МГУ имени М. В. Ломоносова

Международная научная конференция
**“Гармонический анализ
и теория интеграла”**,
посвящёная 80-летию
профессора В. А. Скворцова

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАДОНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ХАУСДОРФОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**В. К. Захаров,
А. В. Михалёв, Т. В. Родионов**

24.09.2015

ИСТОКИ ПРОБЛЕМЫ

Проблема характеризации интегралов возникла как только появился *интеграл Римана – Стилтьеса* (1894).

Пусть $BV[a, b]$ — линейное пространство всех *функций* v *ограниченной вариации* на $[a, b]$. Тогда интеграл Римана – Стилтьеса

$$i_v(f) \equiv \int_{[a,b]} f\, dv \quad (v = g_1 - g_2,\ g_i \uparrow)$$

задаёт линейный функционал i_v на линейном пространстве $C_b[a, b]$ всех непрерывных функций на $[a, b]$.

Таким образом мы получаем семейство

$$I\Big(C_b[a, b], BV[a, b]\Big) \equiv \Big\{ i_v|C_b[a, b] \mid v \in BV[a, b] \Big\}$$

интегралов Римана – Стилтьеса на пространстве $C_b[a, b]$. Оно является линейным подпространством линейного пространства $C_b[a, b]^\times$ всех линейных функционалов на $C_b[a, b]$:

$$I\Big(C_b[a, b], BV[a, b]\Big) \subsetneqq C_b[a, b]^\times.$$

ИСТОКИ ПРОБЛЕМЫ

В 1903-04 Ж. Адамар и М. Фреше поставили вопрос:

Как охарактеризовать интегралы Римана – Стилтьеса среди всех линейных функционалов на $C_b[a,b]$ *?*

Хорошо известный теперь ответ был дан Ф. Риссом (1909-14):

$$I\Big(C_b[a,b], BV[a,b]\Big) = C_b[a,b]^{\sim},$$

т. е. *пространство всех интегралов Римана – Стилтьеса на* $C_b[a,b]$ *совпадает с пространством всех ограниченных линейных функционалов на* $C_b[a,b]$.

ИСТОКИ ПРОБЛЕМЫ

Дальнейшее развитие темы связано с появлением меры и интеграла Лебега(–Радона–Фреше).

Мера $\mu : \mathcal{B} \to [x, y] \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченной радоновской мерой*** на топологическом пространстве T, если
$\forall\, B \in \mathcal{B}$ (борелевские) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, G \in \mathcal{G}$ (открытые) $\exists\, F \in \mathcal{F}$ (замкнутые) $(F \subset B \subset G\ \&\ |\mu|(G \setminus F) < \varepsilon)$.

Пусть $RM_b(T)$ — семейство всех таких мер. Тогда *интеграл Лебега(–Радона–Фреше)*

$$i_\mu(f) \equiv \int_T f\, d\mu \quad (\mu = \mu_1 - \mu_2,\ \ \mu_i \geqslant 0)$$

также задаёт линейный функционал i_μ. Теперь мы имеем семейство

$$I\Big(A(T), RM_b(T)\Big) \equiv \Big\{ i_\mu | A(T) \mid \mu \in RM_b(T) \Big\}$$

радоновских интегралов на любом линейном пространстве $A(T)$ универсально интегрируемых функций. Оно является линейным подпространством линейного пространства $A(T)^\times$ всех линейных функционалов на $A(T)$.

ИСТОКИ ПРОБЛЕМЫ

В 1913 г. И. Радон пользуясь указанным свойством мер в $\mathbb{R}^n$ доказал следующую теорему:

Пусть T *— компакт в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$I\Big(C_b(T), RM_b(T)\Big) = C_b(T)^{\sim},$$

т. е. *пространство всех радоновских интегралов на* $C_b(T)$ *совпадает с пространством всех ограниченных линейных функционалов на* $C_b(T)$*.*

После этого результата Радона и работы Фреше по абстрактным мерам (1915) проблема характеризации интегралов как линейных функционалов начала пониматься как *проблема распространения теоремы Радона с* $\mathbb{R}^n$ *на более общие топологические пространства с регулярными мерами*.

Эту проблему естественно называть ***проблемой Рисса – Радона – Фреше характеризации интегралов***.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РАДОНОВСКИХ МЕР НА КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. Сакс (1938) обобщил радоновскую характеризацию на **компактные метрические пространства**.

С. Какутани (1941) распространил её на произвольные **компактные пространства**.

Теорема Радона – Сакса – Какутани.
Пусть T — компактное топологическое пространство. Тогда

$$I\Big(C_b(T), RM_b(T)\Big) = C_b(T)^{\sim},$$

т. е. *пространство всех радоновских интегралов на $C_b(T)$ совпадает с пространством всех ограниченных линейных функционалов на $C_b(T)$.*

Более того, биекция $\mu \mapsto i_\mu|C_b(T)$ является изоморфизмом соответствующих решёточных линейных пространств.

А ЧТО ЖЕ С МЕРОЙ ЛЕБЕГА λ НА $\mathbb{R}$?

Теорема Какутани не затрагивает наиболее известный интегральный функционал $i_\lambda(f) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$, соответствующий мере Лебега $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ на действительно прямой $\mathbb{R}$. Пространство $\mathbb{R}$ некомпактно, а мера λ неограничена, $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$.

Таким образом, требуется распространить предыдущую теорему на неограниченные меры. Для этой цели необходимо ввести общее понятие радоновской меры, включающее как ограниченные радоновские меры на компактных пространствах, так и неограниченную меру Лебега на некомпактном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Цель:

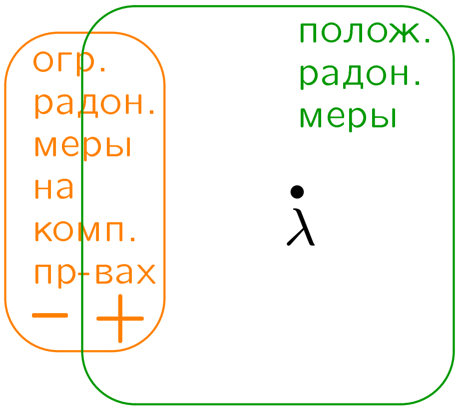
огр. радон. меры на комп. пр-вах (на $[a, b]$)

λ (на $\mathbb{R}$)

ШАГ I: НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАДОНОВСКИЕ МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Первый шаг к цели — введение промежуточного понятия неограниченной положительной радоновской меры.

Шаг I



Свойства меры Лебега λ послужили отправной точкой для определения такой меры на топологическом пространстве T.

Мера $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ называется ***положительной радоновской мерой***, если
– μ конечна на компактных множествах (на $\mathcal{C}$);
– $\mu(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B \;\&\; C \in \mathcal{C}\}$ (*компактная регулярность*).

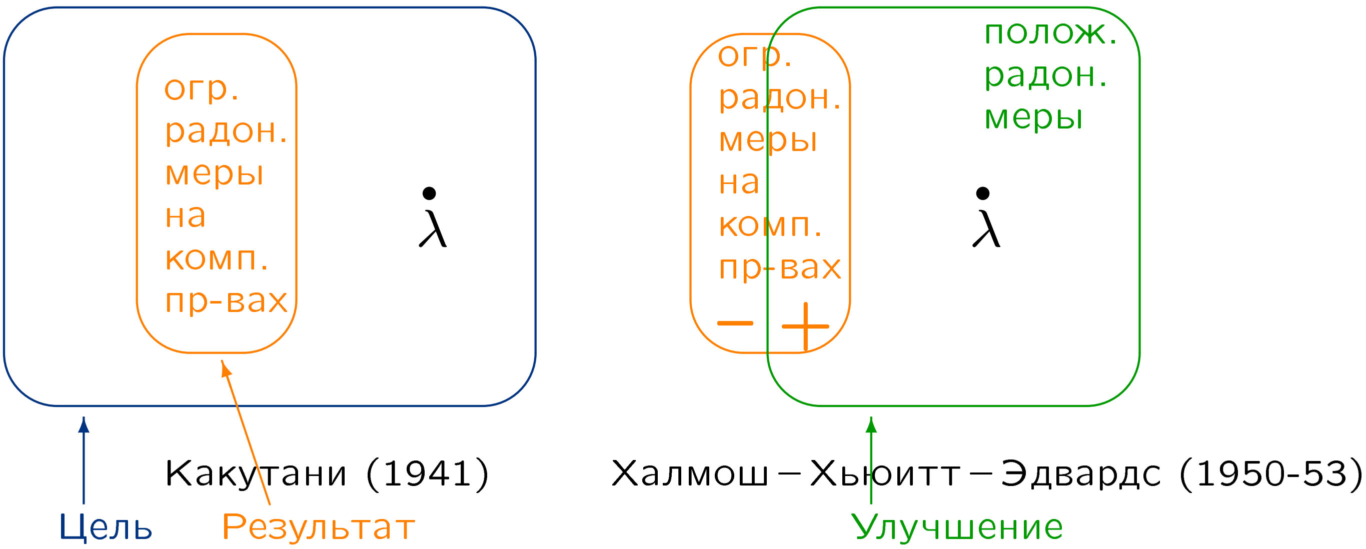
Пусть $RM(T)_0$ — семейство всех таких мер.

ШАГ I: НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАДОНОВСКИЕ МЕРЫ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Халмош, Хьюитт, Эдвардс (1950-53):
*Пусть T — **локально компактное пространство**. Тогда*

$$I\Big(C_c(T), RM(T)_0\Big) = (C_c(T)^{\sim})_+,$$

т. е. *конус всех положительных радоновских интегралов на линейном пространстве $C_c(T)$ всех непрерывных функций с компактным носителем совпадает с конусом всех положительных ограниченных линейных функционалов на $C_c(T)$.*



ШАГ II: ОГРАНИЧЕННЫЕ РАДОНОВСКИЕ МЕРЫ НА ТИХОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К сожалению, все предыдущие описания интегральных семейств, опирающиеся только на **свойство ограниченности линейного функционала**, не годятся для более общих пространств.

А именно, для не локально компактного тихоновского пространства, вообще говоря, классическое равенство Рисса – Радона разрушается, т. е. имеет место неравенство

$$I\Big(C_b(T), RM_b(T)\Big) \subsetneqq C_b(T)^{\sim}.$$

Таким образом, для дальнейшего продвижения в решении проблемы стало необходимым найти новое более тонкое свойство радоновских интегралов.

Н. Бурбаки, опираясь на идеи Ю. В. Прохорова, ввели свойство *узкости* функционала.

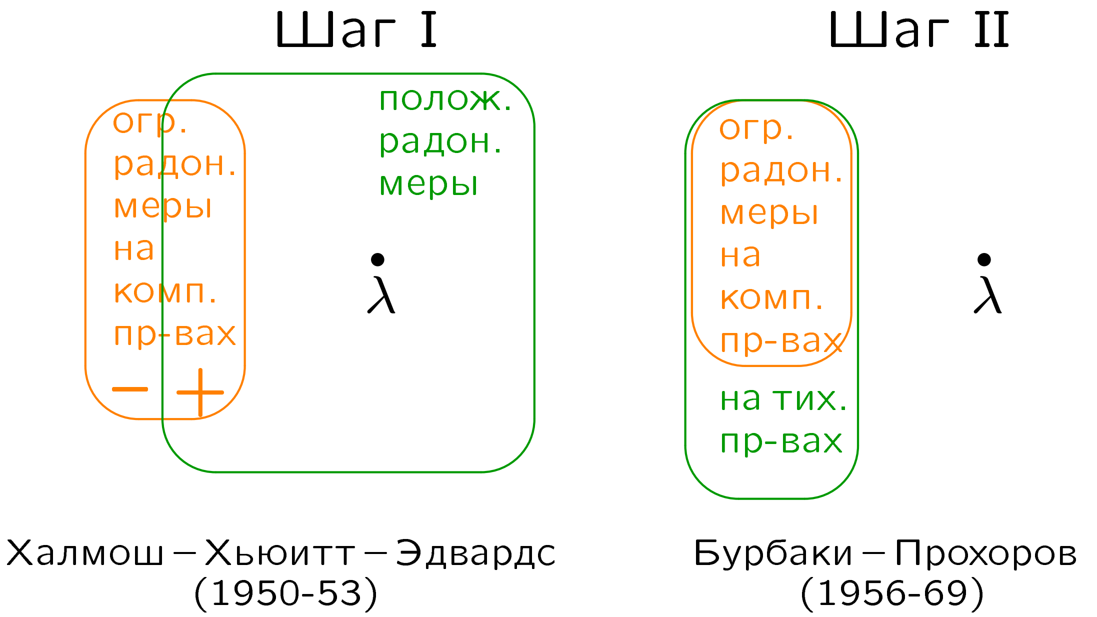
ШАГ II:

ОГРАНИЧЕННЫЕ РАДОНОВСКИЕ МЕРЫ НА ТИХОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейный функционал $\varphi : A(T) \to \mathbb{R}$ называется ***узким***, если
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, C \in \mathcal{C}\; \forall\, f \in A(T)\; \big(|f| \leqslant \chi(T \setminus C) \Rightarrow |\varphi f| < \varepsilon\big)$.

Теорема Бурбаки – Прохорова (1969).

*Если T — **тихоновское пространство**, то*
$$I\Big(C_b(T), RM_b(T)\Big) = C_b(T)^{\pi},$$
т. е. *пространство интегралов на $C_b(T)$ по всем ограниченным радоновским мерам совпадает с пространством всех узких ограниченных линейных функционалов. При этом биекция $\mu \mapsto i_\mu | C_b(T)$ является изоморфизмом.*



ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Однако, для неограниченных положительных радоновских мер даже на тихоновском пространстве проблема оставалась нерешённой по следующей причине:

было неясно, на каком линейном функциональном пространстве $A(T)$ можно рассматривать все положительные радоновские интегралы i_μ.

$$I\Big(A(T), RM(T)_0\Big) \quad \textbf{?}$$

Пространство $A(T) = C_b(T)$ не годится, поскольку $\mathbf{1}$ неинтегрируема относительно неограниченных мер $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$.

На нетихоновском пространстве возможно, что $C(T) = \{r\mathbf{1} \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Пространство $A(T) = C_c(T)$ не годится, поскольку возможен случай $C_c(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Таким образом, не было подходящего подпространства $A(T) \subset C(T)$.

ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Итак, с 1969 наступил этап “охоты” за

1) подходящим определением общей радоновской меры $\mu : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty]$,

2) подходящим линейным функциональным пространством $A(T)$,

3) подходящими линейными функционалами на $A(T)$.

$$I\Big(\underbrace{A(T)}_{?_2}\ ,\underbrace{RM(T)}_{?_1}\Big) \equiv \Big\{i_\mu|A(T) \mid \mu \in RM(T)\Big\} =$$

$$= A(T)^{?_3}.$$

ОБЪЕКТИВНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

Итак, с 1969 наступил этап “охоты” за

1) подходящим определением общей радоновской меры $\mu : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty]$,

2) подходящим линейным функциональным пространством $A(T)$,

3) подходящими линейными функционалами на $A(T)$.

$$I\Big(\underset{?_2}{A(T)}\ ,\underset{?_1}{RM(T)}\Big) \equiv \Big\{ i_\mu | A(T) \mid \mu \in RM(T) \Big\} = \\ = A(T)^{?_3}.$$

Прежде чем перейти к следующему этапу, отметим существенные идейные и технические средства, разработанные П. Даниэлем (1918-21), А. Д. Александровым (1940-43), М. Стоуном (1948-49), Ф. Топсо (1970), Д. Фремлином (1974).

“ОХОТА” ЗА ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Необходимое пространство было введено В. К. Захаровым в 1980-92 гг. Рассмотрим семейство всех ***симметризуемых множеств***

$$\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \text{ открыто и } F \text{ замкнуто}\}.$$

Функция $f : T \to \mathbb{R}$ называется ***симметризуемой***, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое конечное покрытие

$$(K_i \in \mathcal{K} \mid i \in I), \quad \bigcup K_i = T,$$

что для всех $i \in I$ колебания

$$\omega(f, K_i) \equiv \sup\Big\{|f(s) - f(t)| \,\Big|\, s, t \in K_i\Big\} < \varepsilon.$$

Эти функции образуют решёточное линейное пространство $S(T)$, замкнутое относительно равномерной сходимости. Все ограниченные непрерывные и полунепрерывные функции принадлежат $S(T)$ (в том числе $\chi(G)$, $\chi(F)$, $\chi(C)$).

Так как $S_c(T)$ состоит из универсально интегрируемых функций и нетривиально ($S_c(T) \neq \{\mathbf{0}\}$), мы можем использовать как $S_c(T)$, так и другие подпространства $A(T) \subset S(T)$.

“ОХОТА” ЗА ФУНКЦИОНАЛАМИ

Линейный функционал $\varphi : A(T) \to \mathbb{R}$ называется ***локально узким*** (*с локальным свойством Прохорова*), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall G \in \mathcal{G}\ \forall u \in A(T)_+ \\ \exists C \in \mathcal{C}\ \Big(C \subset G\ \&\ \forall f \in A(T) \\ (|f| \leqslant \chi(G \setminus C) \wedge u \Rightarrow |\varphi f| < \varepsilon)\Big).$$

Функционал φ называется *поточечно σ-непрерывным на $A(T)$* (*со свойством Лебега*), если из того, что последовательность $(f_n \in A(T) \mid n \in \mathbb{N})$ поточечно монотонно сходится к $f \in A(T)$, вытекает, что $\varphi f_n \to \varphi f$.

Локально узкий поточечно σ-непрерывный функционал называется **σ-точным**. Семейство всех σ-точных функционалов обозначим через $A(T)^{\triangle}$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАДОНОВСКИХ МЕР НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ХАУСДОРФОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема Захарова — Михалёва (1997).

*Если T — **хаусдорфово пространство**, то*

$$I\Big(S_c(T), RM(T)_0\Big) = \Big(S_c(T)^{\vartriangle}\Big)_+,$$

т. е. *конус всех положительных радоновских интегралов на линейном пространстве $S_c(T)$ всех симметризуемых функций с компактным носителем совпадает с конусом всех положительных σ-**точных** линейных функционалов на $S_c(T)$.*

Кроме того, $I\Big(S(T), RM_b(T)\Big) = S(T)^{\vartriangle}$.

В 2001-02 гг. В. К. Захаров и А. В. Михалёв доказали, что вышеприведённые теоремы Радона – Сакса – Какутани, Халмоша – Хьюитта – Эдвардса и Бурбаки – Прохорова, использовавшие не всё пространство $S(T)$, а только его подпространства $C_c(T)$ и $C_b(T)$, действительно являются следствиями последней теоремы.

ЕДИНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД КО ВСЕМ ТЕОРЕМАМ О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ МЕР

Поскольку $C(T)$ и $S(T)$ весьма различны, было важно сформулировать некоторые абстрактные свойства функциональных пространств $A(T) \subset S(T)$, существенные для характеризации интегральных семейств $I(A(T), RM_b(T))$ и $I(A(T), RM(T)_0)$.

Эти свойства были сначала выделены В. К. Захаровым (2005), а затем их определение было модифицировано В. К. Захаровым, А. В. Михалёвым и Т. В. Родионовым (2009). Пространства $A(T)$ с таким свойствами назовём здесь *существенными*.

“ОХОТА” ЗА ОБЩЕЙ РАДОНОВСКОЙ МЕРОЙ

В. К. Захаров (2002)

Мера $\mu : \mathcal{B} \to [-\infty, \infty[$ $\big($или $\mathcal{B} \to]-\infty, \infty]\big)$ называется ***радоновской мерой***, если

– μ конечна на компактных множествах;

– для каждого $B \in \mathcal{B}$ с $\mu B \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset B$ и $|\mu B - \mu C| < \varepsilon$;

– для каждого $B \in \mathcal{B}$ с $\mu B = \infty$ (соотв., $\mu B = -\infty$) и любого $a \in \mathbb{R}$ найдётся такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset B$ и $\mu C > a$ (соотв., $\mu C < a$).

Это общее понятие поглощает все приведённые выше понятия радоновской меры.

Семейство всех радоновских мер обозначим через $RM(T)$ и рассмотрим **семейство** всех радоновских интегралов $I(A(T), RM(T)) \subsetneq A(T)^{\vartriangle}$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ “ОХОТЫ” ЗА ФУНКЦИОНАЛАМИ

К сожалению на расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, \infty]$ операция

$$\infty - \infty$$

не определена. Поэтому семейство всех радоновских мер $RM(T)$ и соответствующее семейство радоновских интегралов $I(A(T), RM(T))$ не являются линейными пространствами.

В связи с этим, для описания интегрального семейства $I(A(T), RM(T))$ необходимо выделить соответствующее **подсемейство** в линейном пространстве $A(T)^{\vartriangle}$ всех σ-точных линейных функционалов.

Положим

$$\bar{b}(\varphi) \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \ \& \ f \leqslant \mathbf{1}\},$$
$$\underline{b}(\varphi) \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \ \& \ f \leqslant \mathbf{1}\}$$

и рассмотрим семейство всех ***натуральных*** *σ-точных функционалов*

$$\left(A(T)^{\vartriangle}\right)_{\mathsf{nat}} \equiv \left\{\varphi \in A(T)^{\vartriangle} \mid \bar{b}(\varphi) < \infty \text{ или } \underline{b}(\varphi) > -\infty\right\}.$$

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

После завершения вышеупомянутой “охоты” проблема Рисса – Радона – Фреше получила своё полное решение.

Общая теорема
(Захаров, Михалёв, Родионов, 2009).

Пусть T — хаусдорфово пространство и $A(T) \subset S(T)$ — существенное функциональное пространство. Тогда

$$I\Big(A(T), RM(T)\Big) = (A(T)^{\triangle})_{\mathrm{nat}}.$$

При этом биекция $L : \mu \mapsto i_\mu|A(T)$ сохраняет все решёточные и линейные структуры.

Первый результат

огр. радон. меры на комп. пр-вах $\overset{\bullet}{\lambda}$

Радон – Сакс – Какутани (1941)

Конечный результат

огр. радон. меры на тих. пр-вах $\overset{\bullet}{\lambda}$ общ. радон. меры на хаус. пр-вах

Захаров – Михалёв – Родионов (2009)

Таким образом, эта общая теорема завершает **классическую линию Рисса, Радона, Сакса и Какутани.**

Соотношения между семействами функционалов

Для хаусдорфова пространства T:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(A(T)^{\triangle}\right)_{\mathsf{nat}} & \subset & \left(A(T)^{\pi}\right)_{\mathsf{nat}} & \subset & \left(A(T)^{\sim}\right)_{\mathsf{nat}} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
A(T)^{\triangle} & \subset & A(T)^{\pi} & \subset & A(T)^{\sim}
\end{array}$$

Для тихоновского пространства T:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(C_b(T)^{\triangle}\right)_{\mathsf{nat}} & = & \left(C_b(T)^{\pi}\right)_{\mathsf{nat}} & \subset & \left(C_b(T)^{\sim}\right)_{\mathsf{nat}} \\
\| & & \| & & \| \\
C_b(T)^{\triangle} & = & C_b(T)^{\pi} & \subset & C_b(T)^{\sim}
\end{array}$$

Для локально компактного пространства T:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(C_c(T)^{\triangle}\right)_{\mathsf{nat}} & = & \left(C_c(T)^{\pi}\right)_{\mathsf{nat}} & = & \left(C_c(T)^{\sim}\right)_{\mathsf{nat}} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
C_c(T)^{\triangle} & = & C_c(T)^{\pi} & = & C_c(T)^{\sim}
\end{array}$$

Для компактного пространства T:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(C(T)^{\triangle}\right)_{\mathsf{nat}} & = & \left(C(T)^{\pi}\right)_{\mathsf{nat}} & = & \left(C(T)^{\sim}\right)_{\mathsf{nat}} \\
\| & & \| & & \| \\
C(T)^{\triangle} & = & C(T)^{\pi} & = & C(T)^{\sim}
\end{array}$$

СЛЕДСТВИЯ

1. *Пусть* T — *хаусдорфово пространство. Тогда*

$$I(S_c(T), RM(T)) = (S_c(T)^{\triangle})_{\mathsf{nat}}.$$

2 (теорема Захарова – Михалёва). *Пусть* T — *хаусдорфово пространство. Тогда*

$$I(S(T), RM_b(T)) = S(T)^{\triangle}$$

и отображение $\mu \mapsto i_\mu | S(T)$ *есть изоморфизм решёточных линейных пространств.*

3 (теорема Бурбаки – Прохорова). *Пусть* T — *тихоновское пространство. Тогда*

$$I(C_b(T), RM_b(T)) = C_b(T)^{\pi}$$

и отображение $\mu \mapsto i_\mu | C_b(T)$ — *изоморфизм.*

4. *Пусть* T — *локально компактно. Тогда*

(а) $I(C_c(T), RM(T)) = (C_c(T)^{\sim})_{\mathsf{nat}}$,

(б) $I(C_c(T), RM(T)_0) = (C_c(T)^{\sim})_+$ (теорема Халмоша – Хьюитта – Эдвардса).

5 (т-ма Радона – Сакса – Какутани). *Пусть* T — *компактное пространство. Тогда*

$$I(C(T), RM(T)) = C(T)^{\sim}$$

и отображение $\mu \mapsto i_\mu | C(T)$ — *изоморфизм.*

Теоремы 1 и 4(а) являются новыми даже для $T \subset \mathbb{R}^n$.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ

Поскольку, как $RM(T)$ так и $(A(T)^{\triangle})_{\mathsf{nat}}$ не являются линейными пространствами, невозможно прямо доказать сохранение решёточных и линейных структур при биекции L из общей теоремы.

Поэтому авторы использовали продолжение биекции $L : \mu \mapsto i_{\mu}|A(T)$ между $RM(T)$ и $(A(T)^{\triangle})_{\mathsf{nat}}$ до изоморфизма M некоторых решёточных линейных оболочек множеств $RM(T)$ и $(A(T)^{\triangle})_{\mathsf{nat}}$.

$$\begin{array}{ccc} RM(T) & \overset{L}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} & \left(A(T)^{\triangle}\right)_{\mathsf{nat}} \\ \bigcap & & \bigcap \\ \color{red}{\mathbf{?}} & \overset{M}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} & A(T)^{\triangle} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{неизвестная} & & \text{существующая} \\ \text{оболочка} & & \text{оболочка} \end{array}$$

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ

Такая оболочка $RB(T)$ множества $RM(T)$, состоящая из всех *бимер* $\mathfrak{m} \equiv \theta(\mu_1, \mu_2)$ была построена аналогично известным алгебраическим оболочкам

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad \big(z \equiv \theta(n_1, n_2)\big),\\
&\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \big(q \equiv \theta(z_1, z_2)\big).
\end{aligned}
$$

Радоновские бимеры $\mathfrak{m} \equiv \theta(\mu_1, \mu_2)$ были определены В. К. Захаровым и А. В. Михалёвым (1997) как классы эквивалентности пар (μ_1, μ_2) положительных радоновских мер μ_1 и μ_2.

$$
\begin{array}{ccc}
RM(T) & \overset{L}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} & \big(A(T)^{\vartriangle}\big)_{\mathsf{nat}} \\
\bigcap & & \bigcap \\
RB(T) & \overset{M}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} & A(T)^{\vartriangle}
\end{array}
$$

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ

Общая теорема (для радоновских бимер).

Пусть T *— хаусдорфово пространство,* $A(T) \subset S(T)$ *существенное функциональное пространство. Тогда*

$$I\Big(A(T), RB(T)\Big) = A(T)^{\triangle}.$$

При этом биекция $M : \mathfrak{m} \mapsto i_{\mathfrak{m}}|A(T)$ *является изоморфизмом соответствующих решёточных линейных пространств.*

Имея изоморфизм M и равенство $L = M|\,RM(T)$, получаем, что L сохраняет все решёточные и линейные структуры, унаследованные множеством $RM(T)$ радоновских мер и множеством $(A(T)^{\triangle})_{\mathsf{nat}}$ натуральных σ-точных функционалов от их решёточных линейных оболочек.

$C_b(T)$-слабая компактность

На линейном пространстве $RM_b(T)$ для тихоновского пространства T линейное пространство $C_b(T)$ порождает $C_b(T)$-*слабую* ($\equiv$*узкую*) *топологию*. База окрестностей меры μ в этой топологии состоит из множеств вида

$$G_w\Big(\mu, (f_k \in C_b(T) \mid k = 1, \ldots, n), \varepsilon\Big) \equiv$$
$$\equiv \left\{\nu \in RM_b(T) \mid \forall\, k = 1, \ldots, n \ \ \left(\left|\int f_k\, d\nu - \int f_k\, d\mu\right| < \varepsilon\right)\right\}.$$

Теорема Прохорова (1956).

Пусть T — полное сепарабельное метрическое пространство. Множество $M \subset RM_b(T)_+$ является относительно $C_b(T)$-слабо компактным, если и только если M обладает следующими свойствами:

(1^π) *для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество C такое, что $\mu(T \setminus C) < \varepsilon$ для любого $\mu \in M$* (свойство узкости по Прохорову);

(2) $\sup\{\mu T \mid \mu \in M\} < \infty$.

$C_b(T)$-СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ

Теорема Бурбаки – Прохорова (1969).

Пусть T — тихоновское пространство. Если множество $M \subset RM_b(T)_+$ обладает свойствами (1^π) *и* (2), *то M является относительно $C_b(T)$-слабо компактным.*

К сожалению, для тихоновского пространства свойство Прохорова (1^π) не является необходимым.

Более того, для произвольного хаусдорфова пространства T слабую компактностьё относительно $C_b(T)$ рассматривать вообще не имеет смысла, поскольку $C_b(T)$ может состоять только из постоянных функций.

S(T)-СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ

Использованное выше пространство симметризуемых функций $S(T) \supset C_b(T)$ позволяет определить более тонкую $S(T)$-*слабую топологию* на $RM_b(T)$.

С помощью приведённой выше характеризации семейства ограниченных радоновских интегралов $I(S(T), RM_b(T)) = S(T)^{\triangle}$ (Захаров, Михалёв, 1997) доказывается следующая

Теорема 1 (Захаров, 2005).

Пусть T — хаусдорфово пространство. Множество $M \subset RM_b(T)_+$ является относительно $S(T)$-слабо компактным, если и только если M обладает следующими свойствами:

(1) *для любого симметризованного множества $K \in \mathcal{K}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $C \subset K$ такое, что $\mu(K \setminus C) < \varepsilon$ для любого $\mu \in M$* (свойство локальной узкости);

(2) $\sup\{\mu T \mid \mu \in M\} < \infty$.

S(T)-СЛАБАЯ КОМПАКТНОСТЬ

Для тихоновского пространства свойство (1) можно ослабить до свойства узкости по Прохорову (1^π); а именно, с помощью Теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 2 (Захаров, 2005).

Пусть T — тихоновское пространство. Множество $M \subset RM_b(T)_+$ является относительно $S(T)$-слабо компактным, если и только если M обладает следующими свойствами:

(1^π) *для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество C такое, что $\mu(T \setminus C) < \varepsilon$ для любого $\mu \in M$;*

(2) $\sup\{\mu T \mid \mu \in M\} < \infty$.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРОВ ПО ПРОБЛЕМЕ РИССА – РАДОНА – ФРЕШЕ

1. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, "Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве", *Фундам. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 1135–1172.

2. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, "Проблема интегрального представления для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве", *Докл. РАН*, **360**:1 (1998), 13–15.

3. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, "Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:5 (1999), 37–82.

4. В. К. Захаров, "Проблема характеризации радоновских интегралов", *Докл. РАН*, **385**:6 (2002), 735–737.

5. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, "Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 3–18.

6. V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, "Riesz – Radon problem of characterization of Radon integrals". In: *Kolmogorov and contemporary mathematics*, Marcel Dekker, NY, 2003, 260–261.

7. В. К. Захаров, "Проблема Рисса – Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер", *Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова РАН*, **248** (2005), 106–116.

8. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Проблема Рисса – Радона – Фреше характеризации радоновских интегралов: ограниченные меры; положительные меры; бимеры; общие радоновские меры”. В кн.: *Совр. пробл. матем., механ. и их прилож. Матер. межд. конф., посв. 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовничего*, М.: Университетская книга, 2009, 91–92.

9. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Проблема характеризации общих радоновских интегралов”, *Докл.РАН.* **433**:6 (2010), 731–735.

10. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Проблема Рисса – Радона – Фреше характеризации интегралов”, *Успехи мат. наук*, **65**:4 (2010), 153–178.

11. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Характеризация интегралов по всем радоновским мерам на произвольном пространстве”, *Соврем. пробл. матем. и механ.*, **VI**:1 (2011) (К 105-летию С. М. Никольского), 76–89.

12. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Описание радоновских интегралов как линейных функционалов”, *Фундам. и прикл. матем.* **16**:8 (2010), 87–161.

13. В. К. Захаров, А. В. Михалёв, Т. В. Родионов, “Характеризация интегралов по всем радоновским мерам с помощью индексов ограниченности”, *Фундам. и прикл. матем.* **17**:1 (2012), 107–126.