Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

Институт проблем управления РАН

Международная конференция

Метод функций Ляпунова и его приложения MFL - 2014

Крым, Алушта, 15-20 сентября 2014 г.

Тезисы докладов

Симферополь
2014

УДК 517.9+539.3+519.6
ББК 22.236.3
Д 37

Д 37 Международная конференция «Метод функций Ляпунова и его приложения» : тез. докл. ; Алушта, 15-20 сентября 2014 г. / Таврический национальный ун-т им. В. И. Вернадского ;
отв. ред. О. В. Анашкин. - Симферополь, 2014.- 90 с.

Научный комитет:

С. Н. Васильев (Москва, председатель),
О. В. Анашкин (Симферополь),
А. С. Андреев (Ульяновск),
Ю. Н. Бибиков (Санкт-Петербург),
В. З. Гринес (Нижний Новгород),
Й. Диблик (Brno, Czech Republic),
А. П. Иванов (Москва),
А. В. Карапетян (Москва),
А. И. Маликов (Казань),
В. Н. Тхай (Москва),
Р. Г. Мухарлямов (Москва),
М. М. Хапаев (Москва),
Л. Хатвани (Szeged, Hungary),
Д. Я. Хусаинов (Киев)

Оргкомитет:

О. В. Анашкин – председатель,
Е. П. Белан, В. А. Лукьяненко, Ю. А. Хазова (Симферополь)

В настоящем сборнике в авторской редакции опубликованы материалы, представленные в Оргкомитет Международной конференции MFL-2014. Тезисы докладов охватывают широкий круг проблем второго метода Ляпунова и его приложений к задачам устойчивости, механики, оптимального управления, экономики и смежным вопросам. В сборник также включено несколько разноплановых докладов.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

О. В. Анашкин, О. В. Митько
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
anashkin@crimea.edu
Симферополь, РОССИЯ

В докладе обсуждается алгоритм построения функции Ляпунова для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени [1]

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = H_k x + g_k(x), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \dots$ — моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \ge \theta > 0$, A, H_k — постоянные матрицы, $f(x) = \sum_{|m|\ge 2} F_m x^m$, $g_k(x) = \sum_{|m|\ge 2} G_m^k x^m$, $m = (m_1, \dots, m_n) \ge 0$ — мультииндекс, $|m| = m_1 + \dots + m_n$, $F_m, G_m^k \in \mathbb{R}^n$, $x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, ряды абсолютно сходятся равномерно по $k = 1, 2, \dots$.

Импульсные системы указанного вида используются для моделирования динамики эволюционных процессов, параметры которых в заданные моменты времени подвергаются резкому изменению в результате почти мгновенных внешних воздействий. Тогда длительностью воздействий можно пренебречь и получаем систему уравнений вида (1), решения которой имеют разрывы первого рода в моменты $t = \tau_k$ и традиционно предполагаются непрерывными слева [1], $x(t) = x(t - 0)$.

Рассматривается критический случай: линеаризованная система

$$\dot{x} = Ax, \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x|_{t=\tau_k} = H_k x \tag{2}$$

устойчива, но не асимптотически. Более того, для простоты будем предполагать, что ни одна траектория линеаризации (2) не стремится к началу координат, т. е., все переменные являются критическими.

Критический случай устойчивости импульсных систем рассматриваемого вида изучен очень мало. Систематическому исследованию критических случаев посвящена серия работ А. И. Двирного и В. И. Слынько, в частности, статьи [2,3].

Разрывный характер интегральных кривых импульсных систем (1) и (2) определяет класс подходящих функций Ляпунова, которые также имеют разрывы первого рода на гиперповерхностях $t = \tau_k$. В терминах свойств разрывных функций Ляпунова в статье [4] формулируются теоремы об устойчивости в критическом случае для систем более общего вида, чем (1).

В докладе на примере системы вида (1) второго порядка продемонстрирован алгоритм построения подходящей функции Ляпунова, удовлетворяющей теоремам из работы [4].

Литература. [1] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. [2] Двирный А. И., Слынько В. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. Сиб. матем. журн., **52:1** (2011), 70-80. [3] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивость критических положений равновесия некоторых классов сложных импульсных систем. Изв. РАН. Теория и сист. управления, №1 (2014), 22-34. [4] Анашкин О. В., Митько О. В. Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием. Динамические системы, **1(29)**, №1 (2011), 5-14.

О ПРИМЕНЕНИИ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

А. С. Андреев, О. А. Перегудова
Ульяновский государственный университет
AndreevAS@ulsu.ru, peregudovaoa@sv.ulsu.ru
Ульяновск, РОССИЯ

Моделирование и анализ движений механических систем с конечным числом степеней свободы естественным образом приводится к исследованию системы дифференциальных уравнений.

Резкое повышение надежности и удешевление компьютеров и микропроцессоров позволили существенно изменить подходы к конструированию управляемых механических систем на основе внедрения цифровых управлений. Соответственно важное значение в теории управления приобрели задачи об устойчивости, стабилизации и управляемости дискретных систем.

В докладе излагаются результаты по применению метода сравнения со скалярной и векторной функциями Ляпунова в задачах об устойчивости решений дискретных систем. Представлены: новая форма принципа квазиинвариатности предельного множества, теоремы об асимптотической устойчивости нулевого состояния.

Излагается применение полученных теорем в задаче о стабилизации управляемых движений нелинейных механических систем с цифровым управлением. В качестве конкретных приложений решаются задачи об управлении движением двузвенного манипулятора и колесного робота с роликонесущими колесами.

Излагаемые результаты являются развитием и дополнением классических результатов об устойчивости и стабилизации дискретных процессов [1,2], новых результатов об управлении движением механических систем [3-5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-33082мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках базовой части (код проекта 2097).

Литература. [1] В. М. Кунцевич, М. М. Лычак Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. Москва, 1977. [2] В. Д. Фурасов Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. Москва, 1982. [3] А. С. Андреев, О. А. Перегудова К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости, ПММ. 70(6) (2006) 965-976. [4] А. С. Андреев, О. А. Перегудова О стабилизации программных движений голономной механической системы, Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 года.[Электронный ресурс] Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (2014) 1840-1843. [5] О. А. Перегудова О стабилизации движений неавтономных механических систем, ПММ 73(2) (2009) 176-188.

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИНАМИКИ СИСТЕМ

О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов
НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ
olga.antonovsckaja@yandex.ru, gorvi40@mail.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Важное место в прямом методе Ляпунова занимает проблема построения подходящей функции Ляпунова [1]-[3]. При изучении поведения допускающих линеаризацию нелинейных непрерывных (дискретных) динамических систем вблизи равновесных состояний могут быть использованы функции Ляпунова квадратичного вида ([3],[4]), построенные для соответствующих линеаризованных систем. При этом одной из основных является проблема расширения областей приложения метода функций Ляпунова, возникающая при решении конкретных задач. Поэтому могут решаться вопросы построения квадратичной функции Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями исходной задачи [5]-[7].

При решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость использования ограничений на свойства функций Ляпунова, позволяющих получать необходимые оценки с достаточной точностью [3],[8]. В частности, при численно-аналитическом способе оценки областей притяжения асимптотически устойчивых множеств [3],[4] с помощью определения знака первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ существенным является такой выбор ее параметров, при котором выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ $(\Delta V(x) < 0)$ обеспечивается с заданным [9] (в том числе максимальным [10]) запасом.

В настоящем докладе обсуждается возможность такого выбора параметров квадратичной функции Ляпунова с помощью простых соотношений, что выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ $(\Delta V(x) < 0)$ обеспечивается с заданным (не обязательно максимальным) запасом, для случая $x \in R^n, n \in N$. (Случай $n = 2$ был рассмотрен в [9].)

Пусть дана система дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, такая, что корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ имеют отрицательные действительные части, и пусть положительно определенная квадратичная форма определена соотношением $V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_ix_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(K_{ij} = K_{ji})$. В силу системы рассмотрим первую производную $\dot{V}$ квадратичной формы.

Согласно [9], квадратичная форма V является функцией Ляпунова системы, для которой максимальное значение первой производной $\dot{V}$ на заданной поверхности уровня $V = V_0$ равно δV_0, $(2\max_i Re\lambda_i \le \delta < 0)$, если параметры K_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнению

$$det(A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \tag{1}$$

где k – номер строки, а m – номер столбца, в котором $A_{km} = \sum_{i=1}^{n}(K_{ik}a_{im} + K_{im}a_{ik})$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты квадратичной формы $\dot{V}$.

Следует отметить [9], что уже в случае $n = 3$ нахождение параметров K_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ из уравнения (1) в общем случае является задачей достаточно сложной.

Пусть, например, все корни характеристического уравнения действительны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 0$. В этом случае всегда существует линейное невырожденное преобразование координат приводящее систему к каноническому виду ([1]) $\dot{\xi}_i = \lambda_i\xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что система имеет канонический вид и $A_{km} = (\lambda_m + \lambda_k)K_{km}$ $\quad (k, m = 1, 2, \ldots, n)$, а уравнение (1) имеет вид

$$det((\lambda_k + \lambda_m - \delta)K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что при $n = 2$ [9] для канонической системы дифференциальных уравнений коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей условию $\max_{V=V_0}\dot{V} = \delta V_0$, будут связаны соотношением $K_{12}^2 = (1 - R(\delta))K_{11}K_{22}$, $R(\delta) = (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \delta)^{-2}$ $(2\lambda_2 \le \delta < 0)$.

В общем случае, при $n > 2$, квадратичную функцию Ляпунова с $\max_{V=V_0}\dot{V} = \delta V_0$, можно искать в таком виде, чтобы матрица в (2) принимала блочно-диагональный вид, а $K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$, $R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta)^{-2}$, $(2\lambda_n \le \delta < 0)$.

Случай точечного отображения $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ рассматривается аналогично. В этом случае положительно определенная квадратичная форма V является функцией Ляпунова отображения, для которой максимальное значение первой разности ΔV на заданной поверхности уровня $V = V_0$ равно δV_0, $(\max_i\{|z_i|^2 - 1\} \le \delta < 0)$, если параметры V удовлетворяют уравнению (1) в котором $A_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}a_{ik}a_{jm} - K_{km}$, $(k, m = 1, 2, \ldots, n)$

– коэффициенты квадратичной формы ΔV, а корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ лежат внутри круга единичного радиуса.

В случае, когда все корни характеристического уравнения действительны, $A_{km} = (z_k z_m - 1)K_{km}$ $(k, m = 1, 2, \dots, n)$, а при $n = 2$ [9] для канонического точечного отображения коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей условию $\max_{V=V_0} \Delta V = \delta V_0$, будут связаны соотношением $K_{12}^2 = (1 - R(\delta))K_{11}K_{22}$, $R(\delta) = (1+\delta)(z_2 - z_1)^2(z_1 z_2 - 1 + \delta)^{-2}$ $(z_2^2 - 1 \leq \delta < 0)$.

Литература. [1] А. М. Ляпунов Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., 1950. [2] Н. Г. Четаев Устойчивость движения. М., 1966. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск, 1980. [3] А. А. Косякин, Б. М. Шамриков Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983. [4] Е. А. Барбашин Функции Ляпунова. М., 1970. [5] Д. Я. Хусаи-нов, Е. А. Юнькова Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с звдвнным спектром, Укр. матем. хурн. 4 (1983) 528-531. [6] Ю. А. Комаров, Д. Я. Хусаинов Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем, Укр. матем. хурн. 6 (1984) 750-753. [7] Р. А. Сарыбеков Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка, Сиб. матем. хурн. 5 (1977) 1159-1167. [8] А. И. Пропой О проблеме устойчивости движения, Автоматика и телемеханика. 4 (2000) 51-60. [9] О. Г. Анто-новская О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами, Дифференциальные уравнения. 9 (2013) 1220-1224. [10] О. Г. Антоновская О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова, Дифференциальные уравнения. 11 (2003) 1562-1563.

УСЛОВНО-ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов
НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ
olga.antonovsckaja@yandex.ru, gorvi40@mail.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Центральное место в прямом методе Ляпунова занимает проблема построения функции Ляпунова [1]-[3]. При изучении поведения допускающих линеаризацию нелинейных динамических систем вблизи равновесных состояний функцию Ляпунова часто ищет в классе положительно определенных квадратичных форм, исходя из того условия, что построенная квадратичная форма является функцией Ляпунова для соответствующей линеаризованной системы ([3],[4]). При этом могут решаться вопросы построения квадратичной функции Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями исходной задачи [5]-[7].

Для исследования динамики систем методом точечных отображений, когда интерес уже представляют не только качественные, но и некоторые количественные характеристики отображения, возникает необходимость использования ограничений другого типа на свойства функций Ляпунова. В частности, ограничений на первую разность функции Ляпунова [8],[9].Так при изучении нелокальных свойств траекторий динамических систем особый интерес представляет выделение в пространстве состояний областей с подобным, в соответствии с определенным признаком, поведением траекторий, и прежде всего, задача построения областей притяжения, которые траектория в дальнейшем не покинет. Применение же численных методов при исследовании свойств точечных отображений естественным образом приводит к необходимости построения функции Ляпунова, наиболее удобной для решения задачи определения быстродействия системы, а свойства функции определяются особенностями критерия окончания переходных процессов в системе.

В работе [10] решалась задача построения квадратичной функции Ляпунова, гарантирующей минимальность числа итераций линеаризованного в окрестности неподвижной точки отображения плоскости в плоскость до попадания в сечение функции Ляпунова, вписанное в полосу, при условии равенства минимума модуля первой разности функции Ляпунова на сечении заданному числу. Такая функция была названа условно-экстремальной [10].

В настоящем докладе обсуждается возможность построения условно-экстремальной функции Ляпунова для случая точечного отображений произвольной размерности.

Пусть дано линейное невырожденное точечное отображение вида

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

и начальная точка $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$. Известно, что поведение траекторий точечного отображения в окрестности неподвижной точки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ определяется видом корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$ характеристического уравнения. Будем предполагать, что корни характеристического уравнения простые и лежат внутри круга единичного радиуса (т.е.неподвижная точка асимптотически устойчива). И пусть задано множество

$$|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j| \le \sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k, k \le n), \tag{2}$$

которое, вообще говоря, является неограниченным.

Для нахождения критерия, гарантирующего не только попадание траектории отображения (1) с начальной точкой $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ на множество (2), но и тот факт, что в дальнейшем траектория этого множества уже не покинет, естественно воспользоваться методом функций Ляпунова. Причем ищем функцию Ляпунова квадратичного вида, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} \Delta V = \delta V_0$, $(\max_i\{|z_i|^2 - 1\} \le \delta < 0)$ [9], гарантирующую минимальность числа итераций отображения (1) до попадания в сечение функции Ляпунова, вписанное в (2). А коэффициенты квадратичной функции Ляпунова с $\max_{V=V_0} \Delta V = \delta V_0$ определяем путем перехода к каноническому точечному отображению. Например, в случае действительных корней характеристического уравнения, каноническое точечное отображение будет иметь вид

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а в качестве квадратичной функции Ляпунова с $\max_{V=V_0} \Delta V = \delta V_0$ можно выбрать

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii} x_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2,$$

для которой $K_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$, $K_{n-1,n}^2 = (1-R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$, $R(\delta) = (1+\delta)(z_{n-1} - z_n)^2(z_{n-1}z_n - 1 - \delta)^{-2}$ $(z_n^2 - 1 \le \delta < 0)$.

Литература. [1] А. М. Ляпунов Общая задача об устойчивости движения. М.-Л., 1950. [2] Н. Г. Четаев Устойчивость движения. М., 1966. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск, 1980. [3] А. А. Косякин, Б. М. Шамриков Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983. [4] Е. А. Барбашин Функции Ляпунова. М., 1970. [5] Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с звдвнным спектром, Укр. матем. хурн. 4 (1983) 528-531. [6] Ю. А. Комаров, Д. Я. Хусаинов Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем, Укр. матем. хурн. 6 (1984) 750-753. [7] Р. А. Сарыбеков Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка, Сиб. матем. хурн. 5 (1977) 1159-1167. [8] О. Г. Антоновская О пределах изменения первой разности квадратичной функции Ляпунова на заданном ее сечении, Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1 (2003) 65-70. [9] О. Г. Антоновская О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами, Дифференциальные уравнения. 9 (2013) 1220-1224. [10] О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов О построении и применении условно-экстремальной функции Ляпунова при изучении динамики системы с помощью точечного отображения плоскости в плоскость, Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 3 (2006) 110-117.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. И. Маликов
Институт механики и машиностреня КазНЦ РАН, КНИТУ-КАИ
a_i_malikov@mail.ru
Казань, РОССИЯ

Исследованиям устойчивости на конечном интервале было положено начало в конце 40-ых начале 50-ых годах Н.Д.Моисеевым [1], Г.В.Каменковым [2], А.А.Лебедевым [3]. В этих ранних работах авторы интересовались обнаружением оценок границ на компоненты состояний траектории линейных и нелинейных систем на фиксированном и конечном интервале времени. Н.Д.Моисеевым [1] было введено понятие технической устойчивости. Это понятие, в отличие от понятия устойчивости по Ляпунову, имеет дело с конечными (а не бесконечно малыми) отклонениями, рассматривает конечный (а не бесконечный) промежуток времени и вводит учет возмущающих сил. Эти исследования получили в дальнейшем развитие как теория практической устойчивости в трудах И.Г.Малкина, G. LaSalle и S Lefschetz К.А.Абгаряна, А.А.Мартынюка P.Dorato, L.Weiss and E.F.Infante, A. Michel, D. Porter, L.T.Grujic, V.Lakshmikantham, S.Leela, A.Martynyuk, Р.З.Абдуллина и Л.Ю.Анапольского и многих других авторов, в которых анализируются подобные и более сложные свойства, как для дифференциальных, так и разностных уравнений. В этих работах были получены условия устойчивости на конечном интервале, основанные на функциях типа Ляпунова. Несколько других результатов по устойчивости на конечном интервале различных систем линейных, нелинейных, детерминированных и стохастических также были получены позже в литературе. Однако, эти результаты не обращались к синтезу законов управления, которые приводят к устойчивой на конечном интервале системе с обратной связью, и они были все ограничены анализом рассматриваемых систем. Позже появились работы, предлагавшие подходы к синтезу устойчивых на конечном интервале систем. Однако в вычислительном плане они были не эффективными. Полученные в конце 80-х годов результаты по численным методам решения линейных матричных неравенств (ЛМН) поощряли поиск новых подходов к синтезу устойчивых на конечном интервале законов управления для различных классов систем [4]. Таким образом, проблема анализа устойчивости на конечном интервале для различных систем были изучены многими исследователями. Однако, исследования ограничивались в основном линейными системами.

В данной работе решается задача анализа динамических свойств устойчивости и ограниченности на конечном (заданном) интервале времени. Под устойчивостью (соответственно ограниченностью при наличии возмущений) на конечном интервале понимается, что процессы, начинающиеся из заданной области начальных данных (при учете ограничений на неопределенные возмущения в начальный момент времени или их принадлежности рассматриваемому классу) будут удовлетворять заданным ограничениям на всем заданном интервале времени. На основе метода матричных систем сравнения получены достаточные условия устойчивости и ограниченности на конечном интервале для классов систем с неизвестными нелинейностями, лежащими в пределах гиперсферы с неопределенным центром и с неопределенным возмущением, которое может быть или волновым с известной формой, или с конечной энергией (класса L_2), или ограниченное по норме (класса L_∞). Этот класс систем представляет нелинейные системы, правые части которых являются локально липшицевыми, заданными так, что исчезают в нуле. Центр гиперсферы описан линейной системой, системные матрицы которой представлены с дополнительными ограниченными возмущениями, которые учитывают ошибки моделирования.

Рассматривается система

$dx/dt = f(t, x, w)$,

где $t \in T,\ \ x \in R^n$ - вектор состояния, $w \in W$ - вектор неопределенных возмущений.

Данная система с входным возмущением $w(t)$ является ограниченной (устойчивой при $w(t) = 0$) на конечном интервале T относительно $\alpha_x, \alpha_w, \beta_x, R$ где $\alpha_x, \alpha_w, \beta_x-$ заданные числа и $R > 0$ - заданная положительно-определенная матрица, если

$(x^T(0)Rx(0) \leq \alpha_x^2)\bigwedge(w^T(0)w(0) \leq \alpha_w^2) \Rightarrow x^T(t)Rx(t) \leq \beta_x^2$ для всех $t \in T$.

Предположим, что нелинейная вектор функция — неизвестная, но удовлетворяет коническому условию, заданному в виде:

$JJ^T \leq (C_f x + D_f w)(C_f x + D_f w)$,

где $J(x(t), w(t)) = f(x(t), w(t)) - (Ax(t) + Dw(t))$, A, D, C_f, D_f - известные, в общем случае нестационарные матрицы.

Для проверки устойчивости или ограниченности на конечном интервале сначала с использованием матричного преобразования переменных состояния $V = xx^T$, при учете ограничений на нелинейности и неопределенные возмущения, строится матричная система сравнения [5] $dQ/dt = F(t, Q)$. Затем находится ее частное решение $Q(t, t_0, Q_0)$ с начальным условием, определенным через заданные ограничения на множество начальных данных: $Q_0 = \alpha_x^2 R^{-1}$. Затем по частному решению матричной системы сравнения получают эллипсоидальные оценки $x(t, t_0, x_0) \in \{x \in R^n : x^T Q^{-1}(t, t_0, Q_0)x \leq \beta_x^2\}$ вектора состояния для заданного множества начальных данных. Заключение об ограниченности (устойчивости) делается, если

$Q(t, t_0, Q_0) \leq \beta_x^2 R^{-1}$.

Также получены достаточные условия устойчивости и ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости системы линейных дифференциальных матричных неравенств. В автономном случае условия устойчивости или ограниченности на конечном интервале представлены в виде разрешимости системы линейных матричных неравенств. На основе полученных результатов для рассматриваемых классов нелинейных систем предлагаются способы синтеза управления в виде обратной связи по состоянию и по выходу.

В качестве примеров рассмотрены задача стабилизации на конечном интервале времени перевернутого маятника и задача управления конечным положением системы наведения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-08-00948а) и программы 14 ОЭММПУ РАН.

Литература. [1] Н. Д. Моисеев, Очерки развития теории устойчивости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. [2] Г. В. Каменков, Об Устойчивости движения на конечном интервале времени, ПММ, Т.17, №5 (1953). [3] А. А. Лебедев, Об устойчивости движения на заданном интервале времени, ПММ, Т.18, №2 (1954). [4] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato, Finite time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances, Automatica, 37, (2001) 1459-1463. [5] А. И. Маликов, Эллипсоидальное оценивание решений дифференциальных уравнений с помощью матричных систем сравнения, Известия вузов. Математика, №8, (2002) 30-42.

ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

А. С. Шмыров, В. А. Шмыров

Санкт-Петербургский государственный университет

ashmyrov@yandex.ru, vasilyshmyrov@yandex.ru, v.a.shmyrov@spbu.ru

Санкт-Петербург, РОССИЯ

Метод функций Ляпунова оказывается особенно эффективным для управляемых гамильтоновых систем. Для таких систем управление выбирается так, чтобы сохранилась гамильтонова форма уравнений, а функция Ляпунова строится на основе гамильтониана. При таком подходе удается добиться устойчивости по Ляпунову стационарного решения. Например, в задаче стабилизации орбитального движения в окрестности коллинеарного лагранжевого решения задачи трех тел (точки либрации) L_1 системы Земля-Солнце, оказывается возможным, при специальном выборе управляющего ускорения, сохранить гамильтонову форму уравнений движения и гамильтониан системы будет функцией Ляпунова в некоторой окрестности точки либрации L_1 [1-4]. Управление такого типа действует по линии, коллинеарной линии Земля-Солнце и является достаточно малым, что отрывает возможность использования солнечного паруса.

Более того, при таком подходе появляется возможность использования гамильтоновой структуры управляемой системы для построения области управляемости [2]. Область управляемости строится на основе оценок гамильтониана управляемой системы. При этом следует отметить, что исследуемое семейство управлений является линейной функцией этой фазовой переменной, т.е. линейным регулятором [1-4].

На основе приведенного численного моделирования проводится анализ величины управлений необходимых для стабилизации движения, результаты иллюстрируются графически.

Работа поддержана Санкт-Петербургским университетом, проект 9.38.673.2013.

Литература. [1] В. А. Шмыров,Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. 193-199. [2] А. С. Шмыров, В. А. Шмыров, Об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. 250-257. [3] А. С. Шмыров, В. А. Шмыров, Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестник Санкт-Петербургского ениверситета. Серия 1: Математика, Механика, Астрономия. 2012. 4. 139-146. [4] A. Shmyrov, V. Shmyrov, Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8, no. 10. 487-492.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУХЧАСТОТНЫМ РЕЗОНАНСОМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В. В. Грушковская, А. Л. Зуев
Институт прикладной математики и механики НАНУ
v_grushkovskaya@mail.ru, al_zv@mail.ru
Донецк, УКРАИНА

Данная работа продолжает исследование асимптотического поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + R\,(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 4, \tag{1}$$

где x — фазовый вектор системы, A — вещественная $[n \times n]$- матрица, $R\,(x) = O(\|x\|^2)$ при $x \to 0$.

Для систем, определяемых однородными векторными полями, степенные оценки нормы решений получены в работах [1,2]. В статьях [3,4] исследованы случаи двух и q пар чисто мнимых корней в предположении, что в системе отсутствуют внутренние резонансы до четвертого порядка включительно. В предлагаемой работе эти результаты распространяются на системы с резонансами четвертого порядка.

Пусть матрица A имеет q пар чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_q$, $q \geq 2$, и $p = n - 2q$ собственных значений с отрицательными вещественными частями. Рассмотрим случай L независимых двухчастотных резонансов в системе (1), $1 \leq L \leq \left[q/2\right]$ (случай трех- и четырехчастотных резонансов изучен в [5]). Без ограничения общности можем считать $\omega_{2l-1} = 3\omega_{2l}, \quad l = \overline{1, L}$. Предполагается, что другие резонансы до четвертого порядка включительно в системе отсутствуют. Тогда исследование системы (1) сводится к исследованию следующих "модельных" уравнений, при условии, что на устойчивость тривиального решения не влияют члены выше третьего порядка:

$$
\begin{aligned}
\dot r_{2l-1} &= r_{2l-1}\sum_{k=1}^{q} A_{2l-1\,k} r_k^2 + (a_{2l-1\,1}\cos\theta^{(l)} + a_{2l-1\,2}\sin\theta^{(l)}) r_{2l}^3,\\
\dot r_{2l} &= r_{2l}\sum_{k=1}^{q} A_{2l\,k} r_k^2 + (a_{2l\,1}\cos\theta^{(l)} + a_{2l\,2}\sin\theta^{(l)}) r_{2l-1} r_{2l}^2,\\
r_{2l-1}\dot\theta_{2l-1} &= r_{2l-1}\sum_{k=1}^{q} B_{2l-1\,k} r_k^2 + (a_{2l-1\,2}\cos\theta^{(l)} - a_{2l-1\,1}\sin\theta^{(l)}) r_{2l}^3 + \omega_{2l-1} r_{2l-1},\\
r_{2l}\dot\theta_{2l} &= r_{2l}\sum_{k=1}^{q} B_{2l\,k} r_k^2 - (a_{2l\,2}\cos\theta^{(l)} - a_{2l\,1}\sin\theta^{(l)}) r_{2l-1} r_{2l}^2 + \omega_{2l} r_{2l},\\
\dot r_j &= r_j\sum_{k=1}^{q} A_{jk} r_k^2,\ r_j\dot\theta_j = r_j\sum_{k=1}^{q} B_{jk} r_k^2 + \omega_j r_j.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В работе получен ряд достаточных условий асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2). Отметим, что некоторые из них являются обобщением результатов, приведенных в [6,7]. Сформулируем основной результат данного сообщения.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия асимптотической устойчивости инвариантного множества $r_j = 0$ системы* (1). *Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого решения $x(t)$ системы* (1) *с начальными условиями $x(t_0) = x_0 \in B_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ выполняется оценка*

$$
\|x(t)\| \le \left(\alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 \|x_0\|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \forall t \ge t_0,
\tag{3}
$$

где α_1, α_2 — положительные постоянные, которые определяются по коэффициентам Маклорена правой части системы (1).

Предложенный метод позволяет также построить для исходной системы функцию Ляпунова.

В качестве примера рассмотрена механическая система, состоящая из шатуна и маятника, соединенных пружиной массы m_0. Предполагается, что к маятнику с помощью второй пружины подвешена точечная масса m_1, движущаяся вдоль него с трением ν. Уравнения возмущенного движения такой системы имеют следующий вид (с точностью до членов третьего порядка):

$$
\begin{aligned}
&\dot x_1 = x_4,\ \dot x_2 = x_5,\ \dot x_3 = x_6,\\
&\dot x_4 = -\frac{\varkappa_1(m_0+m_1)}{m_0 m_1}x_1 + \frac{\varkappa_0\varkappa_1}{m_0 m_1 g}x_2 + \frac{\varkappa_1^2}{m_1^2 g}x_1x_3 - \frac{\nu\varkappa_1}{m_0 m_1 g}x_1x_6 - \frac{\varkappa_0\varkappa_1^2}{m_0 m_1^2 g^2}x_2x_3 -\\
&\quad - \frac{2\varkappa_1}{m_1 g}x_4x_6 + \frac{(m_0+4m_1)\varkappa_1}{6m_0m_1}x_1^3 - \frac{\varkappa_0\varkappa_1}{2m_0m_1g}x_1^2x_2 - \frac{\varkappa_1^3}{m_1^3g^2}x_1x_3^2 +\\
&\quad + \frac{\nu\varkappa_1^2}{m_0m_1^2g^2}x_1x_3x_6 + \frac{\varkappa_0\varkappa_1^3}{m_0m_1^3g^3}x_2x_3^2 + \frac{2\varkappa_1^2}{m_1^2g^2}x_3x_4x_6,\\
&\dot x_5 = \frac{m_1 g}{m_0}x_1 - \frac{\varkappa_0}{m_0}x_2 + \frac{\varkappa_1}{m_0}x_1x_3 + \frac{\nu}{m_0}x_1x_6 - \frac{m_1 g}{6m_0}x_1^3,\\
&\dot x_6 = -\frac{\varkappa_1}{m_1}x_3 - \frac{\nu}{m_1}x_6 - \frac{(m_0+2m_1)g}{2m_0}x_1^2 + \frac{\varkappa_0}{m_0}x_1x_2 + \frac{m_1 g}{\varkappa_1}x_4^2 - \frac{\varkappa_1}{m_0}x_1^2x_3 -\\
&\quad - \frac{\nu}{m_0}x_1^2x_6 + x_3^3x_4,
\end{aligned}
$$

где $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ коэффициенты жесткости пружин, g — ускорение свободного падения. Для такой системы проведено исследование устойчивости и построена функция Ляпунова. С помощью теоремы 1 получена оценка скорости затухания колебаний маятника с явным вычислением коэффициентов α_1 и α_2 в (3).

Литература. [1] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959. [2] В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение. Л., 1957. [3] В. В. Грушковская, А. Л. Зуев, Асимптотическое поведение решений системы с критическими переменными в случае двух пар чисто мнимых корней, Дин.сис. 29 (2011), 207-218. [4] V. Grushkovskaya, A. Zuyev, Asymptotic Behavior of Solutions of a Nonlinear System in the Critical Case of q Pairs of Purely Imaginary Eigenvalues, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 80 (2013) 156-178. [5] В. В. Грушковская, А. Л. Зуев, Асимптотические свойства траекторий нелинейной системы в случае резонанса четвертого порядка, МТТ 43 (2013), 109-123. [6] П. С. Красильников, Об асимптотической устойчивости при резонансе 1:3, ПММ 60 (1996), 23-29. [7] Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль, Условия устойчивости равновесия при резонансе 1:3,ПММ 44 (1980), 229-237.

КОЛЕБАНИЯ В АВТОНОМНОЙ МОДЕЛИ, СОДЕРЖАЩЕЙ СВЯЗАННЫЕ ПОДСИСТЕМЫ

В. Н. Тхай

Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии Наук

tkhai@ipu.ru

Москва, РОССИЯ

Изучается модель, содержащая связанные подсистемы (МССП) и описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которой подсистемы – системы автономных ОДУ. Связь между подсистемами задается параметром ε; при $\varepsilon = 0$ модель распадается на независимые подсистемы. Таких параметров в МССП может быть один или несколько. Параметры отражают иерархичность подсистем в МССП. Размерность каждой подсистемы в МССП в общем случае – индивидуальная, а сама подсистема может быть линейной или нелинейной. Различные примеры МССП приводились ранее в [1].

МССП относится к сложным системам. Характерные отличия модели: иерархичность, многоуровневость, многорежимность, нелинейность, высокая размерность. МССП относиться также к "большим системам".

МССП распадается на независимые подсистемы, когда параметр $\varepsilon = 0$. Иначе говоря, происходит естественная декомпозиция МССП на подсистемы. Что касается взаимосвязей в МССП, то они учитываются по "третьему закону Ньютона т.е. как "действие равно противодействию".

МССП существует "де факто независимо от применения того или иного метода исследования. Для МССП используется естественный подход [1] к исследованию динамики МССП: классификация подсистем по типам (динамическим свойствам), выделение различных связок подсистем и последующий анализ этих связок.

Точки семейства (по параметру h) одночастотных колебаний, на которых период $dT(h) \neq 0$, называются обыкновенными (o-точка), а точки, в которых $dT(h) = 0$, называются критическими (c-точка). Критическая точка может вырождаться в равновесие (e-точка) [1].

В соответствии с типом точек семейства (o-точка, c-точка, e-точка) режимы колебаний в подсистеме называются как o-режим, c-режим и e-режим соответственно (см. также [1]). Комбинация режимов, где в подсистемах имеются только o-точки, называется основным режимом колебаний в МССП.

В [1] изучена периодическая МССП. В докладе рассматривается автономная МССП. Для отдельной системы в невырожденном случае показывается существование альтернативы "цикл или семейство периодических решений". Для основного режима колебаний МССП, дается сценарий бифуркации семейства, состоящего из всех семейств периодических решений подсистем, с рождением циклов и исследуется устойчивость циклов. Предлагается решение задачи стабилизации циклов МССП.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы 14 ОЭММПУ РАН и РФФИ((13-01-00347, 13-01-00376)

Литература. [1] Тхай В. Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 32–41.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ПОДСИСТЕМ

В. Н. Тхай, И. Н. Барабанов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
tkhai@ipu.ru, ivbar@iipu.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается гладкая 2π-периодическая по времени t модель, содержащая связанные подсистемы (МССП), в которой три подсистемы находятся на одном уровне иерархии:

$$\dot{x}^s = X^s(x^s) + \varepsilon \tilde{X}^s(\varepsilon, x^1, x^2, x^3, t), \quad x^s \in R^2, \quad s = 1, 2, 3. \tag{1}$$

При $\varepsilon = 0$ (1) образует 3 независимые системы. Обозначим общее решение s-й системы через $x^s(x_1^{s0}, \ldots, x_n^{s0}, t)$. Необходимые и достаточные условия существования T-периодического движения в этой системе даются равенством

$$f^s \equiv x^s(x^{s0}, T) - x^{s0} = 0,$$

где x^{s0} — начальная точка при $t = 0$.

Пусть подсистема с номером s допускает семейство периодических решений вида

$$x^s = \varphi^s(h_s, t + \gamma_s),$$

на котором период $T_s(h_s)$ зависит от параметра h_s. Тогда порождающая система (система (1) при $\varepsilon = 0$) допускает в общем случае семейство условно-периодических решений с тремя частотами. Предположим, что среди этих решений находится 2π-периодическое решение, которому отвечает фиксированный набор параметров — вектор $h = h^*$, $h = (h_1, h_2, h_3)$. Ставится вопрос о существовании в системе (1) при малых $\varepsilon \neq 0$ периодических решений, которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к 2π-периодическому решению порождающей системы и вопрос об их устойчивости.

Порождающие решения совпадают между собой с точностью до сдвига по траектории $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Следовательно, задача существования периодичекого решения сводится к нахождению вектора γ^*, для которого возмущения удовлетворяют условиям существования периодического решения при $\varepsilon \neq 0$.

Предполагается, что $dT_s(h_s^*) \neq 0$, $s = 1, 2, 3$ (основной режим).

Обозначим $\{\psi_k^s(t + \gamma_s^*)\}$ — 2π-периодические решения сопряженных систем к уравнениям в вариациях при $\varepsilon = 0$.

Введем систему уравнений

$$g(\gamma^*) = 0, \tag{2}$$

где компоненты векторной функции $g(\gamma)$ определяются формулами

$$g^s(\gamma) \equiv \int_0^{2\pi} \sum_{k=1,2} \tilde{X}_k(0, \varphi^1(t + \gamma_1), \varphi^2(t + \gamma_2), \varphi^3(t + \gamma_3)) \psi_k^s(t + \gamma_s) dt,$$

$s = 1, 2, 3.$

Справедлива следующая

Теорема. *Каждому простому корню системы уравнений* (2) *отвечает изолированное колебание МССП* (1).

Задача устойчивости существующих колебаний сводится к задаче устойчивости нулевого решения 2π-периодической системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_s^* &= \varepsilon \sum_{j=1}^{3} (a_{sj} x_j^* + a_{sj}^* y_j^*) + o(\varepsilon), \\ \dot{y}_s^* &= x_s^* + \varepsilon \sum_{j=1}^{3} (b_{sj} x_j^* + b_{sj}^* y_j^*) + o(\varepsilon), \quad s = 1, \ldots, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

($a_{sj}, a_{sj}^*, b_{sj}, b_{sj}^*$ — периодические функции времени).

Характеристические показатели линейной связанной системы (3) даются формулами:

$$\lambda^s = \alpha_1^s \varepsilon^{1/2} + \alpha_2^s \varepsilon + o(\varepsilon), \quad s = 1, 2, 3.$$

Если в системе (3) коэффициенты таковы, что все числа α_1^s, α_2^s удовлетворяют неравенствам

$$(\alpha_1^s)^2 \le 0, \quad \alpha_2^s < 0; \quad s = 1, 2, 3,$$

то нулевое решение асимптотически устойчиво.

Если

$$(\alpha_1^s)^2 \le 0, \quad \alpha_2^s > 0$$

или $(\alpha_1^s)^2 > 0$ для одного или несколько номеров номеров s, то решение неустойчиво.

Для отдельной системы второго порядка и для МССП, состоящей из двух подсистем второго порядка числа α_1^s, α_2^s вычислены ранее вработах авторов [1-3]. В настоящей работе приводится подсчет характеристических чисел для МССП, состоящей из из трех подсистем второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундамендальных исследований (проекты № 13-01-00347, № 13-01-00376) и Программы 14 ОЭММПУ РАН.

Литература. [1] В. Н. Тхай Колебания и устойчивость в квазиавтомной системе. I. Обыкновенная точка однопараметрического семейства периодических движений // АиТ. 2006. №9. С. 90-98.. [2] В. Н. Тхай Модель, содержащая связанные подсистемы // АиТ. 2013. № 6. С. 32–41. [3] В. Н. Тхай, И. Н. Барабанов Квазиавтономная система: Колебания, устойчивость и стабилизация в обыкновенной точке семейства периодических решений // АиТ. 2013. № 8. С. 32–46.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. П. Маркеев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
anat-markeev@mail.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается система с двумя степенями свободы, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ (i = 1, 2) \tag{1}$$

где функция Гамильтона H не зависит от времени t. Предполагается, что в системе существует периодическое движение

$$q_i = f_i(t), \quad p_i = g_i(t), \ (i = 1, 2) \tag{2}$$

Без ограничения общности период считаем равным 2π. Предполагаем также, что в окрестности траектории, отвечающей периодическому движению, функция Гамильтона аналитична. Для исследования движений системы, близких к ее периодическому движению, введем такие канонически сопряженные переменные ξ_i, η_i, чтобы невозмущенное движение (2) записывалось в виде

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0$$

Конструктивный алгоритм построения замены переменных $q_i, p_i \to \xi_i, \eta_i$ и преобразованной функции Гамильтона Γ разработан в статье [1]. Функция Гамильтона Γ разлагается в ряд по степеням η_1, ξ_2, η_2

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + ... + \Gamma_k + ... \tag{3}$$

Здесь Γ_k — форма степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$ с 2π-периодическими по ξ_1 коэффициентами, причем

$$\Gamma_2 = \eta_1 + \varphi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \tag{4}$$

где φ_2 — квадратичная форма относительно ξ_2, η_2.

Задача об орбитальной устойчивости периодического движения (2) эквивалентна задаче об устойчивости системы с функцией Гамильтона (3) по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2.

Два из четырех мультипликаторов линеаризованных уравнений возмущенного движения, отвечающих функции Гамильтона (4), равны единице. Предположим, что оставшиеся два мультипликатора $\exp(\pm i2\pi\lambda)$ комплексно сопряжены и имеют модули, равные единице (т.е. величина λ — вещественное число).

Пусть в системе отсутствуют резонансы до третьего порядка включительно (т.е. ни одно из чисел $\lambda, 2\lambda$ и 3λ не является целым), но есть резонанс четвертого порядка $4\lambda = k$, где k — целое число.

Тогда при помощи вещественного унивалентного канонического преобразования $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \to \varrho_1, \varrho_2, \theta_1, \theta_2$ (на невозмущенном периодическом движении (2) переменные ϱ_1 и ϱ_2 равны нулю) функцию Гамильтона возмущенного движения (3) можно привести [1] к следующей (нормальной) форме:

$$\begin{gathered} F = \varrho_1 + \lambda\varrho_2 + c_{20}\varrho_1^2 + c_{11}\varrho_1\varrho_2 + (c_{02} + \alpha_{02}\sin\psi + \beta_{02}\cos\psi)\varrho_2^2 + \\ + c_{30}\varrho_1^3 + c_{21}\varrho_1^2\varrho_2 + (c_{12} + \alpha_{12}\sin\psi + \beta_{12}\cos\psi)\varrho_1\varrho_2^2 + (c_{03} + \alpha_{03}\sin\psi + \beta_{03}\cos\psi)\varrho_2^3 + ... \end{gathered} \tag{5}$$

Принято обозначение $\psi = 4\theta_2 - k\theta_1$. Коэффициенты нормальной формы $c_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ — постоянные величины. Многоточием в правой части равенства (5) обозначена совокупность членов выше третьей степени относительно ϱ_1, ϱ_2.

Положим

$$A = |c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02}| - \sqrt{\alpha_{02}^2 + \beta_{02}^2}$$

Если $A \neq 0$, то для решения задачи об орбитальной устойчивости периодического движения (2) достаточно членов до второй степени включительно относительно ϱ_1, ϱ_2 в нормальной форме (5). Имеет место неустойчивость или орбитальная устойчивость в зависимости от того отрицательна или положительна величина A [1,2].

В критическом случае, когда $A = 0$, задача об орбитальной устойчивости может быть решена рассмотрением членов до третьей степени включительно относительно ϱ_1, ϱ_2 в нормальной форме (5). Введем обозначение

$$B = (c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02})(c_{30}\lambda^3 - c_{21}\lambda^2 + c_{12}\lambda - c_{03}) - (\alpha_{02}\alpha_{12} + \beta_{02}\beta_{12})\lambda + (\alpha_{02}\alpha_{03} + \beta_{02}\beta_{03})$$

Теорема. *Пусть A=0. Тогда при выполнении неравенства B>0 периодическое движение (2) неустойчиво, а при B<0 орбитально устойчиво.*

Утверждение теоремы о неустойчивости доказывается вторым методом Ляпунова (при помощи теоремы Четаева). Доказательство орбитальной устойчивости осуществляется методами КАМ - теории [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00380) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ - 2363.2014.1).

Литература. [1] А. П. Маркеев. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений, ПММ 66 (2002) 929-938. [2] А. П. Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва, 1978. [3] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт Математические аспекты классической и небесной механики. Москва, 2002.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ОБУСЛОВЛЕННЫХ БЫСТРЫМИ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ ВИБРАЦИЯМИ ОДНОЙ ИЗ ЕГО ТОЧЕК

О. В. Холостова
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
kholostova_ o@mail.ru
Москва, РОССИЯ

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, предполагая, что одна из его точек (точка подвеса) совершает заданные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды вдоль вертикали. Ранее в [1] при помощи методов теории возмущений была получена приближенная система автономных дифференциальных уравнений относительного движения тела (в системе координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса). Данная система может быть записана в канонической форме, при этом к потенциалу поля тяжести добавляется вибрационный потенциал.

В рамках приближенной системы существуют частные движения тела — равномерные вращения вокруг оси, неподвижной в теле и в абсолютном пространстве (перманентные вращения). Наличие быстрых вибраций существенно влияет на совокупность осей перманентных вращений и на характер устойчивости. В частности, существуют перманентные вращения, невозможные для тела с неподвижной точкой.

Известно, что динамически симметричное тело с неподвижной точкой подвеса в случаях Эйлера и Лагранжа может совершать перманентное вращение, при котором ось симметрии составляет фиксированный и отличный от нуля угол с вертикалью (коническое движение). Известно также, что главная ось инерции тела с неподвижной точкой может служить (вертикальной) осью перманентного вращения только в случае, если центр масс тела лежит на этой оси.

Обнаружено, что при наличии быстрых вертикальных вибраций точки подвеса существует коническое движение несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции, если между угловой скоростью тела и параметром, характеризующем частоту вибрации, имеется определенное соотношение. Существует также перманентное вращение тела вокруг вертикальной главной оси инерции, при этом центр масс тела лежит в главной плоскости инерции, содержащей данную ось (но не на самой оси).

Проведено исследование устойчивости двух указанных типов перманентных вращений. Показано, что коническое движение несимметричного тела всегда неустойчиво. Для перманентного вращения вокруг главной оси инерции в четырехмерном пространстве параметров задачи найдены области выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости. В последних для ряда частных значений параметров проведен подробный нелинейный анализ устойчивости. Выявлены случаи резонансов третьего и четвертого порядков, а также случаи вырождения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00380) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ"(НШ-2363.2014.1).

Литература. [1] А. П. Маркеев Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса, Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 193-203.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СЖАТОГО ПРЕЦЕССИРУЮЩЕГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. В. Родников
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
springer@inbox.ru, avrodnikov@yandex.ru
Москва, РОССИЯ

Для реализации космических миссий в дальнем космосе может оказаться полезной промежуточная база, расположенная в окрестности той или иной малой планеты. Аналогично, освоение астероида может осуществляться с помощью космической станции (КС), все время находящейся в непосредственной близости от поверхности этого малого небесного тела. Чтобы КС не упала на астероид или не удалялась от его поверхности, ее можно расположить на одной из стационарных орбит, по существу являющихся положениями равновесия КС в некоторой специальной системе отсчета, связанной с центром масс астероида. Такие положения равновесия по аналогии с соответствующими относительными равновесиями в ограниченной задаче трех тел обычно называют точками либрации (ТЛ). (Другим вариантом удержания КС около астероида является “привязывание” станции к поверхности малой планеты тросами). В качестве простейшей механической модели, описывающей динамику КС в непосредственной близости от поверхности малой планеты, может быть выбрана механическая система, состоящая из массивного твердого тела с неподвижной точкой, и материальной точки “пренебрежимо-малой” массы, двигающейся в гравитационном поле этого тела. В случае, когда тело, моделирующее астероид, динамически симметрично (по-видимому, существует целый ряд малых планет, для которых такое предположение приемлимо), его движение вокруг центра масс является регулярной прецессией. Если, в свою очередь, гравитационный потенциал прецессирующего твердого тела может быть аппроксимирован композицией потенциалов двух масс, расположенных на оси динамической симметрии, то уравнения движения материальной точки, моделирующей КС, в системе отсчета, вращающейся вместе с осью динамической симметрии вокруг оси прецессии, совпадут с уравнениями движения Обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел (ООКЗЗТ), впервые сформулированной В.В.Белецким в [3]. ТЛ этой задачи изучены в [3-6]. (Положения равновесия КС на леере, т.е. тросе, с концами закрепленными на полюсах астероида, в аналогичной постановке изучены в [7]). Однако, моделирование динамики КС непосредственно с помощью ООКЗЗТ удобно, если астероид имеет вытянутую (веретенообразную) форму.

В настоящей работе рассматривается случай, когда твердое тело, моделирующее астероид, оставаясь динамически симметричным, имеет сжатую форму. В этой ситуации, используя обобщенную задачу двух неподвижных центров (см., например, [1,2]), также можно аппроксимировать потенциал твердого тела композицией потенциалов двух материальных точек, "лежащих" на оси динамической симметрии, но имеющих комплексно-сопряженные массы и, в общем случае, комплексно сопряженные координаты. (Отметим, что суммарный потенциал при этом остается действительным). Очевидно, уравнения движения материальной точки в таком гравитационном поле также можно рассматривать как некоторый специальный вариант ООКЗЗТ. Как ранее было показано в [7], в этой и в значительно более общей ситуациях ТЛ могут существовать только в двух плоскостях.

Для поиска треугольных ТЛ (ТТЛ) (аналогов лагранжевых ТЛ классической задачи), лежащих в плоскости, проходящей через центр масс астероида перпендикулярно оси прецессии, условия равновесия преобразуются в кубическое относительно отношения мнимой и действительной частей расстояния от КС до притягивающих центров алгебраическое уравнение. С помощью тригонометрической замены показывается, что только один из корней этого уравнения имеет физический смысл, из чего следует существование не более двух ТТЛ. Выводятся явные выражения для координат ТТЛ. Прослеживается (в некоторых частных случаях) эволюция ТТЛ при изменении значений параметров системы. Анализируя уравнения движения, лианеризованные в окрестности ТТЛ, устанавливается неустойчивость ТТЛ в случае, когда их количество равно 2.

Для поиска компланарных ТЛ (КТЛ) (аналогов эйлеровых ТЛ классической задачи), лежащих в плоскости, образуемой осями прецесси и динамической симметрии, условия равновесия преобразуются в систему квадратного и кубического алгебраических уравнений от специальных переменных. Корни этих уравнений, полученные с помощью некоторой тригонометрической замены переменных, позволяют выписать шесть выражений для угловой скорости прецессии, зависящие от параметров задачи и только от одной из координат. Анализируя эти выражения, показывается, что КТЛ можно разбить на три группы. "Внешние" КТЛ из первой группы могут находится как угодно далеко от твердого тела. "Внутренние" КТЛ находятся в пределах острых углов, образуемых осями прецессии и динамической симметрии. В некоторых случаях существуют также "центральные" КТЛ, расположенные внутри острого угла, образуемого отрезком особых точек потенциала и отрицательным лучом оси прецессии. Прослеживается (в некоторых частных случаях) эволюция КТЛ при изменении значений параметров системы. Выводятся условия устойчивости в линейном приближении.

Настоящая работа обобщает результаты [8,9].

Литература. [1] Е. П. Аксенов, Е. А. Гребенников., В. Г. Демин, Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли, Астрономический журнал, 40(2) (1963) 363-375. [2] В. Г. Демин Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. Москва-Ижевск, 2010. [3] В. В. Белецкий, Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов, Космические исследования, 45(6) (2007) 435-442. [4] В. В. Белецкий, А. В. Родников, Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел, Космические исследования, 46(1) (2008), 42-50. [5] V. V. Beletsky, A. V. Rodnikov, On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics, Journal of Vibroengineering, 10(4) (2008) 550-556. [6] В. В. Белецкий, А. В. Родников, Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел, Нелинейная динамика, 7(3) (2011) 569-576. [7] А. В. Родников, О движении материальной точки вдоль леера, закрепленного на прецессирующем твердом теле, Нелинейная динамика, 7(2) (2011) 295-311. [8] В. В. Белецкий, А. В. Родников, Точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае мнимого расстояния между притягивающими центрами, Нелинейная динамика, 8(5) (2012) 931-940. [9] А. В. Родников, Компланарные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров, Нелинейная динамика, 9(4) (2013) 697-710.

МЕТОД ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЗАДАЧЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. Н. Нестеров
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
nesterov.pn@gmail.com
Ярославль, РОССИЯ

В докладе обсуждается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = B_0(x_t) + B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, $B_0(\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$; $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $R(t,\varphi)$ измерима по Лебегу при $t \ge t_0$ и

$$|R(t,\varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0,\infty) \quad \Big(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|\Big).$$

Наконец,

$$B(t,x_t) = v_1(t)B_1(t,x_t) + v_2(t)B_2(t,x_t) + \ldots + v_n(t)B_n(t,x_t),$$

где $B_i(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что

$$B_i(t,\varphi) = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j^{(i)}(t)\ell_j^{(i)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h.$$

В этой формуле $\ell_j^{(i)}(\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены. Кроме того, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0,\infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0,\infty)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и любого набора $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$.

Задача асимптотического интегрирования системы (1) в случае нулевого оператора B_0 была изучена в статье [1]. Основное предположение, при котором система (1) рассматривается в данной работе, состоит в следующем. У квазиполинома $p(\lambda) = \det\big(\lambda I - B_0(e^{\lambda\theta}I)\big)$ имеется N корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Данное обстоятельство позволяет для асимптотического интегрирования системы (1) воспользоваться известным методом центральных многообразий [2]. Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (1) и посвящена данная работа.

Нами предложен алгоритм приближенного построения для достаточно больших t так называемого критического многообразия

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \;\big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N\Big\}$$

в фазовом пространстве C_h системы (1), притягивающего с экспоненциальной скоростью траектории этой системы. В выражении выше $\Phi(\theta)$, $H(t,\theta)$ некоторые $(m \times N)$-матрицы, непрерывные по переменной $\theta \in [-h, 0]$, а матрица $H(t,\theta)$ непрерывна по t при $t \geq t_*$ и $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. Многообразие $\mathcal{W}(t)$ положительно инвариантно относительно траекторий $x_t(\theta)$ системы (1) при достаточно больших t. Поведение траекторий $x_t(\theta)$ системы (1), расположенных на данном многообразии, определяется некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + \hat{R}(t)\Big)u, \qquad u \in \mathbb{C}^N. \quad (2)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_s}(t)$, $\hat{R}(t)$ — квадратные $(N \times N)$-матрицы: A_0 — постоянная матрица, собственными значениями которой являются корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ полинома $p(\lambda)$, элементами матриц $A_{i_1\ldots i_s}(t)$ являются тригонометрические многочлены, а матрица $\hat{R}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Асимптотика всех решений системы (2) может быть построена с помощью метода, изложенного в работе [3].

С учетом вышесказанного решения системы (1) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = x_t(0) = \sum_{i=1}^{N} C_i\big(\Phi(0) + H(t,0)\big)u_i(t) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где $C_1, \ldots, C_N$ — произвольные комплексные постоянные, $u_1(t), \ldots, u_N(t)$ — фундаментальные решения системы (2) и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. В качестве примера использования указанного алгоритма в работе строится асимптотика при $t \to \infty$ решений уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}x(t),$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$ и $\rho > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-80.2013.1.

Литература. [1] P. Nesterov, Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients, Monatsh. Math. 171 (2013) 217-240. [2] J. Carr, Applications of centre manifold theory. New York, 1981. [3] П. Н. Нестеров, Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами, Дифф. уравнения 43 (2007) 731-742.

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЁННЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

В. И. Вербицкий
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
verbw@mail.ru
Харьков, УКРАИНА

Рассматривается система вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t,x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — позитивно однородное отображение степени $m > 0$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $g(t,x)$ — непрерывное отображение из $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Для произвольной нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ введём обозначение

$$N(x,y) = \lim_{h\to+0} h^{-1}(\|x+hy\| - \|x\|)\,.$$

Для некоторых норм (в том числе полиэдральных) выражение для $N(x,y)$ имеет достаточно простой вид.

Получен следующий результат. **Теорема.** Пусть для системы (1) удовлетворяется условие $N(x,f(x)) < 0$ для любого $x \neq 0$. Пусть также в некоторой окрестности U начала координат выполняется условие $\|g(t,x)\| \le M\|x\|^m$, для любого t, где $M < M_0 = -\sup\limits_{\|x\|=1} N(x,f(x))$.Тогда нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво (если $U = \mathbb{R}^n$, то устойчивость глобальна).

Если $m > 1$, то

$$\|x(t)\| \le (\|x(t_0)\|^{1-m} + (m-1)(M_0 - M)(t-t_0))^{\frac{1}{1-m}}$$

При $t \ge t_0$.

Если $m = 1$, то

$$\|x(t)\| \le \exp((M - M_0)(t-t_0))\,\|x(t_0)\|$$

При $t \ge t_0$

Если $m < 1$, то любое решение достигает начала координат за время не превосходящее

$$((1-m)(M_0 - M))^{-1}\,\|x(t_0)\|^{1-m}$$

Полученный результат уточняет, в частности, оценки в известной теореме Массера [1].

Литература. [1] J. L. Massera. Contributions to stability theory. Ann. Math., No. 64 (1956), 182-206.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

И. А. Джалладова
Киевский экономический университет им. В. Гетьмана
irada-05@mail.ru
Киев, УКРАИНА

В докладе рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью и асимптотичести устойчивой в среднеквадратическом правой частью. Если нулевое решение стохастической системы линейного приближения является асимптотически устойчивым в среднеквадратичном, то в достаточно малой окрестности положения равновесия будет устойчивым в среднеквадратичном и нулевое решение исходной нелинейной системы. В докладе предложен алгоритм оценки области устойчивости в фазовом пространстве нулевого положения равновесия стохастической системы с квадратичной правой частью. Алгоритм основан на использовании второго метода Ляпунова с функцией квадратичного вида.

Рассматривается нелинейная стохастическая система дифференциальных уравнений вида

$$dx(t) = [A_1 x(t) + f(x(t))]dt + A_2 x(t) dw(t).$$

Нелинейная функция $f(x)$ содержит только члены высокого порядка

$$|f(x)| \le N|x|^{1+\alpha},\ \ N > 0,\ \ \alpha > 0,\ \ |x| = \left\{\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}^{1/2}.$$

Пусть матрицы A_1 и A_2 таковы, что существуют положительно определенные матрицы C и H, удовлетворяющие матричному уравнению Сильвестра

$$A_1^T H + HA_1 + A_2^T HA_2 = -C.$$

Для исследования устойчивости используется второй метод Ляпунова с функцией квадратичного вида $V(x) = x^T Hx$. Доказано, что «гарантированной» областью асимптотической устойчивости в среднеквадратическом нулевого решения нелинейной системы будет

$$G_{r_0} = \max_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_0\},$$

где

$$G_0 = \left\{ x \in R^n : |x| < \left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H|N}\right]^{1/\alpha} \right\},$$

$$G_r = \{x \in R^n : x^T Hx < r^2\}.$$

Рассматриваются системы с квадратичной правой частью, записанные в векторно-матричном виде

$$dx(t) = \left[A_1 x(t) + X^T(t)Bx(t)\right] dt + A_2 x(t)dw(t) = 0.$$

Получены условия асимптотической устойчивости и оценка области устойчивости.

ОЦЕНКИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

О. И. Стадник
Киевский национальный университет культуры и искусств
ostadnyk@mail.ru
Киев, УКРАИНА

При моделировании процессов, происходящих в дискретные моменты времени, и учитывающих последействие, используются разностные системы с последействием. Динамика разностных систем достаточно близка к динамике непрерывных, но при определенных условиях условия их устойчивости не всегда эквивалентны. Наконец, параметры моделей, как правило, являются результатами измерений и известны с некоторой точностью. Поэтому достаточно адекватным математическим аппаратом исследования являются интервальные разностные системы с последействием.

В докладе рассматриваются проблемы асимптотической устойчивости линейных интервальных разностных систем с одним постоянным запаздыванием

$$x(k+1) = (A + \triangle A)x(k) + (B + \triangle B)x(k-m), \;\; k = 1, 2, 3 \ldots. \tag{1}$$

Здесь $\triangle A = \{\triangle a_{ij}\}$, $\triangle B = \{\triangle b_{ij}\}$ $i, j = \overline{1, n}$ матрицы, коэффициенты которой могут принимать свои значения из наперед заданных интервалов $\triangle a_{ij} : |\triangle a_{ij}| \le \alpha_{ij}$, $\triangle b_{ij} : |\triangle b_{ij}| \le \beta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Системы вида (1) называются интервальными системами с запаздыванием.

Получены достаточные условия интервальной асимптотической устойчивости системы (1). Получены оценки сходимости решений к нулевому положению равновесия. Исследования проводятся с использованием функции Ляпунова квадратичного вида. Для дифференциальных систем с запаздыванием второй метод Ляпунова используется в двух направлениях. Это метод функционалов Ляпунова-Красовского и метод конечномерных функций с условием Б. С. Разумихина. В настоящем докладе используется условие Б. С. Разумихина, модернизированное под разностные системы.

В дальнейшем, рассмотрены интервальные системы с квадратичной правой частью

$$x(k+1) = (A + \triangle A)x(k) + (B + \triangle B)x(k-m) + \\ + X^T(k)D_1(k) + X^T(k-m)D_2(k) + X^T(k-m)D_3(k-m), \ \ k = 1, 2, 3 \ldots . \quad (2)$$

Здесь $X^T(k)$ прямоугольная матрица, составленная из элементарных матриц, представленных вектор-строками $x^T(k)$, матрицы, D_1, D_2 являются прямоугольными матрицами, составленными из блочных матриц D^l_m, $m = 1, 2, 3 \ldots$, $l = \overline{1, n}$.

Получены условия интервальной асимптотической устойчивости нулевого решения и оценка области сходимости.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ РЕШЕНИЙ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. В. Очеретнюк, В. И. Слынько⋆

Черкасский государственный технологический университет, ⋆Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ

ocheretnyukeugen@ukr.net, vitstab@ukr.net

Черкассы, ⋆Киев, УКРАИНА

Предлагается обобщение дифференциальных уравнений с производной Хукухары. Уравнения введены как уравнения для опорных функций некоторых выпуклых множеств, которые доставляют верхнюю аппроксимацию множеств достижимости для квазилинейных дифференциальных уравнений. Такая аппроксимация в некотором смысле аналогична аппроксимации с помощью решений дифференциальных уравнений с производной Хукухары, но в отличие от последней, для линейных систем является точной (т.е. решения обобщенного уравнения совпадают с опорными функциями множества достижимости). В этом случае диаметр выпуклого множества, которое соответствует решению предложенного уравнения необязательно является неубывающей опорной функцией и может стремиться к нулю. В частном случае, предложенные уравнения совпадают с дифференциальными уравнениями с производной Хукухары (надлежащим образом переформулированные в терминах опорных функций) и с дифференциальными уравнениями для опорных функций множеств достижимости линейных управляемых систем [1-3].

Другая задача, приводящая к предложенным уравнениям состоит в исследовании области достижимости приводящая к уравнениям такого же типа состоит в исследовании множеств достижимости линейных непрерывных систем с неполной информацией при условии, что неизвестные возмущения правых частей системы принадлежат некоторому выпуклому множеству, которое зависит нелинейным образом от текущего состояния области достижимости этой системы. Такая постановка задачи близка к задаче об информационной игре Н.Н. Красовского [4].

Для рассматриваемых дифференциальных уравнений исследуется устойчивость состояний равновесия. Применяются методы исследования, которые полным образом учитывали специфику этих систем и особые свойства фазового пространства.

Литература. [1] А. И. Панасюк, Качественная динамика множеств, определяемых дифференциальными включениями, Мат.заметки 1 (**45**) 1989 80-88. [2] Ф. Л. Черноусько Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. Москва, 1988. [3] А. И. Овсеевич, Экстремальные свойства эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости, Amer. Проблемы управления и теория информации 2 (**12**) 1983 1237-1240. [4] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин Дифференциальные игры. Москва, 1974.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СКОЛЬЗЯЩИМИ РЕЖИМАМИ

В. В. Гоцуленко
Институт технической теплофизики НАНУ
gosul@ukr.net
Киев, УКРАИНА

Классический пример динамической системы, в которой возникают релаксационные автоколебания, определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром $\varepsilon \to 0$ при части производных [1]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \varepsilon\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ ((\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m). \tag{1}$$

Вопрос о существовании релаксационных автоколебаний в системе (1) решается в терминах вырожденной системы [1], являющейся гибридной системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{2}$$

Траектории системы (2) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ естественно трактовать как пределы фазовых траекторий невырожденной системы (1) при $\varepsilon \to 0$. В частности, фазовая траектория релаксационных автоколебаний системы (1) при $\varepsilon \to 0$ стремится к замкнутой траектории системы (2), состоящей из чередующихся участков двух типов: участков, проходимых фазовой точкой системы (2) за конечное время (каждый из них лежит на многообразии, определяемом уравнением $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$), и участков, проходимых фазовой точкой системы (2) мгновенно.

В данной работе рассматриваются условия появления релаксационных периодических решений в системах обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{z})\ \ ((\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \tag{3}$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ и векторная функция $\mathbf{R}$ не имеют однозначной обратной функции $\mathbf{R}^{-1}$. Переходом к новым переменным, система (3) приводится к следующей форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{R}(\mathbf{z})),\ \mathbf{B}(\mathbf{z})\cdot\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{z}), \tag{4}$$

где $\mathbf{B}(\mathbf{z}) = \|\partial R_i/\partial z_j\|_{i,j=\overline{1;m}}$ – матрица Якоби отображения $\mathbf{y} = \mathbf{R}(\mathbf{z})$.

По терминологии А.Ф. Филиппова [2] система (4) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. При определенных ограничениях на правые части таких систем возможны различные способы расширить понятие их решения [2,3]. Так, в частности, при выполнении определенных соотношений, рассматриваемых в данной работе, в таких системах может возникнуть специфический вид движений – так называемый скользящий режим [2-4]. Скользящий режим, например, может возникнуть если в окрестности многообразия, на котором терпят разрыв правые части системы, фазовые траектории направлены навстречу друг другу. В этом случае при попадании на многообразие разрыва фазовая точка не может в течении любого даже сколь угодно малого интервала времени двигаться по любой из траекторий, примыкающих к данному многообразию. Это обусловлено тем, что при любом смещении всегда возникает движение, возвращающее фазовую точку на многообразие разрыва.

Для системы (4) многообразие разрыва определяется следующими соотношениями

$$\mathcal{M}^{\mathrm{R}} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0,\ \mathbf{B}(\mathbf{z}) = 0\right\}.$$

При этом, фазовые траектории скользящего режима определяются как решения системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{R}\left(\mathbf{z}\right)\right), \tag{5}$$

рассматриваемой на многообразии $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{M}^{\mathrm{R}} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Рассмотрим на качественном уровне сценарий появления релаксационных автоколебаний, определяемых скользящими режимами для системы (4). Предположим, что данная система зависит от некоторого параметра α и имеет устойчивый предельный цикл $\Gamma = \Gamma(\alpha)$, который, для определенности, с ростом α увеличивается в размерах.

В данной работе установлены некоторые достаточные условия, обеспечивающие следующий дальнейший характер зависимости фазового портрета системы (4) от изменения параметра α. При некотором значении $\alpha = \alpha^*$ возникает жесткая касательная бифуркация, в результате которой предельный цикл Γ разрушается (происходит кризис аттрактора) касаясь многообразия $\mathcal{M}^{\mathrm{R}}$. В этом случае при $\alpha > \alpha^*$ в системе (4) возникает новый предельный цикл состоящий из ее собственной фазовой траектории, расположенной вне многообразия $\mathcal{M}^{\mathrm{R}}$ и участка фазовой траектории динамической системы (5) скользящего режима, расположенной на многообразии $\mathcal{M}^{\mathrm{R}}$.

Литература. [1] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. Москва, 1966. [2] А. Ф. Филиппов Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва, 1985. [3] В. И. Уткин Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. Москва, 1974. [4] Е. А. Барбашин Введение в теорию устойчивости. Москва, 1967.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
demidenk@math.nsc.ru
Новосибирск, РОССИЯ

В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $A(t)$ — T-периодическая непрерывная матрица. Мы будем предполагать, что спектр матрицы монодромии $Y(T)$ не пересекается с единичной окружностью. Это эквивалентно тому, что однородная система

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

экспоненциально дихотомична (см., например, [1, 2]).

В работе [3] было показано, что исследование экспоненциальной дихотомии системы (2) можно свести к нахождению эрмитовой матрицы $H(t)$ и проектора P, являющихся решением следующей задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(Y^{-1}(t)\right)^* P^*Y^*(t)Y(t)PY^{-1}(t) \\ +(Y^{-1}(t))^* \left(I-P\right)^* Y^*(t)Y(t) \left(I-P\right) Y^{-1}(t), \qquad 0<t<T, \\ H(0) = H(T) > 0, \\ H(0) = P^*H(0)P + \left(I-P\right)^* H(0) \left(I-P\right), \\ PY(T) = Y(T)P, \quad P^2 = P. \end{cases} \tag{3}$$

Этот результат является аналогом соответствующих утверждений [1] для задачи дихотомии систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Отметим, что в случае экспоненциальной дихотомии системы (2) решение системы (3) определяется единственным образом, при этом матрица $H(t)$ является эрмитовой положительно определенной на отрезке $[0,T]$, а P — проектор на максимальное инвариантное подпространство относительно матрицы монодромии $Y(T)$, соответствующее мультипликаторам μ_j с $|\mu_j| < 1$ (см. [3]).

Используя свойства решений задачи (3), можно доказать следующий результат.

Теорема 1. *При любой $f(t) \in L_2(R)$ система (1) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W_2^1(R)$, и для решения справедлива оценка*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|y(t)\|^2 dt \leq c \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt,$$

где $c = 4T^2\Delta^2\mu(H)$,

$$\Delta = \left(1 - \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{1}{2}\|H(\eta)\|^{-1} d\eta\right)\right)^{-1},$$

$$\mu(H) = \max_{\tau\in[0,T]} \|H(\tau)\| \max_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|.$$

Аналогичный результат можно установить для класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t,y), \qquad -\infty < t < \infty.$$

В случае $P = I$ см., например, [4].

Опираясь на теорему 1, мы доказываем следующую теорему о возмущении для экспоненциальной дихотомии систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [5].

Теорема 2. *Если T-периодическая матрица $A_1(t)$ удовлетворяет условию*

$$2T\Delta\sqrt{\mu(H)} \max_{t\in[0,T]} \|A_1(t)\| < 1,$$

то система с возмущенными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = (A(t) + A_1(t))x, \qquad -\infty < t < \infty,$$

экспоненциально дихотомична.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00329) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Литература. [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. [2] Массера Х., Шехтер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. [3] Демиденко Г. В., Клевцова Ю. Ю. Экспоненциальная дихотомия линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 40–48. [4] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284. [5] Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 4. С. 38–46.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

И. И. Матвеева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
matveeva@math.nsc.ru
Новосибирск, РОССИЯ

Рассматривается класс систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ для любого $t \in [0,T]$, $\mu > 0$ — параметр, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u, при этом

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1,\ q_2,\ \omega_1,\ \omega_2 \ge 0.$$

Используя модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [1], и опираясь на результаты из работ [2–4], мы устанавливаем достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), находим множества притяжения нулевого решения и получаем оценки экспоненциального убывания решений системы (1) при $t \to \infty$. Условия на параметр μ и начальные данные формулируются в терминах решения специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. Полученные результаты частично опубликованы в [5–7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 13-01-00329) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Литература. [1] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28. [2] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2.

С. 332–348. [3] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040. [4] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Об асимптотической устойчивости решений систем дифференциально-разностных уравнений с параметром. Новосибирск, 2009. 14 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 231). [5] Матвеева И. И., Щеглова А. А. Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 1. С. 83–92. [6] Матвеева И. И., Щеглова А. А. Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 1. С. 60–69. [7] Матвеева И. И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.

О ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

В. С. Сергеев
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
vsergeev@ccas.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается вопрос об асимптотической (экспоненциальной) устойчивости предельно периодических решений интегродифференциальных уравнений, линейная часть которых асимптотически устойчива и которые содержат малое периодическое (экспоненциально предельно периодическое) возмущение. Эти решения при неограниченном возрастании времени стремятся к периодическим режимам. Указаны достаточные условия асимптотической устойчивости.

В резонансном случае, когда линеаризованное уравнение имеет пару чисто мнимых корней и частота колебаний, отвечающих этим корням, совпадает с частотой колебаний периодической части малого возмущения (функции времени) и коэффициентов разложения в степенной ряд нелинейных членов, решается задача о существовании у интегродифференциального уравнения предельно периодических решений. Получены условия существования таких решений, представимых степенными рядами по параметру $\mu^{\frac{1}{2}}$, где μ — малый параметр, характеризующий величину малого возмущения в уравнении.

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

О. П. Филатов
Самарский государственный университет
filatov_oleg@samaradom.ru
Самара, РОССИЯ

Рассматривается первая краевая задача

$$u_t = div(p(t,x)\nabla u) - \langle v(t,x), \nabla u\rangle + f(t,x), \quad (t,x) \in G_\infty, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in S_\infty, \tag{3}$$

где $S_\infty = [0,\infty) \times \Gamma$, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве R^m, $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$. Здесь $\Gamma \in C^1$ – граница ограниченной области $G \subset R^m$. Измеримые функции φ, p, f, также как и координаты вектора $v = (v_1, \ldots, v_m)$, где $m \geq 1$, принимают вещественные значения и дополнительно удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi \in L_2(G), \quad 0 < p_0 \leq p(t,x) \leq p_1, \quad \|v(t,x)\| \leq p_1, \quad (t,x) \in G_\infty, \tag{4}$$

$$f \in L^{t,x}_{1,2}(G_\omega), \quad (t,x) \in G_\omega, \tag{5}$$

где p_0, p_1 – постоянные, $G_\tau = [0,\tau] \times G, \tau > 0$. Функции $p(t,x), v(t,x), f(t,x)$ далее предполагаются ω-периодическими по переменой t.

Подпространство функций из $W_2^{1,0}(G_\tau)$, которые равны 0 на множестве

$$S_\tau = [0,\tau] \times \Gamma,$$

обозначается $W_0(G_\tau)$. Запись $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ означает, что функция u определена на множестве G_∞, а ее сужение на множество G_τ принадлежит пространству $W_2^{1,0}(G_\tau)$ при любом $\tau > 0$. Аналогично определяется множество функций $W_0(G_\infty)$.

Решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in W_0(G_\infty)$. Детали определения обобщенного решения изложены в [1].

Пусть $G_{\tau,1} = [\tau - 1, \tau] \times G$ при $\tau > 1$. Норму в пространстве $W_2^{1,0}(G_{\tau,1})$ обозначим через $\|\cdot\|_{\tau,1}$. Пусть функции u и u_0 являются элементами пространства $W_2^{1,0}(G_\infty)$, тогда, по определению, функция u стремится к функции u_0 при $t \to \infty$, если

$$\lim_{\tau\to\infty} \|u - u_0\|_{\tau,1} = 0.$$

Краткая запись: $u \to u_0$ при $t \to \infty$.

Если функция $p(t,x)$ не зависит от t и достаточно гладкая, а $v = 0$ для задачи (1)– (3), то решение задачи можно искать методом Фурье [2], [3]. Из структуры решения можно сделать вывод о стабилизации решения с ростом времени. В [4] приведены теоремы о стабилизации классического решения первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности к нулевой функции при $t \to \infty$.

В следующей теореме $u \in W_0(G_\infty)$ – решение задачи (1)–(3), отвечающее начальной функции φ.

Теорема. *Пусть выполняются условия (4),(5) и параметры f, p, v задачи являются ω-периодическими функциями времени t. Тогда существует постоянная $\mu_1 > 0$, не зависящая от φ, такая, что если поле скоростей v удовлетворяет неравенству $\|v\| \leq \mu_1$, то существует ω-периодическая по t функция $u_\omega \in W_0(G_\infty)$, для которой $u \to u_\omega$ при $t \to \infty$.*

При доказательстве теоремы используется свойство асимптотической устойчивости тривиального решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от параметра $n = 1, 2, \ldots$, с помощью которой строится последовательность приближенных решений исходной задачи. Приближенные решения слабо сходятся к решению задачи $u \in W_0(G_\infty)$.

Отметим, что частным случаем задачи (1)–(3) является задача определения температурного поля несжимаемой жидкости, которая целиком заполняет область G, а вязкость жидкости не зависит от температуры. В этом случае уравнение движения жидкости Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности $div(v) = 0$ не зависят от уравнения энергии. Если теплообмен в жидкости подчиняется закону Фурье, а поле скоростей $v(t,x)$ является периодическим по времени t, то приходим к задаче вида (1)–(3) для температурного поля u. Ограничение $\|v(t,x)\| \leq \mu_1$, достаточное для существования предельной периодической по времени функции, к которой сходится решение задачи с ростом времени, с точки зрения гидромеханики жидкости является естественным, так как при больших скоростях жидкости и неизменных остальных параметрах реализуются турбулентные течения.

Литература. [1] О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. Москва, 1973. [2] В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. Москва, 1981. [3] В. П. Михайлов. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва,1976. [4] О. А. Олейник. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва. 2005.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

Е. П. Белан
ТНУ им В.И.Вернадского
belan@crimea.edu
Симферополь, РОССИЯ

На окружности радиуса r с центром в начале координат рассматривается уравнение

$$\ddot{\xi}+\xi=\varepsilon[\dot{\xi}(1-\frac{4}{3}\dot{\xi}^2)+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi}+\frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}], \qquad (1)$$

где $0<\varepsilon\ll 1$,$\lambda>0$,$\beta>0$,Δ – одномерный оператор Лапласа. Данная задача является феноменологической моделью [1] безгазового горения на цилиндрической поверхности радиуса r. В уравнении (1) ξ — координаты точек фронта горения в движущейся системе координат, в которой фронт в среднем покоится.

В докладе рассматриваются вопросы о существовании, асимптотической форме, устойчивости бегущих волн, а также вопросы о существовании, асимптотической форме, устойчивости периодических структур, ответвляющихся от бегущих волн [2], [3].

Согласно проведенному анализу при увеличении ρ динамика (1) усложняется. Отметим её зависимость от параметра β.

Рассматривается вопрос о форме пространственно неоднородного двумерного тора периодических по времени решений, который ответвляется от однородного предельного цикла, при отходе параметра ρ от бифуркационного значения.

Литература. [1] Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах. Изв. вузов, сер. Радиофизика, 15 (1982) 591–618. [2] А. М. Самойленко, Е. П. Белан Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. ДАН, 406 (2006) 738–741. [3] Е. П. Белан, А. М. Самойленко Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения. УМЖ, 65 (2013) 21–43.

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА ОКРУЖНОСТИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А. А. Корнута
ТНУ им В.И.Вернадского
korn_57@mail.ru
Симферополь, Крым, РОССИЯ

Исследование оптических структур в нелинейном интерферометре с преобразованием поворота в двумерной обратной связи после ряда упрощений приводит к уравнению на окружности $S^1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ [1]:

$$\begin{array}{l}\partial_t u+u=\mu^2\partial_{xx}u+L\mathrm{Q}_h u+\mathrm{Q}_h u^3, t>0,\\ u\,(x+2\pi,t)=u\,(x,t)\,,\quad u(x,0)=u_0(x).\end{array} \qquad (1)$$

где $\mathrm{Q}_h u=u(x+h,t),$ h – угол поворота поля, $\mu>0$, L – параметры. Далее рассматривается случай $h=\pi$.

Проведенные численные исследования уравнения (1) позволяют утверждать, что при малых значениях параметра μ уравнение (1) имеет медленно меняющиеся со временем решения, так называемые, метаустойчивые структуры [2, 3].

Например, наблюдались медленно меняющиеся решения типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода. После длительного промежутка медленной эволюции, величина которого зависит от μ, указанные решения оказываются в окрестности одного из стационарных решений задачи (1) из семейства орбитально экспоненциально устойчивых решений (1) $\left\{\varphi_1\left(x+\alpha\right), \alpha \in S^1\right\}$. Отметим, что при малых значениях параметра μ решения $\varphi_1\left(x, \mu\right)$ являются функциями типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Исследование динамики стационарных структур задачи (1), их устойчивости, метаустойчивых структур основывалось на построении иерархии упрощённых моделей (1), полученных в результате галёркинских аппроксимаций:

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^{N}\left(z_k\left(t,\mu\right)\cos kx + y_k\left(t,\mu\right)\sin kx\right), \quad N = \overline{25,35}.$$

Литература. [1] С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. В: Новые принципы оптической обработки информации. —М: Физматлит, 1990. [2] J. Carr, R. L. Pego Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$, Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol.XLII (1989) 523-576. [3] G. Fusco, J. K. Hale Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singulary Perturbations, Journal of Dynamics and Differential Equations. Vol.I, No.1. (1989) 75-94.

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА

С. П. Плышевская
ТНУ им В.И.Вернадского
splyshevskaya@mail.ru
Симферополь, РОССИЯ

Рассматривается уравнение Кана-Хилларда

$$\begin{array}{l} u_t = (-\varepsilon^2 u_{xx} - u + u^3)_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi,t) = 0, \end{array} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ - постоянная.

Если $\varepsilon^2 << 1$, то уравнение (1) имеет медленно меняющиеся со временем решения - метаустойчивые структуры [1].

Теорема. *Существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $1-\delta < \varepsilon^2 < 1$ уравнение (1) имеет два однопараметрических семейства стационарных решений $\varphi_1^{\pm}(x,\varepsilon,a)$, определённых на промежутке $(-\alpha(\varepsilon), \alpha(\varepsilon))$, $\alpha(\varepsilon) = \left(\dfrac{1-\varepsilon^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + O(1-\varepsilon^2)$, изменения параметра a. Справедливо равенство:*

$$\varphi_1^{\pm}(x,\varepsilon,a) = a \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(1-\varepsilon^2-3a^2)^{\frac{1}{2}}\cos x + O(1-\varepsilon^2-3a^2).$$

Семейства решений $\varphi_1^{+}(x,\varepsilon,a)$, $\varphi_1^{-}(x,\varepsilon,a)$ орбитально экспоненционально устойчивы.

Анализ галёркинских аппроксимаций (1) размерностей от 20 до 30, а также численные расчёты позволяют утверждать, что семейства $\varphi_1^{+}(x,\varepsilon,a)$, $\varphi_1^{-}(x,\varepsilon,a)$, непрерывно зависящие от ε и a, определены для всякого $\varepsilon^2 < 1$ и являются орбитально экспоненциально устойчивыми. Отметим, что при достаточно малых ε^2 и фиксированном a функции $\varphi_1^{+}(x,\varepsilon,a)$, $\varphi_1^{-}(x,\varepsilon,a)$ близки к ступенчатым функциям со значениями $1, -1$ и одной точкой перехода.

Если $\varepsilon^2 < \frac{1}{4}$, то (1) имеет два однопараметрических семейства стационарных решений $\varphi_2^+(x, \varepsilon, a)$, $\varphi_2^-(x, \varepsilon, a)$. Эти семейства рождаются орбитально неустойчивыми с индексами неустойчивости 1 и остаются таковыми при уменьшении ε.

В галёркинских аппроксимациях (1) при $\varepsilon^2 \approx 0.01$ имеет место богатый набор седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые возникают в результате этих бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближённых стационарных решений (1). Взяв их в качестве начальных условий для (1), получаем медленно меняющиеся решения (1).

Литература. [1] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco Slow Motion for the Cahn-Hilliard Equation in One Space Dimension, J. of Differential Equations 90 (1991) 81-135.

МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ

Ю. А. Хазова
ТНУ им В.И.Вернадского
hazova.yuliya@hotmail.com
Симферополь, РОССИЯ

Рассматривается уравнение

$$v_t + v = Dv_{\varphi\varphi} + \Lambda Qv - \frac{\Lambda}{6}Qv^3, \quad v(\varphi, t) = v(\varphi + 2\pi, t), \tag{1}$$

где $D > 0$, $\Lambda < -1$, $Qv(\varphi, t) = v(\pi - \varphi, t)$. Согласно проведенным численным исследованиям уравнение (1) при малых D имеет медленно меняющиеся со временем решения – метаустойчивые структуры. В частности, наблюдались медленно меняющиеся решения типа внутреннего переходного слоя с четырьмя точками перехода. После весьма значительного переходного процесса, зависящего от D, указанные решения оказываются в окрестности одной из двух устойчивых стационарных решений (1) $\pm v_1$. Отметим, что решения $\pm v_1$ при малых D являются функциями типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Для исследования динамики стационарных структур уравнения (1), их устойчивости, метаустойчивых структур, строилась иерархия упрощенных моделей (1) – галеркинских аппроксимаций в виде

$$v = \sum_{s=0}^{N} z_s \cos s\varphi + \sum_{k=1}^{N} z_{k+N} \sin k\varphi. \tag{2}$$

В галёркинских аппроксимациях уравнения (1) средних (15-25) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений (1). Исследована задача о приближенных стационарных решениях уравнения (1) типа переходного слоя с четырьмя точками перехода. Множество приближенных стационарных решений уравнения (1) указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с четырьмя точками перехода при увеличении t и при средних значениях параметра D. Последнее означает, что каждая метаустойчивая структура уравнения (1) с четырьмя точками перехода при увеличении t проходит вблизи приближенных стационарных решений (1) с двумя точками перехода. При этом речь идет о динамике метаустойчивых структур не только на стадии медленной эволюции, но и в переходной зоне. Применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

Литература. [1] J. Carr, R. L. Pego Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$, Communications on Pure and Applied Mathematics. XLII (1989) 523–576. [2] G. Fusco , J. K. Hale Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singulary Perturbations. Journal of Dynamics and Differential Equations. 1 (1989) 75–94.

ВЫСОКОМОДОВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В ОДНОЙ ИЗ ВЕРСИЙ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО

А. Н. Куликов
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
anat_kulikov@mail.ru
Ярославль, Россия

Рассмотрена краевая задача

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} - a_1 u_x - a_2 u_{xxx} = c(u^2)_x, \tag{1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{2}$$

Уравнение (1) встречается в ряде разделов физики [1–4] и его принято называть уравнением Курамото–Сивашинского. Как вытекает из работ [5,6] смешанная краевая задача (к (1), (2) добавлено $u(0, x) = f(x)$) корректно разрешима, если $f(x) \in W_2^4[0, 2\pi]$ и имеет период 2π.

Краевая задача (1), (2) имеет семейство решений $u(t, x) = \alpha(\alpha \in R)$. Более того

$$u(t, x) = \alpha + w(t, x), M_0(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(t, x)dx = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$w_t + w_{xxxx} + bw_{xx} - aw_x - a_2 w_{xxx} = c(w^2)_x, \tag{3}$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), M_0(w) = 0, \tag{4}$$

где $a = a(\alpha) = a_1 + 2c\alpha$. Ее нулевое решение экспоненциально устойчиво при $b < 1$ и неустойчиво при $b > 1$.

При $b = 1 + \varepsilon(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0))$ справедливо утверждение.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и всех α краевая задача (3), (4) имеет семейство t периодических решений*

$$w(t, x, \varepsilon, \alpha, \varphi) = 2\varepsilon^{1/2}\eta\cos(\sigma t + x + \varphi) + o(\varepsilon), \tag{5}$$

где $\alpha, \varphi \in R, \sigma = a(\alpha), \eta = (1/l)^{1/2}, l = 4c^2/(12 + 3a_2^2)$.

При каждом α решения (5) формируют цикл $C(\varepsilon, \alpha)$, который для решений вспомогательной задачи (3), (4) является локальным аттрактором.

Рассмотрим теперь семейство решений основной краевой задачи (1), (2)

$$u(t, x, \varepsilon, \alpha, \varphi) = \alpha + w(t, x, \varepsilon, \alpha, \varphi),$$

которые формируют инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon, \alpha)$ $(dimV_2(\varepsilon, \alpha) = 2)$ для ее решений.

Теорема 2. *При выбранных b и ε многообразие $V_2(\varepsilon, \alpha)$ – локальный аттрактор для решений краевой задачи (1), (2). При этом все решения из окрестности $V_2(\varepsilon, \alpha)$ стремятся к $V_2(\varepsilon, \alpha)$ со скоростью экспоненты.*

Все решения $u(t,x,\varepsilon,\alpha,\varphi) \in V_2(\varepsilon,\alpha)$ имеют по переменной t период $2\pi/\sigma + O(\varepsilon)$ и неустойчивы. Более того, пусть $u_0(t,x,\varepsilon,\alpha_0,\varphi_0)$ некоторое решение из этого семейства, тогда существуют такие два решения

$$u_j(t,x,\varepsilon) = u(t,x,\varepsilon,\alpha_j,\varphi_j), j = 1,2, |\alpha_j - \alpha_0| << 1, |\varphi_j - \varphi_0| << 1,$$

для которых выполнено следующее. Пусть $d_j(t)$ – расстояние между решением $u_j(t,x,\varepsilon)$ и $u_0(t,x,\varepsilon)$. Тогда при $t \in (0,t_0)$, где t_0 – достаточно малая положительная постоянная,функция $d_1(t)$ возрастает, а $d_2(t)$ убывает. Последнее утверждение можно интерпретировать как "частичное разбегание траекторий".

Для обоснования результатов использованы методы качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством, а также асимптотические методы.

Литература. [1] G. I. Sivashinsky Weak turbulence in periodic flows, Physica 17D (1985) 243-255. [2] Y. Kuramoto Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. [3] R. M. Bradley, J. M. Harper Theory of ripple topography induced by ion bombardment, J. Vac. Sci. Technol. V. A6 (1988) 2390-2395. [3] А. Н. Куликов, Д. А. Куликов Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке, ЖВМиМФ. Т. 52. №5 (2012) 930-955. [5] А., Н. Куликов О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве. Исследования по устойчивости и теории колебаний. Изд-во ЯрГУ. (1976) 114–129. [6] Дж. Марсден, М. Мак-Кракен Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

ВЫСОКОМОДОВЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭРОЗИИ

Д. А. Куликов
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
kulikov_d_a@mail.ru
Ярославль, Россия

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_t = au_{xx} - hw_x + hb_2w_x^2 + hb_3w_x^3, \tag{1}$$

которое было предложено в работе [1] для описания эрозии плоских поверхностей под воздействием потока ионов. Оно призвано дополнить известную модель, предложенную Бредли и Харпером [2].

Здесь $a, h > 0, b_2, b_3 \in R, u = u(t,x), w = u(t, x-h)$. Уравнение (1) приведено в частном случае, когда угол падения пучка ионов близок к критическому. В частности, $|h| << 1$. Уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2d) = u(t,x), d > 0, h/d << 1. \tag{2}$$

Если дополнить краевую задачу (1), (2) начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \tag{3}$$

где $f(x) \in W_2^2[0,2d]$ и удовлетворяет условиям (2), то смешанная задача (1), (2), (3) входит в класс абстрактных параболических уравнений, рассмотренных в [3] и следовательно локально корректна разрешима.

Краевая задача (1), (2) имеет семейство однородных состояний равновесия $u(t,x) = const$, инвариантна относительно замен $u \to u + const$. Поэтому допустимо рассматривать одно из них $u = 0$. Анализ линеаризованной в нуле краевой задачи дает основание утверждать о справедливости утверждения.

Лемма. *Существует такое* $a_* > 0$, *что при* $a > a_*$ *нулевое решение устойчиво и неустойчиво при* $a < a_*$.

Здесь $a_* = h^2 a_0, a_0 = \max(a_1, a_2)$,

$$a_1 = -\sin(m\alpha)/(m\alpha), a_2 = -\sin((m+1)\alpha)/((1+m)\alpha), m = entier(\eta/\alpha), \alpha = \pi h/d,$$

а η наименьший положительный корень уравнения $tgy = y$.

Пусть $a = a_*(1 - \beta\varepsilon), \beta = \pm 1, 0 \le \varepsilon << 1$ и $a_1 > a_2$.

Теорема. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $h_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $h \in (0, h_0)$ *краевая задача (1), (2) имеет решение*

$$\begin{gathered} u(t, x, \varepsilon) = (\rho^2\varepsilon + O(\varepsilon^2))t + v(t, x, \varepsilon), \\ v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\rho\cos(\sigma t + \pi m x/d) + O(\varepsilon), \end{gathered} \tag{4}$$

где (формулы приведены с точностью до $O(h^2)$*)*

$$\begin{gathered} \rho = \sqrt{-q/l_1}h, q = -\beta\eta\sin\eta, \sigma = -\eta\cos\eta, \psi_1 = 2\sin\eta(\cos\eta - 1), \\ \psi_2 = \cos 2\eta - \cos\eta, l_1 = \eta^3(3b_3\sin\eta + 2(\psi_2\sin 3\eta - \psi_1\cos 3\eta)/(\psi_1^2 + \psi_2^2)), \end{gathered}$$

Решение (4) существует, если $ql_1 < 0$. *Оно устойчиво, если* $q > 0 (l_1 < 0)$ *и неустойчиво при* $q < 0 (l_1 > 0)$.

Для обоснования результатов использованы асимптотические методы, метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака.

Формула для $v(t, x, \varepsilon)$ может быть, естественно уточнена, но и при таком приближении видно, что решение (4) существенно зависит от x, т.е. описывает волновой рельеф. Наконец, кроме решения (4) краевая задача (1), (2) имеет решения вида $u(t, x + \gamma_1, \varepsilon) + \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$.

При $a_2 > a_1$ имеет место аналогичное утверждение с заменой m на $m + 1$. Если $a_1 = a_2$, то можно показать возможность существования устойчивых двухмодовых и двухчастотных решений.

Аналогичные задачи для уравнения (1) были рассмотрены в работах [4,5].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт №МК-2298.2013.1), а также поддержке гранта РФФИ - 14-01-31159 мол_а.

Литература. [1] А. С. Рудый, В. И. Бачурин Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой. Изв. РАН. Серия физическая. Т. 72, № 5 (2008) 624-629. [2] R. M. Bradley, J. M. Harper Theory of ripple topography induced by ion bombardment, J. Vac. Sci. Technol. V. A6 (1988) 2390-2395. [3] П. Е. Соболевский Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Труды Моск. матем. об-ва. Т. 10 (1961) 297-350. [4] Д. А. Куликов Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа, Динамические системы. Т. 2(30) (2012) 259-272. [5] D. A. Kulikov Spatially nonhomogeneous dissipative structures of a periodic boundary-value problem for a nonlocal erosion equation, Nonlinear Oscillations. V.17,№ 1 (2014) 72-86.

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. М. Хапаева
МГУ им. Ломоносова, факультет ВМиК
tmhapa@yahoo.com
Москва, РОССИЯ

Работа посвящена вычислению собственных функций (*сф*) и собственных значений (*сз*) в задаче Штурма-Лиувилля вида:

$$y'' - q(x)y = -\lambda y \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле:

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2}$$

Существует несколько методов вычисления сф и сз в задаче Штурма-Лиувилля. Библиография по этому вопросу представлена в [1]. В настоящей работе предлагается вариационный метод, основанный на функционале

$$\int\limits_0^\pi \left[y'' + (\lambda - q(x))y\right]^2 dx + \left|\sqrt{\int\limits_0^\pi y^2 dx} - 1\right| + \sum_{i=2}^{n-1} \left|\int\limits_0^\pi y_i y\, dx\right|$$

Алгоритм базируется на известных свойствах сф и сз:

1. ортогональности сф $\int\limits_0^\pi y_i y_j\, dx = 0, i \neq j$,
2. монотонности и положительности сз $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots$,
3. условии нормировки для сф $\int\limits_0^\pi y_n^2\, dx = 1, \forall n$.

Разобьем отрезок $[0, \pi]$ на k частей. $h = \pi/(k-1)$, $y^2 = y^k = 0$ в силу граничных условий. Предположим, что первые n сф и сз известны. При построении алгоритма будем опираться на следуещее утверждение:

Теорема. *Пусть задан функционал*

$$\begin{gathered} J\left[y^2, \ldots, y^{k-1}, \lambda\right] = \\ h\sum_{j=2}^{k-1}\left[\frac{y^{j-1} - 2y^j + y^{j+1}}{h^2} + (\lambda - q^j(x))y^j\right]^2 + \left|\sqrt{h\sum_{j=2}^{k-1} y^{j\,2}} - 1\right| \\ +h\sum_{i=1}^{n-1}\left|\sum_{j=1}^{k-1} y_i^j y^j\right| \end{gathered} \tag{3}$$

Если $\min\limits_{y^2,\ldots,y^{k-1},\lambda} J\left[y^2, \ldots, y^{k-1}, \lambda\right] = 0$ *при условии* $\lambda > \lambda_{n-1}$ *и* $k \to \infty$, *то функция* $\tilde{y} = \left[0, \tilde{y}^2, \ldots, \tilde{y}^{k-1}, 0\right]$ *и величина* $\tilde{\lambda}$, *доставляющие этот минимум, являются сф и соответствующим сз для задачи Штурма-Лиувилля (1)–(2). Причем эти сф и сз отличны от предыдущих* $n-1$ *сф и сз.*

На первом шаге алгоритма минимизируется функционал

$$J[y] = \int\limits_0^\pi \left[y'' + (\lambda - q(x))y\right]^2 dx + \left|\sqrt{\int\limits_0^\pi y^2 dx} - 1\right|$$

по y и λ с условием $\lambda > 0$. В результате получаем некую сф y_1 и соответсвующее ей сз λ_1. Убедится в том, что это именно первые сф и сз помогает минимизация функционала [1], которая доставляет именно первые сф и сз: $\lambda_1 = \min\limits_u \int\limits_0^\pi \left[u'^2 + q(x)u^2\right] dx$. Чтобы получить вторую пару сф и сз, будем минимизировать функционал:

$$J[y] + \left|\int\limits_0^\pi y_1 y\, dx\right|$$

по y и λ с условием: $\lambda > \lambda_1$. И так далее...

Поиск глобального минимума осуществлялся методом случайного поиска (процедура *Nminimize* известного программного продукта *Wolfram Mathematica*).

Такой подход позволяет не использовать оценки Рэлея через пробные функции [1].

Для того чтобы продемонстрировать работоспособность алгоритма, воспользуемся потенциалом $q(x) = \cos(4x)$, сз которого известны. Приведенные рассчеты также проводились для несимметричных функций $\sin\left((x-\pi)^2/\pi\right)$ и неравнобедренного треугольника, у которого высота много больше основания.

К сожалению, вычислительные мощности авторов позволили получить только первые 20 сф и сз при разбиении отрезка $[0,\pi]$ на 100 частей. При таких условиях минимум функционала порядка 10^{-6}. Последующие сз легко вычислить с помощью ассимптотичекой формулы [2] (теорема 4.12):

$$\lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(t)\cos(2nt)\,dt + O\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

Отметим, что интерес представляют именно несимметричные относительно середины отрезка потенциалы. Симметричные потенциалы рассматривались ранее различными методами.

Аналогично, вариационным методом, решается задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями Неймана: $y(0) = y'(\pi) = 0$. Функционал в этом случае выглядит немного иначе:

$$\int\limits_0^\pi \left[y'' + (\lambda - q(x))y\right]^2 dx + \left|\sqrt{\int\limits_0^\pi y^2 dx} - 1\right| + \gamma\sum_{i=2}^{n-1}\left|\int\limits_0^\pi y_i y\,dx\right| + \beta\left|y'(\pi)\right|,$$

где γ и β выбраны достаточно малыми.

Литература. [1] Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределённых систем. Прикладная математика и механика 61:3 (1997), 466–478. [2] A. Kirsch An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Second Edition, Applied Mathematical Sciences, 120, Springer (2011).

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОЛЕСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

К. В. Пахомов
Ульяновский государственный университет
pakhomovkv@yandex.ru
Ульяновск, РОССИЯ

Рассмотрим кинематическую модель мобильного трёхколёсного робота

$$\dot{x} = \nu\cos\theta,\ \dot{y} = \nu\sin\theta,\ \dot{\theta} = \omega \tag{1}$$

где ν - скорость точки A; ω - угловая скорость платформы.

Мы рассмотрим задачу отслеживания некоторой траектории отслеживания $p_r(t) = (x_r, y_r, \theta_r)^T$ на основе построения законов управления $\nu(t)$ и $\omega(t)$.

Введём отклонения от заданной траектории по формуле

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

где x_r, y_r, θ_r – функции, определяющие заданную траекторию движения робота.

Тогда разностные уравнения в отклонениях для дискретной модели примут вид

$$\left\{\begin{array}{l} x_e[k+1] = x_e[k] + h\left(\omega[k]y_e[k] - \nu[k] + \nu_r[k]\cos\theta_e[k]\right) \\ y_e[k+1] = y_e[k] + h\left(-\omega[k]x_e[k] + \nu_r[k]\sin\theta_e[k]\right) \\ \theta_e[k+1] = \theta_e[k] + h\left(\omega_r[k] - \omega[k]\right) \end{array}\right. \tag{3}$$

Выберем следующее управление для $\omega(t)$

$$\omega[k] = \omega_r[k] + k_1\theta_e[k],\ k_1 = const > 0$$

С помощью функции Ляпунова $V_1[k] = \frac{1}{2}\theta_e^2[k]$ можно показать, что данный закон управления обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $\theta_e[k] = 0$ для последнего уравнения системы (3).

С помощью метода знакопостоянной функции Ляпунова [1,2,3] $V_2[k] = max\left\{|y_e[k]|, |z_e[k]|\right\}$ можно показать, что управление

$$\nu[k] = \nu_r[k] + k_2x_e[k] + k_3y_e[k],\ k_2, k_3 = const > 0$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения $x_e = y_e = \theta_e = 0$ системы (3), описывающего дискретную модель.

Таким образом, закон управления

$$\left\{\begin{array}{l} \omega[k] = \omega_r[k] + k_1\theta_e[k],\ k_1 = const > 0 \\ \nu[k] = \nu_r[k] + k_2x_e[k] + k_3y_e[k],\ k_2, k_3 = const > 0 \end{array}\right.$$

обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения $x_e = y_e = \theta_e$ уравнений в отклонениях для дискретной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12-01-33082/14).

Литература. [1] О. А. Перегудова Знакопостоянные функции Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Международный сборник "Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах". - 2007. - Т. 13, № 2(28). – С. 97–108. [2] О. А. Перегудова Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, 2009. 253 с. [3] К. В. Пахомов, О. А. Перегудова, П. П. Силантьев Управление движением неголономного мобильного робота на основе метода бэкстеппинга // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 3. С. 30-33.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Д. Я. Хусаинов, М. В. Покойовый, Э. И. Азизбеков
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
dkh@unicyb.kiev.ua
Киев, УКРАИНА

Рассматривается уравнение теплопроводности с одним постоянным запаздыванием

$$\nu_t(x,t) = \alpha_1^2\nu_{xx}(x,t) + \alpha_2^2\nu_{xx}(x,t-\tau) + b_1\nu_x(x,t) + b_2\nu_x(x,t-\tau) + \\ + d_1\nu(x,t) + d_2\nu(x,t-\tau) + g(x,t), \tag{1}$$

определенное при $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$. Предполагается, что

$$-\frac{b_1}{2\alpha_1^2} = -\frac{b_2}{2\alpha_2^2} = \mu.$$

Рассматривается первая краевая задача: $\nu(x,t) = \psi(x,t)$, $0 \le x \le l$, $-\tau \le t \le 0$, $u(0,t) = \theta_1(t)$, $\nu(l,t) = \theta_2(t)$, $t \ge -\tau$, причем выполнено условие «согласования краевых и начальных условий» $\varphi(0,t) = \theta_1(t)$, $\varphi(l,t) = \theta_2(t)$, $-\tau \le t \le 0$. Произведя замену

$$\nu(x,t) = e^{\mu x}u(x,t), \;\; \mu = -\frac{b_1}{2\alpha_1^2} = -\frac{b_2}{2\alpha_2^2}$$

уравнение сводится к виду

$$u_t(x,t) = \alpha_1^2 u_{xx}(x,t) + \alpha_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t-\tau) + f(x,t),$$

$$c_1 = d_1 - \frac{b_1^2}{4\alpha_1^2}, \;\; c_2 = d_2 - \frac{b_2^2}{4\alpha_2^2}, \;\; f(x,t) = e^{-\mu x}g(x,t).$$

Соответственно, преобразуются начальные и краевые условия.

Решение также ищется в виде суммы

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t).$$

где $u_1(x,t)$ – решение однородного уравнения с нулевыми краевыми условиями, $u_2(x,t)$ – решение неоднородного уравнения

$$u_3(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Решение однородного уравнения ищется методом Фурье с использованием специальной функции, названной «запаздывающим экспоненциалом». Решение $u_2(x,t)$ ищется в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin\frac{\pi n}{l}x$, $n = 1, 2, \ldots$.

Задача оптимального управления ставится, как нахождение функции $g(x,t)$, при которой решение в момент $t = t_1$ принимает значение $\nu(x,t_1) = \Psi(x)$, $0 \le x \le l$ и интегральный критерий качества

$$I[g(x,t)] = \int_0^t \int_0^t [\nu_2(x,t) + g^2(x,t)]dxdt \to \min$$

достигает минимального значения. Задача оптимального управления уравнением в частных производных сводится к задаче оптимального управления счетной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. Д. Юрьева
Ульяновский государственный университет
YurjevaOD@mail.ru
Ульяновск, РОССИЯ

Математичекие модели многих современных механических систем представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений высокой размерности. Основной подход к анализу моделей таких систем связан с идеей декомпозиции. Декомпозиция позволяет свести исследование модели сложной системы к исследованию моделей подсистем меньшей размерности или более простой структуры.

В работе обсуждаются некоторые известные результаты и новые результаты в этом направлении, полученные на основе метода сравнения.

На основе полученных результатов исследуется задача о моделировании управляемого движения физического маятника. Особенностью уравнений движения такой системы является наличие одной позиционной и одной циклической координаты. Игнорирование циклической координаты, сводит исследование движения маятника к исследованию одного уравнения второго порядка. Рассмотрены задачи стабилизации обобщенно стационарных движений физического маятника. Проведено численное моделирование исследуемых задач.

Литература. [1] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32 С.109-116. [2] Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. Т.70. В.6. 2006. С.965-976. [3] Андреев А.С., Ризито К. Об устойчивости стационарного движения // ПММ. 2006. Т.66 Вып. 3 С.339-350. [4] Андреев А.С., Румянцев В.В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. №8. С.18-31. [5] Андреев А.С., Юрьева О.Д. Об устойчивости механической системы с одной степенью свободы // Известия РАЕН серия МММИУ. 1997. Т.1.№1. С.102-114. [3] Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"2003. 304 с.

SYMBOLIC DYNAMICS FOR ANALYSIS OF A ONE-DIMENSIONAL MODEL FOR A 3-DIMENSIONAL 2 PREDATORS - ONE PREY SYSTEM

T. Eirola, A. V. Osipov*, G. J. Söderbacka**

Aalto University, Helsinki, FINLAND; *SPbGU, RUSSIA;
**Arctic University of Norway

timo.eirola@aalto.fi, av_ osipov@mail.ru, gunnar.j.soderbacka@uit.no

Helsinki, FINLAND; *St. Peterburg, RUSSIA; **Alta, NORWAY

We consider the following 3-dimensional system of the type

$$\dot{x}_i = (m_i\psi_i(s) - d_i)x_i, \quad \dot{s} = h(s) - \sum_{i=1}^{2}\psi_i(s)x_i, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

where x_1, x_2, represent the two predator populations competing for the prey s.

Here m_i, d_i are positive constants (conversion factor and death rate of the i-th predator), h is the growth rate of the prey and ψ_i is the functional response of the i-th predator.

To be specific we choose

$$h(s) = s(1-s), \qquad \psi(s) = \frac{s}{s+a_i}, \qquad a_i > 0, \quad i = 1,2. \tag{2}$$

The positive numbers λ_i are the solutions of $m_i\psi_i(\lambda_i) = d_i$. We suppose that $\lambda_1 > \lambda_2$.

The system (1) has always two singular points: the origin O which is a saddle with one dimensional unstable manifold $0 \le s < 1$, $x_i = 0$, $i = 1,2$ and O^* with the coordinates $x_i = 0$, $i = 1,2$, $s = 1$.

We define parameters

$$\beta_i = \frac{1-\lambda_i}{1+a_i}, \quad i = 1,2, \quad \alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \gamma = \frac{\lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_2}.$$

This system has been studied in detail in [1,2].

Particularly, it was shown that under some natural assumptions such systems can have chaotic regimes. In particular, in the work [1] was shown that the system has a chain of period doubling bifurcations. In order to get exact estimates and illustrations a one parameter family was chosen:

$$a_1 = \lambda_1 = 0.2;\ a = 0.03,\ \lambda = 0.06;\ a_2 = \nu a,\ \lambda_2 = \nu\lambda;\ \nu \in (0,1]. \quad \text{Here } \gamma = 2.$$

To define a correct Poincaré map we suppose ν not to small. In [1] was proved that the set

$$D = \{(x_1, x_2, s) | 0.8 \le x_1 + x_2 \le 1.35, s = 0.1\}$$

is a well-defined Poincare domain.

In D we define new coordinates

$$m = x_1 + x_2, \quad \zeta = x_2 x_1^{-\alpha}.$$

The Poincare map $T : D \to D$ takes the form

$$\overline{m} = M(m, \zeta), \quad \overline{\zeta} = Z(m, \zeta).$$

The function M can be considered as a strong contraction [1]. Supposing m and k to be constant the one dimensional model map is defined by

$$Z(\zeta) = k\zeta e^{(\alpha-\gamma)(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2})}, \tag{3}$$

where x_1 and x_2 are functions of ζ (and m). It was shown also, that this map has three intervals of monotonicity

$$I_1 = [\zeta_1, \zeta_2], \ I_2 = [\zeta_2, \zeta_3], \ I_3 = [\zeta_3, \zeta_4],$$

so that Z is increasing on I_1 and I_3 and decreasing on I_2. Let $Z(\zeta_1) = y_1$, $Z(\zeta_2) = y_2 = Z_{max} = \zeta_4$, $Z(\zeta_3) = y_3 = Z_{min} = \zeta_1$, $Z(\zeta_4) = y_4 > y_3$. The transition matrix and symbolic dynamics are constructed in correspondence to this thereby using results from [3].

Theorem 1. *Let the one dimensional map Z be defined by (3), where k is a function of ν, $k = O(\nu^{-5})$. Then $Z_{min} \to 0$, $Z_{max} \to +\infty$ when $\nu \to 0$ and $Z_{max} > \zeta_{min}$, $Z_{min} < \zeta_{max}$, $Z(Z_{min}) < \zeta_{max}$. There also exists a $\nu_0 > 0$ such that when $\nu < \nu_0$ the map Z has periodic points of all periods.*

Theorem 2. *$y_1 < \zeta_2$ for $\nu \le 1/3$. In this case Z^2 is strictly turbulent and has periodic points of all periods.*

References. [1] А. В. Осипов, Г. Сёдербакка, Т. Эйрола / О появлении хаотического режима в одной динамической системы типа «два хищника – одна жертва», сб. «Актуальные проблемы совр. матем.» (ред. А.В. Осипов), т.1, СПб, 1996. [2] T. Eirola, A. V. Osipov, G. Söderbacka / On chaotic coexistence for the systems of «two predators – one prey» type. Intern. Congress on Computer systems and Appl. Math., St. Petersburg, 19-23 July, 1993. [3] T. Lindström, H. Thunberg / An elementary approach to dynamics and bifurcation of skew tent maps. Journal of Difference Equations and Applications, Vol 14, Issue 8, 2008, pp 819-833.

CHAOS AND LIMIT CYCLES IN THE CLASSICAL LORENZ SYSTEM

V. A. Gaiko
United Institute of Informatics Problems
National Academy of Sciences of Belarus
valery.gaiko@gmail.com
Minsk, BELARUS

We consider a three-dimensional polynomial dynamical system

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = xy - bz \tag{1}$$

known as the Lorenz system. Historically, (1) was the first dynamical system for which the existence of an irregular attractor (chaos) was proved for $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $24{,}06 < r < 28$. The Lorenz system (1) is dissipative and symmetric with respect to the z-axis. The origin $O(0,0,0)$ is a singular point of system (1) for any σ, b, and r. It is a stable node for $r < 1$. For $r = 1$, the origin becomes a triple singular point, and then, for $r > 1$, there are two more singular points in the system: $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ and $O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ which are stable up to the parameter value $r_a = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ ($r_a \approx 24{,}74$ for $\sigma = 10$ and $b = 8/3$). For all $r > 1$, the point O is a saddle-node.

For many years, the Lorenz system (1) has been the subject of study by numerous authors; see, e. g., [1–5]. However, until now the structure of the Lorenz attractor is not clear completely yet, and the most important question at present is to understand the bifurcation scenario of chaos transition in system (1) which is related to *Smale's Fourteenth Problem* [4]. In this talk, we present a new bifurcation scenario for system (1), where $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $r > 0$, using numerical results of [2] and a bifurcational geometric approach to the global qualitative analysis of three-dimensional dynamical systems which was applied earlier in the two-dimensional case [6]. This scenario connects globally the homoclinic, period-doubling, Andronov–Shilnikov, and period-halving bifurcations of limit cycles in the Lorenz system (1) [7].

References. [1] Yu. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory. New York, 2004. [2] N. A. Magnitskii, S. V. Sidorov, New methods for chaotic dynamics. New Jersey, 2006. [3] L. P. Shilnikov et al., Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. I, II. New Jersey, 1998, 2001. [4] S. Smale, Mathematical problems for the next century, Math. Intelligencer 20 (1998), 7–15. [5] C. Sparrou, The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors. New York, 1982. [6] V. A. Gaiko, Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem. Boston, 2003. [7] V. A. Gaiko, Chaos transition in the Lorenz system, Herald Odesa Nation. Univ. Ser. Math. Mech. 18 (2013), 51–58.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ПОТОКОВ И ПРОБЛЕМА ИХ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

В. З. Гринес
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
vgrines@yandex.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Результаты получены совместно с Е.Я. Гуревич и О.В. Починкой.

Рассматривается класс G потоков f^t Морса-Смейла на замкнутых ориентируемых многообразиях M^n размерности $n \geq 2$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ потока $f^t \in G$ не содержит замкнутых траекторий (такой поток называется градиентно-подобным);

2) Индекс Морса любого состояния равновесия потока $f^t \in G$ равен 1 или $n - 1$;

3) устойчивые и неустойчивые состояния равновесия различных седловых состояний равновесия не пересекаются.

Из работы [1] С. Смейла следует, что для любого потока из класса G существует самоиндексирующаяся энергетическая функция, то есть функция Морса $\varphi : M^n \to [0, n]$ такая что:

(i) множество критических точек φ совпадает с множеством $\Omega(f^t)$;

(ii) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;

(iii) $\varphi(p) = ind(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

Согласно Р. Тому [2] две функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\varphi' H = \chi\, \varphi$.

К. Мейер [3] установил, что для топологически эквивалентных потоков f^t, f'^t их энергетические самоиндексирующиеся функции топологически эквивалентны и, более того, в случае $n = 2$ верно и обратное утверждение, то есть существование эквивалентных самоиндексирующихся энергетических функций $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^2 \to \mathbb{R}$ для потоков f^t, f'^t влечет их топологическую эквивалентность.

Мы показываем, что уже в размерности $n = 3$ этот факт вообще говоря не имеет места и вводим более сильное (но вполне естественное) ограничение на энергетические функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \to \mathbb{R}$ потоков f^t, f'^t, которое мы назвали согласованной эквивалентностью.

Основным результатом доклада является следующий результат.

Теорема. *Потоки* $f^t, f'^t \in G$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда согласованно эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ.

Литература. [1] Smale S. On Gradient Dynamical Systems. Annals of Math 1961, vol. 1, no 1, 199–206 [2] Thom R. La stabilite topologique des applications polinomiales. Topology, 1962, vol. 1, 101–120 [3] Meyer K.R. Energy Functions for Morse-Smale Systems. Amer. J. Math. 1968, vol. 90 no. 4, 1031–1040.

ДИНАМИКА ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ОДНОМЕРНЫМИ ИНВАРИАНТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

С. Х. Капкаева
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
kapkaevasvetlana@yandex.ru
Саранск, РОССИЯ

Рассматривается класс G градиентно-подобных диффеоморфизмов на многообразии M^2. Неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$ представляется в виде $\Omega(f) = \Omega_0(f) \cup \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, где $\Omega_0(f)$ — множество стоковых, $\Omega_1(f)$ — седловых, $\Omega_2(f)$ — источниковых периодических точек диффеоморфизма f.

В 1985-1987 годах В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных была получена топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях (подробное изложение результатов имеется в книге [1]).

В 1973 году М. Пейшото [2] классифицировал потоки Морса-Смейла без замкнутых траекторий с помощью различающего графа, А. А. Ошемков и В. В. Шарко в работе [3] предложили поставить в соответствие каждому представителю данного класса трехцветный граф. Как оказалось, проверка изоморфности трехцветных графов существенно проще проверки изоморфности графов Пейшото.

В работах [4], [5] идеи Ошемкова, Шарко были применены для для топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерных многообразий посредством трехцветных графов, оснащенных автоморфизмами, индуцированными диффеоморфизмами на вершинах графов.

В настоящей работе выделяется класс $\tilde{G}$ градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на двумерных многообразиях таких, что для любого $f \in G$ множество $\Omega_1(f)$ представляется в виде объединения $\Omega_1^+(f) \cup \Omega_1^-(f)$ такого, что $cl(\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1^+} W^u_\sigma) \cup cl(\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1^-} W^s_\sigma)$ состоит из конечного числа попарно не пересекающихся компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности, и $(\Omega_0 \cup \Omega_2) \subset (cl(\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1^+} W^s_\sigma) \cup cl(\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1^-} W^u_\sigma))$.

Исследована взаимосвязь между динамикой таких диффеоморфизмов и топологией объемлющего многообразия. Установлено, что объемлющее многообразие M^2 диффеоморфизма класса $\tilde{G}$ является либо тором, либо бутылкой Клейна.

При дополнительном условии, накладываемом на класс $\tilde{G}$, задача топологической классификации сводится к классификации структурно-устойчивых диффеоморфизмов окружности, которая была получена А. Г. Майером в работе [6].

Благодарности. Автор благодарит В.З. Гринеса за поставленную задачу и плодотворные обсуждения. Работа выполнена при честичной финансовой поддержке гранта РФФИ 13-01-12452-офи-м и гранта РНФ 14-11-00446.

Литература. [1] Гринес В.З., Починка О.В Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. - НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований. - Ижевск, 2011. - 424 с. [2] Peixoto M.M. On the classification of flows on 2-manifolds. - Dynamical systems. Academic Press. New York, 1973. – p. 389-419 [3] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. - Т. 18. - № 8. - 1998. - с. 93-140. [4] Гринес В.З., Капкаева С. Х. Классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов посредством трехцветного графа // Журнал СВМО. - 2013. - Т. 15. - № 2. - с. 12-22. [5] Капкаева С. Х. Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях посредством автоморфизмов трехцветных графов // Журнал СВМО. - 2013. - Т. 15. - № 3. - с. 76-88. [6] Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Уч. Зап. ГГУ. - Т. 12, 1939. - с. 215-229

ГЛАДКАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СТРУКТУРНО УСТОЙЧИВЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1

О. В. Починка
НИУ ВШЭ-НН
olga-pochinka@yandex.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Результаты получены совместно с В.З. Гринесом.

Рассматривается класс G структурно устойчивых диффеоморфизмов на n-многообразиях, каждое нетривиальное базисное множество которых имеет коразмерность 1 и является либо растягивающимся аттрактором, либо сжимающимся репеллером. Согласно К. Конли [1], *функция Ляпунова* для грубого диффеоморфизма это непрерывная функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий и постоянная на базисных множествах. Гладкая функция Ляпунова называется *энергетической функцией*, если множество её критических точек совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма.

Основным результатом данной работы является следующая теорема, которая базируется на [2], [3].

Теорема. *Для любого диффеоморфизма из класса G существует энергетическая функция, которая является функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ.

Литература. [1] Conley C., Isolated Invariant Sets and Morse Index, CBMS Regional Conference Series in Math, (1978). [2] Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, № 2, 617–667. [3] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka. Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. Moscow Math. Journal, 2009, No 4, 801-821.

ГЛОБАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТОКОВ МОРСА-СМЕЙЛА НА ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А. Н. Сахаров
Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия
ansakharov2008@yandex.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Доклад посвящен проблеме топологической классификации потоков Морса-Смейла на замкнутых двумерных многообразиях в терминах глобальной функции Ляпунова. Глобальная функция Ляпунова потока f^t на n-мерном замкнутом многообразии M^n – это функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки x не принадлежащей цепно-рекуррентному множеству потока и любого $t > 0$;

2. φ является константой на каждой траектории из цепно-рекуррентного множества потока.

Факт существования такой функции для произвольного потока установлен Ч. Конли [1] и носит название фундаментальной теоремы теории динамических систем.

В работе К. Мейера [2] было доказано существование гладкой глобальной функции Ляпунова φ для потоков Морса-Смейла на замкнутых n-мерных многообразиях. Она будет единственной, если ее значение $\varphi(p)$ на элементе p неблуждающего множества потока равно размерности неустойчивого многобразия p. Такую функцию Ляпунова принято называть *самоиндексирующейся энергетической функцией* потока.

Самоиндексирующаяся энергетическая функция является топологическим инвариантом потока Морса-Смейла, то есть если два потока топологически эквивалетны, то энергетические функции топологически эквивалентны в смысле Р. Тома. В работе [2] утверждается также, что при $n = 2$ самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Однако, как было отмечено А.А. Ошемковым и В.В. Шарко [3] это утверждение верно только для градиентно-подобных потоков, так как энергетическая функция не содержит информации об ориентации замкнутых траекторий.

В докладе дается определение сигнатуры потока Морса-Смейла на двумерном многообразии, которая строится следующим образом. Состояниям равновесия приписывается сигнатура 0. Периодической траектории приписывется сигнатура 1 или -1, в зависимости от ее ориентации. Ориентация периодической траектории определяется следующим образом. Пусть $Sing(f^t)$ – множество особых траекторий потока f^t на замкнутой поверхности M^2, R – компонента множества $M^2 \setminus Sing(f^t)$. Известно, что R либо гомеоморфно диску, либо кольцу [4]. Кроме того, поток $f^t\big|_R$ орбитально топологически эквивалентен либо потоку f^t_{st} (параллельному потоку в полосе), либо потоку f^t_{an} (параллельному потоку в кольце) [5]. Ориентация замкнутой траектории определяется как ориентация границы R при этой эквивалентности.

Самоиндексирующаяся энергетическая функция и сигнатура являются для потоков Морса-Смейла на поверхностях полным топологическим инвариантом.

Теорема. *Два потока Морса-Смейла на замкнутой ориентируемой поверхности топологически эквавалентны тогда и только тогда, когда их энергетические функции топологически эквивалентны, а сигнатуры совпадают.*

Автор выражает выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку этой работы, грант 12-01-00672а.

Литература. [1] C. Conley Isolated Invariant Sets and the Morse Index. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Vol. 38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978. [2] Meyer K.R. Energy Functions for Morse-Smale Systems. Amer. J. Math. 1968. v. 90, n. 4. p. 1031–1040. [3] Ошемков

А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях. Математический сборник. 1998. т. 189, № 8. с. 93–140. [4] Майер А.Г. О траекториях на ориентируемых поверхностях. Математический сборник. 1943. т. 12, № 1. с. 71–84. [5] I.Nikolaev, E. Zhuzhoma Flows on 2-dimensional Manifolds. Lectures Notes in Mathematics. 1705. Berlin. Springer. 1999.

О ДИНАМИКЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ЭКСПАНСИВНЫМ ДВУМЕРНЫМ НЕБЛУЖДАЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ

А. А. Шиловская
ННГУ им.Н.И.Лобачевского
a.shilovskaia@gmail.com
Нижний Новгород, Россия

В настоящей работе рассматривается класс $\mathcal{G}$ сохраняющих ориентацию диффеорфизмов, заданных на гладких ориентируемых замкнутых трехмерных многообразиях и удовлетворяющих следующим условиям:

1. неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит из конечного числа замкнутых ручно вложенных ориентируемых поверхностей таких, что ограничение некоторой степени k_f диффеоморфизма f на каждую из поверхностей является экспансивным отображением;

2. граница каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus NW(f)$ состоит из двух поверхностей одна из которых является аттрактором, а другая — репеллером диффеоморфизма f^{k_f}.

Так как ограничение f^{k_f} экспансивно, то в силу [1] инвариантные поверхности неблуждающего множества $NW(f)$ имеют положительный род. Х.Левовиц [2] и К.Хирайд [3] независимо доказали, что на компактных ориентируемых поверхностях рода $p \geq 2$ экспансивный гомеоморфизм топологически сопряжен псевдоаносовскому отображению. В [2] Х.Левовиц также показал, что экспансивный гомеоморфизм двумерного тора $\mathcal{T}^2$ топологически сопряжен аносовскому.

Настоящий доклад посвящен изучению динамики диффеоморфизмов из класса $\mathcal{G}$:

Теорема 1. *Если многообразие M^3 допускает диффеоморфизмы из класса $\mathcal{G}$, то оно является локально-тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным поверхности M^2, рода $p \geq 1$.*

В случае, когда поверхность M^2 является тором, результат Теоремы 1 следует из работы [4]. Более того в [4] доказано, что в этом случае многообразие M^3 диффеоморфно фактору прямого произведения тора на отрезок, где склеивающий гомеоморфизм тора индуцирован унимодулярной матрицей, являющейся либо гиперболической, либо тождественной, либо минус тождественной.

В работе построен класс модельных отображений Φ, принадлежащих $\mathcal{G}$ и являющихся локально прямым произведением псевдоаносовского гомеоморфизма и грубого преобразования окружности. Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. *Любой диффеоморфизм из класса $\mathcal{G}$ является Ω-сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Автор благодарит В.З.Гринеса за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 12-01-00672-а и № 13-01-12452 офи_м2.

Литература. [1] O'Brien, Thomas; Reddy, William. Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism. Pacific Journal of Mathematics 35 (1970), no. 3, 737-741. [2] Lewowicz, Jorge. Expansive homeomorphisms of surfaces. Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.) 20 (1989), no.

1, 113-133. [3] Hiraide, Koichi. Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov. Osaka Journal of Mathematics 27 (1990), no. 1, 117-162. [4] В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка. О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами.// Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 17–33.

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е. А. Сидоров
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
dynamics@mm.unn.ru
Нижний Новгород, РОССИЯ

Задачи о периодических решениях (ПР) дифференциальных уравнений (ДУ) с кусочно-аналитическим (в частности, линейными) правыми частями имеют важное теоретическое и прикладное значение. Разработаны специальные методы теоретического характера и соответствующие приближенные способы ([1] и другие). Особую сложность представляет исследование решений, расположенных в разных областях аналитичности, здесь обычно отсутствуют "точные"выражения для ПР в случаях элементарных правых частей. Для ДУ с кусочно-линейными правыми частями

$$\ddot{x} = |x| + p(t), \qquad p(t+T) = p(t), \tag{1}$$

в работах [2], [3] установлены условия существования ПР в наиболее интересном случае знакопеременных периодических решений (ЗПР).

Ниже эти результаты дополняются построением ЗПР (в явном виде) для некоторых простейших функций $p(t)$ аналитического класса, что представляет определенный интерес. Если задать ЗПР подобного вида $x = \varphi(t)$, то выражение $p(t)$ не будет аналитическим, например, при $\varphi(t) = \sin t : p(t) = |\sin t| - \sin t$ и т.п.

Теорема 1. *ДУ*

$$\ddot{x} = |x| - 2 - b\cos 2t \tag{2}$$

имеет субгармоническое решение вида

$$x(t) = \begin{cases} A\,\mathrm{ch}\, t + \frac{b}{5}\cos 2t + 2, & \textit{в области } x \geq 0,\ t \in [-\pi/4 - 2n\pi, \pi/4 + 2n\pi], \\ p\cos t + \frac{b}{3}\cos 2t - 2, & \textit{в области } x < 0,\ t \in [\pi/4 + 2n\pi, 7\pi/4 + 2n\pi], \end{cases}$$

где

$$A = \frac{-2}{\mathrm{ch}\, t_0}, \quad p = 2\cos t_0, \quad b = \frac{15}{2}(\mathrm{th}\, t_0 - 1), \quad t_0 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

Аналогичный результат имеет место для более сложного, резонансного случая.

Теорема 2. *ДУ*

$$\ddot{x} = |x| - 2A\cos t - b \tag{3}$$

при соответствующих A и b обладает ЗПР с периодом 2π, которое составляется из решения

$$x_+ = M\,\mathrm{ch}\, t + A\cos t + b \geq 0, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \tag{4}$$

и

$$x_- = K\cos t - At\sin t - B\sin t - b \leq 0, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \tag{5}$$

где значения параметров A, B, b, K, M определяются из неравенств $(4)-(5)$ *и условия гладкости составного решения при* $t = m\pi/2$.

Справедливы более общие результаты при дополнительных условиях для уравнения

$$\ddot{x} = |g(x)| + p(t), \tag{6}$$

$g(x)$ – аналитическая нечетная, $g(x)/x > 0$. При этом должны существовать периодические решения ДУ

$$\ddot{x}_{\pm} = \pm g(x_{\pm}) + p(t)$$

с определенными свойствами, что представляет значительные трудности, т.к. эти решения не имеют явного выражения. Один из упрощенных вариантов – задание ЗПР, удовлетворяющих уравнению для x_+ или x_-. Например, если $g(x) = x^3$, то $x_- = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t$ и $p(t) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \sin 3t$. Уравнение для x_+ будет иметь ПР, являющееся знакопеременным, но не имеющим явного выражения.

Теорема 3. *Если уравнение для x_- имеет ЗПР $x = \Phi(t)$ и для достаточно больших n существует ЗПР $x_+ = \varphi_n(t) > 0$ при $t \in [-nT, nT]$ ($\Phi(t)$, $\varphi_n(t)$ – четные) и $x_+(nT) = 0$, то уравнение* (6) *имеет ЗПР, которое в области $x \leq 0$ совпадает с $\Phi(t)$.*

Аналогичное утверждение справедливо, если $\Phi(t)$ и $\varphi_n(t)$ одновременно нечетные ЗПР.

Литература. [1] Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение. 1984 [2] Сидоров Е.А. О сосуществовании разнозначных периодических решений некоторых кусочно-дифференцируемых дифференциальных уравнений. Тезизы международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология посвященной 100-летию Л.С. Понтрягина. М.: 2008. с. 194–195. [3] Сидоров Е.А., Иванов В.С. Зависимость почти периодических решений уравнения $\ddot{x} = |x| + p(t) + \varepsilon$ от параметра. Тезизы международной конференции, посвященной 110-летию И.Г. Петровского. М.: 2011. с. 343–344.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С УСЛОВИЯМИ ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ

В. А. Лукьяненко
ТНУ им. В.И.Вернадского
art-inf@mail.ru
Симферополь, РОССИЯ

Учет условий симметрии (четности, нечетности) позволяет расширить класс задач теории аналитических функций, интегральных уравнений типа свертки, краевых задач для уравнений в частных производных, которые допускают решение в квадратурах. Для примера рассмотрим уравнение

$$\frac{a(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [k(s+t) + k(s-t)]u(s)ds + \frac{b(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [m(s+t) - m(s-t)]u(s)ds = g(t),\ t \in \mathbb{R},$$

обозначив интегральные операторы соответственно через $p_{\text{ч}}(t)$ и $q_{\text{н}}(t)$ получаем уравнение

$$a(t)p_{\text{ч}}(t) + b(t)q_{\text{н}}(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$a(-t)p_{\text{ч}}(t) - b(-t)q_{\text{н}}(t) = g(-t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Если определитель отличен от нуля, то для $u(s)$ в образах Фурье получаем систему

$$K(x)U(-x) + K(-x)U(x) = P_{\text{ч}}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

$$M(x)U(-x) - M(-x)U(x) = Q_{\text{н}}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Откуда находим $U(x)$ и далее $u(t) = F^{-1}\{U(x)\}$.

Аналогично уравнение с четными и нечетными операторами $K_ч, K_н$

$$a(x)K_ч(u)(x) + b(x)K_н(u)(x) = g(x) \tag{2}$$

сводится к уравнению (1), из которого находятся $W_ч(x) = K_ч(u)(x)$, $W_н(x) = K_н(u)(x)$, если соответствующая система хорошо решается, то тем самым находим и решение исходного уравнения (2). Данный подход допускает обобщение на операторные уравнения для функции от двух переменных:

$$a(x, y)W_{чч} + b(x, y)W_{чн} + c(x, y)W_{нч} + d(x, y)W_{нн} = g(x, y).$$

Для системы операторных уравнений относительно функций u и v

$$\begin{cases} K_н u + M_ч v = g, \\ P_н v + Q_ч u = h. \end{cases}$$

из представления $g = g_ч + g_н$, $h = h_ч + h_н$ следует

$$\begin{cases} (Q_ч + K_н)u = g_н + h_ч = p, \\ (M_ч + P_н)v = g_ч + h_н = q. \end{cases}$$

Дальнейшее решение зависит от характера решения уравнений для u и v. Рассмотрены соответствующие примеры.

НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

С. М. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет
chujko-slav@inbox.ru
Славянск, УКРАИНА

Найдены необходимые и достаточные условия существования решения [1]

$$Z(t) = (z^{(\alpha,\beta)}(t)), \quad Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in C^1[a; b\,], \quad \alpha = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ m, \quad \beta = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

нетеровой ($m \neq n \neq \lambda \neq \mu$) матричной краевой задачи

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}, \quad F(t) \in \mathbb{C}[a, b]. \tag{1}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — постоянные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot) :\ C^1[a; b] \to \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Как известно [1], общее решение $W(t, \Theta) := U(t)\cdot\Theta\cdot V(t)$, $\Theta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ однородной части матричного уравнения (1) определяют нормальные фундаментальные матрицы $U(t)$ и $V(t)$:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_n, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_n, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ задачи Коши для уравнения (1) имеет вид [2]

$$Z(t, \Theta) = W(t, \Theta) + K[F(s)](t), \quad K[\Phi(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\ ds.$$

Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}] :\ \mathbb{R}^{\ell\times n} \to \mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\ell\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\} :\ \mathbb{R}^{\ell\cdot n} \to \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Пусть $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — базис пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема. *При условии* $P_{\mathcal{Q}^*} M\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0$ *и только при нем общее решение матричной краевой задачи (1)*

$$Z(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r} c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) := W\{t, \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+ M[\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)]\}\} + K[F(s)](t).$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}^*}$ *— ортопроектор:* $\mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; *матрица* $P_{\mathcal{Q}_r}$ *составлена из* r *линейно независимых строк ортопроектора* $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{m \cdot n \times m \cdot n} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, *где*

$$\mathcal{Q} := [\ M[\mathcal{Q}^{(1)}]\ \dots\ M[\mathcal{Q}^{(m \cdot n)}]\ ] \in \mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu \times m \cdot n}, \quad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}_i U(\cdot) \Xi^{(j)} V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}.$$

Утверждение теоремы является обобщением соответствующих утверждений [2] на случай нетеровой краевой задачи для дифференциального уравнения (1).

Литература. [1] Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с. [2] Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464–471.

ПСЕВДОРЕШЕНИЯ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет
chujko-slav@inbox.ru
Славянск, Донецкая область

Исследована задача о нахождении решения $Z(t) \in C^1[a; b\ ]$ краевой задачи

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}, \quad F(t) \in \mathbb{C}[a, b]. \tag{1}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot) :\ C^1[a; b] \to \mathbb{R}^{\lambda \times n}$, обобщающий условие [1]. Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}] :\ \mathbb{R}^{\ell \times n} \to \mathbb{R}^{\ell \cdot n}$, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\ell \cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\} :\ \mathbb{R}^{\ell \cdot n} \to \mathbb{R}^{\ell \times n}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — базис пространства $\mathbb{R}^{m \times n}$ и $\Omega^{(j)} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $j = 1, 2, \dots m \cdot n$ — базис пространства $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t), \dots$ – система линейно независимых непрерывно дифференцируемых вектор-функций. Обозначим

$$\mathcal{P}_\varphi := P_{[\Gamma(\varphi(\cdot)) + \Gamma(\mathcal{L}\varphi(\cdot))]^*} :\ \mathbb{R}^k \to N\Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^*$$

— $(k \times k)$– матрицу-ортопроектор [1].

Теорема. *Для фиксированной матрицы* $\varphi(t) := [\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \ \dots\ \ \varphi_k(t)]$ *при условии*

$$\mathcal{P}_\varphi \left\{ \int_a^b \Phi^*(t) \mathcal{M}\Big[F(t)\Big] dt + \Psi^* \mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big] \right\} = 0, \quad \Phi(t) := \Big[\ \Phi_1(t)\ \ \Phi_2(t)\ \ \dots\ \ \Phi_k(t)\ \Big]$$

наилучшее по методу наименьших квадратов

$$\left\| \mathcal{M}\Big[Z'(t) - AZ(t) - Z(t)B - F(t)\Big] \right\|^2_{L^2[a,b]} + \left\| M\Big[\mathcal{L}Z(\cdot) - \mathcal{A}\Big] \right\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda \cdot \mu}} \to \min$$

псевдорешение нетеровой ($m \neq n \neq \lambda \neq \mu$) *задачи (1) имеет вид*

$$Z(t,\varphi) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\varphi(t)c\Big], \quad \Phi_j(t) := \mathcal{M}\Big\{\varphi'(t)\cdot\Xi^{(j)} - A\varphi(t)\cdot\Xi^{(j)} - \mathcal{M}^{-1}\Big[\varphi(t)\cdot\Xi^{(j)}\Big]B\Big\};$$

здесь

$$c = \sum_{j=1}^{m\cdot n}\Omega^{(j)}\gamma_j, \quad \gamma = \Big[\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) + \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big)\Big]^+ \Big\{\int_a^b \Phi^*(t)\mathcal{M}\Big[F(t)\Big]dt + \Psi^*\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big]\Big\},$$

$$\Gamma\Big(\varphi(\cdot)\Big) := \int_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt, \quad \Gamma\Big(\mathcal{L}\varphi(\cdot)\Big) := \Psi^*\Psi, \quad \Psi_j := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[\varphi(\cdot)\Omega^{(j)}\Big]\Big\}.$$

Утверждение теоремы является обобщением утверждений [2] на случай матричной задачи (1).

Литература. [1] A .A. Boichuk, S. A. Krivosheya A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations, Dif. Eq. 4.(2001) 464-471. [2] S. M. Chuiko On approximate solution of boundary value problems by the least square method, Nonlinear Osc. 4.(2008) 585-604.

СЕМЕЙСТВА ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

А. В. Андреев, М. В. Шамолин
МГУ имени М. В. Ломоносова
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru
Москва, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Рассматривается математическая модель воздействия среды на твердое тело с участком его внешней поверхности в виде конуса. Приводится полная система уравнений движения, состоящая из динамической и кинематической частей. Динамическая часть образует независимую подсистему третьего порядка. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей.

Ордината точки N приложения силы воздействия среды определяется как $y_N = R(\alpha)$, α — угол атаки. Силы лобового и бокового сопротивления будем представлять в виде $\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x,\ \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y,\ |\mathbf{v}_D| = v$.

Динамическая часть уравнений движения перепишется в виде (m — масса тела, I — центральный момент его инерции, $\sigma = CD$):

$$\dot v\cos\alpha - \dot\alpha v\sin\alpha + \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2, \tag{1}$$

$$\dot v\sin\alpha + \dot\alpha v\cos\alpha - \Omega v\cos\alpha + \sigma\dot\Omega = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2, \tag{2}$$

$$I\dot\Omega = -F(\alpha)s(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2 - h\Omega v, \tag{3}$$

при этом $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$, а коэффициент $h > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [1, 2].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (1)–(3) в качестве независимой.

Без ограничения общности [1, 2] в основном будем рассмотривать следующее представление для функций $R(\alpha), s(\alpha), b(\alpha)$, определяющих воздействие среды:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha,\ A > 0, \tag{4}$$

$$s(\alpha) = B\cos\alpha,\ b(\alpha) = b_1\sin\alpha,\ B, b_1 > 0, \tag{5}$$

и именовать функции R, s, b функциями Чаплыгина.

Уравнения (1), (2) могут быть приведены к виду

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}\sin\alpha = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega}\cos\alpha - \sigma\Omega^2\sin\alpha = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha. \tag{7}$$

Вводя далее новое дифференцирование по формуле $<\cdot> = d/dt = vd/dq = v <'>$, где q — путь, пройденный точкой D, имеем: $\Omega = \omega v$, $\dot{\Omega} = v(\omega' v + \omega v')$. Тогда динамическая часть уравнений движения в нашем случае примет следующий вид:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{8}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{9}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{10}$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha.$$

Вводя далее безразмерные параметры и дифференцирование в виде

$$q = Q\sigma,\ \bar{\omega} = \omega\sigma,\ \beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I},\ \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I},\ \beta_3 = \frac{\sigma h}{I},\ \beta_4 = \frac{B\sigma}{m},\ \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m},$$

опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной $\bar{\omega}$, а также по-прежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q, имеем систему (9), (10) в случаях (4), (5) в следующем виде:

$$\alpha' = \omega + \beta_1\sin\alpha\cos^2\alpha - \beta_2\sin\alpha\cos\alpha + \beta_3\omega\cos\alpha +$$
$$+\omega^2\sin\alpha + \beta_4\sin\alpha\cos\alpha - \beta_5\sin\alpha\cos\alpha, \tag{11}$$

$$\omega' = -\beta_1\sin\alpha\cos\alpha + \beta_2\sin\alpha - \beta_3\omega + \omega^3\cos\alpha - \beta_1\omega\sin^2\alpha\cos\alpha +$$
$$+\beta_2\omega\sin\alpha - \beta_3\omega^2\sin\alpha + \beta_4\omega\cos^2\alpha + \beta_5\omega\sin^2\alpha. \tag{12}$$

Безразмерные параметры $\beta_k, k = 1, \ldots, 5$, естественно являются: β_1 — параметром момента силы лобового сопротивления; β_2 — параметром момента боковой силы; β_3 — параметром дополнительного демпфирующего момента; β_4 — параметром силы лобового сопротивления; β_5 — параметром момента боковой силы.

Имеем, таким образом, пятипараметрическое семейство систем (11), (12) на двумерном фазовом цилиндре $\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$.

Рассмотрим случай наличия двух пар сил, а именно, придположим, что выполнены следующие условия:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0. \tag{13}$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы силы лобового сопротивления и пара боковой силы. Тогда система (11), (12) при условиях (13) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов. Полученное семейство отличается от ранее полученных [1–3].

Литература. [1] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во "Экзамен 2007. [2] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат., **14**:3 (2008), 3—237. [3] Shamolin M.V., New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium, PAMM, **9**, 139–140 (2009).

СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЫ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ

М. В. Шамолин
Институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru
Москва, РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе, и некоторой прикладной задачи из динамики твердого тела, где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2].

Как известно, понятие интегрируемости достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т.д. В данной работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции, причем элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций, а в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки) [3].

В [1] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее [2, 3] плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Далее [4], была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырехмерных твердых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску [4, 5].

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости.

Так, например, рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n-3$:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\xi}+b_*\dot{\xi}\cos\xi+\sin\xi\cos\xi-\\
-\left[\dot{\eta}_1{}^2+\dot{\eta}_2{}^2\sin^2\eta_1+\dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi}=0,\\
\ddot{\eta}_1+b_*\dot{\eta}_1\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}-\\
-\left[\dot{\eta}_2{}^2+\dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_2+\dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1=0,\\
\ddot{\eta}_2+b_*\dot{\eta}_2\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}-\\
-\left[\dot{\eta}_3{}^2+\dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_3+\dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2=0,\\
\ddot{\eta}_3+b_*\dot{\eta}_3\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}-\\
-\left[\dot{\eta}_4{}^2+\dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_4+\dot{\eta}_6{}^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5+\ldots+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ddot{\eta}_{n-4}+b_*\dot{\eta}_{n-4}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-4}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-5}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}}-\\
-\left[\dot{\eta}_{n-3}^2+\dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4}=0,\\
\ddot{\eta}_{n-3}+b_*\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}}-\\
-\dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3}=0,\\
\ddot{\eta}_{n-2}+b_*\dot{\eta}_{n-2}\cos\xi+\dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi}+2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+\ldots+2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}}=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

($b_*>0$) описывающую закрепленный n-мерный маятник в неконсервативном поле сил. Порядок системы должен быть равен $2(n-1)$, но переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства, являющимся касательным расслоением

$$
T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi},\dot{\eta}_1,\ldots,\dot{\eta}_{n-2},\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}
\tag{2}
$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$. Система (1) является динамической системой с переменной диссипацией на касательном расслоении (2) [4, 5].

Литература. [1] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Изд-во "Экзамен 2007. [2] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат., **14**:3 (2008), 3—237. [3] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат., **16**:4 (2010), 3—229. [4] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН, **375**:3 (2000), 343—346. [5] Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / Итоги науки и техники. Сер. "Современая математика и ее приложения. Тематические обзоры". Т. 125. М.: ВИНИТИ, 2013. С. 5–254.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ СИСТЕМ С ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ВЫШЕ 2-й СТЕПЕНИ

В. Д. Иртегов, Т. Н. Титоренко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
irteg@icc.ru
Иркутск, РОССИЯ

Для динамических систем, уравнения движения которых допускают полиномиальные (или сводящиеся к ним) первые интегралы выше 2-й степени, предлагается процедура выделения инвариантных многообразий (ИМ) и их качественного исследования. Процедура представляет собой некоторое расширение метода Рауса-Ляпунова [1] и сводится к решению уравнений стационарности семейства первых интегралов задачи относительно части фазовых переменных и части параметров, входящих в это семейство. При таком подходе решениями уравнений стационарности будут искомые ИМ и выражения для параметров, записанные как функции фазовых переменных. Эти функции являются первыми интегралами векторных полей на найденных ИМ.

Используя первые интегралы векторных полей на ИМ, можно выделить ИМ на этих многообразиях (ИМ более высокого уровня). Последние после "поднятия" в исходное фазовое пространство сохраняют свойство инвариантности.

При помощи указанной методики получены новые, ранее не описанные в литературе, ИМ различной размерности в задаче о движении гиростата Горячева-Чаплыгина в поле постоянной силы тяжести [2], твердого тела в жидкости в обобщенном интегрируемом случае Чаплыгина [3], уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(3,1)$ [4]. Дополнительные первые интегралы в перечисленных задачах имеют соответственно степени 3, 4, 6. Исследованы некоторые качественные свойства найденных ИМ, в частности, для ряда ИМ получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН 17.1 и частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5007.2014.9).

Литература. [1] Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях тела в жидкости. 1(1954) 276-319. [2] Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата. ДАН СССР. 2, 149(1963) 292-294. [3] Yehia H.M. New generalization of the integrable problems in rigid body dynamics. J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 7269-7275. [4] Soko-lov V.V., Wolf T. Integrable quadratic classical Hamiltonians on $so(4)$ and $so(3,1)$. J. Phys. A: Mat. Gen. 39(2006) 1915-1926.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ С УЧЕТОМ СТАБИЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ

Р. Г. Мухарлямов
Российский университет дружбы народов
robgar@mail.ru
Москва, РОССИЯ

Современные управляемые технические системы представляют многокомпонентную систему, состоящую из элементов различной физической природы. Известные динамические аналогии позволяют использовать для моделирования динамики сложных систем, экономических объектов, финансовых и производственных систем те или иные формы уравнений классической механики. Так, динамика управляемой системы, состояние которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, составляющими вектор q, описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{dq}{dt} = \nu, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \nu} - \frac{\partial L}{\partial q} = a + Bu. \tag{1}$$

Здесь L – лагранжиан системы, a – вектор непотенциальных обобщенных сил, $B = B(q, \nu, t)$ – матрица коэффициентов, соответствующая распределению управляющих воздействий, составляющих вектор управления $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Изменение переменных q, ν ограничено уравнениями связей

$$f(q,t) = 0, \quad f = (f_1, \ldots, f_{m_0}), \tag{2}$$

$$f'(q, \nu, t) = 0, \quad f' = (f_{m_0+1}, \ldots, f_m), \ \ m \leq n. \tag{3}$$

Управление u должно обеспечить выполнение уравнений связей (2), (3). Решение системы (1) при определенном выражении вектора $u = u(q, \nu, t)$, определенное с использованием численных методов, может удовлетворять равенствам (2)-(3) лишь с определенной точностью. Отклонения решения системы (1) от уравнений связей (2)-(3) оценивается величинами

$$y = f(q,t), \ \ \dot{y} = f_q(q,t)\nu + f_t(q,t), \ \ y' = f'(q, \nu, t). \tag{4}$$

Задача определения вектора управления u, обеспечивающего выполнение условий (2)-(3) с требуемой точностью, представляет задачу стабилизации связей. Для решения задачи стабилизации связей вводятся функция Лагранжа $\widetilde{L} = \widetilde{L}(y, \dot{y}, y', q, \nu, t)$ и диссипативная функция $\widetilde{D} = \widetilde{D}(y, \dot{y}, y', q, \nu, t)$, которые наряду с основными переменными q, ν, t содержат дополнительные переменные $y, \dot{y}, y'$ и удовлетворяют условиям $\widetilde{L}(0,0,0,q,\nu,t) = L(q,\nu,t)$, $\widetilde{D}(0,0,0,q,\nu,t) = 0$. С учетом дополнительных переменных динамика исследуемой системы описывается уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = \nu, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \nu} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q} = a - \frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \nu} + Bu, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial \dot{y}}, \ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y'} = -\frac{\partial \widetilde{D}}{\partial y'}. \tag{6}$$

Уравнения (5) с учетом выражений (4) описывают динамику исследуемой системы, и при соответствующих начальных условиях удовлетворяет уравнениям связей (2), (3). Уравнения возмущений связей (6) содержит циклические координаты и может допускать понижение порядка.

При определенном $u = u(x,t)$ система уравнений (4)-(6) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{a}(x,t) + M(x,t)\widetilde{y}, \quad \frac{d\widetilde{y}}{dt} = A(x,t)\widetilde{y}, \quad \widetilde{y} = h(x,t), \tag{7}$$

и допускает частный интеграл $\widetilde{y} = 0$, соответствующий уравнениям связей (2), (3). Необходимым условием стабилизации связей является асимптотическая устойчивость решения относительно множества $h(x,t) = 0$. Если матрица A является постоянной и корни характеристического уравнения системы $d\widetilde{y}/dt = A\widetilde{y}$ имеют отрицательные действительные части, то решение системы (7) асимптотически устойчиво относительно множества $h(x,t) = 0$. В случае $A = A(x,t)$ условия устойчивости определяются методом функций Ляпунова.

Предлагается метод определения функций $\widetilde{L}, \widetilde{D}$, обеспечивающих стабилизацию решения расширенной системы относительно уравнений связей (2), (3) при использовании метода Рунге-Кутта для численного решения. Излагаемые методы и алгоритмы используются для решения задач управления манипулятором на подвижном основании, мобильным роботом с обходом препятствий, электромеханической системой, адаптивной оптической системой, производственным предприятием.

Решается задача планирования выпуска продукции и управления нефтеперерабатывающим заводом (НПЗ). Рассматривается НПЗ, состоящее из четырех установок: комбинированная электрообессоливающая установка и установка атмосферно-вакуумной перегонки нефти (ЭЛОУ-АВТ), установка каталитического крекинга (КК), установка каталитического риформинга (КР) и установка гидроочистки (ГО).

Товарными продуктами предприятия являются автобензин, дизельное топливо, керосин, мазут и котельное топливо. На вход установки ЭЛОУ-АВТ поступает сырая нефть. Сырье, разделенное на фракции установкой ЭЛОУ-АВТ, поступает на вход следующих установок. Для НПЗ характерно, что часть продукции производственного объединения направляется на другие объекты или на циркуляцию в качестве сырья, что приводит к уравнениям связей. Выходными продуктами установки ЭЛОУ-АВТ являются: товарный керосин, бензин прямой перегонки (ПП), дизельное топливо ПП, товарный мазут и вакуумный газойль-продукт вакуумной перегонки мазута, поступающий на установку КК. Часть бензина ПП поступает в качестве сырья на установку КР для получения бензина КР. Часть дизельного топлива ПП поступает на установку ГО для получения дизельного топлива ГО. Товарный бензин получается смешением бензина ПП, КР и КК.

С учетом предположения о постоянстве во времени коэффициентов пропорциональности оборотных фондов составляются уравнения выпуска продукции, согласованные с материальным балансом установок, определяются технологические связи внутри завода, мощности ПО на начало планируемого периода и задание по выработке товарных продуктов. Задача сводится к определению управляющих воздействий в правых частях уравнений динамики, обеспечивающих выполнение уравнений связей, определяющих технологические связи и задание по выработке товарных продуктов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-08-00535.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА МАЛОГАБАРИТНОЙ ВЭУ ПОСРЕДСТВОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ

А. П. Голуб, Л. А. Климина
НИИ механики МГУ
klimina@imec.msu.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается динамическая модель малогабаритной горизонтальноосевой ветроэнергетической установки (ВЭУ). Из практики известно, что в процессе эксплуатации ВЭУ возникает задача переключения между рабочими режимами, характеризующимися различными значениями быстроходности λ турбины ($\lambda = b\omega/V$, где b - радиус турбины, ω - угловая скорость турбины, V - значение скорости ветра).

Можно выделить ([1]) два типа притягивающих рабочих режимов ВЭУ: высокоскоростные ($\lambda > \lambda_1$) и низкоскоростные ($\lambda < \lambda_2$). Промежуточные значения быстроходности ($\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$) соответствуют неустойчивым стационарным режимам, разделяющим области притяжения устойчивых. Стабилизация неустойчивых режимов является одной из актуальных практических задач, так как расширяет диапазон рабочих значений быстроходности. Отметим, что переход на режим с промежуточными значениями быстроходности ($\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$) целесообразен в условиях сильного ветра, когда угловая скорость на высокоскоростном режиме превышает значение, допустимое нормами безопасности.

В данной работе построен алгоритм управления малогабаритной ВЭУ посредством дифференциальной планетарной передачи (ДПП), который позволяет стабилизировать неустойчивый рабочий режим. При этом используется управление линейное по отклонению быстроходности турбины от программного значения. В качестве управляющего воздействия выбран механический момент, приложенный к внешнему кольцу ДПП. Турбина соединена с водилом ДПП, а ротор генератора – с солнцем ДПП.

В работе получены условия на коэффициент обратной связи, при выполнении которых целевой стационарный режим будет устойчивым и его область притяжения совпадет со всем фазовым пространством рассматриваемой динамической системы.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: NN 12-01-00364, 14-08-01130.

Литература. [1] М. З. Досаев, А. И. Кобрин, Б. Я. Локшин, В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II. М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2007.

ДИНАМИКА ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Л. А. Климина, Ю. Д. Селюцкий
НИИ механики МГУ
klimina@imec.msu.ru, seliutski@imec.msu.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается механическая система, состоящая из ветровой турбины и соединенного с ней коллекторного электрогенератора на постоянных магнитах. Предполагая, что возбуждение реализуется с помощью постоянных магнитов, запишем уравнения движения этой системы, используя для моделирования электромеханического взаимодействия результаты [1]:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= M_a(V,\omega) - \kappa I + \chi I^2, \\ L\dot{I} &= \kappa\omega - \chi I\omega - (R+r)I \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ω — угловая скорость турбины, J — момент инерции вращающихся частей ветротурбины и генератора, $M_a(V,\omega)$ — момент аэродинамических сил, V — скорость набегающего потока, I — сила тока в обмотке якоря, κ, χ — коэффициенты электромеханической связи, L и r — индуктивность и внутреннее сопротивление якоря, соответственно, R — внешнее сопротивление в цепи якоря.

Для описания аэродинамического момента, действующего на лопасти турбины, используется квазистатический подход. Необходимо отметить, что аэродинамический момент представляет собой нелинейную функцию угловой скорости ветротурбины.

Эта модель отличается от использованной в [2] наличием нелинейных членов в слагаемых, описывающих электромеханическое взаимодействие.

Проведен анализ стационарных режимов динамической системы (1), получены условия их устойчивости. Проанализирована эволюция стационарных режимов при изменении внешнего сопротивления в цепи якоря. Показано, что рассматриваемая система претерпевает качественную перестройку, когда изображающая точка в пространстве параметров пересекает поверхность

$$M_a(V,\omega_m) = \kappa^2/4\chi$$

где ω_m — значение угловой скорости, при котором достигается максимум аэродинамического момента.

Отмечено, что при $\chi \neq 0$ такая перестройка происходит, когда скорость потока становится больше некоторого критического значения.

Исследовано влияние параметра χ, характеризующего нелинейность электромеханического взаимодействия, на диапазон значений внешнего сопротивления, в котором имеет место гистерезис выходной мощности.

В дозвуковой аэродинамической трубе НИИ механики МГУ проведены натурные эксперименты с ветроэнергетической установкой рассматриваемого типа. Выполнена процедура идентификации параметров предложенной математической модели и показано, что имеет место достаточно хорошее согласие между экспериментальными данными и результатами расчетов в рамках предложенной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 12-01-00364, 14-08-01130).

Литература. [1] В. А. Диевский Приложение неголономной механики к общей теории электрических машин. СПб, 2009. [2] М. З. Досаев, В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий, В.-Л. Лю, Ч.-Х. Линь Бифуркации режимов функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизация их характеристик, Изв. РАН, МТТ (2009), № 2, 59-66.

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ЛОПАСТИ МАЛОЙ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

А. А. Мастерова, В. А. Самсонов*

механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,

*НИИ механики МГУ

masterovaanya@yandex.ru

Москва, РОССИЯ

В работе рассматривается один из аспектов актуальной задачи повышения эффективности работы ветрогенераторов за счет увеличения мощности, отбираемой от потока ветра. А именно, в рамках малопараметрической динамической модели ветроэнергетической установки (ВЭУ) исследуется возможность улучшения аэродинамических свойств турбины за счет модификации геометрии лопастей.

Модель, рассмотренная в работе, представляет собой развитие модели [1], в которой аэродинамический момент вычисляется с применением квазистатической модели, электрическая нагрузка со стороны потребителей энергии в цепи генератора ВЭУ характеризуется моментом, линейным по угловой скорости турбины. По сравнению с [1] усложнение заключается в следующем: для того, чтобы учесть крутку лопасти ВЭУ вдоль радиуса, разбиваем лопасть на два участка отличных по длине, ширине и значению установочного угла.

С учетом сохранения общей площади и длины лопасти исследованы тенденции влияния геометрических параметров модифицированной лопасти на характеристики рабочих режимов. Варьировались следующие параметры: длина части лопасти, находящейся ближе к оси вращения, площадь, приходящаяся на эту часть, и установочные углы обеих частей. Особое внимание было уделено практической задаче вывода ветроустановки на высокоскоростной рабочий режим. Исследовалась возможность за счет модификации лопасти сузить диапазон значений внешней электрической нагрузки, в котором такой режим не является единственным. Также рассматривалась задача увеличения максимальной мощности на высокоскоростном рабочем режиме.

На примере лопасти, имеющей в сечении форму симметричного профиля NACA0012, в рамках предложенной модели найдена модифицированная геометрия, при которой значение мощности на стационарном режиме ВЭУ выше, чем для классической лопасти (с тем же профилем). При этом для модифицированной лопасти область значений внешней нагрузки, при которой желаемый стационарный режим является единственным, не изменяется по сравнению с классической лопастью. В результате была подтверждена эффективность рассмотренного подхода к модификации геометрии лопастей, а также была выявлена область параметров, для которых актуально проводить более детальное исследование.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: NN 12-01-00364, 14-08-01130.

Литература. [1] М. З. Досаев, А. И. Кобрин, Б. Я. Локшин, В. А. Самсонов, Ю. Д. Селюцкий Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II. М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2007.

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МОНОЦИКЛА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГЛАДКОЙ ЛЕДЯНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. А. Лебедев, В. М. Морозов
НИИ механики МГУ
lebedev.dmitri@list.ru, moroz@imec.msu.ru,
Москва, РОССИЯ

В данной работе рассматривается механическая система (моноцикл), состоящая из кругового диска, который может катиться по горизонтальной ледяной поверхности, твердого тела (маятника), соединенного с диском в его центре при помощи цилиндрического шарнира и ротора - динамически симметричного твердого тела, вращающегося относительно маятника вокруг оси, содержащей центры масс маятника и диска. Положение диска определим при помощи горизонтальных координат центра диска X, Y, углов Эйлера ψ, θ, φ. Введем угол между линией наибольшего ската диска и осью маятника χ, и угол поворота ротора относительно маятника α. Таким образом, положение системы описывается семью обобщенными координатами. Уравнения движения данной системы напишем в форме уравнений Эйлера-Лагранжа в квазикоординатах [1]. Так как диск с острым краем катиться по льду, то скорость точки контакта всегда направлена по линии узлов, то есть имеет место неголономная связь [2]:

$$-\dot{X}\sin(\psi) + \dot{Y}cos(\psi) + \rho\dot{\theta}sin(\theta) = 0,$$

(ρ - радиус диска).

Можно показать, что уравнения движения допускают частные решения, при которых позиционные координаты θ, χ и циклические квазискорости остаются постоянными, которые описывают стационарные движения системы. Шесть параметров, определяющих эти движения, связаны четырьмя соотношениями. Необходимым условием существования многообразия стационарных движений является выполнение равенства $\sin(\rho_0) = 0$, которое означает, что центр масс системы должен принадлежать прямой, содержащей диаметр диска, проходящий через точку касания диска и плоскости, при его выполнении размерность многообразия стационарных движений равна четырем и совпадает с числом циклических координат.

Не исследуя всего многообразия стационарных движений, рассмотрены некоторые наиболее интересные виды стационарных движений, в частности, прямолинейное качение моноцикла в вертикальной плоскости со скольжением. Исследована устойчивость этих стационарных движений и сопоставлены полученные условия устойчивости с условиями устойчивости аналогичных движений при отсутствии проскальзывания [2].

Работа выполнена при частично поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00371).

Литература. [1] А. В. Лурье, Аналитическая механика. М.: Физматгиз., 1961. 824с. [2] В. И. Каленова, А. В. Карапетян,В. М. Морозов, М. А. Салмина Неголономные механические системы и стабилизация движений. // Фундаментальная и прикладная математика., 2005. Т. 11, вып. 7, с. 117-158.

ПОЛНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОЙ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ С ЧЕТЫРЬМЯ ПАРАМЕТРАМИ (БИФУРКАЦИИ, АВТОКОЛЕБАНИЯ, АВТОРОТАЦИЯ)

Б. Я. Локшин, В. А. Самсонов
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
blokshin@imec.msu.ru
Москва, РОССИЯ

Рассматривается маятниковая система с позиционно-вязким трением, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -(a + bcosx)y - (c + dcosx)sinx \tag{1}$$

где a, b, c, d — параметры, которые могут принимать любые значения из R. Очевидно, эта система обладает свойством динамической симметрии: каждому движению «в одну сторону» отвечает аналогичное движение в противоположную. Системы такого вида встречаются, например, при изучении колебаний твердого тела в среде [1-3].

В случае $|c| > |d|$ в системе существуют только две неподвижные точки покоя: $O(0, 0)$ и $P(\pi, 0)$. При $|c| < |d|$ существуют еще две точки покоя $Q_{1,2}(\pm\overline{x},\, 0)$, где $\overline{x} = \arccos c/d$. В дальнейшем точку покоя будем отмечать значком $" + "$, если она устойчива, значком $"^{-}"$, если неустойчива (но не седловая), и значком $" \times "$, если она седловая. Чтобы иметь дело с ограниченным геометрическим образом в пространстве параметров, представим параметры в следующем виде

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,\ c = \varrho\cos\psi,\ d = \varrho\sin\psi \tag{2}$$

где r, ϱ, φ, ψ - новые четыре параметра, причем можно, без ограничения общности, считать, что $r \geq 0$, $\varrho \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Очевидно, что при $a > 0$ $(|\varphi| < \pi/2$, см. (2)) система (1) диссипативна в большом ("бесконечность"отталкивает, ∞^-). Если же $a < 0$ $(|\varphi| > \pi/2)$, то бесконечность притягивающая, ∞^+).

Рассмотрим сначала два простых частных случая.

Пусть $\varrho = 0$, $r \neq 0$. Тогда система (1) имеет первый интеграл $y = C - r(x\cos\varphi + \sin x \sin\varphi)$. Фазовые траектории представляют собой "параллельные" синусоиды, вытянутые вдоль прямой, наклон которой определяется значением φ . При этом все точки оси x - точки покоя системы. В случае $a > b > 0$ все эти точки устойчивы. В случае $0 < a < b$ некоторая часть точек, примыкающих к точке P, становятся неустойчивыми. Аналогичный анализ можно провести и для отрицательных значений a.

Пусть теперь $r = 0$, $\varrho \neq 0$. Тогда система (1) имеет первый интеграл: $y^2 = C + 2\varrho\cos x(\cos\psi + \sin\psi\cos x)$. При $|\tan\psi| < 1$ соответствующий фазовый портрет аналогичен портрету классического физического маятника, точки покоя - только O и P. При $|\tan\psi| > 1$ к ним добавляются точки покоя $Q_{1,2}$ седлового типа. Остальные фазовые траектории - замкнутые.

В дальнейшем будем считать, что $r > 0$, $\varrho > 0$.

Для каждой из точек покоя можно произвести разбиение квадрата $\{|\varphi| \leq \pi,\ |\psi| \leq \pi\}$ на области, в которых она устойчива, неустойчива (но не седловая) и седловая. "Складывая" все полученные условия, получим искомое разбиение квадрата на 24 подобласти одинакового сочетания качества точек покоя (типа $\{O^+,\ P^-,\ \infty^+\}$ и т.п.).

Учитывая, что при одновременной смене знаков $\sin\varphi$ и $\cos\psi$ решение $x(t)$ сдвигается на π (и происходят замены $O^* \longleftrightarrow P^*$), вместо полученных 24 подобластей достаточно рассматривать 14 подобластей в $\{0 \leq \varphi \leq \pi,\ |\psi| \leq \pi\}$.

Существенный интерес вызывают замкнутые фазовые траектории, как типа C (циклы, расположенные на развертке фазового цилиндра), так и типа R (циклы, охватывающие фазовый цилиндр). Возникает также вопрос о сосуществовании нескольких аттракторов. Такая ситуация имеет место, например, для области $\{\varphi \in (\pi/2, 3\pi/4), |\psi| < \pi/4\}$, в которой сосуществуют два аттрактора (O^+ и ∞^+). Аналогичный вопрос возникает и относительно существования неустойчивых замкнутых фазовых траекторий в областях с несколькими седловыми точками.

Определение значений параметров, при которых существуют замкнутые траектории, производилось в пакете MatLab . В результате последовательного рассмотрения каждой из 14 подобластей найдены критические значения параметров φ, ψ , при которых происходят перестройки фазовых портретов, в частности, возникают или исчезают замкнутые траектории.

При смене свойства притяжения/отталкивания бесконечности, то есть при переходе через значение $|\varphi| = \pi/2$ возникает цикл типа R. В полосах $|\psi| < \pi/4$ и $3\pi/4 < |\psi| < \pi$ при изменении φ вдоль прямых $\psi = const$ наблюдается переход от цикла R к циклу C. Он происходит одним и тем же способом: через образование петли сепаратрис седловых точек вокруг точки покоя. При некоторых значениях параметров уравнение этой петли имеет вид: $y = 2\sqrt{c + 2a^2}\cos x/2 + 2a \sin x$. Аналогичным образом может быть найдено и уравнение фазовой траектории, описывающей переход между циклами R и в полосе $-3\pi/4 < \psi < -\pi/4$.

В работе [3] рассматривалась задача о колебаниях тела с плоским торцом в условиях струйного обтекания. Задача сводится к уравнениям типа (1) при условии, что $c = ab$. Проведенный анализ показал, что авторотационных режимов в такой системе не существует, а автоколебательные могут существовать в некотором узком диапазоне значений параметров.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 14-08-01130 и 12-01-00364).

Литература. [1] Е. А. Барбашин, В. А. Табуева Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. [2] Б. Я. Локшин, В.А., Самсонов Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ. М.: Изд-во Московского университета, 2012. [3] М. В. Шамолин Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Изд-во "Экзамен 2007.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИССИПАТИВНЫМИ И ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ СИЛАМИ

В. М. Морозов, В. И. Каленова

НИИ механики МГУ

moroz@imec.msu.ru

Москва, РОССИЯ

Для линейных стационарных механических систем влияние сил различной физической природы на устойчивость движения подробно исследовано во многих работах (см., например, [1-5]). В случае нестационарных систем вопросы, связанные с влиянием диссипативных и гироскопических сил на характер устойчивости . практически не исследованы. Для изучения этого влияния на устойчивость нестационарных систем в работе рассмотрен специальный случай, когда многомерная линейная нестационарная система второго порядка приводится при помощи конструктивного преобразования к стационарной системе (см. [6-8], где исследован ряд механических задач, математические модели которых допускают такое приведение).

Сформулирован ряд утверждений о приводимости нестационарных систем рассматриваемого класса к стационарным системам, одно из этих утверждений в том, что системы с нестационарными потенциальными и постоянными диссипативными силами приводятся к стационарным системам, в которых помимо потенциальных и диссипативных сил необходимо возникают еще и гироскопические, и неконсервативные позиционные силы [9].

Сформулированы и доказаны теоремы о влиянии на устойчивость потенциальных нестационарных систем рассматриваемого класса гироскопических и диссипативных сил. Показано, что это влияние существенно отличается от влияния этих сил на потенциальные стационарные системы. Если система стационарна, то, как известно, введение гироскопических сил в устойчивую потенциальную систему не нарушает ее устойчивости. Введение гироскопических сил с постоянной матрицей в нестационарную потенциальную систему рассматриваемого класса может сделать систему независимо от того, была ли эта система устойчивой или неустойчивой до введения гироскопических сил. С другой стороны введение гироскопических сил с постоянной матрицей в устойчивую нестационарную потенциальную систему может привести к неустойчивости, то есть к гироскопической дестабилизации.

Приведены примеры механических систем, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

Работа выполнена при частично поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00371).

Литература.

[1] Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. L.; Cambridge: Univ. Press, 1879. Pt 1. 285p. [2] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535с. [3] Меркин Д.Р. Гироскопические системы. М.: Наука. 1974. 344с. [4] Карапетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т.6. М.: ВИНИТИ. 1983. 123с.. [5] Agafonov S.A. Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems // J. Math. Sci. Dynamical systems II. 2002. V.112. №5. P.4419-4497. [6] Каленова В.И., Морозов В.М.. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 206с. [7] Каленова В.И., Морозов В.М., Соболевский П.М.. Об устойчивости механических систем определенного класса// ПММ. 2008. Т.72. Вып.2. С. 251-259. [8] Каленова В.И., Морозов В.М. О приводимости линейных однородных нестационарных систем второго порядка// ПММ. 2011. Т.75. Вып.6. С. 923-929. [9] Каленова В.И., Морозов В.М. О влиянии диссапативных и гироскопических сил на устойчивость одного класса линейных нестационарных систем // ПММ. 2013. Т.77. Вып.3. С. 386-397.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РАЗНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Ю. М. Окунев, О. Г. Привалова, В. А. Самсонов
НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
privalova@imec.msu.ru
Москва, РОССИЯ

Проводится сравнение областей устойчивости стационарных решений систем, которые описываются комплексными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядка. Для динамических систем разной размерности отсутствуют теоремы сравнения областей устойчивости стационарных решений.

Предлагается геометрический подход, который удобен для сопоставления свойств устойчивости стационарных решений в однотипных задачах с различным числом степеней свободы. Области устойчивости стационарных решений задач разной размерности строятся в одном пространстве комбинаций коэффициентов уравнения, описывающего движение системы меньшей размерности. Это геометрическое представление областей устойчивости позволяет наглядно определить их общие свойства и различия.

Проведено сравнение области устойчивости установившегося свободного падения авторотирующего тяжелого тела в сопротивляющейся среде [1] с областью устойчивости соответствующего режима авторотации, возникающего при решении некоторого класса задач о движении осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде [2, 3]. В этих стационарных режимах относительные движения тела и среды совпадают, но описываются они линейным дифференциальным уравнением с комплексной переменной и постоянными комплексными коэффициентами третьего и второго порядка, соответственно. Установлено, что в задаче о свободном падении авторотирующего тяжелого тела при значениях установочных углов лопастей (которые представляют собой оперение), близких к нулю, вертикальный спуск тела неустойчив.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-08-01130, № 12-01-00364).

Литература. [1] В. А. Привалов, В. А. Самсонов Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации. /Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2, 37-48. [2] О. Г. Привалова, Ю. М. Окунев, В. А. Самсонов Об устойчивости движения осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде. /Вестник НГУ. 2011. №4. (2), 287-289.2. [3] Ю. М. Окунев, О. Г. Привалова, В. А. Самсонов О динамике гироскопических систем. М: Наука. Актуальные проблемы механики. Академик А.Ю. Ишлинский — выдающийся ученый-механик. 2013, 124-128.

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА-НЬЮТОНА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕИСПРАВНОСТЕЙ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Ф. Ф. Родюков
Санкт-Петербургский государственный университет
frodyukov@gmail.com
Санкт-Петербург, РОССИЯ

Универсальные уравнения Лагранжа-Ньютона описаны в монографии автора [1]. Они отличаются от уравнений Лагранжа-Максвелла тем, что обобщёнными скоростями в них являются импульсы тел (а в электромеханике - потокосцепления), а обобщёнными координатами выступают обобщённые импульсы (обобщённые потокосцепления). Соответственно кинетической энергией для них служит квадратичная форма импульсов (потокосцеплений). То же относится и к виду диссипативной функции. В рассматриваемых в докладе математических моделях потенциальная энергия не присутствует, поэтому о ней здесь умолчим.

В настоящем докладе уравнения Лагранжа-Ньютона применяются для математического моделирования неисправностей асинхронного двигателя. Эта проблема сейчас с переводом электрического транспорта с постоянного тока на переменный очень актуальна. Современные же методы обнаружения подобных неисправностей требуют для этого снятия двигателей с подвижного состава. Предлагаемый же метод идентификации неисправностей может применяться непосредственно при рабочих режимах двигателей.

В докладе рассмотрены три типа неисправностей асинхронных двигателей. Первый - это неисправность в одной из фаз статора (короткое замыкание между частью секций одной фазы). Анализ решений соответствующей математической модели, полученной с помощью уравнений Лагранжа-Ньютона, показал, что рассматриваемая неисправность проявляется в том, что в токах фаз статора появляются дополнительные составляющие, пропорциональные удвоенной частоте напряжения сети, то есть частотой 100 Герц.

Второй тип неисправностей - это неисправность в одной из фаз ротора асинхронного двигателя. Анализ соответствующих уравнений Лагранжа-Ньютона показал, что в этом случае в токах фаз статора двигателя появляются дополнительные составляющие с частотой, пропорциональной двойному скольжению ротора двигателя .

Третий тип неисправностей - неравномерность износа подшипников ротора двигателя под действием массы ротора. Анализ соответствующих уравнений Лагранжа-Ньютона показал, что в этом случае в токах фаз статора неравномерность этого износа сверху и снизу практически не сказывается. Только электромагнитный момент на валу двигателя становится чуть меньше. Настолько меньше, что этим тоже можно пренебречь.

Отметим еще, что тяжесть неисправностей как в статоре, так и в роторе характеризуется амплитудой соответствующих наложенных колебаний.

Литература. [1]. Фёдор Родюков. Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.

УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА - НЬЮТОНА ДЛЯ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Ф. Ф. Родюков, А. И. Шепелявый
Санкт-Петербургский государственный университет
frodyukov@gmail.com, as@as1020.spb.edu
Санкт-Петербург, РОССИЯ

Уравнения Лагранжа-Ньютона для синхронного двигателя с демпферными контурами в безразмерной форме возьмём из монографии [1].

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}_x &= -\varepsilon_s \Psi_x + \Psi_y + 1,\\
\dot{\Psi}_y &= -\varepsilon_s \Psi_y - \Psi_x,\\
\dot{x} &= -\varepsilon_{rf} x + sy + \varepsilon_{rf}\Psi_x - u_f \sin\theta,\\
\dot{y} &= -\varepsilon_{rf} y - sx + \varepsilon_{rf}\Psi_y - u_f \cos\theta,\\
\dot{\theta} &= s,\\
\dot{s} &= -\delta\left[2\frac{1-\mu}{\mu}(\Psi_y x - \Psi_x y) - M_l\right].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь Ψ_x, Ψ_y - потокосцепления статорных обмоток двигателя; x, y - магнитоны (магнитные смещения) в статорных обмотках, наводимые в них переменными магнитными потоками в обмотках ротора (их размерность - кулоны); θ - так называемый угол нагрузки; s - скольжение; ε_s, ε_{rf} - сопротивления статорных и роторных обмоток; u_f - напряжение возбуждения, подаваемое на обмотку возбуждения на роторе ($u_f=$ const); δ - электромеханическая постоянная, обратно пропорциональная моменту инерции ротора; μ - коэффициент электромагнитного рассеяни энергии; M_l - момент нагрузки на валу ротора двигателя.

Заметим, что эта математическая модель синхронной машины наиболее точно соответствует физическим процессам в таких машинах, чем все модели, существовавшие до сих пор для них.

Поскольку технологически синхронные двигатели могут включаться в рабочие режимы только после того, как магнитное поле статора установится, то проинтегрируем первые два уравнения системы (1) и подставим установившиеся значения потокосцеплений статорных обмоток в остальные четыре уравнения. При этом учтём малость значений безразмерных сопротивлений ε_s (они являются малыми второго и более высокого порядка малости), поэтому возьмём их в таком виде:

$$\Psi_x = 0,\ \Psi_y = -1. \tag{2}$$

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\varepsilon_{rf} x + sy - u_f \sin\theta,\\
\dot{y} &= -\varepsilon_{rf} y - sx - \varepsilon_{rf} - u_f \cos\theta,\\
\dot{\theta} &= s,\\
\dot{s} &= -\delta\left[-2\frac{1-\mu}{\mu}x - M_l\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая, что параметр δ очень малая величина ($\delta \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$), в последней системе можно осуществить прямое разделение движений на медленные механические и быстрые электрические. Для этого "заморозим" в электрических уравнениях медленные переменные s, θ. Тогда эти уравнения становятся линейными. Очевидно, что их решения устойчивы и достигают своих установившихся значений настолько быстро, что в механических уравнениях медленные переменные практически не успевают измениться. Поэтому в механические уравнения можно подставить только эти установившиеся значения:

$$x = -\frac{1}{\varepsilon_{rf}^2 + s^2}\left[\varepsilon_{rf} u_f \sin\theta + s\left(\varepsilon_{rf} + u_f \cos\theta\right)\right],$$

$$y = -\frac{1}{\varepsilon_{rf}^2 + s^2}\left[-s u_f \sin\theta + \varepsilon_{rf}\left(\varepsilon_{rf} + u_f \cos\theta\right)\right].$$

Окончательно для исследования устойчивости синхронного двигателя с демпферными контурами (для них $\varepsilon_{rf} \sim 10^{-2}$) получаем следующую систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\theta} = s,$$

$$\dot{s} = -\delta \cdot \left[2 \cdot \frac{1-\mu}{\mu}\left[\frac{\varepsilon_{rf} s}{\varepsilon_f^2 + s^2} + \frac{u_f}{\sqrt{\varepsilon_{rf}^2 + s^2}}\sin\theta\right] - M_l\right]. \tag{4}$$

Для этой упрощенной математической модели синхронного двигателя с установившимся полем статора проведен анализ локальной устойчивости рабочего режима при постоянной нагрузке, а для случая холостого хода – глобальной устойчивости.

Литература. [1] Фёдор Родюков. Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.

Ю. Н. РАБОТНОВ И ПРОБЛЕМА ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА

В. И. Ванько
Московский государственный технический университет им. Н Э Баумана
vvanko@mail.ru
Москва, РОССИЯ

Изучение поведения упругопластического стержня в современной (геометрически линейной) постановке началось с работы Ф. Энгессера [1], в которой рассмотрен стержень из материала с линейным упрочнением. Предположив, что при возможном изгибе постоянной силой во всех точках наиболее нагруженного изгибающим моментом поперечного сечения (срединного, в случае шарнирного опирания) происходит активное нагружение, Энгессер ввел понятие касательно-модульной силы. Этот результат вызвал возражение Ф. Ясинского [2]: при продольном изгибе постоянной силой в точках срединного сечения неизбежно появление зоны разгрузки, поэтому в формуле для критической силы должна присутствовать комбинация модулей Юнга и касательного.

В следующей работе Энгессер получил формулу «приведенного» модуля для прямоугольного сечения [3].

Дальнейшее существенное развитие теория продольного изгиба получила в исследованиях Т. Кармана [4]: впервые поставлена задача о влиянии начальных несовершенств на величину критической силы; дана строгая постановка задачи об устойчивости (в смысле Эйлера) упругопластического стержня под действием постоянной силы; построены кривые «$\sigma_{kp} \sim \lambda$» (критическое напряжение - гибкость стержня) для стержней из материалов с любой «$\sigma \sim \varepsilon$» диаграммой; расширены понятия касательного и приведенного модулей на материалы с любой «$\sigma \sim \varepsilon$» диаграммой; разработан алгоритм вычисления приведенного модуля для поперечных сечений любой конфигурации; поставлены уникальные эксперименты на сжатие стержней.

Карманом отмечен следующий факт: экспериментальные точки зависимости «$\sigma_{kp} \sim \lambda$» в основном ложатся на теоретически построенную кривую «критическое напряжение – гибкость», соответствующую касательному модулю.

Этот «парадокс» (см. возражения Ясинского!) объяснен в статьях Ф. Шэнли [5] (стержневая статически определимая модель) и Ю. Н. Работнова [6] (стержень сплошного сечения). Если рассматривать «продолжающееся нагружение» (сила монотонно возрастает), то возможно смоделировать ситуацию, описанную в первой работе Энгессера.

В докладе, в развитие идеи Шэнли–Работнова о продолжающемся нагружении, представлен результат численных исследований процесса выпучивания стержней с начальными прогибами под действием непрерывно возрастающей продольной силы.

Характер протекания процесса (с разгрузкой либо без разгрузки) зависит от величины начального прогиба и от скорости нагружения [7, 8].

Литература. [1] F. Engesser Uber Knickfestigkeit gerader Stabe, Z. Arhitekt und Ingenieur vom Verein zu Hannover. Bd. 35. (1889) S. 455. [2] F. Jasinski Zu den Knickfragen, Schweiz. Bauzeitung. Bd 26 (1895) Heft 24. [3] F. Engesser Uber Knickfragen, Schweiz. Bauzeitung. Bd 28 (1895) Heft 24. [4] Th. von Karman Untersuchungen uber Knickfestigkeit, Collekted works of Th. von Karman. 1 (1956). [5] F. Shanley Inelastic column theory, Journal of the Aeronautical Sci. 14 (1947) 261–267. [6] Ю. Н. Работнов О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности, Инж. сб. 11 (1952) 123–126. [7] В. И. Ванько, Е. С. Перелыгина Упругопластический продольный изгиб: обсуждение классических результатов, Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2 (2012) 9–15. [8] В. И. Ванько, Е. С. Перелыгина О продольном изгибе упругопластического стержня, Прикладная механика и техническая физика. 55 (2014) 66–75.

НОВАЯ ГИПОТЕЗА О ПРИЧИНАХ РАССОГЛАСОВАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

С. Н. Сухинин
Центральный НИИ машиностроения
Ssukhinin@yandex.ru
Королёв, РОССИЯ

Известно, что разница между теоретическими и экспериментальными значениями критических усилий в изотропных оболочках может быть значительной. Наиболее характерны задачи о потере устойчивости изотропных цилиндрических оболочек при осевом сжатии и сферических на действие внешнего давления: разница достигает 2х - 3х раз. В то же время для композитных ортотропных оболочек эта разница находится в пределах 20 - 30%. Было замечено, что при расчетах цилиндрических изотропных оболочек на осевое сжатие и сферических на внешнее давление одной критической силе соответствует бесконечное множество форм волнообразования. В ортотропных оболочках форма волнообразования для каждого критического усилия однозначно определена расчетом.

Сравнительный экспериментально-теоретический анализ позволил высказать следующую гипотезу. Большое различие между теоретическими и экспериментальными значениями критических нагрузок наблюдается в оболочках, где заранее теоретическим путём форма волнообразования однозначно не определяется (например, изотропные цилиндрические оболочки при осевом сжатии или сферические изотропные оболочки при действии наружного давления). В тех же случаях, когда форма волнообразования оболочки однозначно предопределена расчётом, имеет место хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов (цилиндрические оболочки при внешнем давлении, короткие изотропные цилиндрические оболочки при осевом сжатии, ортотропные цилиндрические оболочки при осевом сжатии, вафельные и большинство трёхслойных оболочек, оболочки на упругом основании, пластины, стержни, арки и т.п.). Этим фактам есть также энергетическое обоснование.

Таким образом, на основе сравнительного экспериментально-теоретического анализа установлена закономерность, состоящая в принципиальном влиянии на степень различия между теоретическими и экспериментальными значениями критических нагрузок фактора предопределённости (или неопределённости) теоретической формы волнообразования при потере устойчивости. Нами не обнаружено результатов, опровергающих эту закономерность.

Литература. [1] С. Н. Сухинин Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек, ФИЗМАТЛИТ. (2010) 248.

УСТОЙЧИВОСТЬ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИЗОЛИРОВАННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЯЗКИМ РАССЕИВАНИЕМ ЭНЕРГИИ

Г. Б. Филимонихин, И. И. Филимонихина
Кировоградский национальный технический университет
filimonikhin@yandex.ua, fii@online.ua
Кировоград, УКРАИНА

В идеальном случае космический аппарат (КА), стабилизируемый вращением, в установившемся движении должен вращаться вокруг своей продольной оси, являющейся главной центральной осью инерции [1-10]. Такое движение будем называть основным, а установившиеся движения, в которых КА вращается вокруг не продольной оси – побочными. Из-за неточного придания начального вращения КА возникает угол нутации. Для его устранения используют пассивные демпферы – маятниковые, шаровые, жидкостные и т.д. [1,2]. Следует отметить, что процесс устранения угла нутации быстротечен. Уже за несколько оборотов КА переходные процессы затухают и угол нутации либо устраняется, либо принимает постоянное значение. Неустранимый (остаточный) угол нутации появляется из-за неправильной установки на КА присоединенных тел в виде демпферов, автобалансиров, солнечных батарей, антенн и т.п.

Установлено, что необходимым условием устойчивости основных движений является условие "сплюснутости"КА, то есть продольный осевой момент инерции КА должен быть больше любого поперечного. Такие КА принято называть устойчивыми. Однако практика их использования показывает, что даже в случае "устойчивого"с большим запасом КА может возникать значительный остаточный угол нутации [3,4].

В задачах, изучающих изменение и демпфирование угла нутации, КА моделируются изолированными вращающимися механическими системами с вязким внутренним рассеиванием энергии [1-10]. Такие системы имеют следующие особенности: имеет место закон сохранения движения центра масс ИС (принимается, что он неподвижен) и закон сохранения момента количества движения ИС; на установившихся движениях прекращаются относительные движения ПТ и ВС как одно целое перманентно вращается вокруг неизменного вектора момента количества движения ИС; в подвижной системе координат движение ИС описывается автономной системой нелинейных диференциальных уравнений и стационарные решения этой системы определяют установившиеся движения; ИС допускает существование невозрастающей вдоль траектории движения системы функции, например, полной механической энергии системы; для исследования устойчивости установившихся движений применима теория устойчивости стационарных решений нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений с первыми интегралами, причем устойчивость исследуется, когда константы интегралов не возмущаются.

Авторами учтены особенности указанных ИС [7-10]. Это позволило конкретизировать: введение подвижной системы координат (осей); массо-инерционные характеристики системы относительно подвижных осей; динамические характеристики ИС (момент количества движения, законы сохранения движения центра масс и момента количества движения системы);

функцию Рауса, уравнения Рауса; потенциальную энергию приведенной системы; уравнения стационарных движений; условия условной устойчивости стационарных движений и т.д.

С применением конкретизированной теории получены следующие основные результаты [7-10].

1. Установлено, что ПТ не только увеличивают число возможных установившихся движений ИС, но и сильно сужают область устойчивости в пространстве параметров основного движения. Неправильная установка демпфера, АБ, антенн и т.д. на спутник может привести к неустранимому остаточному углу нутации даже в случае «устойчивого» с большим запасом спутника.

2. Для того чтобы переходные процессы затухали достаточно, что бы только на одно ПТ действовали силы вязкого сопротивления и это тело совершало относительные движения при условии, что НТ не совершает перманентное вращательное движение.

3. Для того, что бы пассивный АБ любого типа устранял угол нутации и статически уравновешивал НТ необходимо и достаточно, что бы НТ было сплюснутым, НТ было неуравновешено только статически, плоскость, в которой АБ уравновешивает НТ совпадала с плоскостью неуравновешенности НТ и расстояние от центра масс НТ до плоскости неуравновешенности не превышала некоторого граничного значения.

4. Два пассивных АБ установленные на разных расстояниях от центра масс НТ на устойчивых установившихся движениях вносят неуравновешенность в систему и поэтому не могут полностью устранить угол нутации. Поэтому даже при выполнении для каждого АБ в отдельности условий п. 3, вместе эти АБ будут создавать неустранимый угол нутации, вызванный неуравновешенностью.

5. Любая частично заполненная жидкостью осесиметричная емкость, установленная соосно продольной оси НТ нарушает устойчивость основного движения.

6. Оценена скорость затухания больших углов нутации при использовании в качестве демпферов угла нутации жидкостных, маятниковых или шаровых АБ.

7. Оценен остаточный угол нутации, возникающий при установке на устойчивый спутник АБ или демпфера угла нутации на расстоянии до центра мас большем гранично допустимого.

Литература. [1] Рейтер Г. С., Томсон У. Т. Вращательное движение пассивных космических аппаратов. М., 1966. [2] Попов В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов. М., 1986. [3] Докучаев Л. В., Рабинович Б. И. Анализ возмущенного движения вблизи границы устойчивости вращающегося КА типа Авроральный зонд проекта ИНТЕРБОЛ. Космические исследования. 1999. Т. 37, № 6. [4] Fonseca I. M., Santos M. C. SACI-2 Attitude Control Subsystem. INPE, Vol. 3, Brasil, 2002. [5] Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. [6] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. [7] Филимонихина И. И., Филимонихин Г. Б. Условия уравновешивания автобалансирами вращающеегося тела в изолированной системе. Прикладная механика. 2007. Т. 43, №11. [8] Горошко О. О., Філімоніхіна І. І. Достатні умови усунення автобалансирами кута нутації незрівноваженого обертового тіла в ізольованій системі. Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2008. №1. [9] Горошко О. О., Філімоніхіна І. І. Умови стійкості основних рухів чотирьох обертових ізольованих систем. Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. 2008. №3. [10] Филимонихин Г. Б., Пирогов В. В., Филимонихина И. И. Дослідження процесу усунення пасивними автобалансирами великих кутів нутації. Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2013. – Т. 6, № 7(66).

МЕТОД ПОЧТИ ЭЙЛЕРОВЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Ю. Хасанов
Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева
info.fmod@kstu-kai.ru
Казань, РОССИЯ

Задача построения первых интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений является и старой и актуальной. История математики знает много примеров удачного и неудачного поисков первых интегралов. Так, до сих пор не найден знаменитый четвертый интеграл дифференциальных уравнений движения твердого тела с одной закрепленной точкой. Не построены также все первые интегралы в классической задаче механики о движении системы, состоящей из n тел.

В этой связи представляется важным развитие методов построения первых интегралов, основанных на применении аппарата почти эйлеровых матриц и современных алгоритмов компьютерной алгебры.

В докторской диссертации И.И. Ахметгалеева впервые было введено понятие о почти эйлеровых решениях нелинейных систем дифференциальных уравнений. Им было предложено искать частное решение системы

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in R^n, \ t \in [t_0, \infty) \tag{1}$$

в виде

$$x = m\,\varphi(t) \tag{2}$$

где m - постоянный n-мерный вектор, $\varphi(t)$ - скалярная функция. Подставляя (2) в (1), получаем

$$m\,\dot{\varphi} = m\,f(m\varphi, t) \tag{3}$$

Система уравнений (3) в случае ее разрешимости позволяет определить постоянный вектор m и скалярную функцию $\varphi(t)$. Отсюда следует, что не всякая система дифференциальных уравнений имеет почти эйлерово решение вида (2). Исследовались системы (1) с различными видами правых частей. В частности, было показано, что кроме очевидных линейных стационарных систем, частные почти эйлеровы решения вида (2) имеют системы с однородными правыми частями:

$$\dot{x} = f(x), \text{ где } f(cx) = c^{\mu} f(x), \ c \in R^1; \ \mu = const \tag{4}$$

В работах И.И.Ахметгалеева и его учеников, было предложено представлять уравнение (1) в виде

$$\dot{x} = A(x,t)x \tag{5}$$

с почти эйлеровой матрицей $A(x,t)$ - нелинейной нестационарной матрицей-функцией, имеющей постоянную матрицу канонического базиса , т.е. матрица удовлетворяет уравнениям:

$$A(x,t) = f(x,t) \tag{6}$$

$$NA(x,t)M = diag\,\{G(x,t)\} \tag{7}$$

Здесь $-$ $(n \times n)$ постоянная матрица канонического базиса для матрицы $A(x,t)$; $N = M^{-1}$; $\{G(x,t)\}$ $-$ $(n \times n)$ диагональная матрица с собственными значениями $G_s(x,t)(s = 1, ..., n)$ матрицы $A(x,t)$.

Из (6) и (7) следует, что собственные значения почти эйлеровой матрицы можно вычислить по формуле

$$G_s(x,t) = \frac{n_s f(x,t)}{n_s x}, \ (s = 1, ..., n) \tag{8}$$

, где n_s - s-тая строка матрицы $N = M^{-1}$.

Основной результат. Если собственные значения (8) системы (5) линейно зависимы, т.е. для некоторых констант $\mu_s = const$ (некоторые из них могут быть равными нулю) выполнено

$$\sum_{s=1}^{n} \mu_s G_s(x,t) \equiv 0, \tag{9}$$

то имеет место алгебраический первый интеграл

$$\prod_{s=1}^{n} (n_s x)^{\mu_s} = C \tag{10}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ХЛАДНИ

А. В. Пан
ТНУ им В.И.Вернадского
a-r-s-e-n@inbox.ru
Симферополь, УКРАИНА

Рассматривается пространство функций w, определённых на прямоугольнике
$|x| < a, |y| < b$, определяющееся условиями:
$\Delta^2 w - \kappa^4 \cdot w = 0,$
$\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\cdot\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}\right)\Bigg|_{x=a} = 0,$
$\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\cdot\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)\Bigg|_{y=b} = 0.$
Рассматривается задача нахождения функции w, отвечающих заданным значениям следующих операторов:
$\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=a}$ и
$\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{y=b}.$
Согласно теории Софи-Жермен, данная граничная задача описывает установившиеся колебания прямоугольной пластинки, служившие материалом для опытов Хладни:
a и b — полуширина и полудлина пластинки, ν — коэффициент Пуассона, κ — частота вынуждающих колебаний.
Вслед за авторами работы [1] выписана бесконечная система и на основе этой бесконечной системы предлагается метод быстрого нахождения резонансных частот и построения соответствующих фигур Хладни

Литература. [1] В. В. Мелешко, С. О. Папков Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней. Акустичний вісник. 2009. Том 12, №4. С. 34—51.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ТЕНЗОРНОМУ АРГУМЕНТУ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ МКЭ

В. В. Чехов
ТНУ им В.И.Вернадского
v_chekhov@ukr.net
Симферополь, АРК

Дифференцирование по тензорному аргументу, введённое в работах А.И. Лурье [1, 2], позволяет придать записям тензорных соотношений компактную форму, исключающую засорение индексными обозначениями В указанных работах аргумент, по которому производится дифференцирование, имеет 2-й ранг. Если аналогично ввести аппарат дифференцирования по тензору первого ранга (вектору) $\vec{r}$, то производные от функции-скаляра a, вектора $\vec{f}$ и тензора 2-го ранга $\mathbf{q}$ будут выглядеть так:

$$\frac{da}{d\vec{r}} = \frac{\partial a}{\partial r^s}\vec{e}^s, \qquad \frac{d\vec{f}}{d\vec{r}} = \frac{\partial f^s}{\partial r^t}\vec{e}_s\vec{e}^t, \qquad \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} = \frac{\partial q^{st}}{\partial r^p}\vec{e}_s\vec{e}_t\vec{e}^p. \qquad \text{В частности, } \frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} = \mathbf{1}.$$

Здесь $\vec{e}^t$ и $\vec{e}_s$ — векторы основного и взаимного базисов. Формулы для производных от сложных функций будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})}{d\vec{r}} = (\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^s)\cdot\mathbf{q}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}, &&\frac{d(\mathbf{p}^{-1})}{d\vec{r}} = -\mathbf{p}^{-1}\cdot(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^s)\cdot\mathbf{p}^{-1}\vec{e}_s, \qquad (1)\\
&\frac{d(a\mathbf{p})}{d\vec{r}} = \mathbf{p}\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}, &&\frac{d(\vec{f}\vec{g})}{d\vec{r}} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^s\vec{g}\vec{e}_s + \vec{f}\frac{d\vec{g}}{d\vec{r}},\\
&\frac{d(a\vec{f})}{d\vec{r}} = \vec{f}\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{d\vec{f}}{d\vec{r}}, &&\frac{d(ab)}{d\vec{r}} = b\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{db}{d\vec{r}},
\end{aligned}$$

Очевидно, что эти соотношения являются корректным обобщением обычных операций дифференцирования по скалярному аргументу. Компактность соотношений (1) полезна при выводе сложных нелинейных соотношений механики. Ещё большая польза ожидается от использования этого аппарата при выводе формулировок метода конечных элементов (МКЭ), когда сложность соотношений механики усиливается сложностью концепций самого МКЭ.

В частности, соотношения (1) оказались очень полезными для решения нелинейной системы уравнений [3], описывающей большие деформации тел из несжимаемых материалов:

$$\begin{cases} \{\vec{K}\Big(\{\vec{R}\},\{p\}\Big)\} + 2\Big([L] + \Big({}^{[4]}[M]\{\vec{R}\}\Big)\cdot\{\vec{R}\}\Big)\{\vec{R}\} - \{\vec{f}\} = \{\vec{0}\};\\ \{B\Big(\{\vec{R}\}\Big)\} = \{0\}. \end{cases}$$

Неизвестными в данной системе являются столбцы $\{\vec{R}\}$ и $\{p\}$. Система имеет нетрадиционную для стандартного МКЭ тензорно-матричную форму, когда компонентами всех её матриц и векторов являются не числа, а тензоры различных рангов. Поэтому, при отыскании матрицы частных производных, необходимой для реализации эффективных методов решения, в качестве самих частных производных оказывается удобно использовать производные по тензорному аргументу. При этом отсутствует необходимость в манипулировании компонентами тензоров, которое в данном случае выполняется автоматически. Результаты решения тестовых задач подтвердили правильность используемого подхода. Следует отметить, что при использовании традиционной чисто матричной формы МКЭ заметно возрастает громоздкость выражений, и становится проблематичным как получение матрицы частных производных, так и запись в этой форме самой системы уравнений.

Литература. [1] А. И. Лурье Дифференцирование по тензорному аргументу. – В кн.: Вопросы математической физики. – Л.: Наука, 1976, с. 48–57. [2] А. И. Лурье Нелинейная теория упругости. Москва, 1980. [3] В. В. Чехов Матричное уравнение метода конечных элементов для несжимаемого материала при больших деформациях // Прикл. механика. — 2010. — 46, №10. — С. 71–77.

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ В ПЛОСКОСТИ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

В. Н. Чехов
ТНУ имени В. И. Вернадского
chekhov40@mail.ru
Симферополь, РОССИЯ

Решение задач о колебаниях в плоскости тонкой изотропной пластины в рамках математической модели обобщенного плоского напряженного состояния приводится [1] к двум двумерным волновым уравнениям

$$\triangle\widetilde{\varphi} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial t^2};\ \ \triangle\widetilde{\psi} = \frac{1-\nu}{2\mu}\rho\frac{\partial^2,\widetilde{\varphi}}{\partial t^2}$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала. Обзор исследований, полученных методом суперпозиции, имеется в [2]. Метод суперпозиции приводит к оценкам решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, следующей из граничных условий.

Для амплитудных значений потенциалов φ, ψ при установившихся колебаниях здесь предлагается новое аналитическое представление решения, которое обеспечивает существование элементарных решений волновых уравнений, соответствующих решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с единичными значениями всех неизвестных. Это дополнительное требование к решениям волновых уравнений позволяет получить аналитические выражения для сумм бесконечных рядов, составленных из коэффициентов бесконечной системы. Коэффициенты полученной бесконечной системы оказались положительными в интервале $0 < L < L_{poz}$. Здесь $L = \omega a\sqrt{(2-2\nu)\rho/\mu}$ – безразмерная частота колебаний. Интервал регулярности бесконечной системы $0 < L < L_{reg}$ содержится внутри интервала положительности коэффициентов (при фиксированном отношении сторон пластины). В частном случае квадратной пластины все уравнения бесконечной системы удовлетворяют условиям регулярности, если $0 < L < \pi\sqrt{1-\nu}$. Частота $L_1 = \pi\sqrt{1-\nu}$ оказывается наименьшей собственной частотой квадратной пластины. Если $L > L_1$, то все уравнения бесконечной системы не удовлетворяют условиям регулярности. Следовательно, полученная здесь бесконечная система не является квазирегулярной ни при каких значений частоты L.

Чтобы найти остальные собственные частоты, необходимо исключить из бесконечной системы конечное множество первых неизвестных. Тогда диапазоны положительности и регулярности увеличиваются. Бесконечная система снова оказывается либо регулярной, либо не удовлетворяет условиям регулярности полностью. Новые собственные частоты находятся на интервале регулярности новой бесконечной системы и совпадают с нулями определителя конечной системы для исключенных неизвестных. В случае квадратной пластины обнаруживается счетное множество $L_m = (2m-1)\pi\sqrt{1-\nu}\quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$ собственных частот с элементарными собственными формами.

$$u^{(m)} = B\sin((m-1/2)\pi x)\cos((m-1/2)\pi y);$$

$$v^{(m)} = -B\cos((m-1/2)\pi x)\sin((m-1/2)\pi y).$$

Для бесконечных систем с положительными коэффициентами построены [3] достаточные условия существования решения, стремящегося к положительному числу. Полученные здесь бесконечные системы удовлетворяют этим условиям, поскольку при специальных свободных членах имеют решения, стремящиеся к единице. Стремление решения бесконечной системы к ненулевому пределу позволяет увеличить точность решения посредством применения метода улучшенной редукции. С другой стороны это свойство позволяет просуммировать во всей прямоугольной области бесконечные ряды.

Исследованы модельные задачи об установившихся вынужденных колебаниях квадратной прямоугольной пластины. Найдены первые 9 собственных частот с помощью исключения шести первых неизвестных. Результаты сопоставлены с опубликованными [4].

Литература. [1] A. C. Eringen, E. S. Suhubi Elastodynamics// New York : Acad. Press. 1975. №2. P. 1003. [2] D. J. Gorman, S. D. Yu A review of the superposition method for computing free vibration eigen values of elastic structures // Computers and Structures. 2012. №104-105. P. 27–37. [3] Б. М. Коялович Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. №3. С. 41–167. [4] D. J. Gorman Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition// Journal of Sounds and Vibration. 2004. №272. P. 831–851.

NON-LINEAR VIBRATIONS OF DOUBLY CURVED SHALLOW SHELLS

M. Amabili, R. Garziera
Universita di Parma
marco.amabili@unipr.it, rinaldo.garziera@gmail.com
Parma, ITALY

Large amplitude (geometrically non-linear) vibrations of doubly curved shallow shells with rectangular base, simply supported at the four edges and subjected to harmonic excitation normal to the surface in the spectral neighbourhood of the fundamental mode are investigated. Two different non-linear strain-displacement relationships, from the Donnell's and Novozhilov's shell theories, are used to calculate the elastic strain energy. In-plane inertia and geometric imperfections are taken into account. The solution is obtained by Lagrangian approach. The non-linear equations of motion are studied by using a code based on arclength continuation method that allows bifurcation analysis and direct time integration. Numerical results are compared to those available in the literature and convergence of the solution is shown. Interaction of modes having integer ratio among their natural frequencies, giving rise to internal resonances, is discussed. Shell stability under static and dynamic load is also investigated by using continuation method, bifurcation diagram from direct time integration and calculation of the Lyapunov exponents and Lyapunov dimension. Interesting phenomena such as snap-through instability, subharmonic response, period doubling bifurcations and chaotic behavior have been observed.

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

А. Д. Ляшко
ТНУ им В.И.Вернадского
knightla@yandex.ru
Симферополь, РОССИЯ

В постановке плоской деформации получено новое представление решения задачи теории упругости о вынужденых установившихся колебаниях прямоугольной призмы при заданных нормальных и нулевых касательных напряжениях на границе. Для получения общего решения построим потенциалы Ламе на основе метода суперпозиции в форме тригонометрических рядов

$$\phi = -2\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{(-1)^n}{p_{1,n}} \frac{\sinh(p_{1,n}y)}{\cosh(p_{1,n}\eta)} \cos(\alpha_n x) - \frac{2}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{(-1)^n}{q_{1,n}} \frac{\cosh(q_{1,n}x)}{\sinh(q_{1,n})} \sin(\beta_n y) - \frac{x_0}{\Omega_1}\frac{\sin(\Omega_1 y)}{\cos(\Omega_1 \eta)};$$

$$\psi=-4\sum_{n=1}^{\infty}x_n\frac{(-1)^n\alpha_n}{\alpha_n^2+p_{2,n}^2}\frac{\cosh\left(p_{2,n}y\right)}{\cosh\left(p_{2,n}\eta\right)}\sin\left(\alpha_n x\right)-\frac{4}{\eta}\sum_{n=1}^{\infty}y_n\frac{(-1)^n\beta_n}{\beta_n^2+q_{2,n}^2}\frac{\sinh\left(q_{2,n}x\right)}{\sinh\left(q_{2,n}\right)}\cos\left(\beta_n y\right),$$

где $\alpha_n=\pi n$, $\beta_n=\frac{(2n-1)\pi}{2\eta}$, $p_{l,n}^2=\alpha_n^2-\Omega_l^2$, $q_{l,n}^2=\beta_n^2-\Omega_l^2(l=1,2)$, $\Omega_1=\frac{\omega}{c_1}$, $\Omega_2=\frac{\omega}{c_2}$.

Коэффициенты рядов определяются из парной квазирегулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно x_n, y_n. Особенностью данного представления является то, что при подстановке $x_0=x_i=y_i=1(i=1,2,3,...)$ получаются следующие тождества:

$$\phi=0;\psi=\frac{\sin(\Omega_2\frac{x}{\sqrt{2}})\cos(\Omega_2\frac{y}{\sqrt{2}})}{\sin(\Omega_2\frac{1}{\sqrt{2}})\cos(\Omega_2\frac{\eta}{\sqrt{2}})}$$

Было установлено, что решение системы стремится к некоторой константе, таким образом для решения системы хорошо использовать метод улучшенной редукции. С помощью данного выбора представления решения простым способом получены суммы коэффициентов в строках бесконечной системы, которые необходимы для исследования регулярности системы, а также при её решении. Произвести улучшение сходимости рядов для нормальных и касательных напряжений во всей области.

Чтобы найти предел для неизвестных системы, предлагается воспользоваться известными напряжениями на границе. Потребуем, чтобы разность нормальных напряжений в угловой точке совпадала с соответствующим значением из граничных условий. Данный метод позволяет с большой точностью определять предел, достаточно оставлять 20-30 уравнений, чтобы иметь точность 3-4 знака после запятой. Этот факт можно использовать для выделения части собственных частот, поскольку при приближении к ним предел неограничено увеличивается по модулю. С помощью описанного метода найдены первые собственные частоты для различных соотношений сторон призмы.

Литература. [1] В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫПУЧИВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С НЕОСЕСИММЕТРИЧНОСТЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Р. Ф. Мухутдинов, Ф. Г. Шигабутдинов
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ktm80@yandex.ru, shigfg@mail.ru
Казань, РОССИЯ

Ударные воздействия испытывают оболочки, используемые как в машиностроении, так и в строительстве. Например, удары возникают при посадке различных летательных аппаратов, удары испытывают и различные строительные конструкции при нештатных режимах эксплуатации. На несанкционированный удар рассчитываются защитные оболочки атомных реакторов, контейнеров для перевозки отходов атомной энергетики.

В данной работе рассматривается продольный удар абсолютно твердым телом по упругим ортотропным цилиндрическим и коническим оболочкам переменной толщины в неосесимметричной постановке. В принятой постановке задачи толщина оболочек является функцией продольной и окружной координат, и описывает симметричное распределение материала оболочки по отношению к поверхности приведения. Дифференциальные уравнения движения тонкой цилиндрической и конической оболочки по модели типа Тимошенко в геометрически нелинейной постанове, учитывающие сдвиг и инерцию вращения, для переменной толщины получены из уравнений К.З. Галимова [1]. Геометрия конических оболочек вводится аналогично [2]: определяется некоторый "основной" цилиндр и рассматриваются конические поверхности, образующие которых проходят через среднее сечение оболочки под различными углами к образующей цилиндра. Некоторые результаты исследований авторов в области выпучивания неосесимметричных изотропных цилиндрических оболочек были опубликованы в [3] и [4]. При реальной эксплуатации объектов не всегда происходит полное соприкосновение ударяемого тела и торца оболочки, используемые уравнения движения и алгоритм позволяют рассматривать задачи, при которых удар воспринимает лишь часть торцевого сечения как в работе [5].

Системы из пяти дифференциальных уравнений неосесимметричных движений цилиндрической и конической оболочки в частных производных, а также соотношения физического закона упругости записывались в виде явной конечно-разностной схемы. Значения безразмерных шагов сетки выбирались из соображений устойчивости разностной схемы и соответствуют рекомендациям работы [6]. Проводился анализ устойчивости решения при различных шагах по пространственным и временной координатам. С той же целью при тестировании разностной схемы и метода решения счет проводился до значений времени, соответствующего времени 24 пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях наблюдалась устойчивость счета. Были проделаны расчеты с увеличением скорости удара в предположении о бесконечной упругости материала, при этом получены прогибы равные 1,5–2 толщинам оболочки. При изменении скорости удара счет так же оставался устойчивым. Начальные условия для перемещений и деформаций приняты нулевыми. Длина оболочек во всех случаях принималась равной l = 2м; радиус срединной поверхности равнялся R0 = 1м; скорость удара принималась равной 5м/с. Рассматривались оболочки с двумя видами закреплений: на торце, воспринимающем удар – скользящая заделка, на другом торце – неподвижный шарнир, либо жесткая заделка. Срединная поверхность выбиралась в форме круговой цилиндрической и круговой конической оболочки соответственно. Максимальная толщина оболочек принималась из условий тонкости оболочки и не превышала 0,05м. Отношение модулей упругости равно 0,5; отношение модуля сдвига к большему из модулей упругости было равно 0,4; коэффициенты Пуассона 0,3 и 0,15. Главные оси ортотропии совпадают с направлением главных кривизн оболочки.

Получены формы поперечного волнообразования (прогибы по всей поверхности оболочки) для шести пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях отмечалась устойчивость вычислений. Результаты вычислений показали достаточно высокую чувствительность решений к изменению параметров оболочек, что не позволяет сделать общие замечания о работе оболочек в произвольных случаях. Однако, как общее правило, можно отметить, что процесс выпучивания оболочки носит явно выраженный волновой характер, увеличение толщины оболочки ведет к перегруппировке поперечных волн в зоны с меньшей толщиной. Максимальные прогибы в различные моменты времени фиксируются в различных сечениях оболочки. Картина поперечного волнообразования отстает от изменения в напряженном состоянии из-за движения продольной волны.

Литература. [1] под ред. К. З. Галимова Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань, 1977. [2] А. С. Вольмир Нелинейная динамика пластин и оболочек. Москва, 1972. [3] Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов Неосесимметричные продольно - поперечные движения изотропной цилиндрической оболочки переменной толщины при продольном ударе абсолютно твердым телом. Труды международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике» том 4. Ульяновск, 2006, 308-311. [4] Ф. Г. Шигабутдинов, Р. Ф. Мухутдинов Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной серединной поверхности. Вестник Нижегородского университета им. Н. И.Лобачевского, том IV, Часть 5. Нижний Новгород, 2011, 308-311. [5] Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов К вопросу распространения упругих продольно-поперечных волн, возникающих при продольном ударе абсолютно твердым телом по цилиндрической оболочке постоянной толщины. «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании» Сб. научных трудов. Ульяновск, 2009, 220-225. [6] В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев Вариационно–разностные схемы в нестациоарных волновых задачах динамики пластин и оболочек. Нижний Новгород, 1992.

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Ф. Г. Шигабутдинов, Т. К. Хамитов
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
tagirkx@yandex.ru
Казань, РОССИЯ

В работе представлены результаты решения задач о потере устойчивости упруго-пластических стержней и цилиндрических оболочек. На ударяемом торце стержня или оболочки прикладывается напряжение, превышающее предел текучести материала. Диаграмма сжатия материала моделируется схемой с линейным упрочнением. Применяется теория малых упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина [2]. Напряженное состояние получено с учетом конечности скоростей распространения продольных упругих и пластических волн вдоль элементов.

Немногочисленные эксперименты по потере устойчивости цилиндрических оболочек при продольном ударе за пределом упругости показывают, что потеря устойчивости происходит с образованием одной осесимметричной полуволны у одного из торцов оболочки.

Продольно-поперечные движения представляются в виде двух движений: на первом этапе происходит накопление продольных деформаций сжатия, на втором – потеря устойчивости по осесимметричной форме. Система геометрически и физически линеаризованных уравнений движения оболочки получены с учетом результатов, приведенных в монографии В.И.Королева [3].

Уравнения движения задачи решаются методами разложения искомых функций в ряды Фурье и Бубнова-Галеркина. Критические длины и напряжения находятся из условия равенства нулю частоты колебаний частично сжатых элементов в момент потери устойчивости (статический критерий). В качестве примеров взяты стержни и оболочки из дюралюминия Д16Т [4]. Исследовано влияние касательного модуля, граничных условий и скорости нагружения на критические длины потери устойчивости.

Литература. [1] А. С. Вольмир Нелинейная динамика пластинок и оболочек, М., Наука. (1972) 432. [2] А. А. Ильюшин Пластичность, М.: Гостехиздат. (1948) 376. [3] В. И. Королев Упругопластическая деформация оболочек, М., Машиностроение. (1971) 304. [4] А. С. Вольмир Устойчивость деформируемых систем, М.: Наука. (1967) 984.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА БЕЗ УЧЕТА ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ

Г. В. Дружинин, Н. М. Бодунов
КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева
druzhinin.1944@mail.ru, bodunov_nm@mail.ru
Казань, РОССИЯ

Приведен алгоритм нахождения новых аналитических решений уравнений Навье-Стокса без учета инерционных сил, который основан на обезразмеривании и преобразовании исходных уравнений с помощью группы непрерывных преобразований растяжения и переноса по зависимым и независимым переменным к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим ее интегрированием. Дана методика нахождения полиномиальных решения любого порядка преобразованной системы уравнений, а в итоге и исходной системы уравнений. Полученные аналитические решения уравнения Навье-Стокса могут быть использованы в практических задачах аэро-гидродинамики.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА-БРИНКМАНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ТРАНСФЕРНОГО ФОРМОВАНИЯ

Г. В. Дружинин, Н. М. Бодунов, П. В. Бреховских
КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева
druzhinin.1944@mail.ru, bodunov_nm@mail.ru
Казань, РОССИЯ

В работе процесс течения вязкой несжимаемой жидкости через пористую среду рассматривается в рамках математической модели Бринкмана. Эта наиболее сложная модель пористого слоя, однако, она имеет практические преимущества и наиболее ясный физический смысл, учитывая все особенности течения внутри пористого слоя.

Для решения исходной системы уравнений для плоских стационарных и нестационарных течений в замкнутой ограниченной области с соответствующими начальными и граничными условиями предложен численно-аналитический метод решения, основанный на аппроксимации искомого решения системой базисных функций.

Алгоритм решения уравнений Навье-Стокса-Бринкмана следующий. После обезразмеривания этих уравнений и исключения из нее давления, получим преобразованную систему уравнений относительно составляющих скорости u и v. Выражения для продольной и поперечной компоненты скорости потока жидкости при стационарном и нестационарном течении ищем в виде базисных функций, которые тождественно удовлетворяют преобразованной системе уравнений. Далее, подставив выражения составляющих скорости u и v в исходные уравнения, после целого ряда преобразований, найдем однозначное выражение для давления p. Таким образом, найденные компоненты скорости и давление тождественно удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса-Бринкмана. Неизвестные коэффициенты, входящие в аналитическое решение определяются из начальных и граничных условий с помощью метода коллокаций или метода взвешенных невязок. В работе приведено доказательство теоремы о существовании решения уравнений Навье-Стокса-Бринкмана. Результаты работы применены для получения полимерных композиционных материалов методом пропитки под давлением (RTM) и моделирования различных фильтрующих устройств.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОЛЯ ВО ВРЕМЕНИ И ПРОСТРАНСТВЕ, ЕСЛИ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ, ТО ЯВЛЯЕТСЯ ЗАКОНОМ ПРИРОДЫ.

В. И. Кляцкин
Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН
klyatskin@yandex.ru
Москва, РОССИЯ

…
Хаос есть место, вмещающее в себя целое.
Именно, если бы он не лежал в основании,
то ни земля, ни вода, ни прочие элементы,
ни весь космос не могли бы и возникнуть.
…

Секст Эмпирик, Сочинения в двух томах, ред. А.Ф. Лосев,
т. 1, Две книги против физиков, с. 318, М.: Мысль,1976.

В стохастических, параметрически возбуждаемых динамических системах, в отдельных реализациях положительного случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$ может происходить явление кластеризации в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация случайного поля — это возникновение компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими их значениями. Естественно, что традиционные статистические характеристики (типа моментных и корреляционных функций любого порядка) не отражают явления кластеризации. И если кластеризация осуществляется в пространстве, то это происходит в конкретных реализациях почти всегда, т.е. с вероятностью единица, и характеризуется для пространственной однородной статистической задачи следующими свойствами:

1. С течением времени поле почти во всех точках пространства убывает (разумеется, с какими-то флуктуациями). Характерное время убывания поля, при этом, описывается равенством $\alpha t \sim 1$, где параметр α является Ляпуновским характеристическим параметром.

2. Но, при этом в самом пространстве $\{\mathbf{r}\}$ возникают области малого объема, где это поле кластеризуется. При этом стохастическое структурообразование обусловлено диффузией случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$ в своем фазовом пространстве $\{f\}$. В этом случае кластеризация поля любой природы $f(\mathbf{r}, t)$ является общим свойством динамических полей, и можно сказать, что структурообразование для любых таких случайных полей — закон природы.

На начальном этапе пространственно-временной эволюции динамической системы, описываемой уравнениями в частных производных, параметрически возбуждаемое положительное случайное поле $f(\mathbf{r}, t)$, любой природы, является логнормальным и для него формулируются условия, при которых кластеризация осуществляется.

Отметим также, что имеет место следующая теорема:

Теорема. *Консервативное положительное параметрически возбуждаемое случайное логнормальное поле в статистически однородной задаче всегда кластеризуется с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций этого поля.*

При этом, для консервативного поля $f(\mathbf{r}, t)$ характерное время образования кластерной структуры в пространстве $\alpha t \sim 4$, что в четыре раза превышает характерное время убывания поля в почти каждой точке пространства.

Такие задачи возникают в гидродинамике, магнитной гидродинамике, физике плазмы, астрофизике и радиофизике. Примечательно, что эти условия имеют прозрачный физико-математический смысл, и они описываются на элементарном математическом уровне на основе идей статистической топографии.

Работа проводилась при поддержке РФФИ (проект №13-05-0004).

Литература. [1] V. I. Klyatskin Lectures on Dynamics of Stochastic Systems. Boston, MA, 2010. [2] В. И. Кляцкин Очерки по динамике стохастических систем, Серия Синергетика. Москва, 2012. [3] В. И. Кляцкин, В стохастических динамических системах могут образовываться пространственные структуры, благодаря событиям, происходящим с вероятностью, стремящейся к нулю. (Комментарий к статье Г. Р. Иваницкого "XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики"), УФН, 181 (2012) 1235–1237. [4] В. И. Кляцкин, Кластеризация случайного положительного поля как закон природы, ТМФ, 176 (2013), 495–513. [5] V. I. Klyatskin, On the criterion of stochastic structure formation in random media, in Chaos and Complex Systems (Proceedings of the 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium), 69–73 Springer-Verlag, 2013. [6] V. I. Klyatskin, On the Statistical Theory of Spatial Structure Formation in Random Media, Russian Journ. of Math. Phys., 20 (2013), 295–314.

ПРЯМАЯ ОЦЕНКА ПОЛНОГО ЭЛЕКТРОННОГО СОДЕРЖАНИЯ ИОНОСФЕРЫ (TEC) ПО ИСКАЖЕНИЯМ ШИРОКОПОЛОСНОГО РАДИОЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА

А. Г. Виноградов*†, А. Н. Теохаров*

*ОАО Радиотехнический институт имени академика А. Л. Минца,

†Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН

vinogradov@rti-mints.ru, ateokharov@rti-mints.ru

Москва, РОССИЯ

При распространении в ионосфере широкополосный радиолокационный сигнал претерпевает дисперсионные искажения. При этом обработка принятого сигнала фильтром, согласованным с излученным сигналом, теряет устойчивость (см. [1]).

При известном значении полного электронного содержания ионосферы (TEC) вдоль траектории сигнала предлагается модифицировать такую обработку путем коррекции фазы для каждой частотной гармоники согласованного фильтра. Такая коррекция требует знания TEC ионосферы, измерение и оценка которого является непростой задачей. Например, измерения сигналов от ИСЗ навигационных систем (GPS, ГЛОНАСС) требует точной калибровки фаз, радиозатменные методы дают фрагментарные оценки значений TEC на траекториях, касательных к земной поверхности, радиотомографические методы требуют большого объема данных и больших ресурсов при обработке.

Здесь для оценки TEC предлагается использовать интерполяционную процедуру оценки точностной характеристики принятого сигнала, обработанного в ряде фильтров, подстроенных для ряда значений TEC с выбранным шагом вблизи выбранного начального значения. В качестве такой характеристики сигнала на выходе фильтра можно использовать уровень главного пика функции корреляции или его мощность. При этом в качестве оценки использовать интерполяционное значение TEC, когда выбранный параметр достигает максимального значения.

Устойчивость оценки TEC по такой методике зависит от удачного выбора начального значения и шага TEC. В качестве начального значения предлагается выбрать значение TEC, рассчитанное на основе глобальной модели ионосферы IRI (или ее модификации) вдоль траектории сигнала. В подавляющем большинстве случаев эта модель дает погрешности, не превышающие 20%, хотя во время сильных возмущений погрешности могут быть и выше.

Шаг значений TEC выбирается исходя из начального значения TEC и параметров сигнала; в частности, он должен уменьшаться (обратно пропорционально) с увеличением полосы частот сигнала.

Литература. [1] А. Г. Виноградов, А. Н. Теохаров, Оценки влияния ионосферных неоднородностей на устойчивость характеристик принятого широкополосного сигнала, данный сборник

ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИНЯТОГО ШИРОКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА

А. Г. Виноградов[⋆†], А. Н. Теохаров[⋆]
[⋆]ОАО Радиотехнический институт имени академика А. Л. Минца,
[†]Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН
vinogradov@rti-mints.ru, ateokharov@rti-mints.ru
Москва, РОССИЯ

При распространении в ионосфере широкополосный радиолокационный сигнал испытывает искажения, связанные с дисперсионными свойствами ионосферной плазмы. В практически важных для большого числа приложений диапазонах волн - метровом и дециметровом - повышаются требования к точности радиолокационных измерений, что приводит к необходимости использования широкополосных сигналов (ЛЧМ, ФКМ, ЧКМ) с шириной полосы частот до 20% от несущей. В указанных диапазонах волн для оценок используется асимптотическая коротковолновая модель распространения (ГО), в которой влияние ионосферы в основном сказывается на дисперсионных (частотных) искажениях фазы сигнала.

Стандартным методом повышения точностных характеристик (отношения сигнал/шум, временного разрешения), является согласованная фильтрация принятого широкополосного сигнала; выход такого фильтра дает функцию корреляции принятого и излученного сигналов.

Дисперсионные искажения в ионосферном канале приводят к следующим эффектам:

– запаздывание сигнала, связанное с замедлением распространения в диспергирующей среде;

– снижение амплитуды и мощности главного пика функции корреляции на выходе фильтра, что приводит к снижению отношения сигнал/шум;

– уширение главного пика функции корреляции, приводящее к ухудшению временного разрешения сигнала.

– При достаточно сильных возмущениях ионосферы сигнал на выходе фильтра теряет устойчивость, главный пик рассыпается, что не дает возможность корректно оценить требуемые характеристики сигнала.

В рассмотренной модели влияние дисперсионных искажений фактически зависит от одного параметра - полного электронного содержания ионосферы вдоль траектории распространения сигнала (TEC).

Результаты моделирования распространения сигналов с указанными характеристиками показывают, что для возмущенной и сильно возмущенной ионосферы согласованная обработка теряет устойчивость и при обработке необходимо корректировать параметры фильтра.

К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА: ПРОБЛЕМА УПРАВЛЯЕМОСТИ

Ф. Т. Валишин, Н. Т. Валишин
ФМЦ-Динамизм АН РТ, КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева
vnailt@yandex.ru
Казань, РОССИЯ

«Только в полете живут самолеты.»

Из авиационной лирики

Рассматривая проблематику Метода необходимо идти не только в сторону приложений, но следуя требованиям Четаева, не терять зов самой Науки. Именно по такому зову Четаев сформулировал Постулат Устойчивости и установил, что вся существующая наука базируется на этом Постулате и что имен-но это обстоятельство приводит к сужению класса научных теорий, к кризису оснований науки. Он же обозначил возможность преодоления этого кризиса — поставил вопрос о срочной необходимости построения науки на базе неустойчивых движений [1].

Задачи динамики полета и их решения удовлетворяют требованиям запро-са Четаева, но эти задачи в основном решаются только на эмпирическом уровне самим авиаконструктором, в особенности это касается такой задачи динамики полета как проблема управляемости.

А теоретическая ситуация здесь такова: проблема управляемости в структуре задач динамики полета [2] не прозрачна для постановки Калмана по проблеме управляемости; ближе к этому подход Коробова, но и здесь вопрос о природе функций управляемости (Θ-функции) остается открытым, расширяя наряду с функцией Ляпунова, с функцией Понтрягина (Ψ-функции), с функцией Беллмана спектр предпосылок волновых измерений в основаниях Науки. Сама же волна зарождается как превращение неустойчивости в момент управляемости, что особенно наглядно демонстрирует природа самого полета. А прямая-обратная задача динамики полета входит в спектр предпосылок Постулата Динамизма, на базе которого строится траекторно-волновая динамика [3].

Литература. [1] Н. Г. Четаев Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд. АН СССР. (1962). [2] И. В. Остославский, И. В. Стражева Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. (1965). [3] Н. Т. Валишин Метод V-функции и задачи траекторно-волновой динамики, Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции. 1 (2012).

МЕТОД V-ФУНКЦИИ: ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

Н. Т. Валишин
КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева
vnailt@yandex.ru
Казань, РОССИЯ

Из формулировки локального вариационного принципа (ЛВП) и новой постановки прямой и обратной задачи динамики (метод V-функции) [1] следует, что траекторное движение объекта, которое описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ – вектор фазовых координат, $x \in R^n$, сопряжено волновым движением, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \dot{x}^T W \dot{x} = 0, \;\; W = \left[\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right], \tag{2}$$

где $V(x,t)$ – однозначная, конечная, кусочно-непрерывная функция (V-функция) ($x \in R^n$, $t \in T$), дополненные граничными и начальными условиями для волны и траектории объекта

$$V(x,t)|_{t=0} = V(x,0) = 0, \tag{3}$$

$$V(x,t)|_{x=x_M} = V(x_M,t) = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_M} = k_2 \dot{x}|_{x=x_M}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_1. \tag{6}$$

Следует также отметить, что такая постановка тесно связано с исследованиями Б. Н. Родимова [2].

Рассмотрим движение объекта в потенциальном поле, а именно в поле кулоновской силы. В этом случае уравнения (1) и (2) можно свести к одному уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{2(E + Ze^2/r)}{m} \triangle V = 0, \tag{7}$$

где $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, m – масса объекта (частицы), E – полная энергия объекта (частицы), $U(r) = -Ze^2/r$ – потенциальная энергия водородоподобного атома.

Применив метод разделения переменных к уравнению (7) ($V = X(x, y, z)T(t)$), получим следующее стационарное уравнение

$$\left(-\beta_0^2 + \frac{\alpha}{r}\right) \triangle X + \omega^2 X = 0, \tag{8}$$

где $\beta_0^2 = -\frac{2E}{m}$, $\alpha = \frac{2Ze^2}{m}$. В уравнении (8) перейдем к сферической системе координат, применим также метод разделения переменных ($X = R\Phi\Theta$) и рассмотрим уравнение для радиальной составляющей:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{r^2\omega^2}{-\beta_0^2 + \frac{\alpha}{r}} R - l(l+1)R = 0. \tag{9}$$

Если в (9) сделать замену $R = u/r$, то получим

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{k_0^2 \alpha}{\alpha - \beta_0^2 r} - k_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u = 0, \tag{10}$$

где $k_0^2 = \frac{\omega^2}{\beta_0^2} = -\frac{\omega^2 m}{2E}$.

Полученное уравнение (10) решается с помощью степенного ряда и численно. Проводится сопоставление с результатами, полученными Бором [3] и Шредингером [4] для водородоподобного атома.

Литература. [1] N. T. Valishin A Method of V-Function and the Problems of Trajectory-Wave Dynamics, World Applied Sciences Journal 24 (7) (2013) 937-943. [2] Б. Н. Родимов Автоколебательная квантовая механика. Физико-математическое наследие: физика (квантовая механика) (2010) 416. [3] N. Bohr On the constitution of atoms and molecules., Philosophical Magazine. 26 (1913) 1-25, 476-502, 857-875. [4] E. Schrodinger Quantisierung als Eigenwertproblem, (I Mitt) Annalen der Physik, 1926, Bd 79, S.361-376; (II Mitt) - Ibid., S.489-527; (III Mitt) - Ibid., Bd 80, S.437-490; (4 Mitt) - Ibid., Bd 81.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ В ВИДЕ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. В. Серегина, М. А. Степович, А. М. Макаренков*, М. Н. Филиппов⋆, Е. В. Платошин

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского,*Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана,⋆Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН

evfs@yandex.ru

Калуга, ⋆Москва, РОССИЯ

Рассмотрены некоторые возможности использования новых методов аппроксимации ступенчатых функций, основанных на использовании тригонометрических выражений в виде рекурсивных функций [1], на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами [2], описывающего явление диффузии неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) в двухслойном полупроводнике. Проведено сравнение численного решения методом конечных разностей уравнения диффузии ННЗ с аппроксимирующими функциями и точного аналитического решения этого уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. Показано влияние аппроксимаций на результат.

Новые методы аппроксимации ступенчатых функций не имеют традиционных недостатков при разложении этих функций в ряды Фурье, и могут быть использованы при решении любых дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами, а также уравнений, содержащих дельта–функцию.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.6107.2011), а также Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 14-42-03062).

Литература. [1] С. В. Алюков, Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования, Математическое моделирование. 23 3 (2011) 75-88. [2] М. А. Степович, М. Г. Снопова, А. Г. Хохлов, Использование модели независимых источников для расчета распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком, Прикладная физика. 3 (2004) 61-65.

Авторский указатель

Содержание

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Міжнародна конференція “Метод функцій Ляпунова та його застосування”

Тези доповідей

(Мовою оригіналу)

Відповідальний за випуск: *Штогрін Д. Л.*
Верстка: *Анашкін О. В.*

Підп. до друку 05.09.2014 р. Формат 60х84/8. Папір офсетний.
Гарн. TimesNewRoman. Ум. друк. арк. 10,46. Замов. № Д-1409012. Тираж 100 прим.

Віддруковано з готового оригінал-макету в поліграф-центрі «КУБ»
95000, м. Сімферополь, вул. Треньова, 1

Міжнародна конференція “Метод функцій Ляпунова та його застосування”: Тези доп.; Алушта, 15-20 вересня 2014 / Таврійський національний ун-т ім. В. І. Вернадського ; відпов. ред. О. В. Анашкін. – Сімферополь, 2014. – 90 с.

В збірнику в авторській редакції опубліковані матеріали, які були подані в Оргкомітет Міжнародної конференції MFL-2014. Тези доповідей містять широке коло проблем другого методу Ляпунова та його застосування до задач стійкості, механіки, оптимального управління, економіки і суміжних питань. До збірника також входять декілька різнопланових доповідей.

ББК 22.236.3   УДК 517.9+539.3+519.6