^2} \right) \nabla^2 \right]_{Adj} V, & \delta \bar{c}^+ &= -\frac{\varepsilon}{16\xi_0} \left[e^{\Omega^+} \nabla^2 R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) \bar{\nabla}^2 \right]_{Adj} V, \\ \delta c &= \varepsilon c^2, & \delta c^+ &= \varepsilon (c^+)^2, & \delta b &= \delta b^+ = 0, & \delta \phi &= \varepsilon c \phi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где ε — не зависящий от координат антикоммутирующий вещественный параметр.

Зафиксируем калибровочный параметр ξ_0 наиболее простым образом. Согласно однопетлевому результату (1.10) для перенормировки калибровочного параметра простейший выбор соответствует $\xi = 1$. В этом случае член, фиксирующий калибровку, принимает вид

$$S_{gf} = -\frac{1}{16g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right)_{Adj} \bar{\nabla}^2 V, \quad (2.21)$$

где g — перенормированная константа связи.

Как известно, введение членов (2.12) в действие сокращает расходимости в диаграммах начиная лишь с двухпетлевого приближения. Поэтому к действию необходимо еще добавить два набора суперполей Паули–Вилларса аналогично тому, как мы это сделали в предыдущей главе: три коммутирующих киральных суперполя в присоединенном представлении для сокращения расходимостей в петлях квантового калибровочного суперполя и суперполей духов Фаддеева–Попова и одно антикоммутирующее киральное суперполе в том же представлении, что и суперполя материи¹. Эти суперполя в юкавском взаимодействии не участвуют, поэтому в трехпетлевом приближении в рассматриваемом классе диаграмм не появляются.

Благодаря явной калибровочной инвариантности, квантовые поправки в двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя являются поперечными. Поперечными являются и квантовые поправки к двухточечной функции Грина квантового калибровочного суперполя, но по другой причине: в силу БРСТ-инвариантности действия и следующих из нее тождеств Славнова–Тейлора [86]. Поэтому квадратичная по фоновому и квантовому калибровочным супер полям часть эффективного действия имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{V,V}^{(2)} - S_{gf} = & -\frac{1}{8\pi} \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta \mathbf{V}(-p, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(p, \theta) d^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/p) - \\ & -\frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta V(-k, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(k, \theta) G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/k), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\alpha_0 = g_0^2/4\pi$. В то же время поправки к двухточечной функции Грина суперполей материи могут быть записаны в терминах функции G_i^j , входящей в эффективное действие следующим образом:

$$\Gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} d^4\theta \phi^{+i}(-q, \theta) G_i^j(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q) \phi_j(q, \theta). \quad (2.23)$$

¹ Идея сочетания метода высших ковариантных производных и регуляризации Паули–Вилларса принадлежит Славнову [73], см. также [61].

Определим теперь перенормированные константы связи и константы перенормировки. Перенормированная константа связи $\alpha = g^2/4\pi$ определяется так, чтобы функция

$$d^{-1}(\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \lambda_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \Lambda/p), \quad (2.24)$$

где μ — масштаб перенормировки, была конечной в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. В этом условии λ обозначает перенормированные юкавские константы, определение которых будет дано ниже. Мы также можем определить константу перенормировки заряда $Z_\alpha \equiv \alpha/\alpha_0$. Далее, введем константу перенормировки для квантового калибровочного суперполя V и набор констант перенормировки Z_i^j для суперполей материи таким образом, что

$$V^A = Z_V(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu))(V_R)^A, \quad \phi_i = Z_i^j(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu))(\phi_R)_j, \quad (2.25)$$

где индекс « R » обозначает перенормированные величины. Определим их так, чтобы

$$\begin{aligned} Z_i^k(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu))G_k^j(\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \lambda_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \Lambda/q), \\ Z_V^2(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu))G_V(\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \lambda_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \Lambda/k) \end{aligned} \quad (2.26)$$

также были конечными в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Что касается перенормировки юкавских констант, то в силу теоремы о неперенормировке для суперпотенциала она определяется константами перенормировки для суперполей материи,

$$\lambda^{ijk} = \sqrt{Z_t^i} \sqrt{Z_m^j} \sqrt{Z_n^k} \lambda_0^{lmn}. \quad (2.27)$$

Мы опять будем работать с двумя видами ренормгрупповых функций, т.е. с ренормгрупповыми функциями, определенными в терминах голых констант связи, и ренормгрупповыми функциями, определенными в терминах перенормированных констант связи. В терминах голых констант связи β -функция и аномальные размерности определяются как

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = - \left. \frac{d\alpha_0^{-1}(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}}; \quad (2.28)$$

$$\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = - \left. \frac{d \ln Z_V(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}}; \quad (2.29)$$

$$\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = - \left. \frac{d(\ln Z)_i^j(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} \right|_{\alpha, \lambda = \text{const}}. \quad (2.30)$$

В силу определения перенормированной константы связи α и констант перенормировки Z_V и Z_i^j эти определения можно переписать в терминах производных по $\ln \Lambda$ от соответствующих двухточечных функций Грина

$$\frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d \ln \Lambda} (d^{-1} - \alpha_0^{-1}) \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}, p \rightarrow 0}; \quad (2.31)$$

$$\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \ln G_V(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/k)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}, k \rightarrow 0}; \quad (2.32)$$

$$\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = \frac{d(\ln G)_i^j(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/q)}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}, q \rightarrow 0}. \quad (2.33)$$

Эти определения наиболее удобны для непосредственного вычисления ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых зарядов, ими мы и будем пользоваться в дальнейшем.

В то же время непосредственный физический смысл можно придать именно перенормированным, а не голым константам связи. В связи с этим чаще ренормгрупповые функции определяют в терминах перенормированных, а не голых констант связи [77]. Зная перенормированные заряды и константы перенормировки, их можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} &= - \frac{d\alpha^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, \Lambda/\mu)}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_0, \lambda_0 = \text{const}}; \\ \tilde{\gamma}_V(\alpha, \lambda) &= \frac{d \ln Z_V(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_0, \lambda_0 = \text{const}}; \\ \tilde{\gamma}_i^j(\alpha, \lambda) &= \frac{d(\ln Z)_i^j(\alpha, \lambda, \Lambda/\mu)}{d \ln \mu} \Big|_{\alpha_0, \lambda_0 = \text{const}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Перенормированные заряды и константы перенормировки определяются неоднозначно, они содержат конечные постоянные, конкретные значения которых определяются выбором той или иной схемы вычитаний. В связи с этим соответствующие ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, также содержат эти константы и зависят, вообще говоря, от схемы вычитаний. Ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи, напротив, от выбора схемы вычитаний не зависят [16].

2.3. Вклад в β -функцию

Этот раздел посвящен вычислению вкладов диаграмм, содержащих две юкавские вершины, в β -функцию калибровочной константы связи в трехпетлевом приближении. Оче-

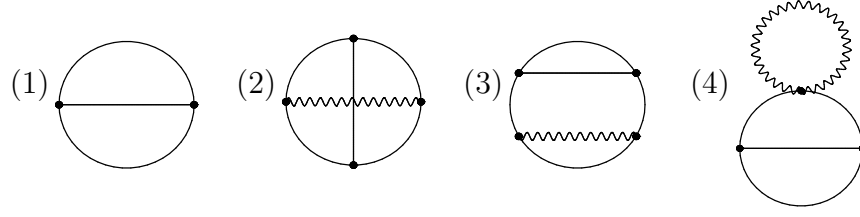


Рис. 2.1. Диаграммы, содержащие по две вершины юкавского взаимодействия, дающие вклад в β -функцию в трехпетлевом приближении

видно, что несмотря на то, что мы ограничиваемся лишь квадратичными по юкавским константам вкладами, в трехпетлевом приближении соответствующих диаграмм все еще очень много. Однако можно их систематизировать следующим образом: нужно удалить в каждой такой диаграмме две внешние линии фонового калибровочного суперполя и вести лишь учет различных диаграмм без внешних линий, полученных таким образом. Все такие диаграммы, квадратичные по юкавским константам, дающие вклад в трехпетлевом приближении, изображены на рисунке 2.1. Более того, вычисление вкладов в β -функцию удобнее начинать именно с того, чтобы составить всевозможные такие диаграммы без внешних линий. Далее, вычисления показывают, что и проверка тождества (2.1) или (2.2) также проводится отдельно для каждой такой диаграммы. Она осуществляется следующим образом: мы берем диаграмму из рисунка 2.1, присоединяем к ней внешние линии фонового калибровочного суперполя всеми возможными способами, вычисляем вклад каждой получившейся диаграммы в пределе нулевого внешнего импульса. Предположительно, полный результат для каждой из диаграмм на рисунке 2.1 дается интегралом от двойной полной производной (и скоро мы увидим, что так и есть). Используя это свойство, мы легко избавляемся от одного интегрирования по петлевому импульсу и сравниваем полученный результат с соответствующим вкладом в аномальные размерности, стоящие в правой части тождества (2.1). То, как получить соответствующий вклад и какие диаграммы его дают, будет изложено несколько позже, сейчас лишь скажем, что нам потребуется, как и в предыдущей главе, разрезать диаграммы, дающие вклад в β -функцию.

При вычислении вкладов в β -функцию юкавские константы λ_0^{ijk} встречаются в различных комбинациях, в которых их индексы сворачиваются с индексами генераторов представления калибровочной группы. С помощью свойства (2.5) все такие комбинации можно свести к трем различным, которые мы будем обозначать для краткости X , Y и Z и которые по определению равны

$$\begin{aligned}
X &\equiv \frac{1}{2r} (C(R))^2 {}_i^j \lambda_{0jln}^* \lambda_0^{iln}; \\
Y &\equiv \frac{1}{r} C(R)_i^j C(R)_m^l \lambda_{0jln}^* \lambda_0^{imn}; \\
Z &\equiv \frac{1}{4r} C_2 C(R)_i^j \lambda_{0lkj}^* \lambda_0^{lki},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

где, мы напоминаем, $C(R)_i^j = (T^A T^A)_i^j$, $C_2 \delta^{CD} = f^{ABC} f^{ABD}$, $r = \delta^{AA}$. Ниже мы выпишем вклад каждой диаграммы на рисунке 2.1 в величину

$$\left. \frac{d}{d \ln \Lambda} (d^{-1} - \alpha_0^{-1}) \right|_{p \rightarrow 0} = \frac{\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2}. \tag{2.36}$$

Итак, эти вклады равны (вклад четвертой диаграммы был вычислен совместно с В.Ю. Шахановым, см. [87])

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф(1)}) &= -2\pi \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{r} C(R)_i^j \lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* \times \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{k^2 F_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k}};
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф(2)}) &= 8\pi \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g_0^2 \left(2Z \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (X - Y) \frac{\partial}{\partial l^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial l_\mu} + \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) + X \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) \frac{N(q, k, l)}{k^2 R_k q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} (q+k-l)^2 F_{q+k-l}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{(q-l)^2 F_{q-l} l^2 F_l};
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф(3)}) &= -8\pi \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g_0^2 \left(4Z \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2X \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} - \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) + Y \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \frac{q^2 L(q, q+k)}{k^2 R_k (q^2 F_q)^2 (q+l)^2 F_{q+l} (q+k)^2 F_{q+k} l^2 F_l};
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф(4)}) &= 8\pi \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} g_0^2 \left(4Z \frac{\partial}{\partial k^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu} - \frac{\partial}{\partial q_\mu} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2X \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} - \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) + Y \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q + \right. \\
&\quad \left. + \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} \frac{q^2}{k^2 R_k (q^2 F_q)^2 (q+l)^2 F_{q+l} l^2 F_l},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

где $R_k \equiv R(k^2/\Lambda^2)$, $F_q \equiv F(q^2/\Lambda^2)$, а штрих и нижний индекс « q » в (2.40) означает дифференцирование по q^2/Λ^2 . Кроме того, помимо обозначений X , Y и Z , для сокращения записи нам также пришлось ввести функции $N(q, k, l)$ в (2.38) и $L(q, q+k)$ в (2.39),

$$N(q, k, l) = l^2 F_{q+k} F_{q+k-l} - (q-l)^2 ((q+k-l)^2 - l^2) F_{q+k} \frac{F_{q+k-l} - F_{q-l}}{(q+k-l)^2 - (q-l)^2} -$$

$$- q^2 ((q+k)^2 - l^2) F_{q+k-l} \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} + q^2 (q-l)^2 (l^2 - (q+k)^2 - (q+k-l)^2) \times$$

$$\times \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \frac{F_{q+k-l} - F_{q-l}}{(q+k-l)^2 - (q-l)^2}; \quad (2.41)$$

$$L(q, q+k) = F_q F_{q+k} + F_q q^2 \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} + F_{q+k} (q+k)^2 \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} +$$

$$+ 2q^2 (q+k)^2 \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right)^2. \quad (2.42)$$

Сделаем несколько кратких замечаний. Интегралы (2.38)–(2.40), очевидно, имеют довольно сложную структуру. Основным источником этого усложнения является второе слагаемое в уравнении (2.12), которое порождает большое число новых вершин взаимодействия. Это можно увидеть по форме выражений для $N(q, k, l)$ и $L(q, q+k)$. Если бы не было слагаемых с высшими производными, в каждой из этих функций осталось бы лишь первое слагаемое. Что касается вклада четвертой диаграммы, то он был бы равен в точности нулю. Тем не менее, помимо этого усложнения, высшие ковариантные производные приносят и большое упрощение в том, что все эти вклады даны интегралами от двойных полных производных. Такая структура позволяет избавиться от интеграла по одному из петлевых импульсов и превратить эти вклады фактически в интегралы с меньшим количеством петель (как с формальной точки зрения, поскольку количество импульсов, по которым ведется интегрирование, становится на один меньше, так и в том смысле, что получающиеся интегралы совпадают с теми, которые дают вклады в аномальные размерности в порядке, на единицу меньше, как мы позже увидим). Причина этого в том, что поскольку мы работаем в безмассовой теории, пропагаторы киральных суперполей материи содержат сингулярности вида $1/q^2$. Наши диаграммы также содержат линии квантового калибровочного суперполя, чей пропагатор также имеет сингулярность подобного рода. Таким образом, когда двойная полная производная действует на $1/q^2$, в результате получается нуль везде, за исключением точки $q^2 = 0$. На самом деле, как известно,

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{q^2} = -4\pi^2 \delta^4(q). \quad (2.43)$$

Таким образом, интегралы (2.37)–(2.40) должны на самом деле пониматься не просто как интегралы от двойных полных производных, которые обычно равны нулю, а как интегралы от двойных полных производных минус вклады, образующиеся в результате интегрирования

с дельта-функцией. С другой точки зрения, которая эквивалентна первой, эти интегралы можно понимать как интегралы по всему четырехмерному евклидову пространству, из которого вырезаны особые точки. Именно так они и понимались в разделе 1.3 предыдущей главы, что нашло свое отражение в формуле (1.35).

Используя формулу (1.35) или (2.43), мы избавляемся во вкладах (2.37)–(2.40) от интегрирования по одному из петлевых импульсов и в результате получаем

$$\frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(1)}) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{r} C(R)_i^j \lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* \frac{1}{(k^2 F_k)^2}; \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(2)}) = & \frac{4}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} Z g_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\lim_{k \rightarrow 0} N(q, k, l)}{(q^2 F_q)^2 ((q-l)^2 F_{q-l})^2 l^2 F_l} - \\ & - \frac{2}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} (X - Y) g_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\lim_{l \rightarrow 0} N(q, k, l)}{k^2 R_k (q^2 F_q)^2 ((q+k)^2 F_{q+k})^2} + \\ & + \frac{8}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} X g_0^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\lim_{q \rightarrow 0} N(q, k, l)}{k^2 R_k k^2 F_k (k-l)^2 F_{k-l} (l^2 F_l)^2}; \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(3)}) = & -\frac{8}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} Z g_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{q^2 \lim_{k \rightarrow 0} L(q, q+k)}{(q^2 F_q)^3 (q+l)^2 F_{q+l} l^2 F_l} - \\ & - \frac{4}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} X g_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{L(0, k)}{k^2 R_k k^2 F_k (l^2 F_l)^2} + \frac{k^2 L(k, 0)}{k^2 R_k (k^2 F_k)^2 (l+k)^2 F_{l+k} l^2 F_l} \right) - \\ & - \frac{4}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} Y g_0^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{L(q, q+k) q^2}{k^2 R_k (q^2 F_q)^3 (q+k)^2 F_{q+k}}; \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(4)}) = & \frac{8}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} Z g_0^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q + \right. \\ & + \left. \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} \frac{q^2}{(q^2 F_q)^2 (q+l)^2 F_{q+l} l^2 F_l} + \\ & + \frac{4}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} X g_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q + \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} \times \\ & \times \frac{1}{k^2 R_k (l^2 F_l)^2} + \frac{4}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} Y g_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q + \right. \\ & + \left. \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} \frac{q^2}{k^2 R_k (q^2 F_q)^3}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

В этих интегралах

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} N(q, k, l) = & l^2 \left(F_q + F'_q \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \left(F_{q-l} + F'_{q-l} \frac{(q-l)^2}{\Lambda^2} \right) - ((q-l)^2)^2 \frac{F'_{q-l}}{\Lambda^2} \left(F_q + F'_q \frac{q^2}{\Lambda^2} \right) \\ & - (q^2)^2 \frac{F'_q}{\Lambda^2} \left(F_{q-l} + F'_{q-l} \frac{(q-l)^2}{\Lambda^2} \right); \\ \lim_{l \rightarrow 0} N(q, k, l) = & -2q^2 (q+k)^2 \left(F_{q+k} + q^2 \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right) \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 0} N(q, k, l) &= l^2 F_l F_k; \\
L(0, k) &= L(k, 0) = (F_k)^2; \\
\lim_{k \rightarrow 0} L(q + k, q) &= (F_q)^2 + 2F_q F'_q \frac{q^2}{\Lambda^2} + 2 \left(F'_q \frac{q^2}{\Lambda^2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)' + \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} &= \frac{q^2}{\Lambda^4} F''_q + \frac{1}{\Lambda^2} F'_q; \\
\lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)' + \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2 - q^2} \right\} &= \frac{F_k - 1}{k^2}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Теперь вычислим аномальные размерности, входящие в правую часть уравнения (2.1).

2.4. Вычисление аномальных размерностей

В предыдущем разделе мы сделали замечание, что соотношения (2.1) и (2.2) справедливы для каждой из диаграмм на рисунке 2.1 по отдельности. Причем существует простое правило, позволяющее соотнести вклады в β -функцию, приходящие от диаграмм на рисунке 2.1, с вкладами в аномальные размерности. Необходимо лишь каждую диаграмму на рисунке 2.1 разрезать всеми возможными способами, так чтобы в результате получались одночастично неприводимые диаграммы с двумя внешними линиями. Тогда вклады в аномальные размерности от получившихся таким образом диаграмм нужно подставить в правую часть уравнения (2.1) и сравнить с соответствующим вкладом в β -функцию. Отметим нетривиальный характер такого соответствия. В предыдущей главе мы также использовали подобное правило разрезания, но там разрезались лишь линии материи. В данном случае необходимо также разрезать и линии квантового калибровочного суперполя.

На рисунке 2.2 отображены все диаграммы, получаемые с помощью такого разрезания. Отметим, что в результате получаются как двухпетлевые, так и однопетлевые диаграммы. При этом вклады последних при подстановке в правую часть тождества (2.1) сравниваются с вкладами в том числе трехпетлевых диаграмм на рисунке 2.1 в левую часть этого тождества. Это происходит потому, что согласно уравнениям (2.32) и (2.33) вклады однопетлевых диаграмм входят в это тождество через логарифмы соответствующих функций Грина. Разложение двухточечной функции Грина кирального суперполя начинается с единичной матрицы,

$$G_i^j = \delta_i^j + O(\alpha_0) + O(\lambda_0^2). \tag{2.50}$$

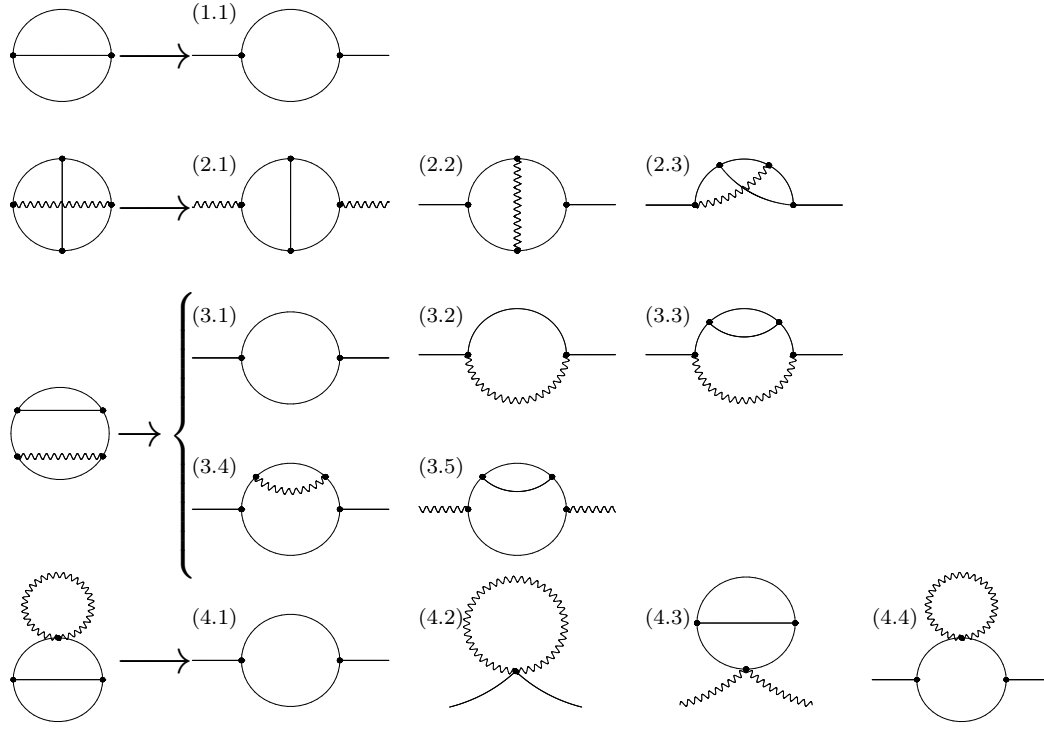


Рис. 2.2. Диаграммы, дающие вклад в двухточечные функции Грина квантового калибровочного суперполя и киральных суперполей материи, получаемые разрезанием соответствующих линий в диаграммах на рисунке 2.1. Первый ряд диаграмм был получен разрезанием линий в диаграмме (1) на рисунке 2.1, второй ряд — разрезанием линий в диаграмме (2) и т.д.

Когда мы подставляем это разложение в (2.33), чтобы вычислить аномальную размерность, или сразу в правую часть тождества (2.2), нам приходится раскладывать $(\ln G)_i^j$ в ряд Тейлора,

$$(\ln G)_i^j = (\ln(1 + \Delta G))_i^j = (\Delta G)_i^j - \frac{1}{2}((\Delta G)^2)_i^j + \dots \quad (2.51)$$

В первое слагаемое в правой части этого уравнения вклад в рассматриваемом приближении дают как однопетлевые, так и двухпетлевые диаграммы, а во второе — только однопетлевые диаграммы. При этом суммарный вклад однопетлевых диаграмм возводится во вторую степень. В результате возникают квадраты однопетлевых вкладов и их перекрестные произведения. Именно такие квадраты и перекрестные произведения и имеются в виду, когда мы говорим о том, что вклады в β -функцию от трехпетлевых графов на рисунке 2.1 должны сравниваться с вкладами в аномальную размерность от однопетлевых диаграмм, получаемых разрезанием этих трехпетлевых графов.

Полные выражения для вкладов диаграмм на рисунке 2.2 в двухточечные функции Грина квантового калибровочного суперполя V и киральных суперполей материи довольно

громоздки, поэтому здесь мы их приводить не будем, все их можно найти в Приложении Г. Используя эти выражения, можно легко убедиться, что выполняются следующие соотношения:

$$\frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(1)}) = -\frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} (\Delta G^{(1.1)})_j^i \Big|_{q=0}; \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(2)}) &= \frac{C_2}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta G_V^{(2.1)} \Big|_{k=0} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \left((\Delta G^{(2.2)})_j^i + (\Delta G^{(2.3)})_j^i \right) \Big|_{q=0}; \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(3)}) &= \frac{C_2}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta G_V^{(3.5)} \Big|_{k=0} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-(\Delta G^{(3.1)})_j^k (\Delta G^{(3.2)})_k^i + (\Delta G^{(3.3)})_j^i + (\Delta G^{(3.4)})_j^i \right) \Big|_{q=0}; \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda}(\text{граф(4)}) &= \frac{C_2}{2\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \Delta G_V^{(4.3)} \Big|_{k=0} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-(\Delta G^{(4.1)})_j^k (\Delta G^{(4.2)})_k^i + (\Delta G^{(4.4)})_j^i \right) \Big|_{q=0}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Здесь в левой части стоят вклады в β -функцию (2.44)–(2.47) от диаграмм на рисунке 2.1. В правой части стоят вклады в аномальные размерности суперполя V и суперполей материи, выраженные с помощью формул (2.32) и (2.33) через вклады диаграмм на рисунке 2.2 в G_V и G_j^i соответственно, взятые при нулевом внешнем импульсе. Нумерация вкладов в G_V и G_j^i соответствует нумерации диаграмм на рисунке 2.2, полученных в результате разрезания. При этом $(\Delta G^{(1.1)})_j^i = (\Delta G^{(3.1)})_j^i = (\Delta G^{(4.1)})_j^i$. Таким образом, непосредственно видно, что тождество (2.1) выполняется для каждой диаграммы на рисунке 2.1 по отдельности, причем на уровне интегралов и в полном соответствии с нашим правилом разрезания.

Просуммировав все рассматриваемые вклады в β -функцию и аномальные размерности, соотношение (2.1) для них можно записать следующим образом:

$$\frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} = \frac{C_2}{\pi} \Delta\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \Delta\gamma_j^i(\alpha_0, \lambda_0), \quad (2.56)$$

где $\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)/\alpha_0^2$ — сумма вкладов (2.44)–(2.47) и

$$\Delta\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\Delta G_V^{(2.1)} + \Delta G_V^{(3.5)} + \Delta G_V^{(4.3)} \right) \Big|_{k=0}; \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_j^i(\alpha_0, \lambda_0) &= \frac{d}{d \ln \Lambda} \left((\Delta G^{(1.1)})_j^i + (\Delta G^{(2.2)})_j^i + (\Delta G^{(2.3)})_j^i - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta G^{(3.1)})_j^k (\Delta G^{(3.2)})_k^i + (\Delta G^{(3.3)})_j^i + (\Delta G^{(3.4)})_j^i - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta G^{(4.1)})_j^k (\Delta G^{(4.2)})_k^i + (\Delta G^{(4.4)})_j^i \right) \Big|_{q=0}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Теперь, после того как мы убедились, что интегралы в правой и левой частях уравнения (2.56) одинаковы и соотношение (2.1) выполняется, можно эти интегралы вычислить явно. Хотя они и выглядят довольно внушительно (см. (2.44)–(2.47)), их все же можно вычислить для определенного класса регуляторов $R(y)$ и $F(y)$, а именно

$$\begin{aligned} F(y) &= 1 + y^n, \\ R(y) &= 1 + y^m. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Мы не будем здесь приводить все детали вычислений, которые могут быть найдены в Приложении Д, ограничимся лишь перечислением основных результатов.

Во-первых, вычисление аномальной размерности квантового калибровочного суперполя сильно упрощается за счет того, что сумма трех вкладов (2.57) факторизуется в интеграл от двойной полной производной,

$$\Delta\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = -\frac{d}{d\ln\Lambda} \frac{1}{4r} C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} g_0^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{q^2 F_q (q+l)^2 F_{q+l} l^2 F_l}. \quad (2.60)$$

Это обстоятельство не должно нас удивлять, поскольку вследствие теоремы о неперенормировке вершин вида $V\bar{c}c$ [17] константа перенормировки квантового калибровочного суперполя V связана с константами перенормировки калибровочной константы связи и духов Фаддеева–Попова:

$$\frac{d}{d\ln\Lambda} \left(\ln Z_V + \ln Z_c - \frac{1}{2} \ln Z_\alpha \right) = 0. \quad (2.61)$$

Если мы ожидаем, что вклады в β -функцию калибровочной константы связи даются интегралами от двойных полных производных, мы также можем ожидать, что по крайней мере часть аномальной размерности суперполя V также дается интегралом от двойной полной производной. Это свойство также упростило вычисление асимптотики однопетлевого поляризационного оператора суперполя V в пределе нулевого внешнего импульса в работе [76], где в полные производные свернулись слагаемые, не зависящие от калибровки. Кроме того, оно проявилось при вычислении однопетлевой перенормировки суперполя V в работе [61], где выполнение (2.61) и было впервые замечено.

Опять используя (2.43) и учитывая сингулярности подынтегрального выражения, мы

получаем

$$\Delta\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} \alpha_0 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} = -\frac{1}{16\pi^3 r} C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} \alpha_0. \quad (2.62)$$

Заметим, что формулы (2.32) и (2.33) требуют, чтобы дифференцирование по $\ln \Lambda$ при вычислении аномальных размерностей, определенных в терминах голых констант связи, происходило при фиксированных значениях перенормированных зарядов. Следовательно необходимо учитывать, что голые заряды являются функциями перенормированных, содержащими также степени $\ln(\Lambda/\mu)$ и поэтому имеющими, вообще говоря, ненулевую производную по $\ln \Lambda$. Однако в (2.62) мы учли в этих функциях лишь ведущие слагаемые:

$$\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)) = \alpha + O(\alpha^2) \quad \text{и} \quad \lambda_0^{ijk}(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)) = \lambda^{ijk} + O(\lambda\alpha, \lambda^3), \quad (2.63)$$

поскольку учет более высоких порядков вывел бы нас за пределы нашего приближения. Что касается вычисления интеграла в (2.62), оно объясняется в Приложении Д (см. формулу (Д.4)).

Для вычисления вкладов в аномальную размерность суперполей материи нам все же потребуются слагаемые более высокого порядка в разложениях (2.63). Однопетлевой вклад в перенормировку калибровочной константы связи имеет вид

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{\alpha^2}{2\pi} \left(3C_2 \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) - T(R) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right) + O(\alpha^3, \alpha^2 \lambda^2), \quad (2.64)$$

где b_{11} и b_{12} — конечные постоянные, зависящие от схемы вычитаний. Производная этой функции по $\ln \Lambda$ имеет порядок α^2 , поэтому учет этой зависимости при вычислении аномальной размерности киральных суперполей дает в ведущем приближении слагаемое порядка α^2 , не зависящее от λ . Поскольку нас интересуют квадратичные по юкавским константам слагаемые в аномальной размерности, в дальнейшем разницей между α_0 и α можно пренебречь. (Если бы однопетлевая перенормировка калибровочной константы связи зависела от λ , эту разницу пришлось бы учесть.)

Однопетлевая перенормировка юкавских констант согласно (2.27) определяется однопетлевой перенормировкой суперполей материи, которая в свою очередь дается диаграммами, изображенными на рисунке 2.3.

Вклады диаграмм на рисунке 2.3 в функцию G_i^j даются выражениями (Г.1), (Г.4) и (Г.7). Используя определение (2.33), можно получить

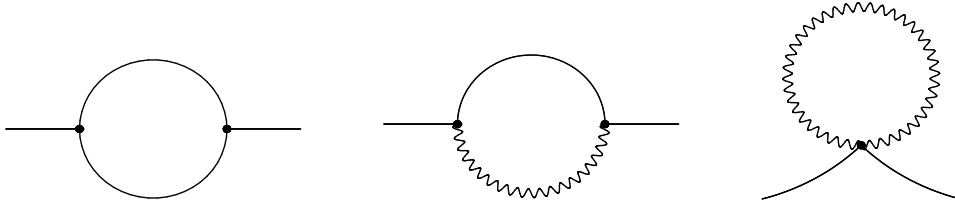


Рис. 2.3. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в перенормировку суперполей материи

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = & -2C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} g_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k} + \\ & + \frac{d}{d \ln \Lambda} \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^4 F_k^2} + O(g_0^4, g_0^2 \lambda_0^2, \lambda_0^4). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Вычисляя оба этих интеграла (см. формулу (Д.4)) и пренебрегая разницей между голыми и перенормированными зарядами, получаем

$$\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = -\frac{g_0^2}{4\pi^2} C(R)_i^j + \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} + O(g_0^4, g_0^2 \lambda_0^2, \lambda_0^4). \quad (2.66)$$

Проинтегрировав для этой функции уравнение (2.30), мы получим однопетлевое значение для констант перенормировки киральных суперполей материи Z_i^j

$$Z_i^j = \delta_i^j + \frac{\alpha}{\pi} C(R)_i^j \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) - \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{12} \right) + O(\alpha^2, \alpha \lambda^2, \lambda^4). \quad (2.67)$$

В этом выражении μ — это масштаб перенормировки, g_{11} и g_{12} — конечные константы, зависящие от выбора схемы вычитаний. Таким образом, используя (2.27), мы получаем однопетлевую перенормировку юкавских констант в виде

$$\begin{aligned} \lambda_0^{ijk} = & \lambda^{ijk} - \frac{\alpha}{2\pi} (C(R)_l^i \lambda^{ljk} + C(R)_m^j \lambda^{imk} + C(R)_n^k \lambda^{ijn}) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \\ & + \frac{1}{8\pi^2} (\lambda^{ijm} \lambda_{mab}^* \lambda^{kab} + \lambda^{imk} \lambda_{mab}^* \lambda^{jab} + \lambda^{mjk} \lambda_{mab}^* \lambda^{iab}) \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{12} \right) \\ & + O(\lambda^5, \alpha^2 \lambda, \alpha \lambda^3). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Теперь, чтобы вычислить квадратичные по юкавским константам слагаемые в аномальной размерности суперполей материи в двухпетлевом приближении, мы подставляем зависимость (2.68) в правую часть уравнения (2.58), после этого берем производную по $\ln \Lambda$, а затем опять используем уравнение (2.68), чтобы выразить результат дифференцирования

через голые константы связи. Очевидно, что в рассматриваемом приближении разница между голыми и перенормированными юкавскими константами существенна лишь для вклада $(\Delta G^{(1.1)})_j^i$ в правой части (2.58), а в остальных слагаемых она даст слишком высокий порядок по константам связи. Вклад $(\Delta G^{(1.1)})_j^i$ пропорционален $\lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn}$ (см. выражение (Г.1)), поэтому переход в (2.58) от голых юкавских констант к перенормированным перед дифференцированием по $\ln \Lambda$ и обратно после дифференцирования по $\ln \Lambda$ удобнее всего производить с помощью следующего соотношения, которое можно получить с использованием (2.68) после небольшого числа алгебраических преобразований ²:

$$\begin{aligned} \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} &= \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} - \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \left[C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{jmn} + 2C(R)_m^l \lambda_{iln}^* \lambda^{jmn} \right] \\ &+ O(\lambda^4) + O(\lambda^6, \alpha^2 \lambda^2, \alpha \lambda^4). \end{aligned} \quad (2.69)$$

После отбрасывания заведомо нулевых вкладов в (2.58) и с учетом соотношения (2.69) можно получить, что квадратичные по юкавским константам вклады в аномальную размерность суперполей материи в двухпетлевом приближении даются выражением вида

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} \\ &+ 16\pi\alpha C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{mnj} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[- \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} \right. \\ &+ \left. \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k l^4 F_l^2} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} \right] \\ &+ 32\pi\alpha \lambda_{imn}^* \lambda^{jml} C(R)_l^n \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2 k^2 R_k (l+k)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Детали вычисления интегралов в (2.70) при выборе регуляторов в виде (2.59) приведены в Приложении Д. Здесь мы лишь выпишем конечный результат

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) &= \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} - \frac{\alpha_0}{8\pi^3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) C(R)_i^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{mnj} \\ &+ \frac{\alpha_0}{4\pi^3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} C(R)_l^n. \end{aligned} \quad (2.71)$$

² Слагаемые порядка $O(\lambda^4)$ ниже получаются с помощью второй строки в уравнении (2.68), но явно здесь не выписаны, поскольку нас интересует порядок $O(\alpha \lambda^2)$.

Поскольку, как мы видели, вклады в β -функцию связаны с вкладками в аномальные размерности суперполя V и суперполей материи с помощью соотношений (2.52)–(2.55), вычислив последние, мы автоматически получаем и первые. Используя соотношение (2.56) и результаты (2.62) и (2.71), получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta(\alpha_0, \lambda_0)}{\alpha_0^2} &= \frac{C_2}{\pi} \Delta\gamma_V - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i{}^j \Delta\gamma_j{}^i = -\frac{\alpha_0}{16\pi^4 r} \lambda_0^{imn} \lambda_{0jmn}^* C_2 C(R)_i{}^j \\ &- \frac{1}{2\pi r} C(R)_j{}^i \left(\frac{1}{4\pi^2} \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} - \frac{\alpha_0}{8\pi^3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) C(R)_i{}^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{mnj} \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_0}{4\pi^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} C(R)_l{}^n \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Заметим, что ни в одном из выражений (2.62), (2.71) и (2.72) не появляются конечные константы, связанные с выбором схемы вычитаний, такие как g_{11} и g_{12} из уравнения (2.67). Как и ожидалось, результаты для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи, оказались не зависящими от схемы вычитаний.

2.5. НШВЗ-схема вычитаний

В предыдущем разделе мы вычисляли вклады в β -функцию и аномальные размерности, определенные в терминах голых констант связи. Эти ренормгрупповые функции не зависят от схемы вычитаний [16], хотя константы перенормировки и соотношения, связывающие перенормированные и голые константы связи, содержат в себе признаки той или иной схемы в виде конечных констант, таких как b_{11} и b_{12} в уравнении (2.64) или g_{11} и g_{12} в уравнении (2.68). Кроме того, вычисленные нами вклады в так определенные аномальные размерности и β -функцию удовлетворяют соотношению (2.1). Но, чтобы придать полученным результатам физический смысл, необходимо уметь выражать их на языке конечных, перенормированных констант связи. Не следует, однако, ожидать, что ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, будут автоматически удовлетворять тому же самому соотношению, из-за конечных контрчленов, которые различны в разных схемах вычитаний ³. Таким образом, необходимо особое предписание, которое зафиксировало бы схему, в которой наше соотношение было бы справедливо. Как мы уже говорили в разделе 2.1, это предписание было сформулировано в работе [17], и оно

³ Однако отдельные слагаемые все же будут, см. [54, 55].

требует, чтобы константы перенормировки калибровочной константы связи и квантовых суперполей равнялись единице при некотором значении x_0 величины $\ln(\Lambda/\mu)$ (см. уравнения (2.3)). Если это условие выполнено, ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи, и соответствующие им ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, имеют одинаковую функциональную зависимость от своих аргументов. Тогда и следует автоматически, что если тождество (2.1) справедливо будучи сформулированным в терминах голых зарядов, то оно справедливо и будучи сформулированным на языке перенормированных зарядов. Доказательство этого факта, а также того, что такую схему всегда можно зафиксировать, является простым обобщением абелева случая [16]; в разделе 1.5 мы уже проводили аналогичное доказательство для функции Адлера. В случае $x_0 = 0$ предписание (2.3) требует вычитания лишь степеней $\ln(\Lambda/\mu)$, в разделе 1.5 мы называли такую схему HDMSL. В этом разделе мы покажем, как предписание (2.3) работает на примере вычисленных нами вкладов.

Согласно (2.30) аномальная размерность суперполей материи определяется в терминах голых зарядов как производная $(\ln Z)_i^j$ по $\ln \Lambda$ при фиксированных значениях перенормированных зарядов. Поэтому мы можем легко восстановить полное выражение для констант перенормировки, выражая (2.71) через перенормированные заряды и затем интегрируя по $\ln \Lambda$. Удобнее всего это сделать используя соотношение (2.69). Результат будет, конечно, определен с точностью до постоянных интегрирования, которые должны интерпретироваться как конечные постоянные, задаваемые той или иной схемой вычитаний,

$$\begin{aligned}
(\ln Z)_i^j &= \frac{\alpha}{\pi} C(R)_i^j \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) - \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{12} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{4\pi^3} C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{mnj} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} - g_{21} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi^3} \lambda_{imn}^* \lambda^{jml} C(R)_l^n \left(\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} - g_{22} \right) \\
&+ O(\lambda^4) + O(\alpha^2) + \text{слагаемые более высокого порядка}, \tag{2.73}
\end{aligned}$$

где к слагаемым порядка λ^2 и $\alpha\lambda^2$, которые получаются интегрированием (2.71), мы также добавили однопетлевой вклад порядка α из уравнения (2.67); и где, кроме того, помимо констант g_{11} и g_{12} , которые появились в однопетлевом приближении, мы имеем две новые константы g_{21} и g_{22} , значения которых должны определиться в двухпетлевом приближении. Мы их ввели по одной на каждую тензорную структуру, образуемую генераторами пред-

ставления и юкавскими константами, присутствующую в уравнении (2.71). По очевидным причинам они не входят в данном приближении в аномальную размерность, определенную ни одним из способов (они исчезают после дифференцирования по $\ln \Lambda$ или $\ln \mu$), однако они будут существенны в следующем порядке.

Чтобы вычислить аномальную размерность, определенную в терминах перенормированных констант связи, продифференцируем выражение (2.73) по $\ln \mu$, не забывая, что теперь мы фиксируем значения голых зарядов. Поэтому производная должна действовать также и на произведение юкавских констант в слагаемом низшего порядка в уравнении (2.73); что касается остальных слагаемых, то различие между перенормированными и голыми зарядами в нашем приближении не играет для них никакой роли. Таким образом, опять используя соотношение (2.69), мы дифференцируем уравнение (2.73) по $\ln \mu$ и получаем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\gamma}(\alpha, \lambda)_i^j = & \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} + \frac{\alpha}{4\pi^3} C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{mnj} \left(g_{12} - g_{11} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \\ & + \frac{\alpha}{2\pi^3} \lambda_{imn}^* \lambda^{jml} C(R)_l^n \left(g_{12} - g_{11} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.74)$$

где Δ , как и в уравнении (2.71), означает, что выписан лишь вклад квадратичных по юкавским константам слагаемых. Это выражение явно зависит от схемы вычитаний, поскольку содержит две конечные константы: g_{11} и g_{12} , — значения которых зависят от перенормировочного предписания.

Используя результат работы [61] для однопетлевой перенормировки суперполя V , а также полученный нами результат (2.62), аномальную размерность суперполя V , определенную в терминах голых констант связи, в двухпетлевом приближении можно записать в виде:

$$\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = -\frac{\alpha_0}{4\pi} (3C_2 - T(R)) - \frac{1}{16\pi^3 r} C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} \alpha_0 + O(\alpha_0^2) + O(\alpha_0^3, \alpha_0^2 \lambda_0^2, \alpha_0 \lambda_0^4). \quad (2.75)$$

Проинтегрируем это выражение по $\ln \Lambda$ при фиксированных значениях перенормированных констант связи. Заметим, что разницей между голой и перенормированной калибровочной константой связи можно здесь пренебречь, поскольку ее однопетлевая перенормировка (2.64) не зависит от юкавских констант. В результате интегрирования получим

$$\begin{aligned} \ln Z_V = & \frac{\alpha}{4\pi}(3C_2 - T(R))\left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + v_1\right) + \\ & + \frac{1}{16\pi^3 r} C(R)_i{}^j \lambda_{jmn}^* \lambda^{imn} \alpha \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + v_2\right) + O(\alpha^2) + O(\alpha^3, \alpha^2 \lambda^2, \alpha \lambda^4), \end{aligned} \quad (2.76)$$

где v_1 и v_2 — конечные постоянные. Дифференцируя это выражение по $\ln \mu$, получаем

$$\Delta \tilde{\gamma}_V(\alpha, \lambda) = -\frac{1}{16\pi^3 r} C(R)_i{}^j \lambda_{jmn}^* \lambda^{imn} \alpha. \quad (2.77)$$

Таким образом, квадратичный по юкавским константам вклад в $\tilde{\gamma}_V$ оказался не зависящим от схемы вычитаний.

Обратимся теперь к вкладу в β -функцию. Можно получить соотношение между перенормированной и голой калибровочной константой связи, если проинтегрировать (2.72) по $\ln \Lambda$ в точности так же, как это было сделано при получении констант перенормировки киральных суперполей материи:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} \right) = & -\frac{\alpha}{16\pi^4 r} \lambda^{imn} \lambda_{jmn}^* C_2 C(R)_i{}^j \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{31} \right) - \\ & - \frac{1}{2\pi r} C(R)_j{}^i \left(\frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} \left[\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 \right] - \right. \\ & - \frac{\alpha}{4\pi^3} C(R)_i{}^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{jmn} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{32} \right] - \\ & \left. - \frac{\alpha}{2\pi^3} C(R)_m{}^l \lambda_{iln}^* \lambda^{jmn} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \ln \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{33} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Здесь мы имеем конечную константу g_{11} , которая пришла из однопетлевого определения перенормированной юкавской константы (2.68), и несколько новых констант: b_2 и b_{3i} , где $i = 1, 2, 3$, — которые определяют перенормированную калибровочную константу связи в двух- и трехпетлевом приближении соответственно. Теперь дифференцируя это соотношение по $\ln \mu$ при фиксированных значениях голых констант связи, что может быть легко выполнено с использованием соотношения (2.69), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = & -\frac{\alpha}{16\pi^4 r} \lambda^{imn} \lambda_{jmn}^* C_2 C(R)_i{}^j \\ & - \frac{1}{2\pi r} C(R)_j{}^i \left(\frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} + \frac{\alpha}{4\pi^3} C(R)_i{}^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{jmn} \left(b_2 - g_{11} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2\pi^3} C(R)_m{}^l \lambda_{iln}^* \lambda^{jmn} \left(b_2 - g_{11} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Мы видим, что конечные константы b_{3i} , $i = 1, 2, 3$, появившиеся в трехпетлевом приближении, исчезают после дифференцирования и никакой роли не играют, однако осталась зависимость от двух констант: g_{11} и b_2 .

Очевидно, что при произвольных значениях констант g_{11} , g_{12} и b_2 соотношение, аналогичное (2.56), для вкладов (2.79), (2.77) и (2.74) не выполняется. Зафиксируем значения конечных констант с помощью перенормировочного предписания (2.3). Положим $\ln(\Lambda/\mu)$ равным какому-нибудь значению x_0 , которое может быть любым конечным числом, включая нуль. Затем подберем значения констант g_{11} , g_{12} и b_2 таким образом, чтобы при $\ln(\Lambda/\mu) = x_0$ удовлетворялись следующие условия:

$$Z_i^j(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) = \delta_i^j, \quad Z_\alpha(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu) = x_0) = 1. \quad (2.80)$$

Из первого из них, используя (2.73), мы получаем

$$g_{11} = -x_0, \quad g_{12} = -x_0; \quad (2.81)$$

а из второго, которое эквивалентно требованию $\alpha^{-1} - \alpha_0^{-1} = 0$, используя (2.78), получаем

$$b_2 = -x_0. \quad (2.82)$$

Мы не приводим здесь значения для остальных констант, поскольку они исчезают из конечных выражений для $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}_V$ и $\tilde{\gamma}_i^j$ в рассматриваемом приближении. Из (2.81) мы видим, что $g_{11} = g_{12}$, поэтому они взаимно уничтожаются в выражении (2.74). Из первого из уравнений (2.81) и уравнения (2.82) следует, что $g_{11} = b_2$, поэтому они также взаимно уничтожают друг друга в выражении (2.79). Таким образом, мы видим, что, как и ожидалось, в схеме перенормировки, фиксируемой условиями (2.3), вид β и γ_i^j тождественен виду $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}_i^j$ соответственно и для вкладов (2.79), (2.77) и (2.74) выполняется соотношение

$$\frac{\Delta \tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = \frac{C_2}{\pi} \Delta \tilde{\gamma}_V(\alpha, \lambda) - \frac{1}{2\pi r} C(R)_i^j \Delta \tilde{\gamma}_j^i(\alpha, \lambda). \quad (2.83)$$

Это означает, что для квадратичных по юкавским константам вкладов в ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированных констант связи, в трехпетлевом приближении выполняется аналог тождества (2.1) и, следовательно, предписание (2.3) фиксирует НШВЗ-схему вычитаний.

Наконец, выпишем для полноты выражение для вкладов в β -функцию, квадратичных по юкавским константам, в трехпетлевом приближении в НШВЗ-схеме (2.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\tilde{\beta}(\alpha, \lambda)}{\alpha^2} = & -\frac{\alpha}{16\pi^4 r} \lambda^{imn} \lambda_{jmn}^* C_2 C(R)_i^j \\
& -\frac{1}{2\pi r} C(R)_j^i \left(\frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} - \frac{\alpha}{8\pi^3} C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{jmn} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha}{4\pi^3} C(R)_m^l \lambda_{iln}^* \lambda^{jmn} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right). \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Отметим, что если взять $x_0 = 0$, тогда условия (2.80) дадут нулевые значения всем конечным константам в (2.73) и (2.78), включая g_{2i} и b_{3i} , таким образом оставляя лишь степени $\ln(\Lambda/\mu)$. Именно поэтому мы и называем это предписание минимальным вычитанием логарифмов, или MSL.

2.6. Заключение к главе

В этой главе мы применили метод высших ковариантных производных к вычислению квадратичных по юавским константам вкладов в β -функцию и аномальные размерности квантовых суперполей в трех- и двухпетлевом приближении соответственно. Мы получили, что вклады в β -функцию, определенную в терминах голых констант связи, даются интегралами от двойных полных производных. Такая структура позволила избавиться от одного интегрирования по петлевому импульсу и сравнить вклады в β -функцию с вкладами в аномальные размерности квантового калибровочного суперполя и суперполей материи. В результате такого сравнения мы обнаружили, что вклады в β -функцию и аномальные размерности, определенные в терминах голых констант связи, удовлетворяют соотношению (2.1). Что касается ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи, то мы увидели, что для них аналог соотношения (2.1) выполняется только в особой НШВЗ-схеме. С помощью простого предписания (2.3) нам удалось эту схему зафиксировать для квадратичных по юавским константам вкладов в трехпетлевом приближении. Отметим, что все интегралы, возникающие во вкладах в β -функцию и аномальные размерности, нам удалось вычислить аналитически при определенном выборе регуляторов (2.59).

Глава 3

Калибровочная зависимость однопетлевого поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя

Мы видели в предыдущей главе, что вычисления в суперсимметричных калибровочных теориях сильно упрощаются за счет использования метода фонового поля, поскольку в этом случае получающееся эффективное действие является явно калибровочно инвариантным. При этом мы использовали член, фиксирующий калибровку (и инвариантный по отношению к фоновым калибровочным преобразованиям), в виде (2.21), в котором регулятор совпадал с регулятором в действии для калибровочного суперполя, а перенормированный калибровочный параметр равнялся единице — выбор, который является аналогом калибровки Фейнмана. Однако интересно хотя бы на однопетлевом уровне исследовать калибровочную зависимость получаемых по теории возмущений результатов. Это может оказаться полезным, поскольку, как мы увидим, позволяет заметить некоторые соотношения между константами перенормировки, которые трудно заметить при вычислении в минимальной калибровке (2.21). Поэтому в этой главе мы собираемся использовать член, фиксирующий калибровку, более общего вида, чтобы в итоге получить некоторые следствия, которые от калибровки не зависят.

3.1. Описание теории и квантования

Опять рассмотрим $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса, регуляризованную высшими ковариантными производными. Интерес представляет поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя, вычисленный в общей калибровке в однопетлевом приближении. Полученному результату сразу же найдется два применения: во-первых, однопетлевые диаграммы, дающие вклад в поляризационный оператор, являются составными частями диаграмм с большим количеством петель; а во-вторых, на однопетлевом уровне можно заметить отсутствие перенормировки вершин с одной линией квантового калибровочного суперполя и двумя линиями духов Фаддеева–Попова [61]. Что касается первого применения, мы уже использовали результат для однопетлевого поляризационного оператора (правда, в калибровке Фейнмана) в главе, посвященной вычислению функции Адлера

в трехпетлевом приближении, где часть этого результата представлена в уравнениях (1.36) и (1.37) функцией $f(k/\Lambda)$. Второго применения мы коснемся чуть позже.

Действие для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с безмассовыми суперполями материи в произвольном представлении простой калибровочной группы после введения в него высших ковариантных производных имеет вид

$$S + S_\Lambda = \frac{1}{2g_0^2} \text{Re tr} \int d^4x d^2\theta e^{\Omega} W^\alpha e^{-\Omega} \left[R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) \right]_{Adj} e^{\Omega} W_\alpha e^{-\Omega} + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \phi^+ \times e^{\Omega^+} e^{2V} F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \phi + \left(\frac{1}{6} \int d^4x d^2\theta \lambda_0^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \text{с.с.} \right), \quad (3.1)$$

где, как и в предыдущей главе, R и F — функции с достаточно быстрым ростом на бесконечности и равные единице в нуле; ковариантные производные определены обычным образом с помощью (2.10) и (2.11); а индекс « Adj », как и ранее, означает, что суперсимметричная напряженность W_α находится в присоединенном представлении калибровочной группы. В действии (3.1) мы предполагаем использование метода фонового поля, так что калибровочное суперполе расщепляется на квантовую и классическую части согласно (2.6), а W_α имеет вид (2.9). Однако для вычисления поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя зависимость действия от фонового калибровочного суперполя несущественна.

Чтобы регуляризовать однопетлевые расходимости, мы добавим к действию (3.1) три коммутирующих массивных киральных суперполя в присоединенном представлении

$$S_\varphi = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \left(\varphi_1^+ \left[e^{\Omega^+} e^{2V} R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_1 + \varphi_2^+ \left[e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_2 + \varphi_3^+ \left[e^{\Omega^+} e^{2V} e^{\Omega} \right]_{Adj} \varphi_3 \right) + \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \left(\int d^4x d^2\theta M_\varphi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) + \text{с.с.} \right) \quad (3.2)$$

и набор массивных антикоммутирующих киральных суперполей в том же представлении, что и суперполя материи

$$S_\Phi = \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \Phi^+ e^{\Omega^+} e^{2V} F \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{\Omega} \Phi + \frac{1}{4} \left(\int d^4x d^2\theta M^{ij} \Phi_i \Phi_j + \text{с.с.} \right), \quad (3.3)$$

где предполагается, что $M^{jk} M_{ki}^* = M^2 \delta_i^j$, а также что массы суперполей Паули–Вилларса пропорциональны параметру обрезания:

$$M_\varphi \equiv a_\varphi \Lambda, \quad M \equiv a \Lambda \quad (3.4)$$

с коэффициентами a_φ и a , не зависящими от констант связи.

Теперь в отличие от того, что делалось в предыдущей главе, введем в действие член, фиксирующий калибровку, в виде

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{16\xi_0 g_0^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta \nabla^2 V K \left(-\frac{\bar{\nabla}^2 \nabla^2}{16\Lambda^2} \right)_{\text{Adj}} \bar{\nabla}^2 V, \quad (3.5)$$

где функция K удовлетворяет тем же условиям, что и функции R и F , а ξ_0 — голый калибровочный параметр. Действие для духов Фаддеева–Попова в этом случае имеет вид (2.18), а действие для духов Нильсена–Каллош получается заменой функции R в уравнении (2.19) на K . Духи Нильсена–Каллош не играют роли в вычислении поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя, поскольку они взаимодействуют лишь с фоновым калибровочным суперполем.

Действие теории после фиксации калибровки обладает БРСТ-инвариантностью. При фиксации калибровки с помощью слагаемого (3.5) БРСТ-преобразования имеют вид (2.20), где функция R во второй строке должна быть заменена на K .

Отметим еще раз, что при вычислении поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя фоновое калибровочное суперполе $\mathbf{V}$ везде можно положить равным нулю. Кроме того, суперпотенциал с юкавским взаимодействием в действии (3.1) также не дает вклада в однопетлевом приближении.

3.2. Поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя в однопетлевом приближении

Поскольку действие после регуляризации и фиксации калибровки обладает БРСТ-инвариантностью и, как следствие, справедливы тождества Славнова–Тейлора [74, 75, 86], квантовые поправки в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного суперполя поперечны и квадратичная по супер полю V часть эффективного действия может быть записана в виде

$$\Gamma_V^{(2)} - S_{\text{gf}}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi} \text{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta V(-k, \theta) \partial^2 \Pi_{1/2} V(k, \theta) d_q^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2). \quad (3.6)$$

Здесь $d_q^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2) = \alpha_0^{-1} R(k^2/\Lambda^2) + O(1)$, где $O(1)$ обозначает квантовые поправки. Поместим их в отдельную функцию $\Pi(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2)$, которую мы и будем называть поляри-

зационным оператором и которую определим с помощью следующего соотношения:

$$d_q^{-1}(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2) - \alpha_0^{-1}R(k^2/\Lambda^2) \equiv -\alpha_0^{-1}\Pi(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2). \quad (3.7)$$

С помощью Π эффективный пропагатор квантового калибровочного суперполя V^A можно записать в виде

$$2i \left(\frac{1}{(R - \Pi)\partial^2} - \frac{1}{16\partial^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R - \Pi} \right) \right) \delta^8(x_1 - x_2) \delta^{AB}, \quad (3.8)$$

где $K \equiv K(\partial^2/\Lambda^2)$, $R \equiv R(\partial^2/\Lambda^2)$ и $\Pi \equiv \Pi(\alpha_0, \lambda_0, \partial^2/\Lambda^2)$. Именно это выражение и было использовано при вычислении вкладов в D -функцию Адлера и аномальную размерность суперполей материи в главе 1.

Вклад в поляризационный оператор суперполя V дают диаграммы трех типов, все они изображены на рисунке 3.1. В первом столбце содержатся диаграммы с петлей самого квантового калибровочного суперполя, во втором — духов Фаддеева–Попова (но не Нильсена–Каллош), в третьем — суперполей материи и всех существующих суперполей Паули–Вилларса.

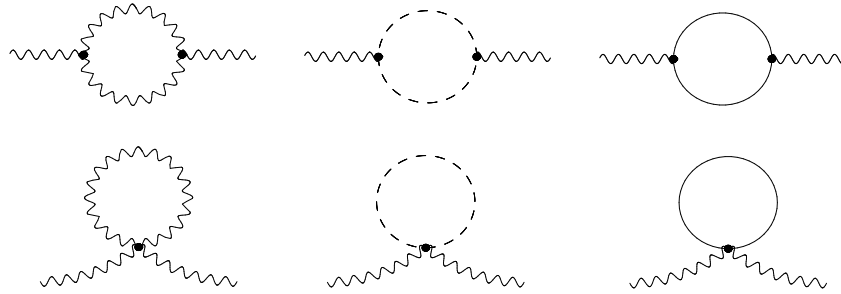


Рис. 3.1. Однопетлевые диаграммы, дающие вклад в поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя

Обратимся к вычислению диаграмм в первом столбце. Как видно, они содержат вершины с тремя и четырьмя линиями квантового калибровочного суперполя. При способе регуляризации, принятом в этой работе, вид обеих вершин довольно внушителен; причиной тому служат полные ковариантные производные в действии (3.1), которые сами по себе содержат квантовое калибровочное суперполе. Это обеспечивает правильный закон преобразования (2.16) для полных ковариантных производных при квантовых калибровочных преобразованиях и в конечном итоге гарантирует БРСТ-инвариантность действия. Конечно, можно воспользоваться несколько более простым методом регуляризации, при котором в действие вводятся фоновые ковариантные производные [59], но при этом усложняется

процедура перенормировки: приходится вводить в действие дополнительные контрчлены, восстанавливающие тождества Славнова–Тейлора [66–69].

Приведем в импульсном представлении выражение для тройной вершины,

$$\begin{aligned}
S^{(3)} = & \frac{if_{ABC}g_0}{16} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta R_{q+p} V^A(q) (D^\alpha V^B(p)) \bar{D}^2 D_\alpha V^C(-q-p) \\
& + \frac{if_{ABC}g_0}{32} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{R_{q+p} - R_q}{(q+p)^2 - q^2} (\bar{D}^2 D^\alpha V^A(-q-p)) \\
& \times V^B(p) D^2 \bar{D}_\alpha V^C(q) q^{\dot{\alpha}}{}_\alpha,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

и для четверной вершины,

$$\begin{aligned}
S^{(4)} = & \frac{g_0^2}{32} f_{ABE} f_{CDE} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \left(\frac{4}{3} R_{q+p+k} (\bar{D}^2 D^\alpha V^A(-q-p-k)) \right. \\
& \times V^B(q) V^C(p) D_\alpha V^D(k) + R_{p+k} V^A(-q-p-k) (D^\alpha V^B(q)) \bar{D}^2 V^C(p) D_\alpha V^D(k) \Big) \\
& + \frac{g_0^2}{128} f_{ABE} f_{CDE} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{R_{q+p} - R_q}{(q+p)^2 - q^2} (\bar{D}^2 D^\alpha V^A(-q-p)) \\
& \times [V^B(p), D^2] \bar{D}^2 V^C(k) D_\alpha V^D(q-k) \\
& + \frac{g_0^2}{128} f_{ABE} f_{CDE} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \frac{R_{q+p} - R_q}{(q+p)^2 - q^2} (\bar{D}^2 D^\alpha V^A(-q-p)) \\
& \times [D^2, V^B(p-k)] V^C(k) \bar{D}^2 D_\alpha V^D(q) \\
& + \frac{g_0^2}{2048} f_{ABE} f_{CDE} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4\theta \Lambda_{p,q,k} (\bar{D}^2 D^\alpha V^A(-p-q-k)) \\
& \times [V^B(p), D^2] \bar{D}^2 [V^C(q), D^2] \bar{D}^2 D_\alpha V^D(k),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где f_{ABE} — структурные константы, а $\Lambda_{p,q,k}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\Lambda_{p,q,k} \equiv & \frac{R_{p+q+k}}{((p+q+k)^2 - (q+k)^2)((p+q+k)^2 - k^2)} \\
& + \frac{R_{q+k}}{((q+k)^2 - (p+q+k)^2)((q+k)^2 - k^2)} + \frac{R_k}{(k^2 - (q+k)^2)(k^2 - (p+q+k)^2)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Кроме того, мы явно не выписываем аргумент θ у калибровочных суперполей; спинорные производные, чье действие не ограничено круглыми скобками, действуют на все, что стоит справа от них; а квадратные скобки обозначают коммутатор $[V^C(q), D^2] = V^C(q) D^2 - D^2 V^C(q)$. Наконец, пропагатор квантового калибровочного суперполя в калибровке (3.5) в импульсном пространстве после поворота Вика имеет вид:

$$2i \left(\frac{1}{R_k k^2} - \frac{1}{16k^4} (D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2) \left(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \right) \right) \delta^{AB}, \tag{3.12}$$

где $R_k \equiv R(k^2/\Lambda^2)$, $K_k \equiv K(k^2/\Lambda^2)$.

Поляризационный оператор квантового калибровочного суперполя в однопетлевом приближении может быть записан в виде суммы трех слагаемых [76]:

$$\Pi(\alpha_0, \lambda_0, k^2/\Lambda^2) = -8\pi\alpha_0 \left(C_2 f(k/\Lambda) + C_2 g(\xi_0, k/\Lambda) + T(R) h(k/\Lambda) \right) + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2), \quad (3.13)$$

где $f(k/\Lambda)$ — не зависящая от ξ_0 часть вклада калибровочной петли и вклад духов Фаддеева–Попова плюс вклад соответствующих суперполей Паули–Вилларса; $g(\xi_0, k/\Lambda)$ — зависящая от ξ_0 часть вклада калибровочной петли; $h(k/\Lambda)$ — вклад суперполей материи и соответствующих суперполей Паули–Вилларса. Функция $f(k/\Lambda)$ уже встречалась нам в первой главе, она дается интегралом (A.10); выражение для $h(k/\Lambda)$ может быть найдено в работе [76], здесь мы приведем лишь выражение для части, зависящей от калибровки:

$$g(\xi_0, k/\Lambda) = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2l^4} \left(\frac{\xi_0}{K_l} - \frac{1}{R_l} \right) \left(R_{k+l} - \frac{2}{3} R_k \right) - \frac{1}{2R_l l^2 (k+l)^4} \left(\frac{\xi_0}{K_{k+l}} - \frac{1}{R_{k+l}} \right) \right. \\ \left. \times (k_\mu R_k + l_\mu R_l)^2 - \frac{R_k^2 k^2 l^\mu (k+l)_\mu}{4l^4 (k+l)^4} \left(\frac{\xi_0}{K_l} - \frac{1}{R_l} \right) \left(\frac{\xi_0}{K_{k+l}} - \frac{1}{R_{k+l}} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Как видно, этот интеграл сходится в ультрафиолетовой области благодаря регуляризации, однако расходится в инфракрасной, поэтому мы здесь предполагаем наличие инфракрасного обрезания. Несмотря на инфракрасную расходимость, мы легко можем найти зависимость этого интеграла от Λ ; для этого достаточно лишь продифференцировать его по $\ln \Lambda$ и положить k равным нулю. При этом инфракрасные расходимости исчезнут благодаря степеням петлевого импульса, возникающим при дифференцировании регуляторов,

$$\left. \frac{d}{d \ln \Lambda} g(\xi_0, k/\Lambda) \right|_{k=0} = -\frac{1}{3} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4} \left(\frac{\xi_0}{K_l} - \frac{1}{R_l} \right) = -\frac{\xi_0 - 1}{24\pi^2}. \quad (3.15)$$

Проделявая то же самое в отношении других слагаемых, можно найти (см. работу [76])

$$\left. \frac{d\Pi}{d \ln \Lambda} \right|_{k=0} = \frac{\alpha_0}{2\pi} \left(3C_2 - T(R) \right) - \frac{\alpha_0 C_2 (1 - \xi_0)}{3\pi} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2). \quad (3.16)$$

Отметим, что при выборе $\xi_0 = 1$ и $R = K$ функция $g(\xi_0, k/\Lambda)$ и соответствующий ей вклад в (3.16) обращаются в нуль.

Приведем некоторые следствия этого соотношения. Введем для теории (3.1) константы перенормировки, так что

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{Z_\alpha}{\alpha}; \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_R; \quad V = Z_V Z_\alpha^{-1/2} V_R; \quad \frac{1}{\xi_0} = \frac{Z_\xi}{\xi}; \quad \bar{c}c = Z_c Z_\alpha^{-1} \bar{c}_R c_R. \quad (3.17)$$

Здесь α и ξ обозначают перенормированную калибровочную константу связи и перенормированный калибровочный параметр, а индекс « R » обозначает перенормированные суперполя. Также предполагается, что голый или перенормированный заряд включен в разложение соответственно голых или перенормированных суперполей по генераторам фундаментального представления. В силу явной калибровочной инвариантности фоновое калибровочное суперполе не перенормируется. Кроме приведенных в (3.17) констант перенормировки, есть еще константы перенормировки суперполей материи и духов Нильсена–Каллош, но мы не будем их здесь касаться.

Константа перенормировки для квантового калибровочного суперполя Z_V определяется так, чтобы выражение

$$\left(1 - \Pi(\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \lambda_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), k^2/\Lambda^2)\right) Z_V^2(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \quad (3.18)$$

где μ — масштаб перенормировки, было конечным в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. (Здесь λ обозначает перенормированные юкавские константы, определяемые с помощью (2.27).) Отсюда, используя определение (2.29), в низшем порядке получим

$$2\gamma_V(\alpha_0, \lambda_0) = -\left.\frac{d\Pi}{d\ln\Lambda}\right|_{k=0} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2) = -\frac{\alpha_0}{2\pi} \left(3C_2 - T(R)\right) + \frac{\alpha_0 C_2 (1 - \xi_0)}{3\pi} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2). \quad (3.19)$$

Легко видеть, что первое слагаемое в правой части этого уравнения равно $\beta(\alpha_0)/\alpha_0$, где β — однопетлевая β -функция. В работе [61] можно увидеть, что это не является просто численным совпадением и что слагаемые в Π , не зависящие от калибровки, даваемые функциями f и h в уравнении (3.13), в пределе нулевого внешнего импульса сворачиваются в интегралы от двойных полных производных, которые совпадают с интегралами, дающими β -функцию в однопетлевом приближении. Заметим при этом, что слагаемые в поляризационном операторе, зависящие от ξ_0 , даваемые в уравнении (3.13) функцией g , в интегралы от полных производных при $k \rightarrow 0$ не сворачиваются, как видно по уравнению (3.15).

Вспоминая определение β -функции в терминах голых зарядов (2.28), мы можем пере-

писать это в виде

$$\frac{d \ln Z_V^2}{d \ln \Lambda} = \frac{d \ln Z_\alpha}{d \ln \Lambda} - \frac{\alpha_0 C_2 (1 - \xi_0)}{3\pi} + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2) \quad (3.20)$$

или, после интегрирования по $\ln \Lambda$,

$$\ln Z_V^2 Z_\alpha^{-1} = -\frac{\alpha C_2 (1 - \xi)}{3\pi} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + a_1 \right) + O(\alpha^2, \alpha \lambda^2), \quad (3.21)$$

где a_1 — константа интегрирования. (Правая часть этого соотношения содержит перенормированные, а не голые величины, поскольку согласно (2.28) и (2.29) дифференцирование или интегрирование по $\ln \Lambda$ происходит при фиксированных значениях перенормированных величин. Это означает, что голые величины в правой части (3.20) должны рассматриваться как функции перенормированных; в уравнении (3.21) мы учли в этих функциях лишь низший порядок.) Из тождеств Славнова–Тейлора следует, что член, фиксирующий калибровку, не перенормируется, поэтому $Z_\xi = Z_V^{-2}$. Поэтому

$$\frac{1}{g_0^2 \xi_0} = \frac{1}{\xi g^2} Z_\alpha Z_V^{-2}, \quad (3.22)$$

что с учетом (3.21) дает

$$\frac{1}{g_0^2 \xi_0} = \frac{1}{\xi g^2} + \frac{C_2 (1 - \xi)}{12\pi^2 \xi} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + a_1 \right) + O(\alpha, \lambda^2), \quad (3.23)$$

результат, которым мы воспользовались в первой главе.

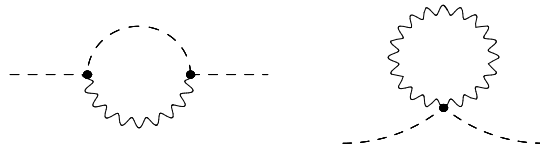


Рис. 3.2. Диаграммы, дающие вклад в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова в однопетлевом приближении

Рассмотрим теперь перенормировку духов Фаддеева–Попова. Запишем билинейную по духовым суперполям часть эффективного действия в виде

$$\Gamma_c^{(2)} = \frac{1}{2g_0^2} \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(-\bar{c}(-p, \theta) c^+(p, \theta) + \bar{c}^+(-p, \theta) c(p, \theta) \right) G_c(\alpha_0, \lambda_0, p^2/\Lambda^2). \quad (3.24)$$

Двухточечная функция Грина G_c в однопетлевом приближении получает квантовые поправки от диаграмм, изображенных на рисунке 3.2. Константа перенормировки Z_c для духов Фаддеева–Попова определяется так, чтобы функция

$$Z_c(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)) G_c(\alpha_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), \lambda_0(\alpha, \lambda, \ln(\Lambda/\mu)), p^2/\Lambda^2) \quad (3.25)$$

была конечной в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Отсюда anomальная размерность для духов Фаддеева–Попова, определенная в терминах голых констант связи, вычисляется как

$$\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0) \equiv -\frac{d \ln Z_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}} = \frac{d \ln G_c}{d \ln \Lambda} \Big|_{\alpha, \lambda = \text{const}, p \rightarrow 0}. \quad (3.26)$$

Вычислив вклады в G_c от диаграмм на рисунке 3.2, можно получить, что anomальная размерность духов Фаддеева–Попова, определенная в терминах голых констант связи, в однопетлевом приближении дается выражением (см. работу [61]):

$$\begin{aligned} \gamma_c &= 4\pi\alpha_0 C_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(-\frac{1}{3Rq^4} + \frac{\xi_0}{3Kq^4} \right) + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2) \\ &= -\frac{\alpha_0 C_2 (1 - \xi_0)}{6\pi} + O(\alpha_0^2, \alpha_0 \lambda_0^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Легко видеть, что калибровочно зависящее слагаемое в правой части этого уравнения повторяет слагаемое в правой части уравнения (3.20) (с точностью до множителя $1/2$). Отсюда, учитывая, что $\gamma_c = -d \ln Z_c / d \ln \Lambda$, получаем следующее соотношение на константы перенормировки в однопетлевом приближении:

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(\ln Z_c + \ln Z_V - \frac{1}{2} \ln Z_\alpha \right) = 0. \quad (3.28)$$

В силу калибровочной инвариантности, вершины с одним квантовым калибровочным суперполем и двумя суперполями духов Фаддеева–Попова не получают расходящихся квантовых поправок и перенормируются только за счет констант перенормировки входящих в них суперполей и заряда. Утверждение (3.28) говорит нам о том, что и эта перенормировка является конечной, по крайней мере в однопетлевом приближении. Однако оказывается, что этот результат можно обобщить и на все порядки теории возмущений [17].

3.3. Заключение к главе

Таким образом, мы в однопетлевом приближении вычислили калибровочно зависящую часть поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя с использованием

БРСТ-инвариантной регуляризации высшими ковариантными производными и тем самым исследовали калибровочную зависимость аномальной размерности квантового калибровочного суперполя в одной петле. Это вычисление позволило нам сделать два основных вывода. Во-первых, перенормировка калибровочного параметра по крайней мере в однопетлевом приближении имеет простейший вид в калибровке Фейнмана $\xi = 1$. Во-вторых, с учетом результата для однопетлевой перенормировки духов Фаддеева–Попова можно заключить, что вершины с одной линией квантового калибровочного суперполя и двумя линиями суперполей духов не перенормируются, причем этот вывод впоследствии оказывается справедливым во всех порядках теории возмущений [17]. В любом случае, исследование калибровочной зависимости β -функции и аномальных размерностей суперполей $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, необходимо, поскольку на настоящий момент трудно сказать, выполняется ли соотношение (2.1) только в какой-либо конкретной калибровке (а в предыдущей главе мы проверяли его в калибровке Фейнмана) или является калибровочно независимым.

Глава 4

Двойные полные производные в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике

4.1. Двойные полные производные из тождества для функций Грина

В этом разделе мы рассмотрим $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную квантовую электродинамику и исследуем в ней возникновение интегралов от двойных полных производных во вкладах в β -функцию. Для самой β -функции в суперсимметричной электродинамике существует абелева версия НШВЗ-соотношения, имеющая вид:

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi} (1 - \gamma(\alpha)), \quad (4.1)$$

где $\gamma(\alpha)$ — аномальная размерность суперполей материи, N_f — количество ароматов. В абелевом случае НШВЗ-соотношение было впервые получено в работах [8, 39]. Как уже указывалось, путем непосредственного суммирования вкладов диаграмм Фейнмана во всех порядках теории возмущений это соотношение было получено при использовании регуляризации высшими ковариантными производными в работах [14, 15], причем оно было получено для β -функции и аномальной размерности, определенных в терминах голой константы связи. При этом в абелевом случае впервые удалось зафиксировать схему вычитаний, в которой НШВЗ-соотношение также справедливо и для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированной константы связи [16]. (Отметим также, что и при использовании размерной редукции можно сформулировать аналогичное предписание, которое будет давать НШВЗ-соотношение в трехпетлевом приближении на перенормированном языке, хотя на языке голой константы связи оно в этом случае выполняться не будет [46].) В первых двух главах мы видели, как НШВЗ-соотношение или аналогичные ему соотношения возникали благодаря тому, что вклады в β -функцию калибровочной константы связи давались интегралами от двойных полных производных при использовании регуляризации высшими производными. В работе [15] факторизация вкладов в β -функцию в интегралы от двойных полных производных была доказана для абелева случая во всех порядках теории возмущений. В этой работе такая структура квантовых поправок следовала из тождества, связывающего двухточечные функции Грина фонового калибровочного

суперполя и суперполей материи, построенного с помощью уравнений Швингера–Дайсона для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами суперполей материи. (Уравнения Швингера–Дайсона широко применяются в квантовой теории поля, см. [77, 88, 89], возможность их применения для получения НШВЗ-соотношения впервые обсуждалась в работе [90].) Это тождество позволяет непосредственно строить интегралы от двойных полных производных, дающие вклад в β -функцию в некотором порядке теории возмущений, по вкладам в двухточечные функции Грина суперполей материи в предыдущем порядке. В этой главе мы проверим в трехпетлевом приближении результаты работы [15] и, в частности, справедливость тождества для функций Грина.

4.2. Действие $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики с N_f ароматами и ее регуляризация

Рассмотрим $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную квантовую электродинамику с N_f ароматами, действие которой в безмассовом пределе имеет вид

$$S = \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a W_a + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left(\phi_\alpha^* e^{2V} \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \tilde{\phi}_\alpha \right), \quad (4.2)$$

где V — вещественное калибровочное суперполе, а ϕ_α и $\tilde{\phi}_\alpha$ при $\alpha = 1, \dots, N_f$ — пары киральных суперполей с противоположными зарядами. Как обычно, e_0 обозначает голый заряд. Мы также будем пользоваться обозначением $\alpha_0 = e_0^2/4\pi$. В абелевом случае суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя имеет простой вид

$$W_a = \frac{1}{4} \bar{D}^2 D_a V, \quad (4.3)$$

где $\bar{D}_a$ и D_a — левая и правая спинорные производные.

Мы воспользуемся методом фонового поля [85]. В абелевом случае расщепление калибровочного суперполя на квантовую и классическую части несколько проще и представляет собой простую сумму квантового V и фонового $\mathbf{V}$ суперполей:

$$V \rightarrow V_T = V + \mathbf{V}. \quad (4.4)$$

Кроме того, следуя работе [15], мы вводим в действие параметр g следующим образом:

$$e^{2V} \rightarrow 1 + g(e^{2V} - 1); \quad e^{-2V} \rightarrow 1 + g(e^{-2V} - 1), \quad (4.5)$$

где V — квантовое калибровочное суперполе. При этом экспоненты с фоновым суперполем мы оставляем неизменными. Параметр g имеет простой смысл: его степень во вкладе от данной диаграммы дает количество вершин, содержащих хотя бы одну линию квантового калибровочного суперполя. Отметим, что этот параметр явно нарушает инвариантность относительно квантовых калибровочных преобразований, но не затрагивает фоновую калибровочную инвариантность.

Далее, регуляризуем теорию, добавляя к действию слагаемое с высшими производными (причем обычными) и вводя в производящий функционал детерминанты Паули–Вилларса для устранения однопетлевых расходимостей и подрасходимостей [72, 73]. В итоге производящий функционал принимает вид [15]:

$$\begin{aligned} Z = e^{iW} &= \int DV D\phi D\tilde{\phi} \prod_{I=1}^n \det(V, \mathbf{V}, M_I)^{c_I N_f} \exp \left(iS_{\text{reg}} + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}} \right) \\ &= \int D\mu \exp \left(iS_{\text{total}} + iS_{\text{gf}} + iS_{\text{source}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Массы суперполей Паули–Вилларса пропорциональны параметру обрезания Λ , появляющемуся в слагаемом с высшими производными: $M_I = a_I \Lambda$, где a_I — не зависящие от константы связи параметры. Коэффициенты $c_I = (-1)^{P_I+1}$ должны удовлетворять условиям

$$\sum_{I=1}^n c_I = 1; \quad \sum_{I=1}^n c_I M_I^2 = 0, \quad (4.7)$$

где $(-1)^{P_I}$ играет роль грассмановой четности соответствующего суперполя Паули–Вилларса. С учетом того, что $c_I = \pm 1$, суперполя Паули–Вилларса и обычные суперполя материи можно рассматривать одинаково. Поэтому ниже мы будем предполагать, что суперполя материи соответствуют $I = 0$ и $M_{I=0} = 0$. Действие регуляризованной теории и член, фиксирующий калибровку, в (4.6) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{\text{total}} &= \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta W^a R(\partial^2/\Lambda^2) W_a + \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int d^4x d^4\theta \left[\phi_\alpha^* e^{2V} \left(1 + g(e^{2V} - 1) \right) \phi_\alpha + \tilde{\phi}_\alpha^* e^{-2V} \left(1 + g(e^{-2V} - 1) \right) \tilde{\phi}_\alpha \right]_I \\ &+ \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^2\theta M \phi_\alpha \tilde{\phi}_\alpha + \text{c.c.} \right)_I; \\ S_{\text{gf}} &= -\frac{1}{64e^2} \int d^4x d^4\theta \left(V R(\partial^2/\Lambda^2) D^2 \bar{D}^2 V + V R(\partial^2/\Lambda^2) \bar{D}^2 D^2 V \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где возникающая после расщепления фоновая суперсимметричная напряженность обозначается как $\mathbf{W}_a = \bar{D}^2 D_a \mathbf{V}/4$, а e — перенормированный заряд. Функция R удовлетворяет обычным условиям для регулятора и может быть взята, например, в виде $R = 1 + \partial^{2n}/\Lambda^{2n}$. После виковского поворота пропагатор квантового калибровочного суперполя имеет вид

$$\frac{e_0^2}{R_k k^2} + \frac{(e_0^2 - e^2)}{16 R_k k^4} (\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2). \quad (4.9)$$

Член с источниками имеет обычный вид, однако для удобства мы также включаем в него источники и для суперполей Паули–Вилларса. Эффективное действие определяется как

$$\Gamma[V, \mathbf{V}, \phi_{\alpha I}, \tilde{\phi}_{\alpha I}] = W - S_{\text{source}}, \quad (4.10)$$

где предполагается, что источники выражены через значения полей. Слагаемые в эффективном действии, квадратичные по фоновому калибровочному супер полю и билинейные по супер полям материи (включая супер поля Паули–Вилларса) имеют вид ¹

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} - S_{\text{gf}} = & -\frac{1}{16\pi} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \mathbf{V}(\theta, -p) \partial^2 \Pi_{1/2} \mathbf{V}(\theta, p) d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{I=0}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \left(\phi_{\alpha I}^*(\theta, -p) \phi_{\alpha I}(\theta, p) + \tilde{\phi}_{\alpha I}^*(\theta, -p) \tilde{\phi}_{\alpha I}(\theta, p) \right) G_I(\alpha_0, \Lambda/p) \\ & - \left(\sum_{I=1}^n \sum_{\alpha=1}^{N_f} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta \phi_{\alpha I}(\theta, -p) \frac{D^2}{16p^2} \tilde{\phi}_{\alpha I}(\theta, p) M_I J_I(\alpha_0, \Lambda/p) + \text{c.c.} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Разложение по константе связи для функций, входящих в это выражение, имеет вид:

$$d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) = \alpha_0^{-1} + O(1); \quad G_I(\alpha_0, \Lambda/p) = 1 + O(\alpha_0); \quad J_I(\alpha_0, \Lambda/p) = 1 + O(\alpha_0). \quad (4.12)$$

Напомним, что β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, можно вычислить по функции $d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p)$ следующим образом:

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = -\frac{d\alpha_0^{-1}(\alpha, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} = \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2}, \quad (4.13)$$

где α — перенормированная константа связи, μ — масштаб перенормировки и мы дифференцируем по $\ln \Lambda$ при фиксированном значении перенормированной константы связи.

¹ Все импульсы здесь евклидовы.

Отсюда видно, что β -функция полностью определяется производной по $\ln \Lambda$ от функции $d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1}$ в пределе нулевого внешнего импульса, $p \rightarrow 0$. Функцию Грина фонового калибровочного суперполя в пределе нулевого внешнего импульса можно получить, сделав в эффективном действии замену

$$\mathbf{V}(x, \theta) \rightarrow \theta^4 \cdot I(x) \approx \theta^4, \quad (4.14)$$

где $I(x)$ — слабо меняющаяся функция, равная единице при конечных x^μ и стремящаяся к нулю на масштабе $R \rightarrow \infty$. Вводя регуляризованный объем пространства-времени

$$\mathcal{V}_4 \equiv \int d^4x I^2 \sim R^4 \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

можно легко получить [15]

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{V}_4 \cdot \frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1}(\alpha_0, \Lambda/p) - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{V}_4 \cdot \frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d(\Delta\Gamma_{\mathbf{V}}^{(2)})}{d \ln \Lambda} \Big|_{\mathbf{V}(x, \theta) = \theta^4}, \quad (4.16)$$

где мы используем обозначение

$$\Delta\Gamma \equiv \Gamma - \frac{1}{4e_0^2} \text{Re} \int d^4x d^2\theta \mathbf{W}^a \mathbf{W}_a. \quad (4.17)$$

(Здесь индексы (2) и $\mathbf{V}$ означают, что берется лишь часть $\Delta\Gamma$, квадратичная по фоновому калибровочному супер полю.) Производная по $\ln \Lambda$ берется при фиксированном значении перенормированной константы связи. Далее мы будем опускать регулятор $I(x)$.

Мы уже неоднократно говорили, что интегралы, задающие β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, представляют собой интегралы от двойных полных производных в импульсном пространстве. В работе [15] было показано, что это свойство является следствием тождества между двухточечными функциями Грина, справедливого во всех порядках теории возмущений, имеющего следующий вид ²:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8x d^8y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta\Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \\ &= \frac{i}{4} C(R)_i^j \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{Tr} (\theta^4)_x \left[y_\mu^*, \left[y_\mu^*, \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_j)_x \delta(\phi^{*i})_y} \right)^{-1} + M^{ik} \left(\frac{D^2}{8\partial^2} \right)_x \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_k)_x \delta(\phi_j)_y} \right)^{-1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + M_{jk}^* \left(\frac{\bar{D}^2}{8\partial^2} \right)_x \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi^{*k})_x \delta(\phi^{*i})_y} \right)^{-1} \right] \right]_{y=x} - \text{сингулярности} = -\text{сингулярности}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

² Производные эффективного действия, приведенные ниже, совпадают с соответствующими производными функции Рауса, которая использовалась в работе [15].

где

$$(y_\mu)^* \equiv x_\mu - i\bar{\theta}^{\dot{a}}(\gamma_\mu)_{\dot{a}}{}^b \theta_b, \quad (4.19)$$

и

$$[y_\mu^*, A_{xy}] \equiv (y_\mu^*)_x A_{xy} - A_{xy} (y_\mu^*)_y; \quad \text{Tr } A \equiv \int d^8 x A_{xx}; \quad \int d^8 x \equiv \int d^4 x d^4 \theta. \quad (4.20)$$

Легко видеть, что двойные коммутаторы с y_μ^* в импульсном пространстве превращаются в двойные полные производные, откуда немедленно следует, что тождество (4.18) дает β -функцию в виде интегралов от двойных полных производных. В уравнении (4.18) мы также используем обозначение

$$\phi_i \equiv (\phi_{\alpha I}, \tilde{\phi}_{\alpha I}); \quad \phi^{*i} \equiv (\phi_{\alpha I}^*, \tilde{\phi}_{\alpha I}^*), \quad i = 1, \dots, 2(n+1)N_f. \quad (4.21)$$

Суперполя ϕ_i включают как обычные суперполя материи, так и суперполя Паули–Вилларса (с грассмановой четностью $(-1)^{P_I}$). В этих обозначениях

$$C(R)_i{}^j = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

а массовая матрица имеет вид

$$M^{ij} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 0 & M_I \\ (-1)^{P_I} M_I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

где строки (и столбцы) матрицы 2×2 отвечают полям ϕ и $\tilde{\phi}$. Двухточечные функции Грина киральных суперполей могут быть легко найдены из выражения (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi^{*j})_y} &= \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G_I \frac{\bar{D}_x^2 D_x^2}{16} \delta_{xy}^8; \\ \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi_j)_y} &= -\frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{P_I} M_I \\ M_I & 0 \end{pmatrix} J_I \bar{D}_x^2 \delta_{xy}^8. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обратные к ним функции, построенные в работе [15], имеют вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi^{*j})_y}\right)^{-1} &= -(-1)^{P_I} \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{G_I \bar{D}_x^2 D_x^2}{4(\partial^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2)} \delta_{xy}^8; \\
\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi_j)_y}\right)^{-1} &= -\delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{IJ} \cdot \begin{pmatrix} 0 & M_I \\ (-1)^{P_I} M_I & 0 \end{pmatrix} \frac{J_I \bar{D}_x^2}{\partial^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2} \delta_{xy}^8.
\end{aligned} \quad (4.25)$$

Термин «сингулярности» в уравнении (4.18) относится к сингулярностям, которые возникают благодаря соотношению

$$[x^\mu, \frac{\partial_\mu}{\partial^4}] = [-i \frac{\partial}{\partial p_\mu}, -\frac{i p_\mu}{p^4}] = -2\pi^2 \delta^4(p_E) = -2\pi^2 i \delta^4(p) = -2\pi^2 i \delta^4(\partial), \quad (4.26)$$

аналогичному соотношению (2.43). В соответствии с работами [14, 15] сумма этих сингулярностей и дает НШВЗ β -функцию, определенную в терминах голой константы связи, во всех порядках теории возмущений (с использованием регуляризации высшими ковариантными производными).

4.3. Проверка тождества между двухточечными функциями Грина в трехпетлевом приближении

4.3.1. Двойные полные производные в трехпетлевом приближении

Для проверки тождества (4.18) необходимо вычислить двухточечную функцию Грина фонового калибровочного суперполя при $g \neq 1$. В трехпетлевом приближении вклад в нее дают диаграммы, изображенные на рисунке 4.1, к которым всевозможными способами необходимо присоединить две внешние линии фонового калибровочного суперполя³. Например, рассмотрим двухпетлевой граф (1); все двухпетлевые диаграммы, получаемые из него таким способом изображены на рисунке 4.2. Каждая вершина, содержащая хотя бы одну линию квантового калибровочного суперполя, дает один множитель g при вкладе диаграммы, а каждая замкнутая петля дает множитель N_f . Общие множители при вкладах всех графов также отображены на рисунке 4.1. Кроме того, для того чтобы получить диаграммы, дающие вклад в двухточечные функции Грина киральных суперполей, стоящие в правой части тождества (4.18), необходимо разрезать линии материи в этих графах и среди получившихся диаграмм оставить только одночастично неприводимые. Результат

³ Однопетлевой граф не изображен, поскольку однопетлевое приближение необходимо рассматривать отдельно.

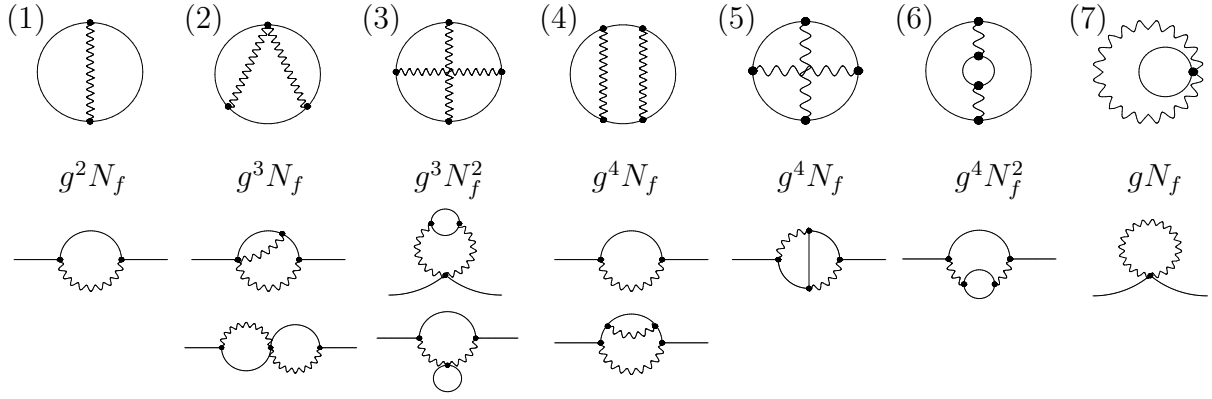


Рис. 4.1. Двух- и трехпетлевые графы, к которым необходимо присоединить две внешние линии фонового калибровочного суперполя, чтобы получить диаграммы, дающие вклад в β -функцию. Общие множители в виде степеней g и N_f отображены под графами. Диаграммы, дающие вклад в двухточечные функции Грина киральных суперполей, изображены ниже

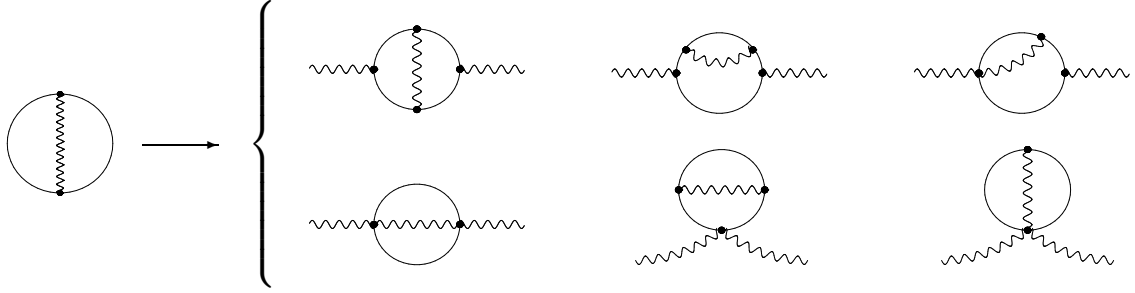


Рис. 4.2. Диаграммы, дающие вклад в β -функцию, получаемые присоединением к графу (1) на рисунке 4.1 двух внешних линий фонового калибровочного суперполя

такого разрезания также изображен на рисунке 4.1 под каждым из графов, дающих вклад в β -функцию.

Все вклады в β -функцию в трехпетлевом приближении для случая $N_f = 1$, $g = 1$ были вычислены в работе [41]. Используя эти результаты, можно вычислить вклады всех графов на рисунке 4.1 в эффективное действие для фонового калибровочного суперполя. Как обсуждалось выше, в нем удобно положить фоновое суперполе равным значению θ^4 . Ниже мы приводим вклады этих графов в производную по $\ln g$ от уравнения (4.16), при этом мы пренебрегаем членами, имеющими порядок e_0^6 . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (1)} &= \mathcal{V}_4 \cdot 4g^2 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 R_k} \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \left(\frac{e_0^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2)} - \frac{2(e_0^2 - e^2)}{k^2 (q^2 + M_I^2)} \right); \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (2)} &= -\mathcal{V}_4 \cdot 24g^3 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{1}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)}; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (3)} &= -\mathcal{V}_4 \cdot 24g^3 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} + \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I+P_J} \frac{1}{(l^2 + M_I^2)(q^2 + M_J^2) ((q+k)^2 + M_J^2)}; \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (4)} &= \mathcal{V}_4 \cdot 16g^4 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2 ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)}; \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (5)} &= \mathcal{V}_4 \cdot 8g^4 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \\ &\times \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{(k+l+2q)^2 + 2M_I^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (6)} &= -16\mathcal{V}_4 \cdot g^4 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I+P_J} \frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2 - (l+k)^2 - l^2 - 2M_I^2 - 2M_J^2}{(q^2 + M_I^2) ((q+k)^2 + M_I^2) (l^2 + M_J^2) ((l+k)^2 + M_J^2)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln g} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф (7)} &= 4\mathcal{V}_4 \cdot g N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k} \\ &\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{1}{(q^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Видно, что каждый из вкладов представляет собой интеграл от двойной полной производной.

4.3.2. Вклады порядка e_0^2 в тождестве (4.18)

Мы видели, что вклады в β -функцию даются интегралами от двойных полных производных в полном соответствии с тем, что нам говорит тождество (4.18). Но это тождество

также говорит нам, что для того чтобы получить вклад в β -функцию в некотором порядке теории возмущений, достаточно лишь вычислить двухточечную функцию Грина киральных суперполей в предыдущем. Рассмотрим первый, двухпетлевой, граф на рисунке 4.1. Разрезая его, получим однопетлевую диаграмму, вклад которой в функции G_I и J_I имеет вид (после виковского поворота, импульс q^μ евклидов):

$$\Delta G_I^{(1)} = -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2 R_k} \left(\frac{e_0^2}{((q+k)^2 + M_I^2)} - \frac{(e_0^2 - e^2)((q+k)^2 + q^2)}{k^2((q+k)^2 + M_I^2)} \right); \quad (4.34)$$

$$\Delta J_I^{(1)} = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4(e_0^2 - e^2)q^2}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}. \quad (4.35)$$

Разница $e_0^2 - e^2$ имеет порядок e_0^4 , поэтому в приближении e_0^2 она несущественна. Это означает, что в этом приближении

$$\begin{aligned} G_I(\alpha_0, \Lambda/q) &= 1 - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4); \\ J_I(\alpha_0, \Lambda/q) &= 1 + O(e_0^4). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя это в уравнения (4.25), получим обратные двухточечные функции Грина, которые в импульсном представлении будут пропорциональны величинам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi^{*j})_y} \right)^{-1} &\sim \frac{G_I}{4(q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2)} \\ &= \frac{1}{4(q^2 + M_I^2)} \left(1 + \frac{q^2 - M_I^2}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4) \right); \\ \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_i)_x \delta(\phi_j)_y} \right)^{-1} &\sim \frac{M_I J_I}{q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2} \\ &= \frac{M_I}{q^2 + M_I^2} \left(1 + \frac{q^2}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4) \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

При их подстановке в правую часть тождества (4.18) получаем (без коммутатора и интеграла по $d^4 x$, но с интегралом по $d^4 \theta$, который также предполагается в Tr)

$$\begin{aligned} &\frac{i}{4} C(R)_i{}^j \int d^4 \theta_x (\theta^4)_x \left(\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_j)_x \delta(\phi^{*i})_y} \right)^{-1} + M^{ik} \left(\frac{D^2}{8\partial^2} \right)_x \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi_k)_x \delta(\phi_j)_y} \right)^{-1} + M_{jk}^* \left(\frac{\bar{D}^2}{8\partial^2} \right)_x \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta(\phi^{*k})_x \delta(\phi^{*i})_y} \right)^{-1} \right) \Big|_{\theta_y = \theta_x} = 2N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{q^2 + M_I^2} + \frac{M_I^2}{q^2(q^2 + M_I^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} + \frac{2M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} + O(e_0^4) \Big) \exp \left(i q_\mu (x^\mu - y^\mu) \right) \\
& = 4N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + M_I^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} \exp \left(i q_\mu (x^\mu - y^\mu) \right) \\
& + O(e_0^4),
\end{aligned} \tag{4.38}$$

где x^μ и y^μ — евклидовы координаты и где мы также учли, что

$$\sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} = 1 - \sum_{I=1}^n c_I = 0, \tag{4.39}$$

из-за чего одно из слагаемых исчезло. Далее необходимо вычислить двойной коммутатор с y_μ^* , но поскольку след от коммутатора с грассмановыми координатами θ всегда равен нулю, мы можем заменить двойной коммутатор с y_μ^* просто на двойной коммутатор с x^μ , который в импульсном представлении превратится в оператор

$$[x_\mu, [x^\mu, \dots]]_M = -[x_\mu, [x^\mu, \dots]]_E \rightarrow \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \tag{4.40}$$

действующий на экспоненту. Затем интегрированием по частям его нужно перебросить на функцию, стоящую перед экспонентой, и, положив $x = y$, взять интеграл по $d^4 x$. Тем самым получим

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) = 4\mathcal{V}_4 N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \\
& \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{(q^2 + M_I^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2 g^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} \right) + O(e_0^4).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

(При этом предполагается присутствие регулятора $I^2(x)$, так что бесконечный объем, получаемый интегрированием по $d^4 x$, заменяется на регуляризованный $\mathcal{V}_4 \rightarrow \infty$.) Полученный результат совпадает с двухпетлевым результатом (4.27) для левой части тождества (4.18). Таким образом, мы проверили это тождество в двухпетлевом приближении.

Благодаря тождеству

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{q^2} = -4\pi^2 \delta^4(q), \tag{4.42}$$

интеграл в (4.41) содержит сингулярности. Чтобы учесть вклады этих сингулярностей, мы воспользуемся нашим обычным правилом (1.35).

Теперь проинтегрируем уравнение (4.41) по $\ln g$ от значения $g = 0$ до $g = 1$. При $g = 1$ мы получаем обычную суперсимметричную электродинамику в калибровке фонового поля, а при $g = 0$ материя перестает взаимодействовать с квантовым калибровочным суперполем, так что в этом случае β -функция определяется лишь однопетлевым приближением. Таким образом, используя (4.16), получим

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = 4\pi N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{k^2 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \times \left(\frac{1}{q^2(q+k)^2} - \sum_{I=1}^n c_I \frac{1}{(q^2 + M_I^2)((q+k)^2 + M_I^2)} \right) + O(e_0^4). \quad (4.43)$$

Здесь сингулярности содержатся только в первом слагаемом, так что используя формулу (1.35), получим

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} + \frac{2}{\pi} N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{k^4 R_k} + O(e_0^4) = \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} + \frac{\alpha_0 N_f}{\pi^2} + O(\alpha_0^2). \quad (4.44)$$

Подставляя сюда однопетлевой результат для β -функции, воспроизводим хорошо известное выражение для β -функции в двухпетлевом приближении [91, 92]:

$$\beta(\alpha_0) = \frac{N_f \alpha_0^2}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + O(\alpha_0^2) \right). \quad (4.45)$$

4.3.3. Вклады порядка e_0^4 в тождестве (4.18)

Проверка тождества (4.18) в следующем порядке проводится аналогичным образом. Однако в этом случае возникают некоторые тонкие моменты, которые в предыдущем порядке отсутствуют. Мы рассмотрим то, как правая часть тождества (4.18) воспроизводит вклады в β -функцию, для каждого графа по порядку.

1. Начнем с графа (1) на рисунке 4.1. Ранее мы отбросили слагаемые порядка e_0^4 , возникающие из разности $e_0^2 - e^2$. Теперь учтем эти слагаемые:

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(1)} &\leftarrow g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(e_0^2 - e^2)((q+k)^2 + q^2)}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}, \\ \Delta J_I^{(1)} &\leftarrow g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4(e_0^2 - e^2)q^2}{k^4 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Вычисляя вклады в обратные двухточечные функции Грина и затем подставляя результат в правую часть тождества (4.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow -4 \mathcal{V}_4 \cdot g^2 N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \\ \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{(k+q)^2 + q^2 + 2M_I^2}{(q^2 + M_I^2)((q+k)^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Очевидно, что q^2 в числителе дроби в этом выражении можно сдвигом импульса перевести в $(q+k)^2$, а затем сократить и числитель, и знаменатель на $(q+k)^2 + M_I^2$, получив тем самым вторую часть вклада (4.27).

2. Диаграммы, отвечающие второму графу на рисунке 4.1, дают следующие вклады в G_I и J_I :

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(2)} = g^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{((q+k)^2 + M_I^2)((q+l)^2 + M_I^2)} \right. \\ \left. + \frac{2}{((q+k)^2 + M_I^2)((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right); \\ \Delta J_I^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Продельвая те же манипуляции, что и в двухпетлевом случае, получим выражение, равное вкладу (4.28).

3. Третий граф на рисунке 4.1 содержит две петли материи. При получении диаграмм, дающих вклады в двухточечные функции Грина киральных суперполей, разрезанием линий материи, необходимо учесть, что можно разрезать каждую из этих петель. В результате получаем две диаграммы, изображенные на рисунке 4.16 под графом (3). В функции G_I и J_I они дают следующие вклады:

$$\begin{aligned} \Delta G_I^{(3)} = g^3 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2} \left(\frac{2}{((q+k)^2 + M_I^2)} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} \right. \\ \left. + \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((l+k)^2 + M_J^2)} \right); \\ \Delta J_I^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

При подстановке этих выражений в правую часть тождества (4.18) нужно поступать осторожно. Анализ, проведенный в работе [15], говорит нам о том, что при наличии у диаграммы замкнутых петель материи необходимо при подстановке в уравнение (4.18) к слагаемому с

двойной полной производной, получаемому обычным образом, также добавить слагаемое, в котором двойная полная производная вставлена в замкнутую петлю. Это означает, что

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow -8 \mathcal{V}_4 \cdot N_f^2 \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{(q^2 + M_I^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^3}{k^4 R_k^2} \left[\frac{2}{((q+k)^2 + M_I^2)} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} \right. \right. \right. \\
& + \left. \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((l+k)^2 + M_J^2)} \right] \Bigg) + \frac{1}{(q^2 + M_I^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^3}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \\
& \times \left[\frac{2}{((q+k)^2 + M_I^2)} \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{l^2 + M_J^2} + \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((l+k)^2 + M_J^2)} \right] \Bigg\}. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Это выражение состоит из двух частей с двойными полными производными. Первая из них, с двойной полной производной по q^μ , была получена так же, как это делалось ранее, а вторая — путем вставки в замкнутую петлю материи двойной полной производной по петлевому импульсу l^μ . Заменяя во втором и четвертом слагаемых l на q , I на J и наоборот, получим результат (4.29).

4. Разрезая граф (4) на рисунке 4.1 можно получить диаграмму, не являющуюся однократно неприводимой. Ее в рассмотрение принимать не нужно, поскольку диаграммы, дающие вклад в правую часть уравнения (4.18), получаются дифференцированием эффективного действия, являющегося производящим функционалом для однократно неприводимых диаграмм. В то же время при разрезании графа (4) получаются две однократно неприводимые диаграммы: двухпетлевая и однопетлевая, которую также необходимо учесть. Вклады в G_I и J_I от обеих диаграмм имеют вид

$$\begin{aligned}
\Delta G_I^{(4)} &= -g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k ((q+k)^2 + M_I^2)} \\
&\quad - g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}; \\
\Delta J_I^{(4)} &= 0. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Чтобы учесть вклад однопетлевой диаграммы при вычислении обратных функций Грина (4.25), необходимо их разложить до членов второго порядка по ΔG_I . Получающиеся члены порядка $g^4 e_0^4$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{G_I}{4(q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2)} &\leftarrow \frac{q^2(q^2 - 3M_I^2)}{(q^2 + M_I^2)^3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^4 e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} \\
&+ \frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g^4 e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}; \\
\frac{M_I J_I}{q^2 G_I^2 + M_I^2 J_I^2} &\leftarrow \frac{q^2(3q^2 - M_I^2) M_I}{(q^2 + M_I^2)^3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g^4 e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} \\
&+ \frac{q^2 M_I}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{8g^4 e_0^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Результат подстановки в правую часть тождества (4.18) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow 8\mathcal{V}_4 \cdot N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \\
&\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{q^2 - M_I^2}{(q^2 + M_I^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^4}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2)} \right. \\
&\left. + \frac{1}{(q^2 + M_I^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4 g^4 ((q+k)^2 - M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2)^2 ((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right). \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Делая во втором слагаемом в скобках замену $q^\mu \rightarrow -q^\mu - k^\mu$, получим вклад (4.30).

5. Рассмотрение графа (5) не содержит никаких тонкостей. Получающаяся разрезанием этого графа единственная диаграмма дает вклады в G_I и J_I следующего вида:

$$\begin{aligned}
\Delta G_I^{(5)} &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4 ((2q+k+l)^2 + M_I^2)}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}; \\
\Delta J_I^{(5)} &= -g^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4 q^2}{k^2 R_k l^2 R_l ((q+k)^2 + M_I^2) ((q+l)^2 + M_I^2) ((q+k+l)^2 + M_I^2)}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Продельвая то же, что и в двухпетлевом случае, получим, что правая часть тождества (4.18) дает выражение (4.31).

6. Граф (6) содержит две петли материи. Его разрезание дает единственную двухпетлевую диаграмму с замкнутой петлей материи, вклад которой в функции G_I и J_I равен

$$\begin{aligned}
\Delta G_I^{(6)} &= g^4 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2 ((q+k)^2 + M_I^2)} \\
&\times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \left(\frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)} - \frac{2}{l^2 + M_J^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\Delta J_I^{(6)} = -g^4 N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{8e_0^4 q^2}{k^4 R_k^2 ((q+k)^2 + M_I^2)} \times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2) ((k+l)^2 + M_J^2)}. \quad (4.55)$$

При подстановке этих вкладов в правую часть тождества (4.18) необходимо помнить, что наличие замкнутой петли материи приводит к дополнительному слагаемому, в котором в петлю вставлена двойная полная производная по петлевому импульсу. Результат подстановки имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \leftarrow -8\mathcal{V}_4 \cdot g^4 N_f^2 \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^4}{k^4 R_k^2} \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} + \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \right) \sum_{I,J=0}^n (-1)^{P_I + P_J} \frac{k^2 - (k+q)^2 - q^2 - (l+k)^2 - l^2 - 2M_I^2 - 2M_J^2}{(l^2 + M_I^2) ((l+k)^2 + M_I^2) (q^2 + M_J^2) ((q+k)^2 + M_J^2)}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

(Слагаемое с двойной полной производной по l^μ появилось здесь в соответствии с нашим предписанием в отношении диаграмм с замкнутой петлей.) Сделав подходящую замену переменных, мы получаем выражение (4.32).

7. Последний, двухпетлевой, граф также дает вклад порядка $e_0^2 - e^2 \sim e_0^4$. Получающаяся его разрезанием диаграмма дает в G_I и J_I вклады

$$\Delta G_I^{(7)} = -g \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k}; \quad \Delta J_I^{(7)} = 0. \quad (4.57)$$

Обычным образом выполненная подстановка в тождество (4.18) приводит к выражению, в точности равному вкладу (4.33):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{\partial}{\partial \ln g} \left(\frac{1}{2} \int d^8 x d^8 y (\theta^4)_x (\theta^4)_y \frac{\delta^2 \Delta \Gamma}{\delta \mathbf{V}_x \delta \mathbf{V}_y} \right) \\ \leftarrow 4\mathcal{V}_4 \cdot g N_f \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(e_0^2 - e^2)}{k^4 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{1}{(q^2 + M_I^2)}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Таким образом, мы получили трехпетлевой вклад в β -функцию, вычисляя лишь двухпетлевые вклады в двухточечные функции Грина киральных суперполей. Это подтверждает справедливость тождества (4.18) в рассматриваемом приближении.

Рассмотрим теперь, как тождество (4.18) в трехпетлевом приближении позволяет получить НШВЗ β -функцию. Вычислив сумму вкладов (4.27)–(4.33) и проинтегрировав ее по $\ln g$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} &= 4\pi N_f \sum_{I=0}^n (-1)^{P_I} \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{k^2 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(q^2 + M_I^2)} \\
&\times \frac{1}{((q+k)^2 + M_I^2)} \left\{ 1 + \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{e_0^2}{l^2 R_l} \left(-\frac{4}{((q+l)^2 + M_I^2)} + \frac{2(q^2 - M_I^2)}{(q^2 + M_I^2)((q+l)^2 + M_I^2)} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{(k+l+2q)^2 + 2M_I^2}{((q+l)^2 + M_I^2)((q+k+l)^2 + M_I^2)} \right) - N_f \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k} \cdot \frac{1}{(l^2 + M_J^2)} \right. \\
&\times \left. \left. \frac{1}{((l+k)^2 + M_J^2)} \right\} + O(e_0^6). \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Вычислим интегралы от двойных полных производных, используя формулу (1.35), учитывая при этом, что сингулярности вида $1/q^2$ содержатся лишь в безмассовых пропагаторах, отвечающих $I = 0$. В результате получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} &= \frac{N_f}{\pi} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^4 R_k} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(-\frac{2}{k^2(k+l)^2} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{k^2 l^2} \right) - N_f \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2 (l^2 + M_J^2)((l+k)^2 + M_J^2)} \right\} + O(e_0^6). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

Вычислим теперь двухпетлевой вклад при $g = 1$ в функцию $G \equiv G_{I=0}$, отвечающую обычным суперполям материи:

$$\begin{aligned}
G(\alpha_0, \Lambda/q) &= 1 - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^2 R_k (k+q)^2} + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{(q+k)^2 (q+l)^2} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{(q+k)^2 (q+k+l)^2} - \frac{(2q+k+l)^2}{(q+k)^2 (q+l)^2 (q+k+l)^2} \right) + N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k^2 (q+k)^2} \\
&\times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((k+l)^2 + M_J^2)} - q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^4}{k^4 R_k (q+k)^2} \left(\frac{1}{e_0^2} - \frac{1}{e^2} + 2N_f \frac{1}{R_k} \right. \\
&\times \left. \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((k+l)^2 + M_J^2)} \right) + O(e_0^6). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Все интегралы в этом выражении хорошо определены, кроме последнего, который расходится в инфракрасном пределе. Однако расходимости при $\Lambda \rightarrow \infty$ в нем не содержится, следовательно после дифференцирования по $\ln \Lambda$, когда инфракрасная расходимость уйдет, его вклад в аномальную размерность будет равен нулю, а значит его вообще можно отбросить (как это сделано в [16]). Аномальная размерность, определенная в терминах голой константы связи, тем самым равна [93]:

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha_0) = & -\frac{d \ln Z(\alpha, \Lambda/\mu)}{d \ln \Lambda} = \frac{d \ln G(\alpha_0, \Lambda/q)}{d \ln \Lambda} \Big|_{q=0} = \frac{d}{d \ln \Lambda} \left\{ - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2e_0^2}{k^4 R_k} \right. \\
& + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{k^2(k+l)^2} - \frac{1}{2k^2 l^2} \right) + N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4e_0^4}{k^4 R_k^2} \\
& \left. \times \sum_{J=0}^n (-1)^{P_J} \frac{1}{(l^2 + M_J^2)((k+l)^2 + M_J^2)} + O(e_0^6) \right\}. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с выражением (4.60) для β -функции, видим, что в рассматриваемом приближении выполняется знаменитое НШВЗ-соотношение:

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_{1\text{-loop}}(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{N_f}{\pi} \gamma(\alpha_0). \tag{4.63}$$

4.4. Заключение к главе

В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамике НШВЗ-соотношение может быть получено из тождества, связывающего двухточечные функции Грина фонового калибровочного суперполя и киральных суперполей во всех порядках теории возмущений. Оно говорит о том, что вклады в β -функцию даются в виде интегралов от двойных полных производных и позволяет построить эти вклады в данном порядке теории возмущений по вкладам в двухточечные функции Грина киральных суперполей в предыдущем порядке. Мы непосредственным вычислением проверили это тождество в трехпетлевом приближении и построили интегралы от двойных полных производных в явном виде. Кроме того, мы явно продемонстрировали возникновение из этого тождества НШВЗ-соотношения для β -функции, определенной в терминах голой константы связи, в трехпетлевом приближении.

Заключение

В работе исследовалась область применимости некоторых точных соотношений, связывающих ренормгрупповые функции в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, их происхождение из особой структуры квантовых поправок и использование этой особой структуры для аналитических вычислений по теории возмущений. Были получены следующие результаты.

1. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД, регуляризованной высшими ковариантными производными, для D -функции Адлера, определенной в терминах голой константы связи, получено аналитическое выражение в трехпетлевом приближении, явно проверено точное соотношение, связывающее ее с аномальной размерностью суперполей материи, определенной в терминах голой константы связи. Явно продемонстрирована факторизация вкладов в D -функцию в интегралы от двойных полных производных. Найдено перенормировочное предписание, фиксирующее во всех порядках схему вычитаний, в которой точное соотношение справедливо и для D -функции и аномальной размерности, определенных в терминах перенормированной константы связи. Найдено явное выражение для D -функции в этой НШВЗ-подобной схеме.
2. В $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, вычислены квадратичные по юкавским константам вклады в β -функцию, определенную в терминах голых констант связи, в трехпетлевом приближении. Для полученного выражения проверено недавно предложенное точное соотношение, связывающее β -функцию с аномальными размерностями квантовых суперполей теории. Для полученных вкладов проверена работа предложенного перенормировочного предписания, фиксирующего схему, в которой точное соотношение справедливо и для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи. Для рассматриваемых вкладов в β -функцию была проверена их факторизация в интегралы от двойных полных производных.
3. В однопетлевом приближении исследована калибровочная зависимость поляризационного оператора квантового калибровочного суперполя в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной БРСТ-инвариантной версией регуляризации высшими ковариантными производными.

4. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, в трехпетлевом приближении проверено точное соотношение между двухточечными функциями Грина фонового калибровочного суперполя и киральных суперполей, делающее явной факторизацию вкладов в β -функцию в интегралы от двойных полных производных. Получены явные выражения для интегралов от двойных полных производных в трехпетлевом приближении.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту Пронину Петру Ивановичу за внимательное отношение к этой работе и за передачу части своего богатого жизненного и научного опыта. Он также благодарит доцента Степаньянца Константина Викторовича за обучение множеству технических приемов, позволяющих сократить длинные вычисления, за постоянную помощь при решении возникающих в работе нетривиальных вопросов, а также за внимательное прочтение рукописи и критические замечания. Автор также хотел бы поблагодарить ведущего научного сотрудника Отдела теоретической физики ИЯИ РАН Катаева Андрея Львовича за большое количество полезных обсуждений и за помощь в расширении научного кругозора автора.

Автор благодарит своего соавтора Шахманова Викентия Юрьевича за ценные дискуссии.

Автор также хотел бы выразить искреннюю благодарность своей матери Желомской Наталье Александровне, а также всем своим друзьям за постоянную поддержку и понимание.

Приложение А

Супердиаграммы, дающие вклад в D -функцию Адлера

В этом приложении мы разместили выражения для вкладов суперграфов на рисунке 1.1 в величину

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \left(d^{-1} - \alpha_0^{-1} \right) \Big|_{p=0} = \frac{2}{3\pi} D(\alpha_{s0}). \quad (\text{A.1})$$

Каждый из них соответствует сумме всех суперграфов, которые получаются из данного путем присоединения к нему двух внешних линий абелева калибровочного суперполя. Ниже все соответствующие выражения выписаны в евклидовом пространстве после поворота Вика. Отметим, что для удобства некоторые вклады были предварительно просуммированы.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф(1)} = 4\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \text{tr } C(R) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{g_0^2}{q^2 (q+k)^2} \right. \\ \left. - \frac{2(g_0^2 - g^2)}{k^2 q^2} - \frac{g_0^2}{(q^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)} + \frac{2(g_0^2 - g^2)}{k^2 (q^2 + M^2)} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф(2)} = 8\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \text{tr } C(R) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_0^2 - g^2}{k^4 R_k} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 + M^2} \right); \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф(3)} = 8\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \text{tr } (C(R)^2) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \\ \times \left(\frac{1}{q^2 (q+k)^2 (q+l)^2} - \frac{q^2 - M^2}{(q^2 + M^2)^2 ((q+k)^2 + M^2)((q+l)^2 + M^2)} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф(4)} = 4\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \text{tr} \left(C(R)^2 - \frac{C_2 C(R)}{2} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \\ \times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{(k+l+2q)^2}{q^2 (q+k)^2 (q+l)^2 (q+k+l)^2} - \frac{(k+l+2q)^2 + 2M^2}{(q^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)((q+l)^2 + M^2)} \right. \\ \left. \times \frac{1}{((q+k+l)^2 + M^2)} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф(5)} = -16\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 \text{tr} \left(C(R)^2 - \frac{C_2 C(R)}{4} \right) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \\ \times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{1}{q^2 (q+k)^2 (q+l)^2} - \frac{1}{(q^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)((q+l)^2 + M^2)} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} \text{граф}(6) = & -8\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 C_2 \text{tr } C(R) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{l^2 R_l k^2 R_k (l-k)^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \\
& \times \left[\frac{(q+l)_\mu (q+k)^\mu}{q^2 (q+l)^2 (q+k)^2} - \frac{(q+l)_\mu (q+k)^\mu + M^2}{(q^2 + M^2)((q+l)^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)} + \frac{2}{R_{k-l}} \frac{R_l - R_k}{l^2 - k^2} \right. \\
& \left. \times \left(\frac{q^2 (q+k)_\mu l^\mu + l^2 (q+k)_\mu q^\mu}{q^2 (q+l)^2 (q+k)^2} - \frac{q^2 (q+k)_\mu l^\mu + l^2 (q+k)_\mu q^\mu + M^2 (q+l+k)_\mu l^\mu}{(q^2 + M^2)((q+l)^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)} \right) \right]; \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф}(7) + \text{граф}(8) + \text{граф}(9)) = & -8\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 N_f T(R) \text{tr } C(R) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\
& \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left[\left(\frac{1}{q^2 (q+k)^2} - \frac{1}{(q^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)} \right) \left(\frac{1}{l^2 (l+k)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{(l^2 + M^2)((l+k)^2 + M^2)} \right) \right]; \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф}(10) + \text{граф}(11) + \dots + \text{граф}(21)) = & -8\pi \sum_{\alpha=1}^{N_f} q_\alpha^2 C_2 \text{tr } C(R) \frac{d}{d \ln \Lambda} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\
& \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{g_0^4}{k^2 R_k^2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left(\frac{f(k/\Lambda)}{q^2 (q+k)^2} - \frac{f(k/\Lambda)}{(q^2 + M^2)((q+k)^2 + M^2)} \right), \tag{A.9}
\end{aligned}$$

где функция $f(k/\Lambda)$, имеющая отношение к однопетлевому поляризационному оператору квантового калибровочного суперполя V , имеет вид

$$\begin{aligned}
f(k/\Lambda) = & - \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{l^2 (l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M_\varphi^2)((l+k)^2 + M_\varphi^2)} \right) - \frac{R_l - R_k}{R_l l^2} \left(\frac{1}{(l+k)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{l^2 - k^2} \right) - \frac{2}{R_l ((l+k)^2 - l^2)} \left(\frac{R_{l+k} - R_l}{(l+k)^2 - l^2} - \frac{R'_l}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{R_l R_{l+k}} \left(\frac{R_{l+k} - R_l}{(l+k)^2 - l^2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{2 R_k k^2}{l^2 (l+k)^2 R_l R_{l+k}} \left(\frac{R_{l+k} - R_k}{(l+k)^2 - k^2} \right) + \frac{l_\mu k^\mu R_k}{l^2 R_l (l+k)^2 R_{l+k}} \left(\frac{R_{l+k} - R_l}{(l+k)^2 - l^2} \right) - \frac{2 l_\mu k^\mu}{l^2 R_l R_{l+k}} \\
& \times \left(\frac{R_{l+k} - R_k}{(l+k)^2 - k^2} \right) \left(\frac{R_{l+k} - R_l}{(l+k)^2 - l^2} \right) + \frac{2 k^2}{(l+k)^2 R_l R_{l+k}} \left(\frac{R_l - R_k}{l^2 - k^2} \right)^2 + \frac{k^2 l_\mu (l+k)^\mu}{l^2 (l+k)^2 R_l R_{l+k}} \\
& \times \left(\frac{R_l - R_k}{l^2 - k^2} \right) \left(\frac{R_{l+k} - R_k}{(l+k)^2 - k^2} \right) - \frac{2}{(l+k)^2 - k^2} \left(\frac{R_{l+k} - R_k}{(l+k)^2 - k^2} - \frac{R'_k}{\Lambda^2} \right) \frac{k^2}{l^2 R_l} + \frac{2 l_\mu k^\mu}{l^2 R_l} \\
& \times \left(\frac{R_l}{(l^2 - (l+k)^2)(l^2 - k^2)} + \frac{R_{l+k}}{((l+k)^2 - l^2)((l+k)^2 - k^2)} + \frac{R_k}{(k^2 - l^2)(k^2 - (l+k)^2)} \right) \\
& + \frac{1}{2((l+k)^2 - l^2)} \left(\frac{2 R_{l+k} R'_{l+k} (l+k)^2}{\Lambda^2 ((l+k)^2 R_{l+k}^2 + M_\varphi^2)} - \frac{2 R_l R'_l l^2}{\Lambda^2 (l^2 R_l^2 + M_\varphi^2)} - \frac{1}{(l+k)^2 + M_\varphi^2} + \frac{1}{l^2 + M_\varphi^2} \right. \\
& \left. + \frac{R_{l+k}^2}{(l+k)^2 R_{l+k}^2 + M_\varphi^2} - \frac{R_l^2}{l^2 R_l^2 + M_\varphi^2} \right) \Big]; \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф}(22)) = \frac{d}{d \ln \Lambda} (\text{граф}(23)) = 0. \tag{A.11}$$

Приложение Б

Суперграфы, дающие вклад в двухточечную функцию Грина суперполей материи

Для полноты мы в этом разделе размещаем выражения для вкладов суперграфов, представленных на рисунке 1.2 в функцию $G_i^j(\alpha_{s0}, \Lambda/q)$. Мы опять записываем их в евклидовом пространстве после поворота Вика. Для удобства некоторые группы диаграмм были предварительно просуммированы.

$$(\Delta G^{(1)})_i^j = -C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2 R_k} \left(\frac{g_0^2}{(q+k)^2} - \frac{(g_0^2 - g^2)((q+k)^2 + q^2)}{k^2(q+k)^2} \right); \quad (\text{Б.1})$$

$$(\Delta G^{(2)})_i^j = -C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{2(g_0^2 - g^2)}{k^4 R_k}; \quad (\text{Б.2})$$

$$(\Delta G^{(3.2)})_i^j = -(C(R)^2)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (q+k)^2 (q+k+l)^2}; \quad (\text{Б.3})$$

$$(\Delta G^{(4)})_i^j = -\left((C(R)^2)_i^j - \frac{C_2 C(R)_i^j}{2} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4 (2q+k+l)^2}{k^2 R_k l^2 R_l (q+k)^2 (q+l)^2 (q+k+l)^2}; \quad (\text{Б.4})$$

$$(\Delta G^{(5.1)})_i^j = \left((C(R)^2)_i^j - \frac{C_2 C(R)_i^j}{4} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{8g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (q+k)^2 (q+k+l)^2}; \quad (\text{Б.5})$$

$$(\Delta G^{(5.2)})_i^j = \left((C(R)^2)_i^j - \frac{C_2 C(R)_i^j}{4} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (q+k)^2 (q+l)^2}; \quad (\text{Б.6})$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(6)})_i^j = & C_2 C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2g_0^4 (R_l(q+l)_\mu q^\mu + R_k(q-k)_\mu q^\mu + R_{l+k}(q+l)_\mu (q-k)^\mu)}{k^2 R_k l^2 R_l (l+k)^2 R_{l+k} (q+l)^2 (q-k)^2} \\ & + C_2 C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^2 R_k l^2 R_l (l+k)^2 R_{l+k} (q-k)^2 (q+l)^2} \left[\frac{R_l - R_k}{l^2 - k^2} \left((q+l)_\mu q^\mu \right. \right. \\ & \times (q-k)_\nu l^\nu + (q+l)_\mu l^\mu q_\nu (q-k)^\nu - (q+l)_\mu (q-k)^\mu q_\nu l^\nu \Big) + \frac{R_{l+k} - R_k}{(l+k)^2 - k^2} \left((q+l)_\mu \right. \\ & \times (q-k)^\mu q_\nu k^\nu + (q+l)_\mu k^\mu (q-k)_\nu q^\nu - (q+l)_\mu q^\mu (q-k)_\nu k^\nu \Big) - \frac{R_{l+k} - R_l}{(l+k)^2 - l^2} \left(q_\mu (l+k)^\mu \right. \\ & \times (q-k)_\nu (q+l)^\nu + q_\mu (q+l)^\mu (l+k)_\nu (q-k)^\nu - q_\mu (q-k)^\mu (l+k)_\nu (q+l)^\nu \Big) \Big]; \quad (\text{Б.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(7.1)})_i^j + (\Delta G^{(7.2)})_i^j + (\Delta G^{(8)})_i^j + (\Delta G^{(9)})_i^j = & N_f T(R) C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^4 R_k^2} \\ & \times \frac{k^2 - q^2}{(q+k)^2} \left(\frac{1}{l^2 (l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2)((l+k)^2 + M^2)} \right); \quad (\text{Б.8}) \end{aligned}$$

$$(\Delta G^{(10)})_i^j + \dots + (\Delta G^{(21)})_i^j = C_2 C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4g_0^4}{k^2 R_k^2} f(k/\Lambda) \left(\frac{1}{(q+k)^2} - \frac{q^2}{k^2 (q+k)^2} \right); \quad (\text{Б.9})$$

$$(\Delta G^{(22)})_i^j = (\Delta G^{(23)})_i^j = 0, \quad (\text{Б.10})$$

где $f(k/\Lambda)$ — это та же самая функция, что и в Приложении А, она дается интегралом (А.10).

Приложение В

Вычисление интегралов

В этом приложении мы вычисляем аномальную размерность, определенную в терминах голрой константы связи, которая дается уравнением (1.37), при выборе регулятора в форме (1.39). При этом важно иметь в виду, что дифференцирование по $\ln \Lambda$ должно выполняться при фиксированном значении перенормированной константы связи g (или, эквивалентно, $\alpha_s = g^2/4\pi$) перед выполнением интегрирования. Именно поэтому мы сначала перепишем выражение для аномальной размерности в терминах α_s , используя (1.20). В рассматриваемом приближении мы получим

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(\alpha_{s0}) = & -8\pi\alpha_s C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^4 R_k} + 64\pi^2 \alpha_s^2 C_2 C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \\ & \times \left[\frac{f(k/\Lambda)}{R_k^2} + \frac{3}{16\pi^2 R_k} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) \right] + 64\pi^2 \alpha_s^2 N_f T(R) C(R)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{1}{R_k^2} \right. \\ & \times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2(l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2)((l+k)^2 + M^2)} \right) - \frac{1}{8\pi^2 R_k} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \Big] - 32\pi^2 \\ & \times \alpha_s^2 (C(R)^2)_i^j \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{l^2 k^2} - \frac{2}{l^2(l+k)^2} \right) + O(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Некоторые интегралы в этом выражении могут быть вычислены с использованием результатов [93, 94] при выборе регулятора в простейшей форме $R(y) = 1 + y^n$, где n — натуральное число,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^4 R_k} = \frac{1}{8\pi^2}; \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{k^2 R_k l^2 R_l} \left(\frac{1}{l^2 k^2} - \frac{2}{l^2(l+k)^2} \right) = -\frac{1}{64\pi^4}; \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{1}{R_k^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2(l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M^2)((l+k)^2 + M^2)} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{8\pi^2 R_k} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{12} \right) \right] = \frac{1}{64\pi^4} \left(-\ln \frac{\Lambda}{\mu} - b_{12} + \ln a + 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

где $a = M/\Lambda$.

Таким образом, необходимо лишь вычислить интеграл

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{f(k/\Lambda)}{R_k^2} + \frac{3}{16\pi^2 R_k} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Разделим функцию $f(k/\Lambda)$, которая дается уравнением (A.10), на две части,

$$f(k/\Lambda) \equiv f_1(k/\Lambda) + f_2(k/\Lambda), \quad (\text{B.6})$$

где

$$f_1(k/\Lambda) \equiv -\frac{3}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{l^2(l+k)^2} - \frac{1}{(l^2 + M_\varphi^2)((l+k)^2 + M_\varphi^2)} \right) \quad (\text{B.7})$$

и функция $f_2(k/\Lambda)$ включает в себя все оставшиеся слагаемые в выражении (A.10).

Интеграл, содержащий лишь функцию $f_1(k/\Lambda)$, опять можно вычислить, используя результаты [93, 94],

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \left[\frac{f_1(k/\Lambda)}{R_k^2} + \frac{3}{16\pi^2 R_k} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + b_{11} \right) \right] = -\frac{3}{128\pi^4} \left(-\ln \frac{\Lambda}{\mu} - b_{11} + \ln a_\varphi + 1 \right), \quad (\text{B.8})$$

где $a_\varphi \equiv M_\varphi/\Lambda$.

Поэтому нам осталось лишь вычислить оставшуюся часть интеграла, содержащую функцию $f_2(k/\Lambda)$,

$$I \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{f_2(k/\Lambda)}{R_k^2}. \quad (\text{B.9})$$

Во-первых, заметим, что функция $f_2(k/\Lambda)/R_k^2$ зависит лишь от отношения k/Λ . Следовательно, рассматриваемый интеграл можно переписать в виде

$$I = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{d}{d \ln k} \frac{f_2(k/\Lambda)}{R_k^2} = -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{d}{dk^2} \frac{f_2(k/\Lambda)}{R_k^2}. \quad (\text{B.10})$$

Вычисляя этот интеграл в четырехмерных сферических координатах, мы получаем

$$I = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{f_2(k/\Lambda)}{R_k^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{8\pi^2} f_2(0), \quad (\text{B.11})$$

где мы также учитываем тот факт, что функция $f_2(k/\Lambda)/R_k^2$ стремится к нулю в пределе $k \rightarrow \infty$. В пределе $k \rightarrow 0$ функцию $f_2(k/\Lambda)$ можно записать в виде интеграла от двойной полной производной,

$$\begin{aligned} f_2(0) &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d}{dl^2} \left(\frac{1}{2(l^2 + M_\varphi^2)} - \frac{R_l^2}{2(l^2 R_l^2 + M_\varphi^2)} + \frac{M_\varphi^2 R_l'}{\Lambda^2 R_l (l^2 R_l^2 + M_\varphi^2)} \right) \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial l^\mu} \frac{\partial}{\partial l_\mu} \left[\frac{1}{l^2} \ln \frac{l^2 R_l^2 + M_\varphi^2}{R_l^2 (l^2 + M_\varphi^2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Последнее равенство следует из того факта, что выражение в квадратных скобках не сингулярно в пределе $l \rightarrow 0$. (Отметим, что (B.12) справедливо для любой функции $R(x)$, быстро растущей на бесконечности и такой, что $R(0) = 1$.) Поэтому мы получаем

$$I = 0. \quad (\text{B.13})$$

Собирая вместе результаты для всех интегралов, мы получаем, что аномальная размерность, определенная в терминах голой константы связи, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(\alpha_{s0}) = & -\frac{\alpha_s}{\pi} C(R)_i^j - \frac{3\alpha_s^2}{2\pi^2} C_2 C(R)_i^j \left(-\ln \frac{\Lambda}{\mu} - b_{11} + \ln a_\varphi + 1 \right) + \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} N_f T(R) C(R)_i^j \\ & \times \left(-\ln \frac{\Lambda}{\mu} - b_{12} + \ln a + 1 \right) + \frac{\alpha_s^2}{2\pi^2} (C(R)^2)_i^j + O(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Переписывая правую часть в терминах голой константы связи α_{s0} , мы наконец получаем

$$\begin{aligned} \gamma_i^j(\alpha_{s0}) = & -\frac{\alpha_{s0}}{\pi} C(R)_i^j - \frac{3\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} C_2 C(R)_i^j (\ln a_\varphi + 1) + \frac{\alpha_{s0}^2}{\pi^2} N_f T(R) C(R)_i^j (\ln a + 1) \\ & + \frac{\alpha_{s0}^2}{2\pi^2} (C(R)^2)_i^j + O(\alpha_{s0}^3). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Приложение Г

Супердиаграммы, дающие вклад в аномальные размерности квантового калибровочного суперполя и киральных суперполей материи

В этом приложении мы приводим вклад в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного суперполя и киральных суперполей материи от каждой диаграммы на рисунке 2.2. Выпишем сначала вклады в двухточечную функцию Грина суперполей материи:

$$(\Delta G^{(1.1)})_i^j(q) = (\Delta G^{(3.1)})_i^j = (\Delta G^{(4.1)})_i^j = 2\lambda_0^{jmn}\lambda_{0imn}^* \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l (q+l)^2 F_{q+l}}; \quad (\Gamma.1)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(2.2)})_i^j(q) &= 4g_0^2 \lambda_0^{jlk} \lambda_{0imn}^* (T_A)_l^m (T_A)_k^n \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N(l, k, q)}{k^2 R_k l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} \\ &\times \frac{1}{(l+k-q)^2 F_{l+k-q} (q-l)^2 F_{q-l}}; \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(2.3)})_i^j(q) &= -4g_0^2 C(R)_i^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{jmn} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{N(q, k, l) + N(-q-k, k, -l)}{k^2 R_k l^2 F_l (q+k)^2 F_{q+k}} \\ &\times \frac{1}{(q+k-l)^2 F_{q+k-l} (q-l)^2 F_{q-l}}; \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

$$(\Delta G^{(3.2)})_i^j(q) = -2C(R)_i^j g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{L(q, q+k)}{k^2 R_k (q+k)^2 F_{q+k}}; \quad (\Gamma.4)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(3.3)})_i^j(q) &= 4C(R)_i^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{jmn} g_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(q+k)^2 L(q, q+k)}{k^2 R_k l^2 F_l ((q+k)^2 F_{q+k})^2} \\ &\times \frac{1}{(q+k+l)^2 F_{q+k+l}}; \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(3.4)})_i^j(q) &= 8\lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} (C(R))_l^n g_0^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{L(q+l+k, q+l)(q+l)^2}{(q+l+k)^2 F_{q+l+k} ((q+l)^2 F_{q+l})^2} \\ &\times \frac{1}{k^2 R_k l^2 F_l}; \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(4.2)})_i^j(q) &= 2g_0^2 (C(R))_i^j \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right\} \frac{1}{k^2 R_k}; \end{aligned} \quad (\Gamma.7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta G^{(4.4)})_i^j(q) &= -8g_0^2 \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} (C(R))_l^n \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2l^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2/\Lambda^2 - l^2/\Lambda^2} \right)'_l \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2/\Lambda^2 - l^2/\Lambda^2} \right\} \frac{l^2}{(l^2 F_l)^2 k^2 R_k (q+l)^2 F_{q+l}}. \end{aligned} \quad (\Gamma.8)$$

Теперь выпишем вклады в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного

суперполя:

$$\Delta G_V^{(2,1)}(k) = 2\frac{1}{r}g_0^2 C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{N(q, k, l)}{q^2 F_q (q+k)^2 F_{q+k} (q+k-l)^2 F_{q+k-l}} \times \frac{1}{(q-l)^2 F_{q-l} l^2 F_l}; \quad (\Gamma.9)$$

$$\Delta G_V^{(3,5)}(k) = -4\frac{1}{r} C(R)_i^j \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} g_0^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2 L(q+k, q)}{(q^2 F_q)^2 (q+k)^2 F_{q+k}} \times \frac{1}{l^2 F_l (q+l)^2 F_{q+l}}; \quad (\Gamma.10)$$

$$\Delta G_V^{(4,3)}(k) = 4g_0^2 \lambda_{0jmn}^* \lambda_0^{imn} C(R)_i^j \frac{1}{r} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2q^2}{\Lambda^4} \left(\frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right)'_q + \frac{1}{\Lambda^2} \frac{F_{q+k} - F_q}{(q+k)^2/\Lambda^2 - q^2/\Lambda^2} \right\} \frac{q^2}{(q^2 F_q)^2 l^2 F_l (q+l)^2 F_{q+l}}. \quad (\Gamma.11)$$

Здесь N и L обозначают функции, определенные в основном тексте в уравнениях (2.41) и (2.42) соответственно.

Приложение Д

Детали вычисления аномальной размерности материи

Чтобы вычислить вклады в аномальную размерность материи, определенную в терминах голых констант связи, необходимо вычислить производные по $\ln \Lambda$ от вкладов выписанных в предыдущем разделе амплитуд в $(\ln G)_i^j$ в пределе нулевого внешнего импульса. Убедимся сначала, что вклад диаграммы (2.2) в аномальную размерность, который определяется интегралом

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} 4g_0^2 \lambda_0^{jlk} \lambda_{0imn}^* (T_A)_l^m (T_A)_k^n \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\lim_{q \rightarrow 0} N(l, k, q)}{k^2 R_k (l^2 F_l)^2 ((l+k)^2 F_{l+k})^2} \\ &= \frac{d}{d \ln \Lambda} 4g_0^2 \lambda_0^{jlk} \lambda_{0imn}^* (T_A)_l^m (T_A)_k^n \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-2) \left(F_{l+k} + l^2 \frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2 - l^2} \right) \\ & \quad \times \frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2 - l^2} \frac{1}{k^2 R_k l^2 F_l^2 (l+k)^2 F_{l+k}^2}, \quad (\text{Д.1}) \end{aligned}$$

на самом деле равен нулю. Действительно, интеграл, на который действует производная по $\ln \Lambda$ сходится как в ультрафиолетовой, так и в инфракрасной области. Поэтому он от Λ не зависит, что означает, что его производная по $\ln \Lambda$ равна нулю. (Отметим, что производные по $\ln \Lambda$ от констант связи, на которые умножается этот интеграл, дадут слагаемые более высокого порядка, чем порядок нашего приближения, и поэтому ими можно пренебречь.)

Остальные слагаемые в сумме дают

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d \ln \Lambda} 4g_0^2 C(R)_i^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{mnj} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{k^4 R_k l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} + \frac{1}{k^4 R_k l^4 F_l^2} \right] \\ & + \frac{d}{d \ln \Lambda} 8g_0^2 \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} C(R)_l^n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2 k^2 R_k (l+k)^2} \\ & + \frac{d}{d \ln \Lambda} 8g_0^2 \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} C(R)_l^n \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{l^2 F_l^3 k^2 R_k (l+k)^2 F_{l+k}} \frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2 - l^2} \right. \\ & \quad \left. \times \left(F_l + 2(l+k)^2 \frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2 - l^2} \right) - \frac{2}{l^2 F_l^3 k^2 R_k} \frac{1}{(l+k)^2 - l^2} \left(\frac{F_{l+k} - F_l}{(l+k)^2 - l^2} - \frac{F'_l}{\Lambda^2} \right) \right]. \quad (\text{Д.2}) \end{aligned}$$

Слагаемые в последних двух строках этого выражения равны нулю. Опять причина в том, что интеграл, на который действует производная по $\ln \Lambda$, сходится как в ультрафиолетовом, так и в инфракрасном пределе, а потому от Λ не зависит. Таким образом, от вклада в аномальную размерность порядка $\alpha_0 \lambda_0^2$ остаются лишь слагаемые в первых двух строках (Д.2).

Тем самым, с учетом однопетлевого вклада, полный двухпетлевой вклад диаграмм с двумя юкавскими вершинами в аномальную размерность суперполей материи дается выражением

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = & \frac{d}{d\ln\Lambda} \left[\lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jmn} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^4 F_k^2} \right. \\ & + 4g_0^2 C(R)_i^l \lambda_{0lmn}^* \lambda_0^{jmn} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{k^4 R_k l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} + \frac{1}{k^4 R_k l^4 F_l^2} \right) \\ & \left. + 8g_0^2 \lambda_{0imn}^* \lambda_0^{jml} C(R)_l^n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2 k^2 R_k (l+k)^2} \right],\end{aligned}\quad (\text{Д.3})$$

где производная по $\ln\Lambda$ берется при фиксированном значении перенормированных юкавских констант. На протяжении всего вычисления мы будем встречать интегралы одного и того же типа. А именно, для функции $f(k/\Lambda)$, которая стремится к нулю на бесконечности и имеет конечный предел в нуле

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(k/\Lambda)}{k^4} & \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \frac{df(k/\Lambda)}{d\ln\Lambda} = \\ & = -\frac{1}{8\pi^2} \int d\ln k \frac{df(k/\Lambda)}{d\ln k} = -\frac{1}{8\pi^2} (f(\infty) - f(0)) = \frac{1}{8\pi^2} f(0).\end{aligned}\quad (\text{Д.4})$$

Здесь предполагается, что дифференцирование по $\ln\Lambda$ предваряет интегрирование, чтобы избавиться от инфракрасной расходимости и извлечь зависимость интеграла от Λ . Используя это соотношение, можно сразу получить, что

$$\frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k} = \frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} = \frac{1}{8\pi^2}.\quad (\text{Д.5})$$

Чтобы вычислить вклад (Д.3) в аномальную размерность, необходимо выразить в нем голые константы связи через перенормированные, вычислить производную по $\ln\Lambda$, а затем опять вернуться к голым константам. Используя (2.69), получим, что вклад (Д.3) равен

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = & \frac{1}{4\pi^2} \lambda_{imn}^* \lambda^{jmn} \\ & + 16\pi\alpha C(R)_i^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{mnj} \frac{d}{d\ln\Lambda} \left[- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} \right. \\ & + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 R_k l^4 F_l^2} - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} \left. \right] \\ & + 32\pi\alpha \lambda_{imn}^* \lambda^{jml} C(R)_l^n \frac{d}{d\ln\Lambda} \left[\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2 k^2 R_k (l+k)^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4 F_l^2} \right].\end{aligned}\quad (\text{Д.6})$$

Рассмотрим первый интеграл в первых квадратных скобках. В нем интегрирование по l^μ даст некоторую функцию $f(k/\Lambda)$ (которая также включает и множитель $1/R_k$), которая, однако, не удовлетворяет условиям, необходимым для применения (Д.4). Как будет показано ниже, в нуле у нее есть логарифмическая особенность вида

$$\frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{k}. \quad (\text{Д.7})$$

Поэтому чтобы воспользоваться правилом (Д.4), необходимо вычесть эту особенность и, чтобы ничего не изменилось, необходимо прибавить слагаемое с этим логарифмом ко вкладу остальных слагаемых в первых квадратных скобках, где его расходящаяся часть сократится с расходящимися частями двух оставшихся слагаемых. Тот же прием работает и для первого интеграла во вторых квадратных скобках, где мы должны сначала проинтегрировать по k^μ . Затем, применяя правило (Д.4), где это только возможно, мы получим результат для двух квадратных скобок в (Д.6) в виде

$$\begin{aligned} & 16\pi\alpha C(R)_i{}^l \lambda_{lmn}^* \lambda^{mnj} \left[-\frac{1}{64\pi^4} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) - \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \ln \frac{\Lambda}{k} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{R_k} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8\pi^2} \left(\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{k} \right) \Big|_{k=0} \right] \\ & + 32\pi\alpha \lambda_{imn}^* \lambda^{jml} C(R)_l{}^n \left[-\frac{1}{64\pi^4} \left(\ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_{11} \right) + \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4} \ln \frac{\Lambda}{l} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{F_l^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\pi^2} \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 (l+k)^2 R_k} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{l} \right) \Big|_{l=0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Теперь все, что остается сделать, — это вычислить два хорошо определенных интеграла и два предела. Начнем с интеграла

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \ln \frac{\Lambda}{k} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{R_k}. \quad (\text{Д.9})$$

Прежде всего заметим, что поскольку R зависит от k только через k/Λ , мы можем заменить производную от R_k по $\ln \Lambda$ на производную по $\ln k$ или $\ln(k/\Lambda)$. Затем мы интегрируем по угловым переменным, что дает множитель $2\pi^2$, после чего мы делаем замену переменной $x = \ln(k/\Lambda)$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{d}{dx} \frac{1}{1 + e^{2mx}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{(-2m)e^{2mx}}{(1 + e^{2mx})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{(-2m)}{(e^{mx} + e^{-mx})^2} = 0. \quad (\text{Д.10})$$

Последнее равенство следует из того факта, что мы получили интеграл от нечетной функции по симметричному (хоть и бесконечному) интервалу.

Вычислим теперь интеграл

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^4} \ln \frac{\Lambda}{l} \frac{d}{d \ln \Lambda} \frac{1}{F_l^2}. \quad (\text{Д.11})$$

Делая те же шаги, что и в предыдущем случае, т.е. тривиальное интегрирование по угловым переменным и такая же замена переменной, мы получим

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{d}{dx} \frac{1}{(1 + e^{2nx})^2} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{-4ne^{2nx}}{(1 + e^{2nx})^3} = \frac{1}{16\pi^2 n}. \quad (\text{Д.12})$$

Это вполне стандартный интеграл, требующий для своего вычисления одно интегрирование по частям.

Гораздо более нетривиальным является интеграл

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(l+k)^2 R_k}. \quad (\text{Д.13})$$

Чтобы его вычислить, необходимо ввести четырехмерные сферические координаты, в которых зенитный угол отсчитывается от направления l^μ . Интегрирование по другим двум углам тривиально и дает множитель 4π , в то время как интеграл по зенитному углу можно вычислить в комплексной плоскости. Этот интеграл уже вычислялся и для произвольного значения m в регуляторе $R(x) = 1 + x^m$ он дает [41]

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(l+k)^2 R_k} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{l} + \frac{1}{2} + o(1) \right). \quad (\text{Д.14})$$

Поэтому можно легко взять предел в последней строке (Д.8), что дает

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(l+k)^2 R_k} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{l} \right) \Big|_{l=0} = \frac{1}{128\pi^4}. \quad (\text{Д.15})$$

И последний интеграл, который нам нужно вычислить в пределе нулевого импульса имеет вид

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l(l+k)^2 F_{l+k}}. \quad (\text{Д.16})$$

Для начала заметим, что

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l(l+k)^2 F_{l+k}} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2(l+k)^2 F_l^2} + o(1). \quad (\text{Д.17})$$

Чтобы вычислить интеграл в правой части, мы опять интегрируем по сферическим координатам (опять прибегая к интегрированию по контуру в комплексной плоскости), что дает

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\int_0^k \frac{ldl}{k^2 F_l^2} + \int_k^\infty \frac{dl}{l F_l^2} \right). \quad (\text{Д.18})$$

Затем мы разбиваем второй интеграл в (Д.18) на сумму двух интегралов: по интервалу от k до Λ и от Λ до ∞ . После этого мы извлекаем логарифмическую расходимость в первом из этих двух слагаемых и получаем

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\int_0^k \frac{ldl}{k^2 F_l^2} + \int_k^\Lambda \frac{dl}{l} + \int_k^\Lambda \frac{dl}{l} \left(\frac{1}{F_l^2} - 1 \right) + \int_\Lambda^\infty \frac{dl}{l F_l^2} \right). \quad (\text{Д.19})$$

Кроме расходящегося слагаемого, равного просто $\ln(\Lambda/k)$, интегралы в этом выражении конечны в пределе $k \rightarrow 0$ и позволяют положить $k = 0$:

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{k} + \frac{1}{2} + \int_0^\Lambda \frac{dl}{l} \frac{1 - F_l^2}{F_l^2} + \int_\Lambda^\infty \frac{dl}{l F_l^2} \right). \quad (\text{Д.20})$$

Рассмотрим теперь два последних слагаемых в этом выражении. Сделаем замену переменных $x = l/\Lambda$ в первом из них и $x = \Lambda/l$ во втором. В результате оба интеграла будут иметь одну и ту же область интегрирования, т.е. от 0 до 1, и их подынтегральные выражения можно сложить. Получится

$$-2 \int_0^1 \frac{dx x^{2n-1}}{(1 + x^{2n})^2} = -\frac{1}{2n}, \quad (\text{Д.21})$$

что является интегралом, который очень легко вычислить при любом n из $F(x) = 1 + x^n$. Если бы мы выбрали регулятор F в какой-нибудь другой форме, это вычисление не было бы таким простым. Используя этот результат, получим

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda}{k} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + o(1) \right). \quad (\text{Д.22})$$

Мы можем теперь вычислить соответствующий предел в (Д.8)

$$\frac{1}{8\pi^2} \left(\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 F_l (l+k)^2 F_{l+k}} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{k} \right) \Big|_{k=0} = \frac{1}{128\pi^4} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (\text{Д.23})$$

Отметим, что этот результат явно зависит от регуляризации.

Собирая результаты для всех интегралов, мы можем теперь записать часть двухпетлевой аномальной размерности, определенной в терминах голых констант связи, квадратичную по юкавским константам:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = & \frac{1}{4\pi^2}\lambda_{imn}^*\lambda^{jmn} - \frac{\alpha}{4\pi^3}\left(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + g_{11}\right)\left(C(R)_i{}^l\lambda_{lmn}^*\lambda^{mnj} + 2\lambda_{imn}^*\lambda^{jml}C(R)_l{}^n\right) \\ & - \frac{\alpha}{8\pi^3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)C(R)_i{}^l\lambda_{lmn}^*\lambda^{mnj} + \frac{\alpha}{4\pi^3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_{imn}^*\lambda^{jml}C(R)_l{}^n.\end{aligned}\quad (\text{Д.24})$$

Теперь в очередной раз используя (2.69), чтобы перейти от перенормированных юкавских констант к голым, получим

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_i^j(\alpha_0, \lambda_0) = & \frac{1}{4\pi^2}\lambda_{imn}^*\lambda_0^{jmn} - \frac{\alpha_0}{8\pi^3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)C(R)_i{}^l\lambda_{lmn}^*\lambda_0^{mnj} \\ & + \frac{\alpha_0}{4\pi^3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lambda_{imn}^*\lambda_0^{jml}C(R)_l{}^n.\end{aligned}\quad (\text{Д.25})$$

Литература

1. Grisaru Marcus T., Siegel W., Rocek M. Improved Methods for Supergraphs // Nucl. Phys. — 1979. — Vol. B159. — P. 429.
2. Howe Paul S., Stelle K. S., Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest // Nucl. Phys. — 1984. — Vol. B236. — P. 125–166.
3. Sohnius Martin F., West Peter C. Conformal Invariance in $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang–Mills Theory // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 100B. — P. 245.
4. Mandelstam Stanley. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Model // Nucl. Phys. — 1983. — Vol. B213. — P. 149–168.
5. Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang–Mills Theory // Phys. Lett. — 1983. — Vol. 123B. — P. 45–46.
6. Novikov V. A., Shifman Mikhail A., Vainshtein A. I., Zakharov Valentin I. Exact Gell-Mann–Low Function of Supersymmetric Yang–Mills Theories from Instanton Calculus // Nucl. Phys. — 1983. — Vol. B229. — P. 381–393.
7. Novikov V. A., Shifman Mikhail A., Vainshtein A. I., Zakharov Valentin I. Beta Function in Supersymmetric Gauge Theories: Instantons Versus Traditional Approach // Phys. Lett. — 1986. — Vol. 166B. — P. 329–333. [Ядерная физика 43, 459 (1986)].
8. Shifman Mikhail A., Vainshtein A. I., Zakharov Valentin I. Exact Gell-Mann–Low Function in Supersymmetric Electrodynamics // Phys. Lett. — 1986. — Vol. 166B. — P. 334.
9. Hisano J., Shifman Mikhail A. Exact results for soft supersymmetry breaking parameters in supersymmetric gauge theories // Phys. Rev. — 1997. — Vol. D56. — P. 5475–5482. arXiv:hep-ph/9705417.
10. Siegel Warren. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction // Phys. Lett. — 1979. — Vol. 84B. — P. 193–196.
11. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry and the three-loop gauge β -function // Phys. Lett. — 1996. — Vol. B386. — P. 138–140. arXiv:hep-ph/9606323.
12. Jack I., Jones D. R. T., North C. G. Scheme dependence and the NSVZ β -function // Nucl. Phys. — 1997. — Vol. B486. — P. 479–499. arXiv:hep-ph/9609325.
13. Jack I., Jones D. R. T., Pickering A. The Connection between DRED and NSVZ // Phys. Lett. — 1998. — Vol. B435. — P. 61–66. arXiv:hep-ph/9805482.
14. Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ β -function in $\mathcal{N} = 1$ SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of Feynman diagrams // Nucl. Phys. — 2011. — Vol.

- B852. — P. 71–107. arXiv:hep-th/1102.3772.
15. Stepanyantz K. V. The NSVZ β -function and the Schwinger-Dyson equations for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by higher derivatives // JHEP. — 2014. — Vol. 08. — P. 096. arXiv:hep-th/1404.6717.
 16. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED // Nucl. Phys. — 2013. — Vol. B875. — P. 459–482. arXiv:hep-th/1305.7094.
 17. Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the $V\bar{c}c$ -vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories // Nucl. Phys. — 2016. — Vol. B909. — P. 316–335. arXiv:hep-th/1603.04801.
 18. Adler Stephen L. Some simple vacuum polarization phenomenology: $e^+e^- \rightarrow hadrons$; the muonic-atom x-ray discrepancy and $g_\mu - 2$ // Phys. Rev. — 1974. — Vol. D10. — P. 3714.
 19. Jegerlehner Fred. Muon $g - 2$ Theory: the Hadronic Part. — 2017. arXiv:hep-ph/1705.00263.
 20. Eidelman S., Jegerlehner F., Kataev A. L., Veretin O. Testing nonperturbative strong interaction effects via the Adler function // Phys. Lett. — 1999. — Vol. B454. — P. 369–380. arXiv:hep-ph/9812521.
 21. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Higher order corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow hadrons)$ in quantum chromodynamics // Phys. Lett. — 1979. — Vol. 85B. — P. 277–279.
 22. Celmaster William, Gonsalves Richard J. An Analytic Calculation of Higher Order Quantum Chromodynamic Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 44. — P. 560.
 23. Dine Michael, Sapirstein J. R. Higher Order QCD Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43. — P. 668.
 24. Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. The $O(\alpha_s^3)$ -corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow hadrons)$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + hadrons)$ in QCD // Phys. Lett. — 1991. — Vol. B259. — P. 144–150.
 25. Surguladze Levan R., Samuel Mark A. Total hadronic cross-section in e^+e^- annihilation at the four-loop level of perturbative QCD // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 66. — P. 560–563. [Erratum: Phys. Rev. Lett. 66, 2416 (1991)].
 26. Chetyrkin K. G. Corrections of order α_s^3 to R_{had} in pQCD with light gluinos // Phys. Lett. — 1997. — Vol. B391. — P. 402–412. arXiv:hep-ph/9608480.
 27. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn Johann H. Order α_s^4 QCD Corrections to Z and τ Decays // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 012002. arXiv:hep-ph/0801.1821.
 28. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H., Rittinger J. Adler Function, Sum Rules and Crewther Relation of Order $O(\alpha_s^4)$: the Singlet Case // Phys. Lett. — 2012. — Vol. B714. — P. 62–65. arXiv:hep-ph/1206.1288.

29. Chetyrkin K. G., Gorishnii S. G., Kataev A. L. et al. Scalar quarks: higher corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow hadrons)$ // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 116B. — P. 455–458.
30. Mihaila L. Precision Calculations in Supersymmetric Theories // Adv. High Energy Phys. — 2013. — Vol. 2013. — P. 607807. arXiv:hep-ph/1310.6178.
31. Катаев А. Л., Пивоваров А. А. Поправки теории возмущений к $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ в суперсимметричной КХД // Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 38. — С. 309–311.
32. Altarelli Guido, Mele B., Petronzio R. Broken supersymmetric QCD and e^+e^- hadronic cross-sections // Phys. Lett. — 1983. — Vol. 129B. — P. 456–460.
33. Shifman M., Stepanyantz K. Exact Adler Function in Supersymmetric QCD // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114, no. 5. — P. 051601. arXiv:hep-th/1412.3382.
34. Shifman M., Stepanyantz K. V. Derivation of the exact expression for the D function in $\mathcal{N} = 1$ SQCD // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91. — P. 105008. arXiv:hep-th/1502.06655.
35. Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories // Nucl. Phys. — 1971. — Vol. B31. — P. 301–315.
36. Славнов А. А. Инвариантная регуляризация калибровочных теорий // ТМФ. — 1972. — Т. 13. — С. 174–177.
37. Кривощев В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291–302.
38. West Peter C. Higher Derivative Regulation of Supersymmetric Theories // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B268. — P. 113–124.
39. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Шифман М. А. Точная функция Гелл-Манна-Лоу в суперсимметричной электродинамике // Письма в ЖЭТФ. — 1985. — Т. 42. — С. 182–184.
40. Shifman Mikhail A., Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B277. — P. 456. [ЖЭТФ 91, 723 (1986)].
41. Солошенко А. А., Степаньянц К. В. Трехпетлевая β -функция $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной высшими производными // ТМФ. — 2004. — Т. 140. — С. 437–459. arXiv:hep-th/0304083.
42. Smilga Andrei V., Vainshtein Arkady. Background field calculations and nonrenormalization theorems in 4-D supersymmetric gauge theories and their low-dimensional descendants // Nucl. Phys. — 2005. — Vol. B704. — P. 445–474. arXiv:hep-th/0405142.
43. Nartsev I. V., Stepanyantz K. V. Exact renormalization of the photino mass in softly broken $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors regularized by higher derivatives // JHEP. — 2017. — Vol. 04. —

- P. 047. arXiv:hep-th/1610.01280.
44. Казанцев А. Е., Степаньянц К. В. Соотношение между двухточечными функциями Грина $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, в трехпетлевом приближении // ЖЭТФ. — 2015. — Т. 147, № 4. — С. 714–728. arXiv:hep-th/1410.1133.
 45. Aleshin S. S., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Structure of three-loop contributions to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QED with N_f flavors regularized by the dimensional reduction // JETP Lett. — 2016. — Vol. 103, no. 2. — P. 77–81. arXiv:hep-th/1511.05675.
 46. Aleshin S. S., Goriachuk I. O., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. The NSVZ scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by the dimensional reduction, in the three-loop approximation // Phys. Lett. — 2017. — Vol. B764. — P. 222–227. arXiv:hep-th/1610.08034.
 47. Shifman Mikhail A., Vainshtein Arkady I. Instantons versus supersymmetry: Fifteen years later // In *Shifman, M.A.: ITEP lectures on particle physics and field theory, vol. 2* 485–647. — 1999. arXiv:hep-th/9902018.
 48. Arkani-Hamed Nima, Murayama Hitoshi. Holomorphy, rescaling anomalies and exact beta functions in supersymmetric gauge theories // JHEP. — 2000. — Vol. 06. — P. 030. arXiv:hep-th/9707133.
 49. Kraus E., Rupp C., Sibold K. Supersymmetric Yang–Mills theories with local coupling: the supersymmetric gauge // Nucl. Phys. — 2003. — Vol. B661. — P. 83–98. arXiv:hep-th/0212064.
 50. Siegel W. Inconsistency of Supersymmetric Dimensional Regularization // Phys. Lett. — 1980. — Vol. 94B. — P. 37–40.
 51. Avdeev L. V., Tarasov O. V. The Three-Loop Beta Function in the $\mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang–Mills Theories // Phys. Lett. — 1982. — Vol. 112B. — P. 356–358.
 52. Harlander Robert V., Mihaila Luminita, Steinhauser Matthias. The SUSY-QCD beta function to three loops // Eur. Phys. J. — 2009. — Vol. C63. — P. 383–390. arXiv:hep-ph/0905.4807.
 53. Harlander R. V., Jones D. R. T., Kant P. et al. Four-loop beta function and mass anomalous dimension in dimensional reduction // JHEP. — 2006. — Vol. 12. — P. 024. arXiv:hep-ph/0610206.
 54. Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Scheme independent consequence of the NSVZ relation for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors // Phys. Lett. — 2014. — Vol. B730. — P. 184–189. arXiv:hep-th/1311.0589.
 55. Катаев А. Л., Степаньянц К. В. β -Функция Новикова–Шифмана–Вайнштейна–Захарова

- в суперсимметричных теориях при различных регуляризациях и перенормировочных предписаниях // ТМФ. — 2014. — Т. 181. — С. 475–486. arXiv:hep-th/1405.7598.
56. Kutasov David, Schwimmer Adam. Lagrange multipliers and couplings in supersymmetric field theory // Nucl. Phys. — 2004. — Vol. B702. — P. 369–379. arXiv:hep-th/0409029.
 57. Avdeev L. V., Chochia G. A., Vladimirov A. A. On the Scope of Supersymmetric Dimensional Regularization // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 105B. — P. 272–274.
 58. Avdeev L. V., Vladimirov A. A. Dimensional Regularization and Supersymmetry // Nucl. Phys. — 1983. — Vol. B219. — P. 262–276.
 59. Pimenov A. B., Shevtsova E. S., Stepanyantz K. V. Calculation of two-loop beta-function for general $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric Yang–Mills theory with the higher covariant derivative regularization // Phys. Lett. — 2010. — Vol. B686. — P. 293–297. arXiv:hep-th/0912.5191.
 60. Stepanyantz K. V. Factorization of integrals defining the two-loop β -function for the general renormalizable $\mathcal{N} = 1$ SYM theory, regularized by the higher covariant derivatives, into integrals of double total derivatives. — 2011. arXiv:hep-th/1108.1491.
 61. Aleshin S. S., Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 014. arXiv:hep-th/1603.04347.
 62. Shakhmanov V. Yu., Stepanyantz K. V. Three-loop NSVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant derivative regularization // Nucl. Phys. — 2017. — Vol. B920. — P. 345–367. arXiv:hep-th/1703.10569.
 63. Jack I., Jones D. R. T. The Gaugino β -Function // Phys. Lett. — 1997. — Vol. B415. — P. 383–389. arXiv:hep-ph/9709364.
 64. Avdeev L. V., Kazakov D. I., Kondrashuk I. N. Renormalizations in softly broken SUSY gauge theories // Nucl. Phys. — 1998. — Vol. B510. — P. 289–312. arXiv:hep-ph/9709397.
 65. Нарцев И. В., Степаньянц К. В. NSVZ-подобная схема для массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ СКЭД, регуляризованной высшими производными // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т. 105, № 2. — С. 57–61. arXiv:hep-th/1611.09091.
 66. Slavnov A. A. Universal gauge invariant renormalization // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B518. — P. 195–200.
 67. Славнов А. А. Не зависящая от регуляризации калибровочно-инвариантная перенормировка теории Янга–Миллса // ТМФ. — 2002. — Т. 130. — С. 3–14.
 68. Славнов А. А., Степаньянц К. В. Универсальная инвариантная перенормировка для суперсимметричных теорий // ТМФ. — 2003. — Т. 135. — С. 265–279. arXiv:hep-th/0208006.

69. Славнов А. А., Степаньянц К. В. Универсальная инвариантная перенормировка для суперсимметричной теории Янга–Миллса // ТМФ. — 2004. — Т. 139. — С. 179–191. arXiv:hep-th/0305128.
70. Becchi C., Rouet A., Stora R. Renormalization of the Abelian Higgs–Kibble Model // Commun. Math. Phys. — 1975. — Vol. 42. — P. 127–162.
71. Tyutin I. V. Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism. — 1975. arXiv:hep-th/0812.0580.
72. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 272 с.
73. Славнов А. А. Регуляризация Паули–Вилларса для неабелевых калибровочных групп // ТМФ. — 1977. — Т. 33. — С. 210–217.
74. Taylor J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang–Mills Field // Nucl. Phys. — 1971. — Vol. B33. — P. 436–444.
75. Славнов А. А. Тождества Уорда в калибровочных теориях // ТМФ. — 1972. — Т. 10. — С. 153–161.
76. Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for $\mathcal{N} = 1$ SYM regularized by higher derivatives // Mod. Phys. Lett. — 2017. — Vol. A32, no. 36. — P. 1750194. arXiv:hep-th/1709.08575.
77. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — 4-е изд., испр. — М.: Наука, 1984. — 600 с.
78. Collins John C. Renormalization. — Cambridge: Cambridge University Press, 1986. — Vol. 26 of Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
79. Broadhurst David J. Four-loop Dyson–Schwinger–Johnson anatomy // Phys. Lett. — 1999. — Vol. B466. — P. 319–325. arXiv:hep-ph/9909336.
80. Kataev A. L. Riemann $\zeta(3)$ - terms in perturbative QED series, conformal symmetry and the analogies with structures of multiloop effects in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory // Phys. Lett. — 2010. — Vol. B691. — P. 82–86. arXiv:hep-th/1005.2058.
81. Kataev A. L. Conformal symmetry limit of QED and QCD and identities between perturbative contributions to deep-inelastic scattering sum rules // JHEP. — 2014. — Vol. 02. — P. 092. arXiv:hep-th/1305.4605.
82. Kataev A. L., Kazantsev A. E., Stepanyantz K. V. The Adler D -function for $\mathcal{N} = 1$ SQCD regularized by higher covariant derivatives in the three-loop approximation // Nucl. Phys. — 2018. — Vol. B926. — P. 295–320. arXiv:hep-th/1710.03941.

83. Shakhmanov V. Yu., Stepanyantz K. V. New form of the NSVZ relation at the two-loop level // *Phys. Lett.* — 2018. — Vol. B776. — P. 417–423. arXiv:hep-th/1711.03899.
84. Abbott L. F. Introduction to the Background Field Method // *Acta Phys. Polon.* — 1982. — Vol. B13. — P. 33.
85. Gates S. J., Grisaru Marcus T., Rocek M., Siegel W. Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry // *Front. Phys.* — 1983. — Vol. 58. — P. 1–548. arXiv:hep-th/0108200.
86. Ferrara S., Piguet O. Perturbation Theory and Renormalization of Supersymmetric Yang–Mills Theories // *Nucl. Phys.* — 1975. — Vol. B93. — P. 261–302.
87. Шахманов В. Ю. Структура петлевых интегралов в суперсимметричных калибровочных теориях: научно-квалификационная работа / кафедра теоретической физики, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова. — 2018.
88. Bashir Adnan, Chang Lei, Cloet Ian C. et al. Collective perspective on advances in Dyson-Schwinger Equation QCD // *Commun. Theor. Phys.* — 2012. — Vol. 58. — P. 79–134. arXiv:nucl-th/1201.3366.
89. Broadhurst David J., Delbourgo Robert, Kreimer D. Unknotting the polarized vacuum of quenched QED // *Phys. Lett.* — 1996. — Vol. B366. — P. 421–428. arXiv:hep-ph/9509296.
90. Степаньянц К. В. Исследование проблемы аномалий в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамике // *ТМФ.* — 2005. — Т. 142. — С. 37–57. arXiv:hep-th/0407201.
91. Jones D. R. T. Charge Renormalization in a Supersymmetric Yang–Mills Theory // *Phys. Lett.* — 1977. — Vol. 72B. — P. 199–199.
92. Shifman Mikhail A., Vainshtein A. I. Operator product expansion and calculation of the two-loop Gell-Mann–Low function // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. 44. — P. 321. [*Ядерная физика* 44, 498 (1986)].
93. Солошенко А. А., Степаньянц К. В. Двухпетлевая аномальная размерность $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных // *ТМФ.* — 2003. — Т. 134. — С. 430–446.
94. Soloshenko A., Stepanyantz K. Two-loop renormalization of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. — 2002. arXiv:hep-th/0203118.