

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 534.2

Анненкова Елена Александровна

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПУЗЫРЬКОВ И
КАПЕЛЬ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Специальность: 01.04.06 – акустика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

Сапожников Олег Анатольевич

МОСКВА – 2018

Содержание

Введение	4
Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ МИЛЛИМЕТРОВОГО РАЗМЕРА В БИОТКАНИ . . .	13
§1.1. Постановка задачи	15
§1.2. Получение диаграмм рассеяния сферического пенопластового образца – модели мягкой сферы	29
§1.3. Моделирование ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей	38
§1.4. Заключение и выводы	56
Глава 2. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ЖИДКОСТИ В ПЕРЕГРЕТОЙ ОБЛАСТИ МАЛОГО РАЗМЕРА	58
§2.1. Обзор литературы опытных наблюдений	59
§2.2. Постановка задачи	62
§2.3. Рост парового пузыря в однородно перегретой жидкости	66
§2.4. Излучение сферических волн растущим паровым пузырем	69
§2.5. Заключение и выводы	70
Глава 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СТОЯЧЕЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОЙ КАПЛЕ	71
§3.1. Теоретическая модель для описания нелинейных стоячих акустических волн внутри жидкой сферы	72
§3.2. Результаты численных экспериментов	81
§3.3. Заключение и выводы	86
Глава 4. ТЕПЛОВЫЕ И КАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАК МЕХАНИЗМЫ ВЗРЫВОВ КАПЕЛЬ В АКУСТИЧЕСКИХ ФОНТАНАХ	88
§4.1. Температура в центре капли акустического фонтана	89
§4.2. Условия для кавитации в центре капли акустического фонтана	91
§4.3. Динамика пузырька в центре капли акустического фонтана	92
§4.4. Явление поверхностной неустойчивости в акустически возбужденной сферической капле	92
§4.5. Заключение и выводы	108
Основные результаты и выводы	111

Благодарности	113
Приложение А. Уравнения для описания сферически-симметричного нелинейного акустического поля в сферическом резонаторе с мягкой границей	114
Публикации автора по теме диссертации	124
Литература	126

Введение

Актуальность темы исследования

Интенсивные ультразвуковые волны находят многочисленные применения в промышленности, медицине и других областях и являются предметом научных исследований уже много десятилетий [1–3]. Одной из важных особенностей таких волн является не только нелинейный характер их распространения, выражающийся в искажении профиля, генерации гармоник, образовании ударных фронтов и других нелинейных эффектах, но и тот факт, что волны при достаточно высокой амплитуде могут изменить и даже разрушить среду. Например, мощные акустические импульсы способны приводить к фрагментации твердых тел. При распространении в жидкости интенсивный ультразвук вызывает акустическую кавитацию – образование газовых пузырьков. Из-за интенсивной диссипации энергии в поле мощной волны может быть достигнута температура кипения, в результате чего образуются пузырьки пара. Когда указанные явления происходят не в жидкости, а в мягких биологических тканях, возникают новые возможности для создания нелинейных режимов как ультразвуковой диагностики, так и терапии. Дополнительные механизмы разрушения среды появляются на границах раздела. Так, уже давно известен откольный механизм фрагментации твердых тел при отражении мощных ударных импульсов от свободных границ. В жидкостях при отражении интенсивных волн от границы с газовой средой может возникнуть распыление (атомизация). Если на границу раздела направить узкий пучок мощного ультразвука, то образуется гидродинамическая струя – так называемый акустический фонтан, в процессе эволюции которого также возникает атомизация. Упомянутые экстремальные явления сопровождаются сильно нелинейными акусто-гидродинамическими и тепловыми эффектами и поэтому достаточно сложны для исследований. В то же время имеется ряд приложений, где указанные явления позволяют разработать новые эффективные подходы, представляющие большой практический интерес.

В настоящее время возрос интерес к неинвазивной диагностике и хирургии, одним из ведущих способов реализации которых является использование ультразвука. Активно ведутся разработки и усовершенствования медицинских приборов нового поколения, среди которых важную роль занимают приборы, применяющие высокоинтенсивный фокусированный ультразвук (HIFU) для разрушения доброкачественных и злокачественных опухолей [4–6], доставки лекарств с использованием контрастных агентов [7] и остановки внутренних кровотечений [8, 9].

Большинство процедур HIFU основано на тепловых эффектах, возникающих в результате поглощения ультразвука в биоткани. Однако существуют механические эффекты, возникающие в результате динамики HIFU-индуцированных пузырьков, которые могут быть использованы для деструкции ткани [10, 11]. Механическое раз-

рушение, как правило, достигается с помощью источников, использующих последовательности импульсов, а не непрерывные сигналы, чтобы минимизировать тепловые эффекты и сделать преобладающим механический эффект от активности пузырьков. Такой способ разрушения ткани получил название «гистотрипсия» [12, 13]. Эмульгирование ткани, получаемое при использовании данного метода, объясняется действием кавитационного облака, которое образуется в фокусе преобразователя. Хотя методы гистотрипсии, основанные на акустической кавитации, представляются многообещающими, существует ряд проблем, связанных с их практическим применением, в основном обусловленных стохастической природой кавитации. Время образования кавитационного облака в ткани не всегда предсказуемо и повторяемо, и кавитационная активность может неожиданно прекратиться во время курса лечения, что приводит к исчезновению кавитационного облака [14].

Таким образом, разработка новых подходов к гистотрипсии, которые позволят получить надежное и воспроизводимое механическое разрушение ткани, представляет значительный интерес. Одним из таких новых подходов является гистотрипсия с кипением, при которой механизм фракционирования ткани основан на образовании в фокальной области HIFU-преобразователя относительно крупных пузырей кипения, внутри которых формируются миниатюрные акустические фонтаны и происходит атомизация. Метод основан на использовании фокусированных нелинейных акустических волн, профиль которых содержит ударные фронты – резкие скачки давления. Высокоинтенсивные короткие (миллисекундной длительности) ультразвуковые импульсы фокусируются внутрь биоткани. В результате эффективной диссипации ударных волн в фокусе происходит локальное взрывное вскипание ткани, и за время порядка нескольких миллисекунд образуется паровая полость миллиметрового размера. При этом исходная перегретая область, соответствующая области фокусировки ударных волн, имеет диаметр около ста микрон, а размер образующейся полости гораздо больше, поэтому при расширении она быстро охлаждается. Теоретическое моделирование роста парового пузырька в таких условиях имеет большое значение для понимания физики процесса.

Внедрение в клиническую практику устройств ультразвуковой хирургии, основанных на использовании мощного фокусированного ультразвука для дистанционного разрушения опухолевой ткани, во многих случаях тормозится сложностью или даже невозможностью контроля ультразвукового воздействия. Для безопасного и эффективного лечения пациентов важно уметь проводить точное прицеливание и постоянное наблюдение в процессе HIFU-воздействия. Успех существующих ультразвуковых методов связан с использованием визуализации HIFU-воздействия с помощью ЯМР-томографии и ультразвука. Ультразвуковая визуализация особенно привлекательна в тех случаях, когда под воздействием мощного ультразвука в биоткани образуются газовые пузырьки, которые, как известно, являются сильными

рассеивателями и поэтому проявляются на яркостном ультразвуковом изображении в виде светлых пятен. В случае гистотрипсии с кипением пузырьки могут достигать миллиметровых размеров. Поэтому актуальной является разработка оптимальных способов обнаружения и визуализации таких рассеивателей.

В ходе исследований физических механизмов разрушения ткани при гистотрипсии с кипением было выявлено, что одним из эффектов здесь является образование миниатюрных акустических фонтанов и атомизация в каплях, на которые такие фонтаны разбиваются в процессе своей эволюции. В этой связи актуальным является исследование процессов, происходящих при акустическом фонтанировании в общем случае. Наиболее просто акустический фонтан наблюдается на границе вода – воздух под воздействием фокусированного ультразвука мегагерцового диапазона частот. Скоростная съемка акустических фонтанов показала, что вскоре после включения источника ультразвука из жидкости вырывается струя, распадающаяся на цепочку из капель одинакового размера. Через некоторое время капли, обычно начиная с самой верхней, начинают терять устойчивость и взрываться, приводя к распылению жидкости. Проведенные недавно разными научными группами экспериментальные исследования поведения капель в акустическом фонтане позволили выявить, что непосредственно перед потерей устойчивости в центре прозрачной капли появляется темная точка, что указывает на возможный разрыв жидкости, т.е. возникновение кавитации. Кроме того, перед началом образования тумана вокруг капель они, как правило, мутнеют, что может быть связано как с появлением облака микропузырей в объеме, так и микромасштабными искажениями поверхности. Теоретическое описание данной задачи не является простым, и получение аналитических решений представляется возможным только в рамках упрощенных моделей. Для более полного описания задачи требуется использование методов численного моделирования.

Метод гистотрипсии с кипением находится пока на стадии лабораторных исследований, в которых особенности ультразвуковой атомизации в режиме сверхбыстрого нагрева изучаются как с использованием гелевых фантомов биоткани, так и в экспериментах на животных. В процессе разработки метода возникают следующие задачи: как обнаружить и определить размер образующихся пузырей кипения, превосходящих по размеру кавитационные пузырьки, но в то же время имеющих размеры меньше разрешающей способности ультразвуковых диагностических датчиков; как описать нелинейную динамику данных пузырей в перегретой фокальной области источника HIFU; как описать нелинейные процессы в акустическом микрофонтане внутри данных пузырей. В данной работе ставятся и решаются теоретические задачи, затрагивающие вышеперечисленные проблемы.

Цель и задачи диссертационной работы

Основной **целью работы** являлось теоретическое и экспериментальное исследование физических процессов в парогазовых пузырьках и жидких каплях при воздействии интенсивных акустических волн, используемых в ультразвуковой визуализации и терапии. В соответствии с заявленной целью было намечено решение следующих практически значимых **задач**:

1. Проведение экспериментов по получению диаграмм рассеяния ультразвука на пенопластовой сфере в воде, являющейся аналогом парогазового пузыря.
2. Моделирование и экспериментальное исследование визуализации пузырьков миллиметровых размеров в биоткани.
3. Составление алгоритма по визуализации объектов, сильно рассеивающих акустические волны и имеющих размеры меньше разрешающей способности прибора по ультразвуковой визуализации.
4. Проведение численных экспериментов, воспроизводящих нелинейную волновую динамику внутри акустического резонатора сферической формы с абсолютно мягкой границей, являющегося физической моделью капли в акустическом фонтане.
5. Анализ структуры акустического и теплового полей внутри капли жидкости, формирующейся под воздействием ультразвука.
6. Моделирование нелинейных процессов в парогазовом пузыре, образующемся в центре капли и растущем под действием давления пара внутри него.
7. Анализ неустойчивости акустически возбужденной капли акустического фонтана, обусловленной радиальными колебаниями поверхности.

Методы исследования

При проведении экспериментов по рассеянию ультразвука исследуемые объекты погружались в резервуар с водой или в желатиновый фантом биоткани. Для создания ультразвуковых волн использовался пьезокерамический акустический источник мегагерцового диапазона частот. Прием ультразвука осуществлялся миниатюрным гидрофоном игольчатого типа, который перемещался в пространстве с помощью системы микропозиционирования, управляемой компьютером. Обработка сигналов осуществлялась стандартными инструментами в программных пакетах LabVIEW и MATLAB. В экспериментах, кроме того, использовался коммерческий ультразвуковой сканер (Terason Ultrasound System). В теоретических исследованиях рассеяния ультразвука на сферических объектах использовался классический подход, основанный на использовании представления падающего и рассеянного полей в виде ряда по сферическим гармоникам. При изучении динамики парогазового пузырька использовалось приближение сферической симметрии, причем построение теоретической модели базировалось на описанных в литературе приближениях для описания

различных эффектов, сопровождающих динамику пузырька (теплопроводность, парообразование, диффузия газа в жидкости, излучение звука, поверхностное натяжение). Для анализа нелинейных акустических процессов в сферической капле жидкости использовалось приближение сферической симметрии и представление поля в виде суперпозиции стоячих волн – гармоник. Для изучения поведения гармоник методом медленно изменяющихся амплитуд использовалась система связанных уравнений для комплексных амплитуд гармоник. Для анализа неустойчивости сферической формы поверхности капли в процессе ее колебаний использовался подход, основанный на разложении возмущений формы по сферическим гармоникам. Получившееся уравнение типа Матье анализировалось стандартными методами, развитыми в общей теории нелинейных колебаний. При численном моделировании использовались конечно-разностные методы. Уравнения для описания физических процессов в парогазовых пузырьках, система связанных уравнений для комплексных амплитуд в сферической капле и уравнения для описания неустойчивости поверхности капли интегрировались численно с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Программные модули для проведения расчетов написаны на языке ФОРТРАН и в программной среде МАТЛАВ. Все вычисления проводились на персональном компьютере.

Научная новизна

1. Исследованы экспериментально и теоретически ультразвуковые изображения пузырей в биоткани размерами меньше разрешающей способности сканирующего устройства.
2. Подтверждено экспериментально, что пенопластовые образцы можно использовать в качестве моделей объектов из воздуха, расположенных в воде или мягкой ткани.
3. Разработан алгоритм по анализу ультразвуковых изображений объектов, сильно рассеивающих акустические волны и имеющих размеры меньше разрешающей способности прибора по ультразвуковой визуализации.
4. Составлена система уравнений для теоретических расчетов нелинейной динамики парогазового пузыря в перегретой области конечного размера.
5. Построена модель нелинейного акустического резонатора в виде жидкой сферы с абсолютно мягкой границей и показано, что в процессе нелинейной эволюции происходит эффект существенного усиления пикового давления в центре резонатора.

Практическая значимость

1. Предлагаемый метод анализа размеров сильно рассеивающих объектов может быть применен для ультразвукового мониторинга возникновения кипения в мягких биотканях в процессе их нагрева проникающим излучением, в частности фокусированным ультразвуком.

2. Анализ акустических свойств пенопласта в воде позволяет использовать его для создания моделей объектов из воздуха, расположенных в воде или мягкой ткани, для гидроакустических, биофизических и других исследований.
3. Разработанная теоретическая модель нелинейного акустического резонатора сферической формы является фундаментальной задачей, имеющей аналоги в различных областях акустики помимо капель акустического фонтана.

Положения, выносимые на защиту

1. На основе измерения амплитуды акустических эхо-сигналов при проведении медицинской ультразвуковой диагностики мягких биологических тканей может быть осуществлено как обнаружение, так и определение размеров газовых пузырьков даже в том случае, когда диаметр указанных пузырьков мал по сравнению с масштабом пространственного разрешения прибора.
2. При нагреве жидкости или биологической ткани фокусированным ультразвуком до температуры, превышающей температуру кипения на единицы градусов, за несколько миллисекунд происходит рост исходно микроскопического парогазового пузырька до миллиметровых размеров. Указанный быстрый рост приводит к излучению акустического импульса слышимого диапазона, который может быть использован для контроля процесса нагрева.
3. При сферически-симметричном акустическом возбуждении резонатора в виде жидкого шара с мягкой границей происходит нелинейная генерация высших гармоник стоячей волны. В условиях малого проявления вязкости указанный нелинейный процесс может приводить к существенной концентрации акустической энергии и росту пикового давления в центре резонатора, вплоть до достижения порога прочности жидкости.
4. Взрывная неустойчивость капель акустического фонтана, приводящая к эффекту ультразвуковой атомизации (распыления), может быть объяснена возникновением акустической кавитации вблизи центра капли в результате нелинейной эволюции стоячей волны. При этом, несмотря на концентрацию энергии и эффективное тепловыделение в центре капли, повышение температуры жидкости не превышает долей градуса.
5. Наблюдаемое в акустических фонтанах помутнение капель жидкости может быть объяснено развитием параметрической (фарадеевской) неустойчивости формы поверхности. Наибольшая неустойчивость достигается для возмущений в виде стоячей капиллярной волны, частота которой составляет половину резонансной частоты колебаний капли, а длина намного меньше диаметра капли.

Достоверность полученных результатов

Достоверность представленных в работе результатов подтверждается проверочными численными и физическими экспериментами, а также соответствием результатов экспериментов априорной информации и теоретическим расчетам.

Апробация результатов работы

Вошедшие в работу материалы были представлены в виде докладов на XIII Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» (21-26 мая 2012 г., Звенигород), на XXV сессии Российского Акустического общества и сессии Научного совета РАН по акустике (17-21 сентября 2012 г., Таганрог), на XXI международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014» (7-11 апреля 2014 г., Москва), на XXVII сессии Российского Акустического Общества (16-18 апреля 2014 г., Санкт-Петербург), на I Всероссийской акустической конференции (6-10 октября 2014 г., Москва), на Международном Симпозиуме по нелинейной акустике ISNA 2015 (29 июня - 3 июля 2015 г., Лион, Франция), на XV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» (5-10 июня 2016 г., Звенигород), на Международном Симпозиуме по ультразвуку IEEE IUS 2016 (18-21 сентября 2016 г., Тур, Франция) и на II Всероссийской акустической конференции (6-9 июня 2017 г., Нижний Новгород). Результаты исследований обсуждались на научных семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ.

Работа выполнена при поддержке грантов РНФ № 14-15-00665, Президента РФ № НШ-7062.2016.2, РФФИ № 17-02-00261 и стипендии Американского акустического общества.

Публикации автора

Материалы диссертации опубликованы в 15 печатных работах, список которых приводится в конце автореферата, из них 3 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, удовлетворяющих Положению о присуждении ученых степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова, 1 статья – в рецензируемом научном издании из перечня ВАК РФ.

Личный вклад автора

Все изложенные в работе результаты по разработке теоретической модели, численного алгоритма, постановке и выполнении физического эксперимента получены автором лично, либо при его непосредственном участии.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из общего вводного раздела, четырех глав и заключения. Каждая глава включает в себя короткое введение и выводы. Список цитируемой литературы включает 129 наименований, общий объем работы составляет 133 страницы текста, в том числе 69 рисунков.

Содержание диссертации

Во Введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цели работы, описано ее краткое содержание по главам.

В первой главе работы проводится построение ультразвуковых изображений пузырьков миллиметрового размера в биоткани. В §1.1 производится постановка задачи. В §1.2 описывается эксперимент по сопоставлению коэффициентов отражения звуковой волны в воде от плоской границы раздела с пенопластом и воздухом, получение теоретических диаграмм рассеяния абсолютно мягкой сферы и экспериментальных диаграмм рассеяния сферического пенопластового образца – модели мягкой сферы. В §1.3 рассчитываются импульсные сигналы, рассеянные на абсолютно мягкой сфере, анализируется численное моделирование построения ультразвуковых изображений в разных режимах работы ультразвукового сканера и описываются эксперименты по ультразвуковой визуализации моделей пузырьков газа. В §1.4 представлены выводы Главы 1.

Во второй главе работы анализируется рост парогазового пузыря в перегретой области конечного размера и излучение им сферических волн. В §2.1 проводится обзор литературы по экспериментальным данным роста парогазовых пузырей в перегретой жидкости. В §2.2 производится постановка задачи: выводятся эволюционные уравнения для основных параметров задачи нелинейной динамики парогазового пузыря в перегретой области малого размера и составляются уравнения для температуры на границе пузыря. В §2.3 рассчитывается рост парового пузыря в однородно перегретой жидкости. В §2.4 анализируется излучение сферических волн растущим паровым пузырем. В §2.5 представлены выводы Главы 2.

В третьей главе работы представлены теоретическая модель динамики внутри капли акустического фонтана и результаты численных экспериментов, проведенных на основе данной теоретической модели. В §3.1 описана теоретическая модель динамики внутри капли акустического фонтана с выводом исходных уравнений, решением задачи методом медленно изменяющихся амплитуд и методом медленно изменяющегося профиля, а также установлена связь уравнения для динамики акустического поля в капле с уравнением Бюргерса. В §3.2 представлены результаты численных экспериментов, а именно: рассчитаны спектр и временной профиль акустического давления в центре капли, получены характеристики акустического поля в объеме капли и приведен пример расчета акустического давления в капле акустического фонтана. В §3.3 представлены выводы Главы 3.

Четвертая глава работы посвящена анализу температуры в центре капли акустического фонтана, проверке наличия условий для возникновения кавитации в ней, динамики пузырька, образованного в ее центре, и неустойчивых явлений на ее поверхности. В §4.1 рассчитана температура в центре капли акустического фонтана. В §4.2 проверены условия для кавитации в центре капли акустического фонтана. В

§4.3 рассчитана динамика пузырька в центре капли акустического фонтана. В §4.4 разобраны неустойчивые явления в акустически возбужденной сферической капле жидкости в пренебрежении вязкости жидкости и при ее учете и построены зоны неустойчивости поверхности капли. В §4.5 представлены выводы Главы 4.

В Заключение сформулированы основные результаты и выводы работы.

ПОСТРОЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПУЗЫРЬКОВ МИЛЛИМЕТРОВОГО РАЗМЕРА В БИОТКАНИ

Ультразвуковая диагностика имеет широкое применение в медицине. Построение изображений основано на анализе эхо-импульсов, возникающих при рассеянии коротких зондирующих импульсов на неоднородностях ткани [1]. В основном, при рассмотрении человеческих органов рассеяние достаточно мало, и построение изображения базируется на слабых рассеянных сигналах. Сильные сигналы при обработке данных рассеяния ограничиваются, в результате чего рассеиватели разной силы имеют одинаковые изображения (в виде ярких областей). В то же время есть диагностические ситуации, при которых важно дифференцировать сильные рассеиватели.

Примером таких рассеивателей являются парогазовые пузырьки различных размеров, которые могут появиться в биоткани при терапии мощным фокусированным ультразвуком. Управляемый нагрев глубоко расположенных тканей может дать положительный терапевтический эффект в ряде случаев. При воздействии мощного ультразвука на ткань в определенных условиях может оказаться важным такой физический механизм, как кипение, поскольку образование пузырьков пара при кипении кардинальным образом меняет процесс воздействия ультразвука на биологическую ткань [15]. При этом и мелкие кавитационные пузырьки, и крупные пузырьки, появляющиеся при кипении ткани, являются сильными рассеивателями. Чтобы выявить зависимость сигнала обратного рассеяния от размера пузырька, в данной работе моделируется процесс рассеяния ультразвуковых импульсов на неподвижной пустой полости. Численное моделирование данного процесса основывается на разработанной еще в прошлом веке теоретической модели рассеяния звуковой волны на абсолютно мягкой сфере [16–19], где на сферу падает плоская звуковая волна. Эта модель представляет собой простейший пример точно решаемых дифракционных задач. Результаты аналитических расчетов дают формулу для давления рассеянной волны, в которую входят сферические функции Ханкеля первого рода n -го порядка и полиномы Лежандра n -го порядка. Численно данные функции рассчитываются в среде программирования Fortran [20–22]. Разработанная программа позволяет строить диаграммы направленности абсолютно мягких сферических рассеивателей разных радиусов.

Для экспериментальной проверки вышеописанной теории необходимо подобрать модель мягкого сферического рассеивателя – пузырька газа. В силу того, что нет возможности искусственно создать стабильный пузырек газа правильной сфериче-

ской формы миллиметровых размеров в воде, в качестве модели решено было взять пенопластовый образец. Пенопласт представляет собой на 98% состоящую из воздуха структуру, имеющую плотность, близкую к плотности воздуха [23–25]. Это дает возможность предположить, что его акустические свойства подойдут для наших исследований. Чтобы убедиться в этом, был проведен ряд экспериментов по измерению диаграмм направленности маленького сферического пенопластового образца. Кроме того, проводилось сопоставление коэффициента отражения звуковой волны в воде от пенопластового образца с плоской поверхностью и от плоского слоя воздуха.

Также в данной работе проведены численные расчеты получения ультразвукового изображения точечного мягкого рассеивателя в разных режимах работы ультразвукового сканера для выявления отличий результатов построений и других особенностей полученного изображения. Помимо этого был проведен ряд экспериментов, в которых посредством ультразвукового сканирования в режиме В-моды получены ультразвуковые изображения моделей пузырьков газа в биоткани. В качестве моделей пузырьков газа выступали кусочки пенопласта размерами порядка миллиметра, а в качестве модели биоткани – желатин. Целью экспериментов было убедиться в том, что мягкие сферические рассеиватели размерами меньше разрешающей способности сканера выглядят на ультразвуковом изображении как одинаково яркие пятна больше истинных размеров рассеивателей. Яркость пятен идентична в силу того, что интенсивность рассеяния на мягких сферических объектах существенно превышает интенсивность рассеяния на неоднородностях мягких биотканей человеческих органов, для которых были разработаны приборы ультразвуковой диагностики, то есть происходит зашкаливание яркости изображения мягких сферических объектов на фоне слабо рассеивающих органов. Задача заключается в том, чтобы создать такой алгоритм построения ультразвукового изображения, в котором ориентация яркостной шкалы была бы направлена на сильные рассеиватели. Тогда можно будет различать размеры пузырьков газа меньше разрешающей способности сканера по яркости пятна их ультразвукового изображения, предварительно найдя зависимость этой яркости от радиуса пузырька.

В настоящей главе содержится обзор литературы, в котором описаны основные механизмы образования пузырьков кипения и кавитационных пузырьков, рассмотрен вывод решения для определения давления рассеянной волны в классической задаче акустического рассеяния на абсолютно мягкой сфере, разобраны основные принципы работы УЗИ-системы с учетом вида используемой решетки пьезоэлементов, приведены известные методы моделирования ультразвуковых систем визуализации с данными принципами работы сканера и различной геометрией преобразователя, а также собраны данные о свойствах пенопласта. Приводится описание экспериментальных установок для сопоставления коэффициентов отражения звуковой волны в воде от пенопласта и от воздуха и для нахождения диаграмм рассеяния маленького сфериче-

ского пенопластового образца, а также численное исследование диаграмм рассеяния звука на абсолютно мягкой сфере. Произведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

§1.1. Постановка задачи

Долгое время неинвазивная хирургия, использующая высокоинтенсивный фокусированный ультразвук (HIFU: High Intensity Focused Ultrasound), основывалась на тепловом эффекте – нагревании и разрушении ткани, вызванными поглощением ультразвука [26]. Если тепловое разрушение преобладает при низких HIFU фокальных интенсивностях, то более высокие интенсивности могут привести к другим биологическим эффектам. Если температура поднимается до 100°C в процессе действия ультразвука, в ткани возникают пузырьки кипения, вносящие дополнительное механическое разрушение. При высоких фокальных интенсивностях становится значительным механическое воздействие самой ультразвуковой волны [27]. Фаза большого отрицательного давления волны может приводить к случайной инерционной кавитации или даже облаку кавитационных пузырьков в фокальной области – процессу, когда маленькие газовые пузырьки растут и сильно схлопываются, оказывая разрушительное воздействие на ткань. Вследствие нелинейного распространения вокруг фокуса образуются высокоамплитудные ударные волны, которые в свою очередь оказывают механическое давление на ткань. Также значительно возросший тепловой вклад в ударных волнах может вызвать кипение в ткани за миллисекунды, что гораздо быстрее, чем при традиционном HIFU-воздействии. Экстракорпоральная ударноволновая литотрипсия использует такие фокусированные ударные волны и кавитацию для разрушения камней в почках. Исследования HIFU за последнее время показали, что существование ударных волн и каверн, вызванных HIFU, так же как и кавитационного облака или миллисекундного кипения, может быть использовано для разрушения или механического разделения мягких тканей на маленькие частицы – процесса, схожего с измельчением в «дистанционном блендере».

Такое ультразвуковое разрушение ткани задает новое направление в развитии медицинской технологии HIFU. Эта техника получила название «гистотрипсия» по аналогии с литотрипсией: «гисто» – (гр.) ткань. Были продемонстрированы два независимых метода осуществления гистотрипсии с ультразвуковыми ударными волнами: в первом используется облако кавитационных пузырьков, а во втором пузырьки кипения. Подход, основанный на кавитации, развивается последние 11 лет в Мичиганском университете [28, 29], в то время как метод, основанный на кипении, был открыт несколько лет назад в университете штата Вашингтон [15, 30, 31]. Механизмы образования пузырьков в каждом методе сильно отличаются, но удивительно, что оба метода приводят к сходным повреждениям в ткани.

Гистотрипсия может применяться как неинвазивное лечение множества заболеваний, таких как злокачественные опухоли, доброкачественная гиперплазия предстательной железы (ДГПЖ), тромбоз глубоких вен (ТГБ), врожденные дефекты сердца. Уникальное преимущество гистотрипсии в том, что ткань фактически плавится, а не просто разрушается от нагрева. Это позволяет поврежденному содержимому покидать организм естественным путем или быть поглощенным окружающей тканью. Например, избыток ткани предстательной железы для ДГПЖ может быть выведен из организма через мочевую систему, приводя к немедленному понижению давления и облегчению симптомов. К настоящему моменту и кавитационный метод, и метод, основанный на кипении, уже исследованы на животных [32, 33].

Рассмотрим подробнее каждый метод. В обоих используется облучение периодическими импульсами (рис. 1.1). Однако для образования кавитации центральная частота импульса относительно низкая (0.75 – 1 МГц), сами импульсы короткие (3 – 20 циклов), с высокой частотой передачи (10 Гц – 1 кГц). В таком режиме каждый импульс воздействует на облако кавитационных микропузырьков, заставляя их расширяться и схлопываться под акустическим давлением. Обычно хватает $10^3 - 10^4$ импульсов в фокальном объеме до полного разрушения [1]. Пиковые значения давления в фокусе достигают $p_- = 15 - 25$ МПа и $p_+ > 80$ МПа. В гистотрипсии, основанной на кипении, центральная частота выше (1 – 3 МГц), импульсы гораздо длиннее (3000 – 10000 циклов), с более низкой частотой передачи (0.5 – 1 Гц). Пиковые значения давления ниже: $p_- = 10 - 15$ МПа и $p_+ > 40$ МПа. В таком режиме кипение возникает при каждом миллисекундном импульсе за счет эффективного нагрева ткани ударными волнами. Взаимодействие ударных волн с паровой полостью вызывает механическое разрушение ткани еще до того момента, как станут значительными тепловые эффекты. Обычно достаточно 10 – 50 импульсов, чтобы разрушить фокальный объем. В обоих импульсных режимах ультразвук посылается в фокус около 1% всего времени процедуры (т.е. со скважностью около 100). В периоды, когда ультразвуковой датчик не работает, ткань охлаждается, что предотвращает накопление тепла и ее термическое разрушение. Таким образом, остается только механическое воздействие.

Акустическая кавитация возникает, когда пузырьки расширяются под действием колебаний давления. При низкой амплитуде давления реакция пузырьков относительно спокойная и приводит лишь к отдельным осцилляциям радиуса пузырька с течением времени. Однако при увеличении амплитуды давления происходит быстрый рост пузырька в фазе отрицательного давления с последующим коллапсом рэлеевского типа, когда инерция сжимающейся жидкости превалирует над давлением газа, препятствующем сжатию. Такое явление было названо «инерционной кавитацией» [34]. Инерционная кавитация – пороговое явление. Для него требуется определенная амплитуда давления, зависящая от начального размера пузырька,

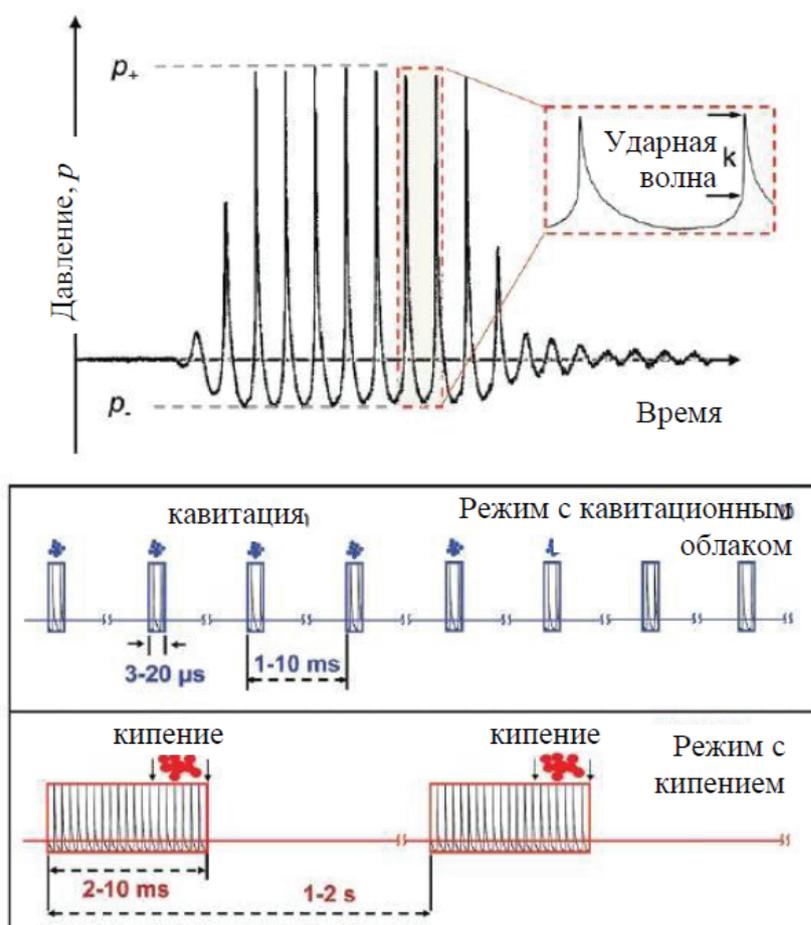


Рис. 1.1. Форма импульса, применяемая в гистотрипсии. Рисунок взят из статьи [15]

которая приводила бы к разрывному расширению. В гистотрипсии, основанной на кавитационном облаке, сильный рост и коллапс пузырьков создает кратковременную деформацию окружающей ткани и ее последующее измельчение.

Отрицательное давление, требующееся для образования пузырьков зародышей, используемых в инерционной кавитации в воде, было рассчитано теоретически и достигает огромных величин $50 - 140 \text{ МПа}$ [35, 36]. Однако пороговое значение, приводящее к расширению зародившегося пузырька в воде или ткани, существенно ниже; инерционная кавитация может возникнуть даже при $p_- = 1 \text{ МПа}$ [37–39]. Подобным образом водолазы сталкиваются с кессонной болезнью из-за образования пузырьков в крови после резкого понижения давления при всплытии. Эти наблюдения говорят о том, что в теле уже содержатся маленькие газовые зародыши, которые могут подвергнуться росту под внешним воздействием. Однако свободные пузырьки, вообще говоря, нестабильны и могут раствориться со временем из-за давления Лапласа, созданного поверхностным натяжением жидкости. Но они могут быть стабилизированы различными способами, например, с помощью трещин в твердых частицах или даже в макромолекулах, которые содержат маленькие газовые полости [40, 41].

Порог инерционной кавитации в живом организме может сильно варьироваться в зависимости от наличия и распределения этих полостей.

В процессе гистотрипсии множество кавитационных пузырьков, расширяясь, образует плотное облако в фокальной области (рис. 1.2). Облако не растет постоянно с увеличением акустического давления, а формируется в момент достижения определенного порогового значения давления. Это значение, однако, на порядок выше, чем рассчитанный порог инерционной кавитации для одиночного пузырька на частоте 1 МГц. Интересно, что формирование облаков является вероятностным процессом: облако совсем не обязательно формируется при первом же импульсе, превышающем пороговое значение, и могут понадобиться сотни или тысячи предварительных импульсов, прежде чем образуется облако, хоть и каждый импульс будет идентичным предыдущему. В этом смысле образование облака можно отнести к процессу «все или ничего» [30]. Когда амплитуда давления достаточно высока ($p_- > 20$ МПа), облако из пузырьков может сформироваться за один или несколько импульсов.

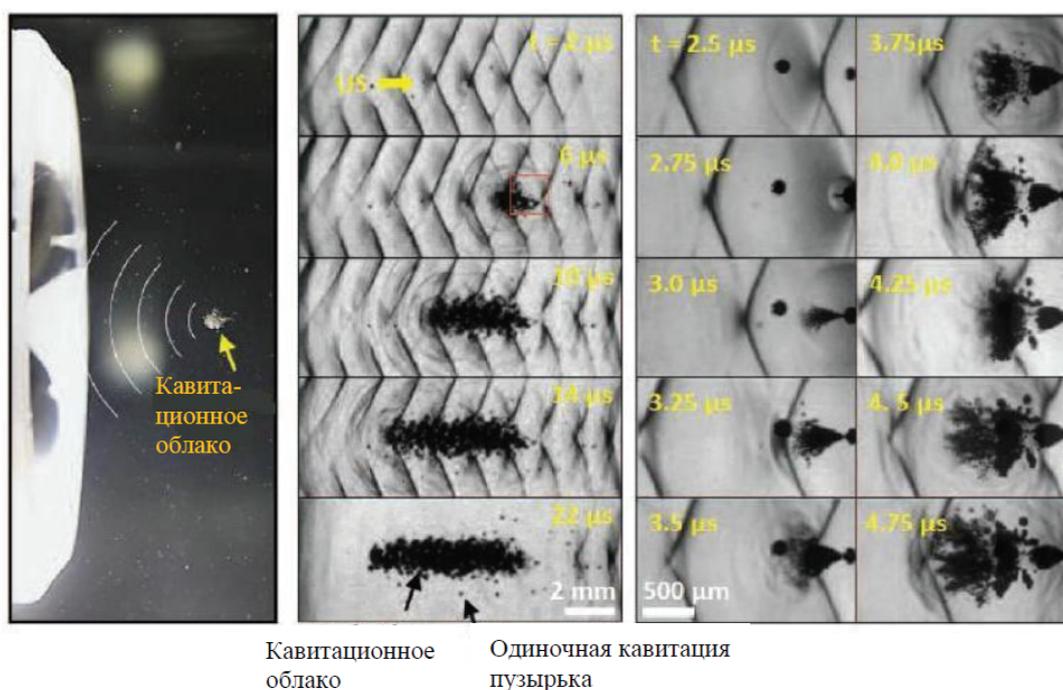


Рис. 1.2. Кавитационное облако, образованное в фокусе датчика. Рисунок взят из статьи [15]

Так как существование облака способствует разрушению ткани, много работ было посвящено изучению динамики образования этого облака. В частности, высокоскоростное фотографирование дало ценную информацию о взаимодействии импульсных сигналов с кавитационными пузырьками, приводящим к формированию облака [42]. В этих экспериментах в качестве модели ткани был взят оптически прозрачный 7% желатиновый фантом, и наблюдалась кавитация в процессе передачи одиночных импульсов. Длительность импульсов составляла 5 – 20 циклов, частота ультразвукового

датчика – 1 МГц, диаметр $d = 10$ см и радиус кривизны $F = 9$ см. Пиковые значения давления в воде для этих импульсов, измеренные оптоволоконным гидрофоном, составляли $p_- = 19$ МПа и $p_+ = 85$ МПа. Результаты показали, что при расширении отдельные пузырьки вырастают до 100 – 200 мкм в зависимости от их расположения относительно фокуса, а кавитационное облако растет, распространяясь из начального положения в фокусе (в его дальней от датчика точке) в сторону датчика (противоположную направлению распространения акустической волны) (рис. 1.2). Это явление объясняется каскадным эффектом, вызванным взаимодействием кластера кавитационных пузырьков (рассеивателей) с отраженными ударными волнами. Однако в размерах облако никогда не превышало область фокуса, так как вне этой области не образуется ударных волн. Данный механизм взаимодействия объясняет вероятностный процесс «все или ничего» при образовании облака. Если одиночный пузырьковый зародыш не попадает в центр фокальной области, где формируется ударная волна, то нет рассеивателя для образования облака.

Второй метод гистотрипсии связан с тем, что быстрый нагрев ткани ударными волнами приводит к возникновению процесса кипения за миллисекунды. Фронты ударных волн фокусируются в локализованный объем в фокальной области для точечного нагрева в фокусе. Расчеты акустических полей различных HIFU-датчиков, основанные на нелинейном уравнении Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК) и уравнении теплового переноса, показали, что если амплитуды ударных волн возрастают в фокусе до значений 40 – 80 МПа, то температура кипения достигается за миллисекунды (рис. 1.3) [31]. В отличие от зарождения кавитации – вероятностного явления, которое может возникнуть в объеме, сильно превышающем фокальную область (рис. 1.3 (b)), – нагрев ударными волнами и кипение можно довольно точно предсказать, и эти явления хорошо локализованы в области фокуса, где амплитуда ударных волн максимальна. Малый объем ткани размером около 0,2 мм нагревается до высоких температур, и пузырек кипения начинает расти (рис. 1.3 (d)), образуя в итоге паровую полость миллиметрового размера. Начальные ударные волны взаимодействуют с границей раздела ткань – пузырек, что приводит к механическому измельчению ткани в объемах, сильно превышающих тот объем, который был подвержен тепловому воздействию в целях образования зародышей пузырьков.

Экспериментальные исследования показали, что гистотрипсия, основанная на кипении, может быть вызвана в различных видах мягкой ткани и при использовании различных частот в диапазоне 1 – 3 МГц [6]. Механическое измельчение ткани без теплового разрушения было реализовано при выполнении следующих условий: наличие фронтов ударных волн выше 40 МПа в фокусе; достаточно высокая для инициирования кипения за миллисекунды амплитуда ударных волн; длительность импульсов чуть больше времени, необходимого для возбуждения процесса кипения; частота повторения импульсов достаточно низкая, чтобы не возникло тепловое воздействие.

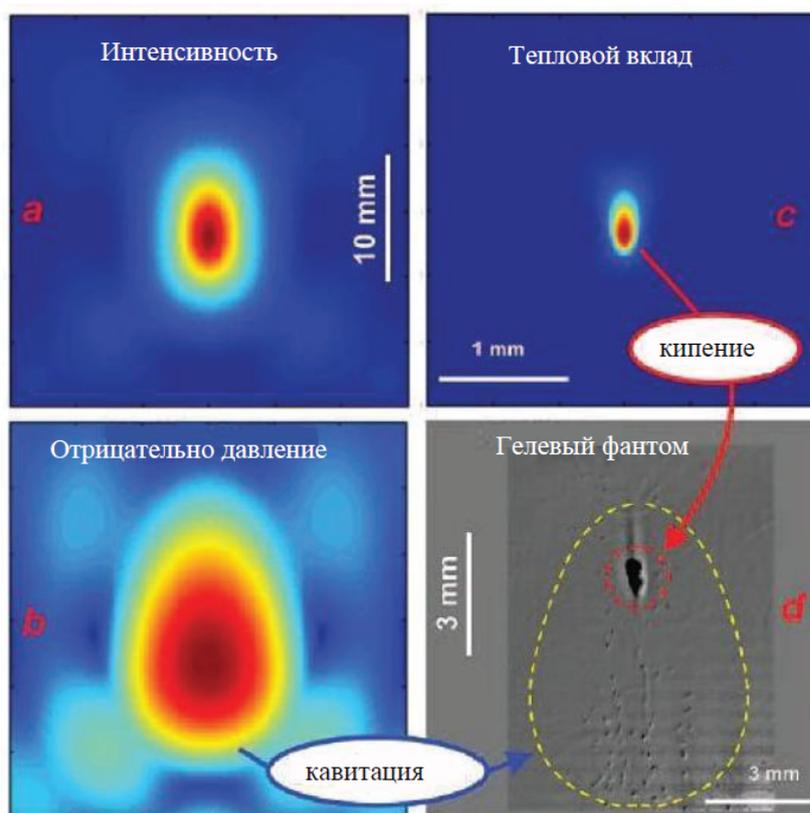


Рис. 1.3. Моделирование акустического поля от 2 МГц HIFU датчика (а – с) и визуализация начала кипения в фокусе после 9 мс воздействия (d). Рисунок взят из статьи [15]

Если хотя бы одно условие не было выполнено, никакой гистотрипсии не наблюдалось. Но не было понятно, как миллиметровые пузырьки пара могут измельчать ткань на сверхтонкие кусочки. Недавно было высказано предположение, что наиболее значительные механизмы, входящие в этот процесс, это акустическое распыление и формирование миниатюрных фонтанов из ткани в пузырек кипения [43, 44].

Ультразвуковое распыление, или эмиссия маленьких капелек жидкости в воздух, образующая туман, – широко известное явление, которое возникает при прохождении ультразвуковой волны через границу раздела жидкость – воздух [45, 46]. Когда высокоинтенсивный ультразвук фокусируется на границе раздела, акустическая радиационная сила давит на жидкость и создает фонтан. Эти эффекты лежат в основе работы увлажнителей воздуха и медицинских ингаляторов. В работе [47] была высказана гипотеза, что в ткани, по аналогии с жидкостью, можно создать фонтан. Был предложен следующий сценарий процесса гистотрипсии, основанной на кипении (рис. 1.4). Высокоамплитудные ударные волны развиваются в маленьком объеме внутри фокальной области HIFU-пучка и быстро нагревают тот объем до температуры кипения. Пузырек кипения образуется за миллисекунды и вырастает до миллиметровых размеров. Ударные волны взаимодействуют с паровой полостью,

в результате чего происходит распыление и образуется акустический фонтан из границы раздела ткани в полость, который разрушает саму ткань.

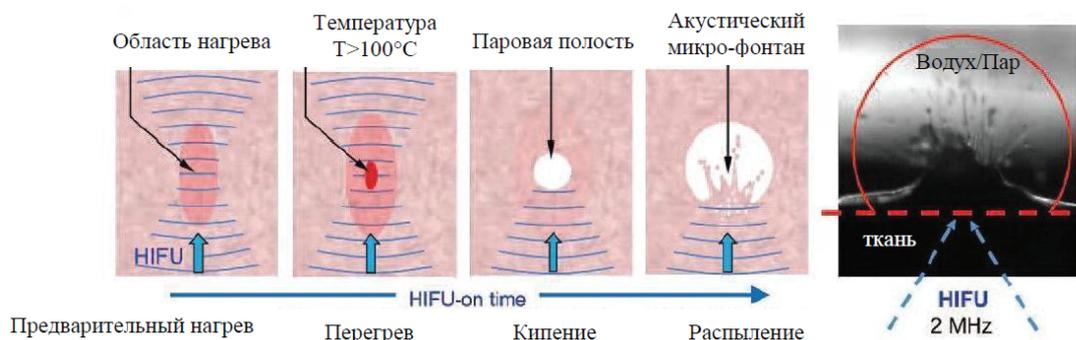


Рис. 1.4. Иллюстрация предполагаемого механизма кипения в гистотрипсии. Рисунок взят из статьи [15]

Интересно, что один и тот же эффект достигается двумя разными способами, в которых применяются разные акустические импульсные режимы. Однако оба эти способа используют относительно большие полости (0,1 – 1 мм), образующиеся в ткани для достижения этого эффекта. Это либо сжатие, вызванное расширением и коллапсом пузырьков, либо распыление. И то, и другое приводит к разрушению ткани. В действительности, вероятно, что каждый механизм способствует и кавитации, и кипению в гистотрипсии. По крайней мере, точно известно, что нелинейное акустическое распространение и ударные волны играют важную роль в образовании как кавитационного облака, так и паровых полостей кипения.

Таким образом, умение различать, какого рода пузырек образовался в ткани под воздействием HIFU, имеет большое практическое значение, так как от природы пузырька зависит дальнейшее развитие процесса в ткани. Отметим, что если кавитационные пузырьки микронных размеров могут рассеивать ультразвук резонансным образом, то более крупные пузырьки, образующиеся при кипении, ведут себя скорее как неподвижные пустые полости. Именно такие пузырьки рассматриваются в настоящей главе.

1.1.1. Классическая задача акустического рассеяния на абсолютно мягкой сфере

Для моделирования ультразвуковой визуализации пузырьков газа размерами порядка миллиметра была разработана теоретическая модель рассеяния ультразвуковых сигналов на сферическом объекте [16, 17]. В этой модели пузырек представлен в виде абсолютно мягкой сферы, а падающая волна считается плоской (Рис. 1.5). Рассмотрим данную модель.

Рассеяние звука на сфере представляет собой простейший пример точно решаемых дифракционных задач, так как поверхность сферы является координатной по-

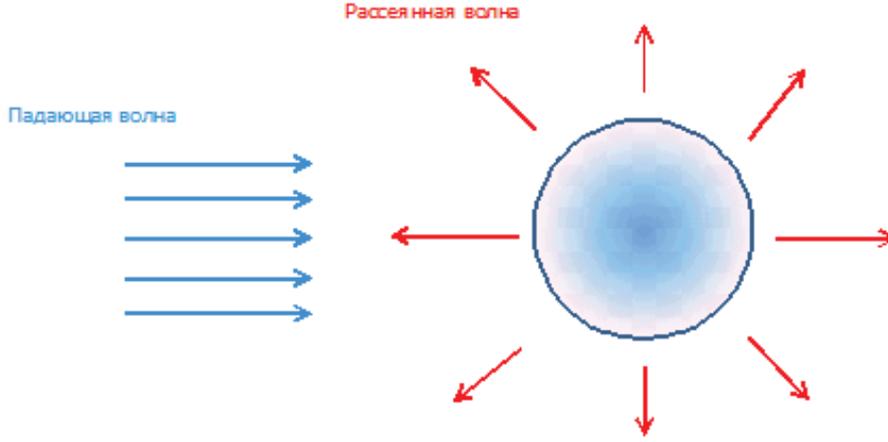


Рис. 1.5. Рассеяние ультразвука на абсолютно мягкой сфере

верхностью соответствующей криволинейной системы координат, допускающей применение метода разделения переменных.

Пусть в среде распространяется плоская гармоническая волна, давление которой выражается следующим образом:

$$p_i = e^{-i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} = e^{-i[\omega t - kr \cos \theta]}, \quad (1.1)$$

где ω – частота гармонической волны, k – волновое число, r – величина радиус-вектора, θ – угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{r} . У нее на пути располагается мягкая сфера радиуса a . Тогда давление полного поля складывается из падающей и рассеянной на сфере волн: $p = p_i + p_s$.

Здесь p_s находится как решение следующего волнового уравнения в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p_s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \phi^2} + k^2 p_s = 0. \quad (1.2)$$

Применим метод разделения переменных $p_s = R(r) \vartheta(\theta) \Phi(\phi)$. Подставив такой вид решения в исходное волновое уравнение в сферических координатах, получим три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[k^2 - \frac{n(n-1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \vartheta = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (1.5)$$

Здесь n и m – постоянные разделения. Решением уравнения (1.3) являются цилиндрические функции с полуцелым индексом, деленные на \sqrt{kr} , причем, учитывая условие излучения на бесконечности $\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p_s}{\partial x} - ikp_s \right) = 0$ получим цилиндрические функции Ханкеля первого рода, то есть

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(1)}(kr). \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.4) являются присоединенные функции Лежандра степени n порядка m , причем n необходимо положить целым, чтобы $\vartheta(\theta)$ не имела особенностей при $\theta = \pi$:

$$\vartheta(\theta) = P_n^m(\cos \theta). \quad (1.7)$$

Решением уравнения (1.5) является функция $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$, но в случае падения плоской волны на сферу (пусть волна падает вдоль направления $\theta = 0$) поле не зависит от угла θ , то есть $m = 0$, и тогда окончательный вид решения для рассеянного поля выглядит следующим образом:

$$p_s = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (1.8)$$

где $h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)$ – сферические функции Ханкеля первого рода n -го порядка, а $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра n -го порядка.

Рассмотрим сначала падающую волну. Это плоская волна $p_i = e^{-i[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]}$. Полярный угол будем отсчитывать от положительного направления волнового вектора \mathbf{k} . Введем обозначение $z = kr$. Тогда: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta = z \cos \theta$.

Разложим плоскую волну в ряд по полиномам Лежандра:

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{-n} j_n(z) P_n(\cos \theta), \quad (1.9)$$

где $j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ – сферические функции Бесселя.

Тогда полное давление имеет вид:

$$p = p_i + p_s = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) i^{-n} j_n(kr) + A_n h_n^{(1)}(kr)] P_n(\cos \theta). \quad (1.10)$$

Граничное условие для мягкой сферы: $p(r = a) = 0$, подставим в него наше решение и найдем коэффициенты:

$$A_n = -\frac{(2n+1) i^{-n} j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}. \quad (1.11)$$

Итак, при рассеянии плоской волны на мягкой сфере давление полного поля вычисляется по следующей формуле:

$$p = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) i^{-n} \left[j_n(kr) - \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)} h_n^{(1)}(kr) \right] P_n(\cos \theta). \quad (1.12)$$

1.1.2. Акустические свойства пенопласта

В качестве модели пузырька газа в экспериментальных исследованиях нужно использовать объект из материала с намного более высокой (по сравнению с водой) сжимаемостью и низким значением акустического импеданса, чтобы рассеиватель по свойствам был близок к пузырьку газа. Одним из таких материалов является пенопласт. Пенопласт представляет собой класс пластических материалов – газонаполненных пластмасс, получаемых на основе различных синтетических полимеров [23]. Технология получения пенополистирола связана с первоначальным заполнением гранул стирола газом, который растворяют в полимерной массе. В дальнейшем производится ее нагрев паром. В процессе этого происходит многократное увеличение исходных гранул в объеме, пока они не занимают всю блок-форму и не спекаются между собой. Таким образом, пенопласт почти полностью состоит из газа, заключенного в микроскопических тонкостенных ячейках из полистирола [24]. Поскольку основной объем пенопласта занимает газ, плотность его существенно ниже, чем плотность исходного сырья (полимера).

При проведении экспериментов в настоящей работе использовался пенопласт ПСБ-С (пенополистирол). Согласно ГОСТ [48], в зависимости от предельного значения плотности пенопласт подразделяют на марки 15, 25, 35 и 50. Цифра соответствует максимальному значению плотности в кг/м³ [25]. Нами были проведены измерения плотности используемых пенопластовых образцов путем взвешивания куска пенопласта известного размера на электронных весах. Полученное значение плотности (с учетом силы Архимеда воздуха с плотностью 1.3 кг/м³) составило 21 кг/м³, что соответствует пенопласту марки 25.

Для определения эффективных значений импеданса и сжимаемости наряду с плотностью нужно знать значение скорости звука. Измерения других авторов показали, что в зависимости от марки пенопласта скорость звука в бытовых марках пенопласта варьируется в пределах от 400 до 600 м/с, а в твердых марках типа ППУ-ЗФ (плотность которых меняется в диапазоне от 80 до 250 кг/м³) – от 750 до 1100 м/с [49]. Если для оценки сверху взять максимальную для пенопластов скорость звука 1100 м/с, то для используемого в наших экспериментах пенопласта с плотностью 21 кг/м³ получим следующие значения для отношений акустических импедансов $z = \rho c$ и сжимаемостей $\beta = 1/(\rho c^2)$ пенопласта и воды: $z_{\text{пенопласт}}/z_{\text{вода}} \approx 0.0154 \ll 1$ и $\beta_{\text{пенопласт}}/\beta_{\text{вода}} \approx 88.5 \gg 1$. Как уже отмечалось, скорость звука в используемом

пенопласте ПСБ-С в несколько раз меньше, чем упомянутое максимальное значение 1100 м/с, поэтому можно приближенно считать, что импедансы и сжимаемости пенопласта и воды отличаются на 2 порядка.

Похожая оценка получается и исходя из статических измерений упругих параметров пенопласта, а именно коэффициента Пуассона σ и модуля Юнга E . В работе [50] коэффициент Пуассона был измерен для низкоплотных пенопластов типа пенополистирола и пенополиуретана. В частности, для пенополистирола величина σ в процессе сжатия оказалась близкой к $1/4$, а в процессе растяжения – к $1/3$. Данные по измерениям модуля Юнга приведены в статье [51]. Для пенопластов с плотностью от 26 до 36 кг/м³ величина E лежит в диапазоне от 15 до 40 МПа. Модуль всестороннего сжатия выражается через модуль Юнга и коэффициент Пуассона следующим образом: $K = E/[3(1 - 2\sigma)]$. Если для оценки сверху использовать максимальные значения приведенных в указанных статьях параметров $\sigma = 1/3$ и $E = 40$ МПа, то получим $K = E = 40$ МПа. Для воды соответствующий модуль равен $\rho c^2 \approx 2250$ МПа, т.е. пенопласт более чем в 50 раз раз сжимаем по сравнению с ней.

Проведенные выше оценки позволяют сделать вывод о близости акустических откликов пузырьков газа и шариков из пенопласта, расположенных в воде или фантоме биологической ткани. Однако такое заключение о значительной акустической мягкости пенопласта по сравнению с водой, как видно, сделано исходя из представления о пенопласте как о сплошной среде. В связи с тем что пенопласт имеет микроструктуру (рис. 1.6), включающую относительно плотный полипропилен, могут возникнуть некоторые сомнения в адекватности такого рассмотрения. Чтобы снять эти сомнения, полезно провести расчет отклика элементарной ячейки микроструктуры пенопласта на акустическое давление, создаваемое акустической волной.

Как отмечалось выше, материалом каркаса пенополистирола является полистирол (polystyrene). Он является продуктом полимеризации стирола (винилбензола). Полистирол – твердое упругое вещество. Фенильные группы препятствуют упорядоченному расположению макромолекул и формированию кристаллических образований. Из-за этого плотность полистирола относительно невелика (примерно равна плотности воды), а скорость звука лишь немногим больше скорости звука в воде. Согласно [52], плотность полистирола составляет $\rho_* = 1050$ кг/м³, скорость продольных волн равна $c_l = 2480$ м/с, скорость поперечных волн $c_t = 1150$ м/с. Похожие значения для скоростей получаются исходя из измеренных величин коэффициента Пуассона и модуля Юнга, приведенных в справочнике [53]. Для полистирола значения коэффициента Пуассона лежат в диапазоне $\sigma = 0.325-0.33$, а модуль Юнга составляет $E = 3200-3400$ МПа. Если использовать $E = 3300$ МПа, $\rho_* = 1050$ кг/м³ и $\sigma = 0.33$, то для скоростей

упругих	волн	получится:
$c_l = \sqrt{E(1-\sigma)/[\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)]} \approx 2158$ м/с	$c_t = \sqrt{E/[2\rho(1+\sigma)]} \approx 1087$ м/с.	

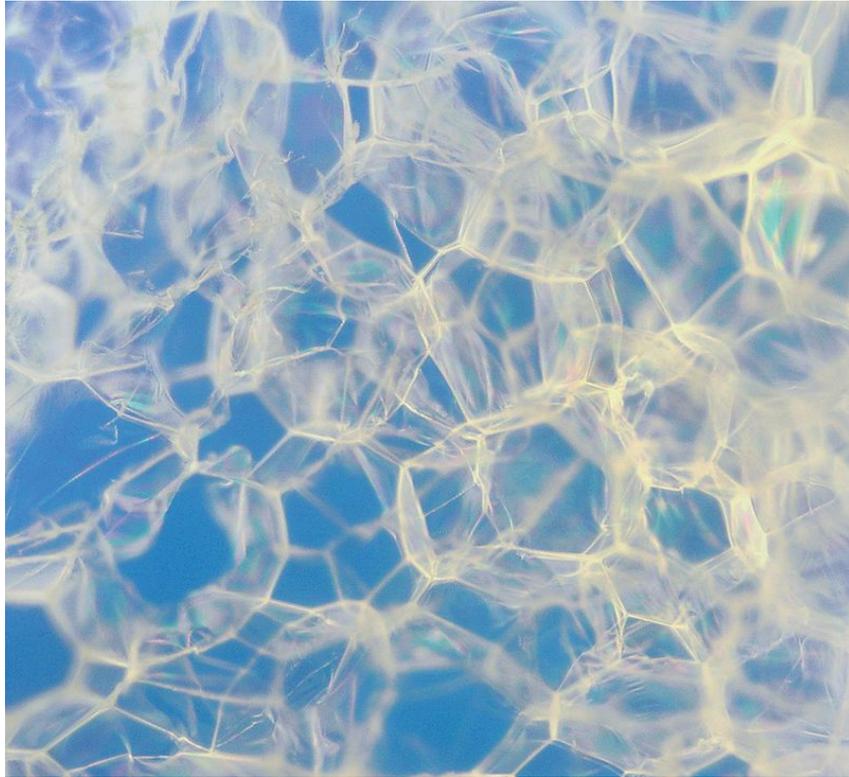


Рис. 1.6. Структура пенопласта при рассмотрении под большим увеличением

Основываясь на рис. 1.6, в качестве элементарной ячейки структуры пенопласта рассмотрим воздушный пузырек с тонкой сферической оболочкой из полистирола. Толщину оболочки нетрудно оценить исходя из плотности пенопласта. Пусть a и b – внешний и внутренний радиусы оболочки. Можно приближенно считать, что рассматриваемый пузырек находится в объеме пенопласта в виде куба со стороной $2a$. Величина соответствующего объема $V_0 = 8a^3$. Поскольку объем оболочки из полистирола составляет $V_1 = \frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$, то оставшийся объем, занятый воздухом, составляет $V_2 = V_0 - V_1$. Пусть ρ_0 – плотность воздуха, ρ_* – плотность полистирола. Тогда плотность пенопласта $\rho_{\text{пен}} = (\rho_0 V_2 + \rho_* V_1)/V_0$, откуда следует:

$$\frac{b}{a} = \left(1 - \frac{6}{\pi} \frac{\rho_{\text{пен}} - \rho_0}{\rho_* - \rho_0}\right)^{1/3}. \quad (1.13)$$

Подставляя численные значения для плотностей $\rho_{\text{пен}} = 21\text{кг/м}^3$, $\rho_* = 1050\text{кг/м}^3$, $\rho_0 = 1.3\text{кг/м}^3$, получим $b/a \approx 0.9879$. Например, для пузырька диаметром $2a = 1$ мм получим отсюда: $a - b \approx 6$ мкм, т.е. оболочка довольно тонкая. Для более мелких пузырей (a в пенопласте характерный диаметр пор составляет 100 мкм и меньше – см. рис. 1.6) оболочка еще тоньше.

Чтобы понять, способна ли такая тонкая структура заметно повлиять на акустический отклик частиц из пенопласта, рассмотрим процесс рассеяния плоской аку-

стической волны на пузырьке воздуха с оболочкой из полистирола. Геометрия задачи показана на рис. 1.7.

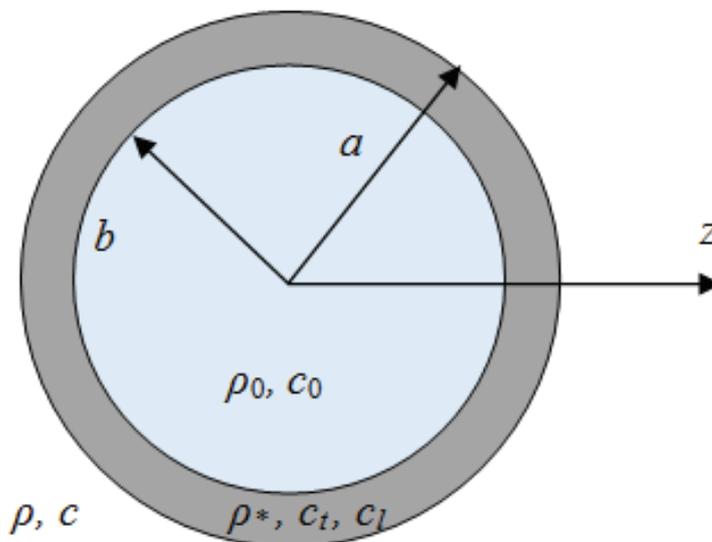


Рис. 1.7. Геометрия задачи о рассеянии плоской акустической волны на сферической оболочке

Как и раньше, будем считать, что падающая волна является плоской гармонической волной с комплексной амплитудой $p_i = p_0 e^{ikz}$, где p_0 – амплитуда волны, k – волновое число. Падающая волна распространяется вдоль оси z . Задача рассеяния в подобной постановке решена в работе [54] методом разложения по сферическим гармоникам для ситуации, когда внутри упругой оболочки находится та же жидкость, что и вне ее. В работе [55] дополнительно рассмотрен случай абсолютно пустой оболочки. Пользуясь подходом, описанным в указанных работах, мы провели рассмотрение более общего случая, когда внутри упругой оболочки находится жидкость (в нашем случае это воздух), отличающаяся от жидкости, в которой распространяется падающая волна (вода). Рассчитывались параметры акустического возмущения во всех трех средах и, в частности, находились распределения амплитуд акустического давления $p(r = a, \theta)$ и радиальной компоненты колебательной скорости $v_r(r = a, \theta)$ на внешней поверхности оболочки, а также угловая диаграмма рассеяния $f(\theta)$, которая входит в выражение для амплитуды рассеянной волны p_s в дальней зоне: $p_s(r \gg a, \theta) = (p_0 e^{ikr}/r) f(\theta)$. Здесь θ – угол между направлением распространения падающей волны и направлением на точку наблюдения (зенитный угол сферической системы координат), r – расстояние от центра сферы.

При расчетах использовались следующие значения параметров задачи: частота ультразвуковой волны 1 МГц, внешний радиус сферической оболочки $a = 0.5$ мм, плотности воды, полистирола и воздуха, соответственно, $\rho = 1000$ кг/м³, $\rho_* = 1050$ кг/м³ и $\rho_0 = 1.3$ кг/м³, скорости звука в воде и воздухе $c = 1500$ м/с и

$c_0 = 330$ м/с, скорости продольных и сдвиговых волн в полистироле $c_l = 2480$ м/с и $c_t = 1150$ м/с. Внутренний радиус оболочки выбирался исходя из условия $b/a \approx 0.9879$ (что соответствует плотности пенопласта $\rho_{\text{пен}} = 21$ кг/м³). Кроме того, моделировался случай воздушного рассеивателя без оболочки.

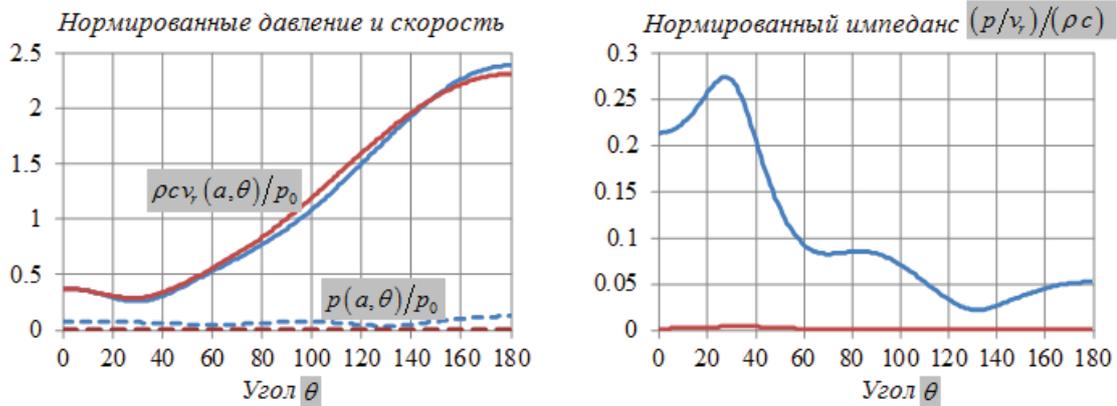


Рис. 1.8. Угловые зависимости параметров акустического поля на поверхности сферического рассеивателя диаметром $2a = 1$ мм. Синие кривые соответствуют рассеивателю с оболочкой, красные – воздушному пузырьку без оболочки

Как видно из кривых, приведенных на рис. 1.8 слева, амплитуда давления на поверхности обоих рассеивателей (с оболочкой и без нее) гораздо меньше амплитуды падающей волны, в то время как соответствующая радиальная компонента скорости имеет тот же порядок, что и амплитуда колебательной скорости в падающей волне. Это видно и из кривых для импеданса, приведенных справа на рис. 1.8: импеданс заметно меньше единицы всюду на поверхности рассеивателя.

На рис. 1.9 показано, как выглядит угловая диаграмма рассеяния. Видно, что в случае рассматриваемого объекта рассеяние происходит в основном назад. В общем случае угловая зависимость может быть более изрезанной, что характерно для ситуации, когда размер сферического рассеивателя сравним или превышает длину волны (рассеяние Ми).

На основе проведенных расчетов можно заключить, что полистироловая основа пенопласта лишь незначительно влияет на амплитуду акустического рассеяния, т.е. пенопластовые рассеиватели с хорошим приближением можно считать эквивалентными воздушным рассеивателям.

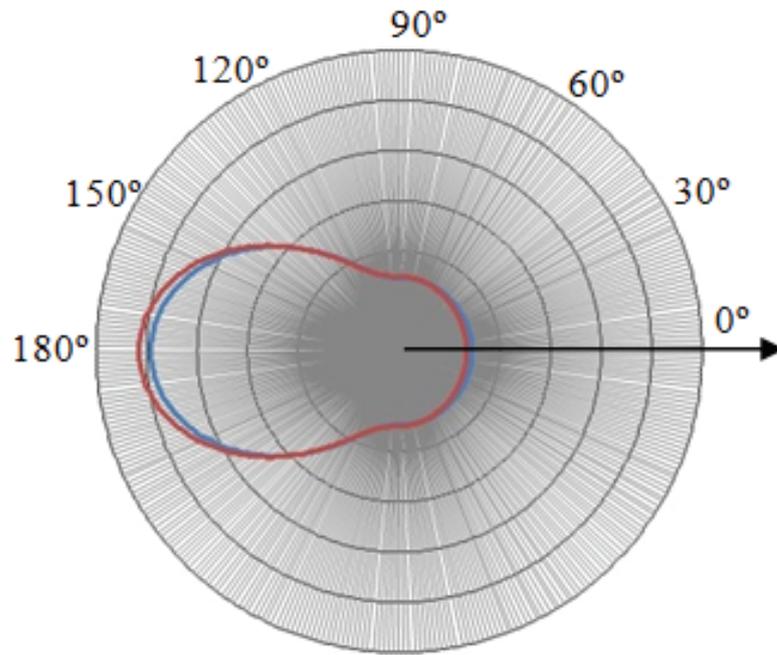


Рис. 1.9. Угловая диаграмма рассеяния $f(\theta)$ для рассеивателя с оболочкой (синяя кривая) и без оболочки (красная кривая)

§1.2. Получение диаграмм рассеяния сферического пенопластового образца – модели мягкой сферы

1.2.1. Предварительный эксперимент по сопоставлению коэффициентов отражения звуковой волны в воде от пенопласта и от воздуха

Прежде чем приступить к получению непосредственно диаграмм рассеяния сферического пенопластового образца, следует проверить более очевидные свойства пенопласта в сопоставлении со свойствами воздуха. Так, например, предполагается, что коэффициент отражения звуковой волны от пенопласта в воде подобно воздуху $K_{refl} = -1$. Данная гипотеза была проверена следующим способом: плоский излучатель на частоте 1 МГц излучал ультразвуковой импульс в среду с границей вода – воздух, отраженный от границы импульс записывался, далее вместо воздуха устанавливалась плоская граница с пенопластом, и аналогично записывался отраженный от пенопласта импульс (рис. 1.10).

Практически полное совпадение отраженных импульсов (рис. 1.11) свидетельствует о том, что $K_{refl}(styr) \approx K_{refl}(air) \approx -1$.

Для более тщательной проверки данного свойства был проведен еще один эксперимент. Установка представляла собой излучатель с рабочей частотой 1 МГц, пенопластовый образец с почти плоской поверхностью и гидрофон в качестве приемника (рис. 1.12). Снималось отраженное от пенопласта поле и падающее поле без пенопла-



Рис. 1.10. Излучатель, принимающий отраженные волны от воздуха и пенопласта

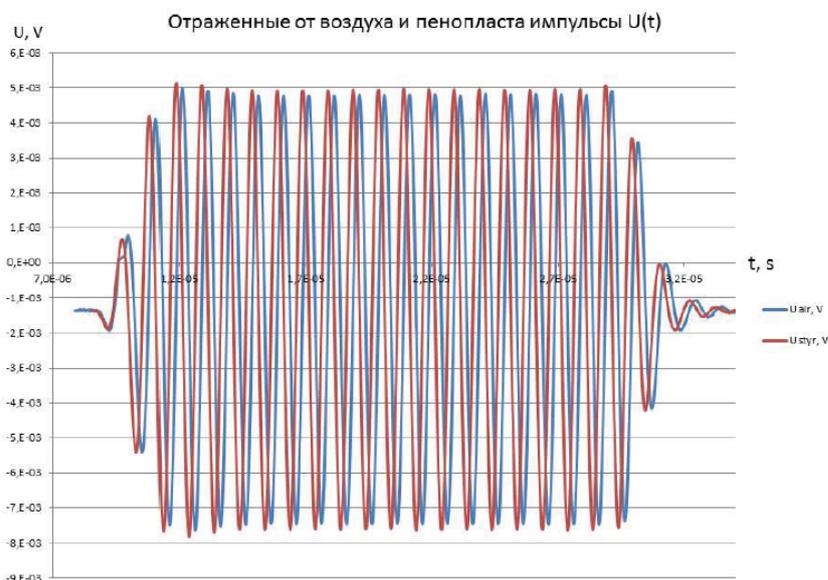


Рис. 1.11. Графики $U(t)$ звуковых импульсов, отраженных от границ вода – воздух и вода – пенопласт, разнесенные во времени для демонстрации их практически полного совпадения

ста на пути под 90° к направлению отраженного от пенопласта поля, поэтому можно сопоставить два этих поля.

Распределения фаз (рис. 1.13) рассматриваемых полей показывают, что мы нашли именно те поля, которые нужны. Видно, что расположены они под 90° друг к другу. Так как поверхность пенопласта была не идеально ровная, то распределение амплитуды (рис. 1.13) отраженной от пенопласта волны не представляет собой ровный круг, как в случае падающей волны.

Для данных распределений амплитуд были посчитаны полные мощности, то есть суммы квадратов амплитуд по всей рассматриваемой поверхности. В результате

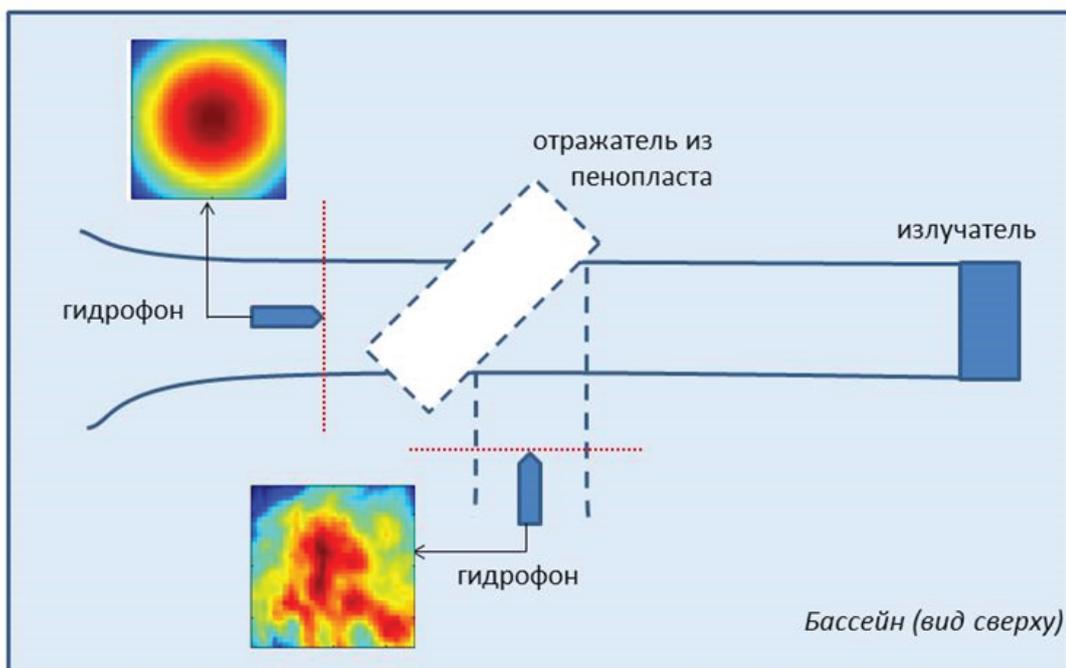


Рис. 1.12. Схема экспериментальной установки для снятия характеристик поля отраженной от пенопласта волны и падающей с излучателя волны, снятой в отсутствие пенопласта под 90° к направлению отраженной волны; красные штриховые линии – это области сканирования, синие штриховые линии – границы отраженного от пенопласта акустического пучка, синие сплошные линии – границы падающего пучка в отсутствие пенопласта

отражения от пенопласта мощность сигнала, проходящего через область сканирования, уменьшилась примерно на 9%:

$$P_{refl_styr} = 0,0416 V^2, \quad P_{inc} = 0,0458 V^2. \quad (1.14)$$

Указанное различие может быть объяснено тем, что из-за неровностей поверхности пенопластовой пластины часть отраженного сигнала не попала в область сканирования (это видно на нижней части распределения амплитуды отраженного сигнала, показанного на рис. 1.13). Незначительность потерь подтверждает, что

$$K_{refl}(styr) \approx K_{refl}(air) \approx -1. \quad (1.15)$$

1.2.2. Описание экспериментальной установки и методики эксперимента

Поскольку описанный выше эксперимент с протяженным плоским образцом из пенопласта подтвердил, что по своим акустическим свойствам пенопласт близок к воздуху, можно ожидать, что и маленькие сферические образцы из пенопласта будут рассеивать ультразвук как пустые полости. Для проверки был проведен ряд экспериментов на получение диаграмм рассеяния модели мягкой сферы. В качестве модели

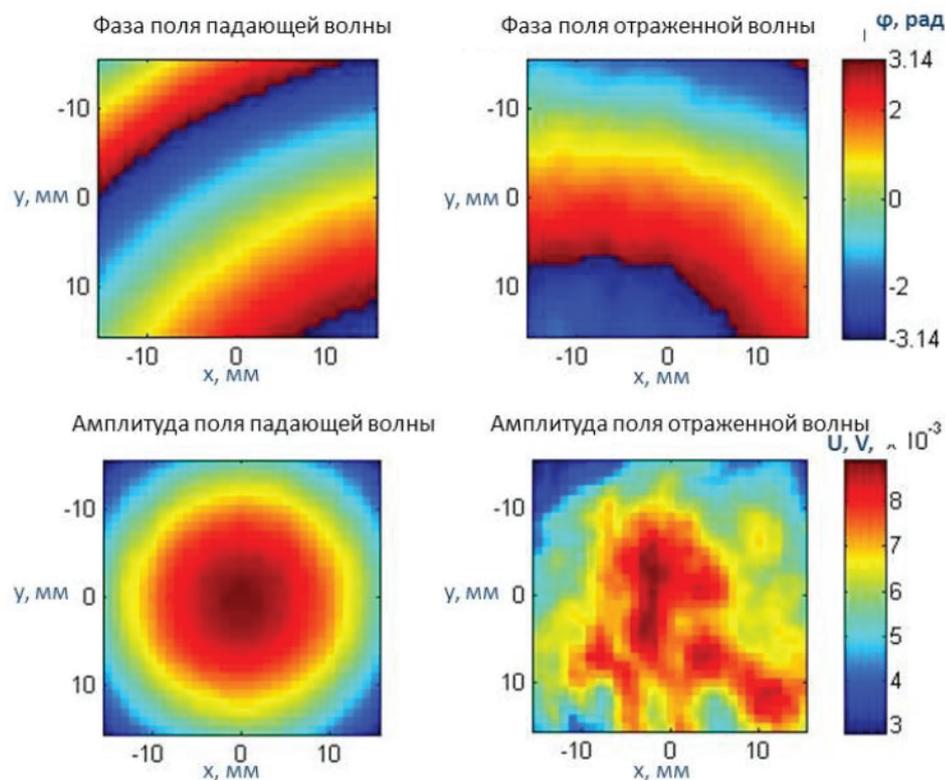


Рис. 1.13. Распределения фаз и амплитуд полей падающей волны и отраженной от пенопласта волны

брался пенопластовый шарик диаметром 5 мм, закреплялся в жесткой рамке на леске с помощью клея, чтобы он не всплывал при погружении в воду (рис. 1.14). Экспериментальная установка состояла из следующих элементов: акустический излучатель, генерирующий звуковую волну на частоте 1 МГц; гидрофон, выступающий в роли приемника, сигнал с которого считывался на осциллограф; и собственно предмет исследования – пенопластовый сферический образец (рис. 1.15).

Сначала гидрофоном отыскивалось наиболее однородное поле излучателя (рис. 1.16), в которое далее помещался пенопластовый шарик, и гидрофоном сканировалось поле в окрестности шарика, преимущественно рассеяние вперед и в сторону, насколько позволяла геометрия установки.

Измерения проводились в следующем порядке. Сначала гидрофоном в присутствии сферического рассеивателя снимались данные об амплитуде и фазе полного поля, состоящего из падающего и рассеянного (рис. 1.17,а). Далее в той же области, но в отсутствие рассеивателя, снимались данные падающего поля (рис. 1.17,б). Рассеянное поле находилось вычитанием падающего поля из полного поля (рис. 1.17,с). Так как давление рассеянной волны в общем случае является комплексной величиной, то амплитуда этого давления будет вычисляться через амплитуды и фазы



Рис. 1.14. Пенопластовый шарик диаметром 5 мм, закрепленный в жесткую рамку

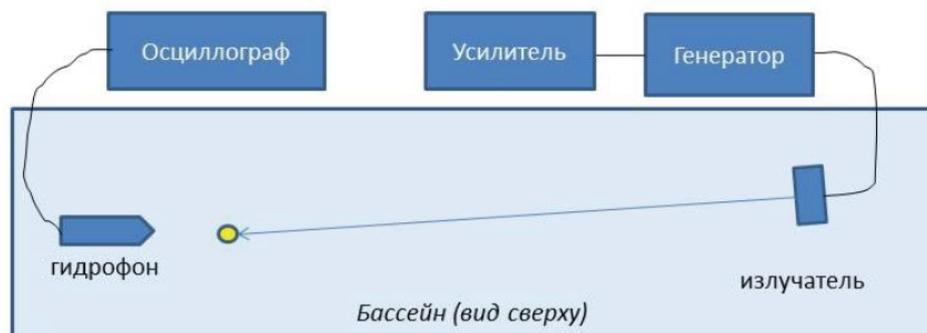


Рис. 1.15. Схема экспериментальной установки для получения диаграмма рассеяния

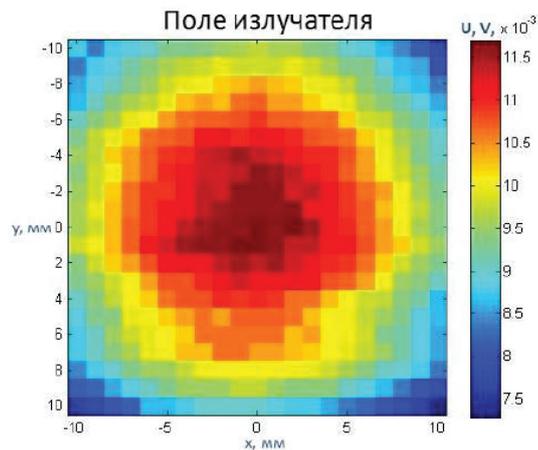


Рис. 1.16. Амплитуда поля падающей волны излучателя

падающего и полного полей по следующей формуле:

$$P_s = \sqrt{P_i^2 + P_{full}^2 - 2P_i P_{full} \cos(\varphi_i - \varphi_{full})}, \quad (1.16)$$

где P_i^2 и P_{full}^2 – амплитуды, а φ_i и φ_{full} – фазы давления падающего и полного полей, соответственно.

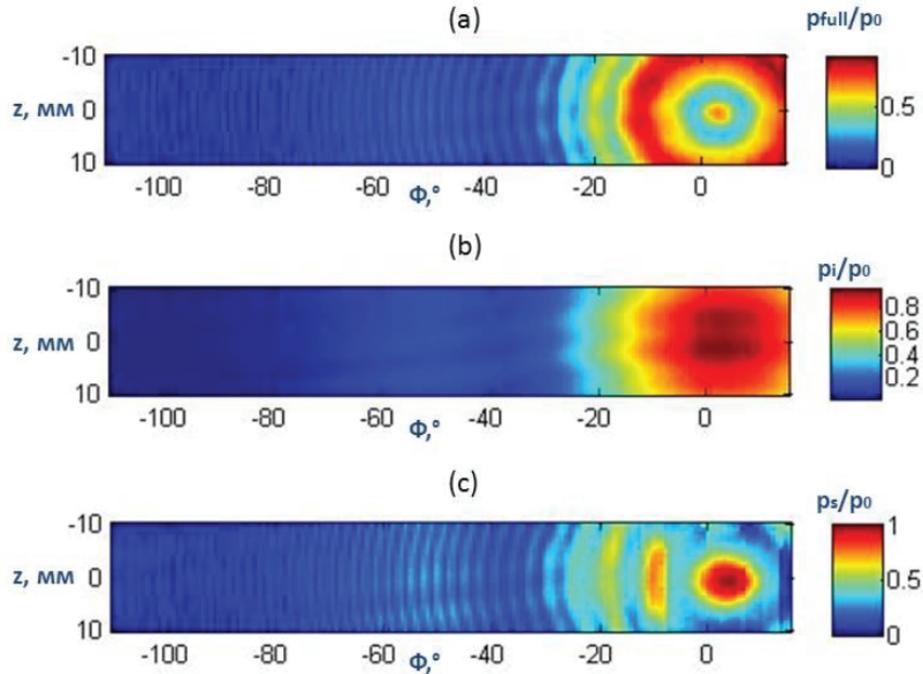


Рис. 1.17. Амплитуда давления полного (а), падающего (b) и рассеянного (c) полей

Гидрофон перемещался с помощью системы позиционирования. Применялись два способа сканирования: по цилиндру и по плоскости (рис. 1.18). По цилиндру геометрия установки позволила просканировать поле с координатами $-110^\circ \leq \Phi \leq 15^\circ$ (где $\Phi = 0$ соответствует рассеянию вперед), $-10 \text{ мм} \leq z \leq 10 \text{ мм}$ на расстоянии $R = 49,24 \text{ мм}$ от центра рассеивателя.

Результаты показали (рис. 1.17,с), что практический интерес для нас имеет область $-20^\circ \leq \Phi \leq 15^\circ$, и в таком случае удобно проводить сканирование по плоскости (рис. 1.18,б). В зависимости от расстояния между плоскостью сканирования и центром рассеивателя брались диапазоны значений координат $-10 \text{ мм} \leq x, y \leq 10 \text{ мм}$ для $R = 10 \text{ мм}$ и $-15 \text{ мм} \leq x, y \leq 15 \text{ мм}$ для $R = 25 \text{ мм}$ и $R = 50 \text{ мм}$.

1.2.3. Теоретический расчет диаграмм рассеяния абсолютно мягкой сферы

В теории использовалась простейшая модель пузырька газа – абсолютно мягкая неподвижная сфера. Для нее известно, что точное решение дифракционных задач дает следующую формулу для давления рассеянной волны:

$$p_s = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta), \quad (1.17)$$

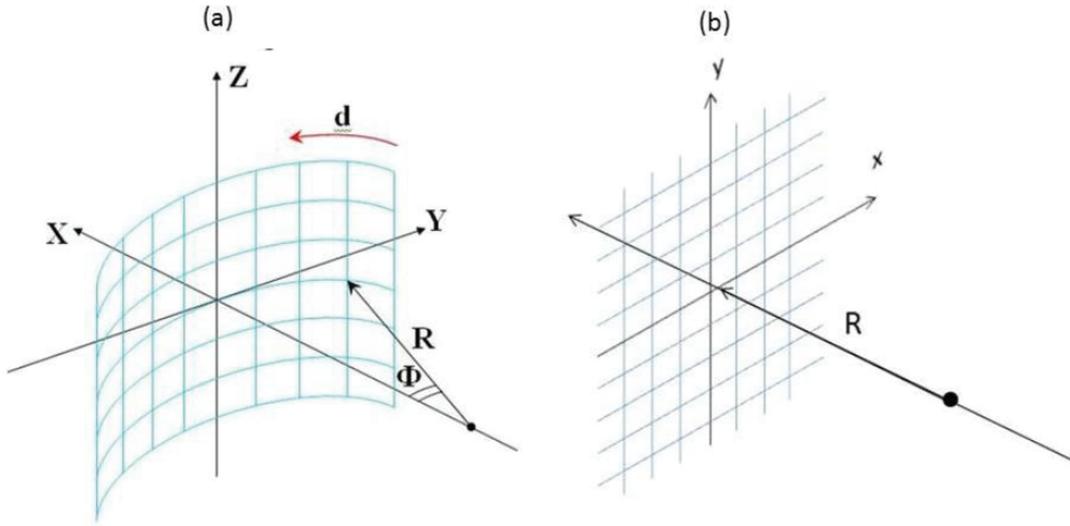


Рис. 1.18. Координатные сетки сканирования по цилиндру (а) и по плоскости (б) в системе позиционирования

где $h_n^{(1)}$ – функции Ханкеля 1 рода n -го порядка, P_n – полиномы Лежандра n -го порядка, а для связи координат сканирования с координатами r и θ , присутствующими в теоретической формуле использовались приведенные ниже формулы:

$$\left\{ r = \sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}; \cos \theta = -\frac{R}{r} \cos(\Phi - \Phi_0) \right\} \text{ – для цилиндра,}$$

$$r = \sqrt{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}; \tan \theta = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{R} \text{ – для плоскости,}$$

(1.18)

где x_0 , y_0 , z_0 и Φ_0 – координаты, на которые смещается центр рассеивателя относительно нуля координатной сетки сканирования в силу того, что ось излучателя и ось приемника не совмещены, так как падающая волна с излучателя направлена под углом. Эти координаты учитывались для упрощения дальнейшего сравнения теории с экспериментом.

Также теоретически был рассчитан график зависимости амплитуды давления рассеянной волны от расстояния между центром сферы и областью сканирования (здесь без учета того, что излучатель находится под наклоном). На основе графика были выбраны расстояния, представляющие наибольший интерес для экспериментальных исследований диаграмм рассеяния (рис. 1.19).

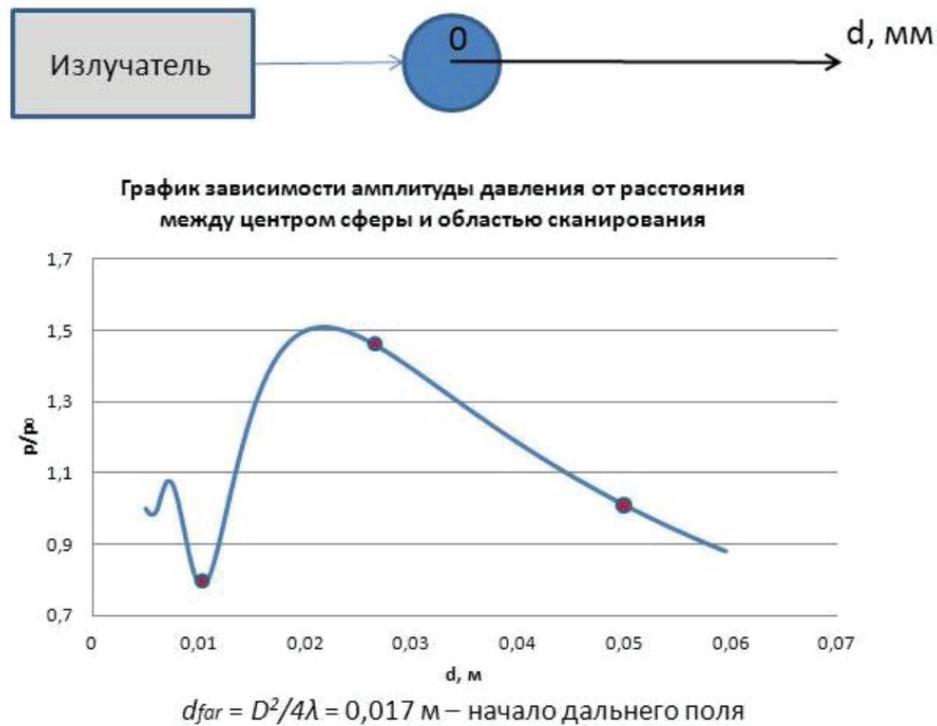


Рис. 1.19. График зависимости амплитуды давления рассеянной волны от расстояния между центром сферы и областью сканирования (точками отмечены расстояния, на которых были проведены экспериментальные исследования диаграмм рассеяния)

1.2.4. Сопоставление теории и эксперимента

Обратимся к результатам теоретических расчетов и экспериментальных измерений при сканировании по цилиндру (рис. 1.20). Измерения проводились на расстоянии $R = 49,24$ мм от центра рассеивателя в сторону рассеяния вперед.

Проанализируем полученные диаграммы. Во-первых, как и предполагалось в предыдущем параграфе, из-за несовпадения оси излучателя и оси приемника центр рассеивателя сместился относительно нуля координатной сетки сканирования. Во-вторых, как видно из рис. 1.20, область $\Phi \leq -20^\circ$ не представляет для нас практического интереса, так как рассеяние в сторону существенно ниже рассеяния вперед. Следует отметить, что рассеянная вперед волна противоположна по фазе падающей волне, поэтому при сложении они образуют зону тени (рис. 1.17,а). В-третьих, в эксперименте возникают побочные «кольца» сильного рассеяния. Их появление может быть связано с переотражением, а также с изменением температуры воды, которое приводило к изменению скорости звука в воде. Так как эксперимент проводился в течение нескольких часов, данного изменения температуры воды могло быть достаточно для возникновения таких «колец».

Следующим этапом экспериментальных исследований было получение диаграмм рассеяния того же сферического образца при сканировании по плоскости на расстоя-

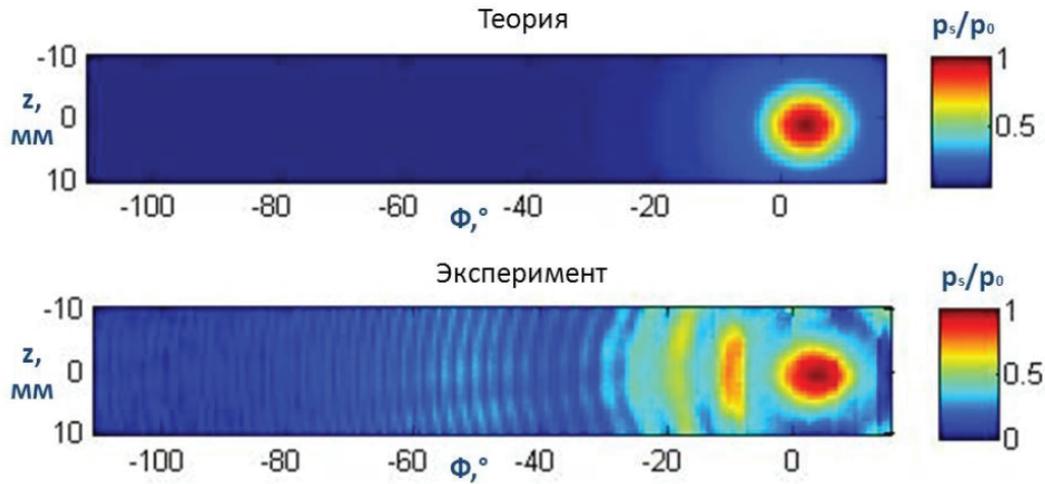


Рис. 1.20. Теоретическая и экспериментальная диаграммы рассеяния мягкого сферического рассеивателя радиусом 5 мм, расположенные на расстоянии $R = 49,24$ мм от центра рассеивателя на цилиндрической поверхности с $-110^\circ \leq \Phi \leq 15^\circ$ и $-10 \text{ мм} \leq z \leq 10 \text{ мм}$

ниях $R = 10 \text{ мм}$, $R = 25 \text{ мм}$ и $R = 50 \text{ мм}$ от центра рассеивателя в сторону рассеяния вперед (рис. 1.21).

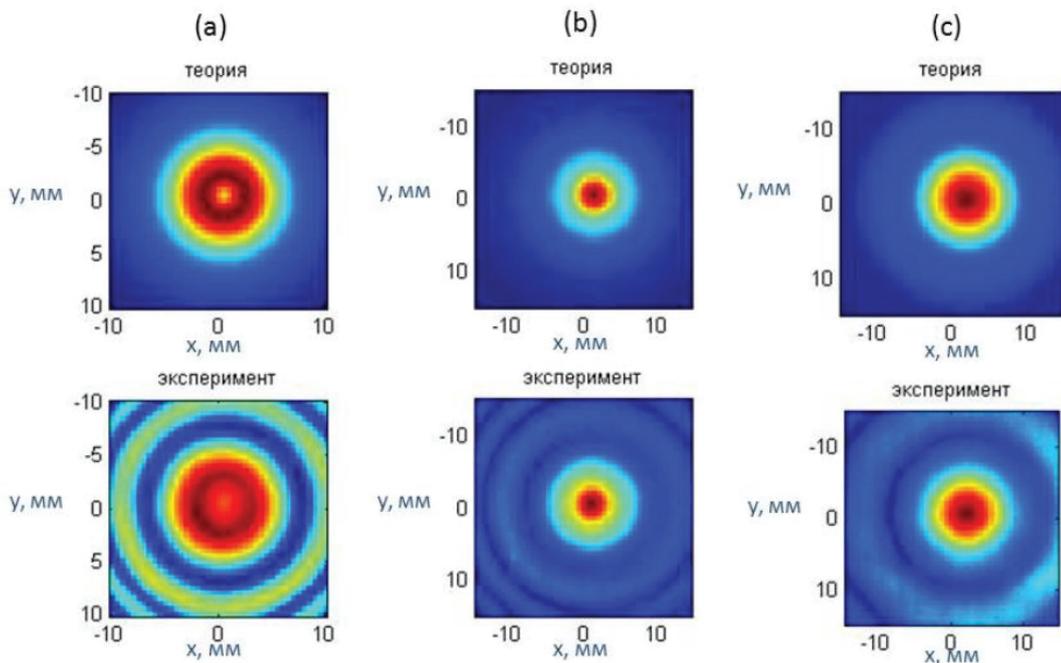


Рис. 1.21. Теоретическая и экспериментальная диаграммы рассеяния мягкого сферического рассеивателя радиусом 5 мм, расположенные на расстояниях $R = 10 \text{ мм}$ (a), $R = 25 \text{ мм}$ (b) и $R = 50 \text{ мм}$ (c) от центра рассеивателя на плоскостях с $-10 \text{ мм} \leq x, y \leq 10 \text{ мм}$ (a) и $-15 \text{ мм} \leq x, y \leq 15 \text{ мм}$ (b), (c)

Важными результатами данных измерений является наличие «провала» на экспериментальной диаграмме рассеяния на расстоянии $R = 10 \text{ мм}$, который был пред-

сказан в теории (рис. 1.21,а), а также возникновение побочных «колец» сильного рассеяния в эксперименте, которые, тем не менее, становятся слабее с увеличением расстояния R . Это подтверждает гипотезу, что появление «колец» связано с переотражением. Вблизи рассеивателя происходит многократное переотражение, дающее большой вклад в диаграмму рассеяния. На больших расстояниях от центра рассеивателя в сторону рассеяния вперед амплитуда «колец» составляет всего около 20% от максимума амплитуды рассеяния (рис. 1.22), что свидетельствует о незначительности данного артефакта.

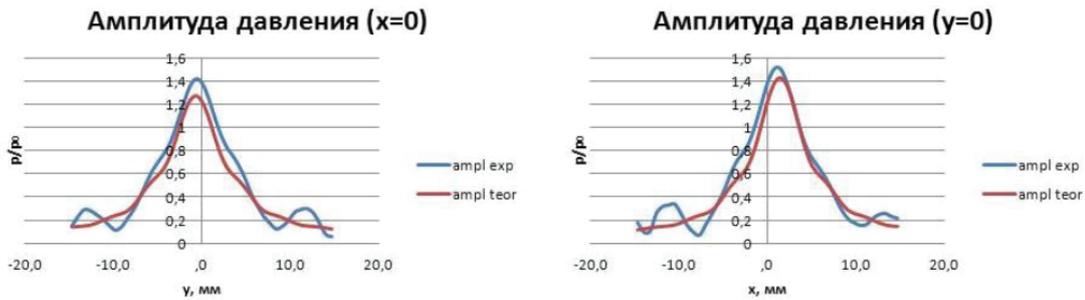


Рис. 1.22. Двумерные графики зависимости относительной амплитуды давления рассеянного поля от координаты y при $x = 0$ и от координаты x при $y = 0$, взятые из диаграммы рассеяния сферического рассеивателя радиусом 5 мм, расположенной на расстоянии $R = 25$ мм

Из всех вышеописанных результатов экспериментов приходим к выводу, что пенопластовые сферические образцы рассеивают акустические волны аналогично моделям пузырьков газа в виде абсолютно мягкой неподвижной сферы.

§1.3. Моделирование ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей

1.3.1. Принцип работы и методы моделирования ультразвуковой визуализации

Основным элементом любой системы визуализации является электроакустический преобразователь, который служит для излучения зондирующего акустического импульса в объект и для приема акустических эхо-сигналов, отраженных структурами объекта. Преобразователь представляет собой одно- или двумерную решетку пьезоэлементов. Такие решетки имеют определенные преимущества, связанные с отношением сигнал/шум и разделением функций приема и излучения. Фазированные решетки преобразователей являются более универсальными устройствами формирования пучков в том плане, что форма создаваемых ими волновых фронтов может отличаться от формы активных поверхностей используемых преобразователей. Однако дискретность фазового распределения в пределах волнового фронта решетки

приводит к нежелательным изменениям в структуре волнового поля, например, к появлению боковых лепестков. Тем не менее, с учетом данной оговорки фазированные решетки преобразователей можно рассматривать как самостоятельный класс устройств для создания волновых фронтов, форма которых отличается от плоской. Удобно разделять различные виды решеток на три класса: линейные, кольцевые и двумерные (рис. 1.23).

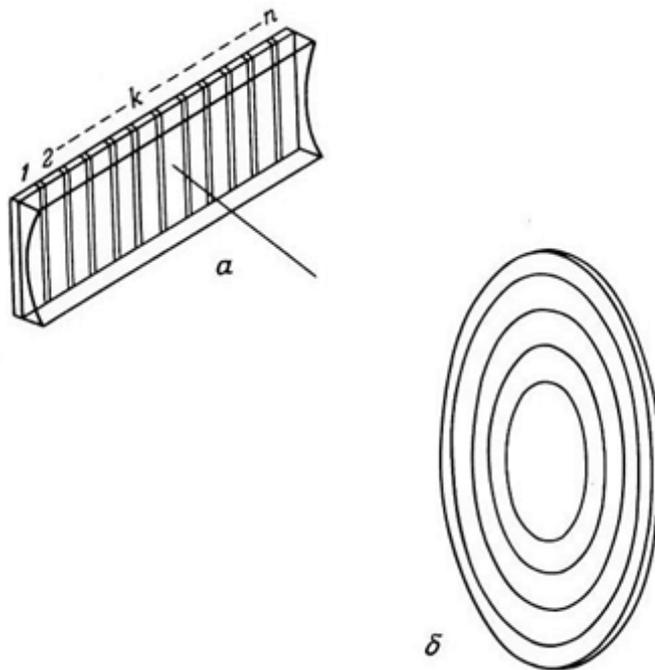


Рис. 1.23. Основные типы решеток преобразователей: а – линейная решетка (показана в комбинации с цилиндрической линзой, обеспечивающей фокусировку в направлении, перпендикулярном плоскости сканирования), б – кольцевая решетка. Рисунок взят из [1]

Линейные решетки обычно изготавливаются в виде набора примыкающих друг к другу элементов, вырезанных, как правило, из одного и того же образца материала. В простейшем случае используется поочередное переключение элементов, и никаких фазовых сдвигов между ними не вводится. Отдельные элементы просто объединяются в группы. При этом поперечное сканирование несфокусированным пучком, сформированным несколькими соседними элементами, осуществляется путем последовательного переключения на одно межэлементное расстояние.

Чтобы обеспечить угловое сканирование и фокусировку ультразвукового пучка, конструкция решетки преобразователей должна удовлетворять достаточно жестким требованиям. Диаграмма направленности каждого отдельного элемента должна быть сравнительно широкой, то есть поперечные размеры элементов должны быть достаточно малы, чтобы полный угол качания пучка мог быть реализован при приемлемом уменьшении усиления. Вместе с тем диаграмма направленности должна

обеспечивать возможность выделения полезного сигнала на фоне нежелательных лепестков решетки.

К существенным недостаткам линейных решеток относится то, что формирование заданной формы пучка и сканирование возможны только в одной плоскости, а именно в перпендикулярной продольным осям элементов. Для обеспечения фокусировки вне этой плоскости, то есть для перехода к двумерной геометрии, необходимо использовать акустические линзы или же применять искривленные элементы, создание которых сопряжено с определенными технологическими трудностями.

Для получения изображения на основе эхо-информации необходимо, чтобы пространственное положение преобразователя и/или ориентация оси ультразвукового пучка были точно известны. Сканирование, то есть перемещение оси пучка в обследуемом объеме, обычно осуществляется путем электронного управления решеткой преобразователей с одновременной выдачей электрического сигнала, несущего информацию о координатах пучка.

Чтобы отличить эхо от одного зондирующего импульса и эхо от другого и избежать неоднозначности в определении положения рассеивателей, используется последовательная запись изображения вдоль набора линий (строк изображения). Делается это следующим образом: посылается импульс в заданном направлении, соответствующем выбранной строке изображения, и производится запись эхо-сигналов на интервале времени, в течение которого успевают возвратиться сигналы от самых дальних рассеивателей, затем происходит переход к следующей строке и процесс повторяется.

Для моделирования ультразвуковой визуализации используются различные численные методы. В 1996 г. была представлена программа, основанная на методе Туфолме-Степанишена [18]. В данной программе может быть смоделирована любая геометрия преобразователя и способ его возбуждения, а также могут быть рассчитаны и импульсное, и непрерывное волновые поля для падающих и отраженных импульсов. Современные ультразвуковые сканеры используют большое количество схем для достижения высокого разрешения и высокой контрастности изображения. Для управления ультразвуковым лучом и применения составных зон фокусов используются многоэлементные датчики. Их оптимизация и использование упрощены выполнением сканирования с помощью программного обеспечения. В такой программе датчик, фантом и обработка изображения моделируются на компьютере, в результате чего можно исследовать различные их комбинации.

Сначала была сделана общая программа, моделирующая все типы ультразвуковых датчиков [56, 57]. Она была успешно использована большим количеством университетов, а сравнение с реальными измерениями показало высокую точность ее расчетов [58]. В основе программы лежит приближение линейного распространения отраженных пространственных импульсов [59–62]. Расчеты программы для построе-

ния изображения занимают около 24 часов. Также для большей гибкости программы разработан интерфейс.

Следующим этапом было усовершенствование программы, рассчитывающей поле датчика (FIELD). Сама программа базируется на среде программирования Matlab, которая была расширена большим числом команд для моделирования датчиков. Эти команды задают датчики, устанавливают их свойства и рассчитывают их поля. Все команды написаны в среде программирования C для ускорения расчетов. В 1999 г. были представлены еще несколько результатов работы программы FIELD II [57]. Расчеты выполнялись для стандартных фантомов кисты, а также для искусственных человеческих фантомов (плода в утробе матери на 3 месяце и искусственной почки). Изображения всех фантомов могут быть получены для любой формы сканера, таких как: единичный элемент, линейная, выпуклая или фазированная решетка.

В указанных работах в качестве среды распространения рассматривается неоднородная биоткань, причем неоднородности моделируются в виде случайных рассеивателей.

В данной работе для простоты и ускорения расчетов среда считается однородной и рассматриваются лишь одиночные рассеиватели – пузырьки. В этом случае построение изображения может быть проведено на основе упрощенного алгоритма. Рассмотрим его более подробно.

В задачах акустической диагностики используются импульсные сигналы. Типичный сигнал имеет вид широкополосного импульса, состоящего из 3–4 периодов синусоиды, с высокочастотным заполнением и колоколообразной огибающей. Такой сигнал можно представить в следующем виде:

$$U(t) = U_0 \exp(-t^2/\tau_0^2) \sin \omega_0 t. \quad (1.19)$$

Здесь U_0 – амплитуда импульса, t – время распространения сигнала, τ_0 – длительность импульса, ω_0 – центральная частота.

Самая простая обработка ультразвука основана на отражении и прохождении плоских волн. Моделирующая программа конструирует механизм рассеяния в ткани. Общий принцип построения изображения рассеивателя в ультразвуковых сканерах представлен на рис. 1.24.

Для расчета рассеянного поля представим падающий импульс в виде суперпозиции гармонических волн и рассмотрим отдельно рассеяние каждой спектральной составляющей. Рассеянная волна тогда будет являться суммой рассеянных волн на всех частотах. С целью использования ряда Фурье периодически продолжим исходный импульсный сигнал, вводя период следования T , и найдем коэффициенты соот-

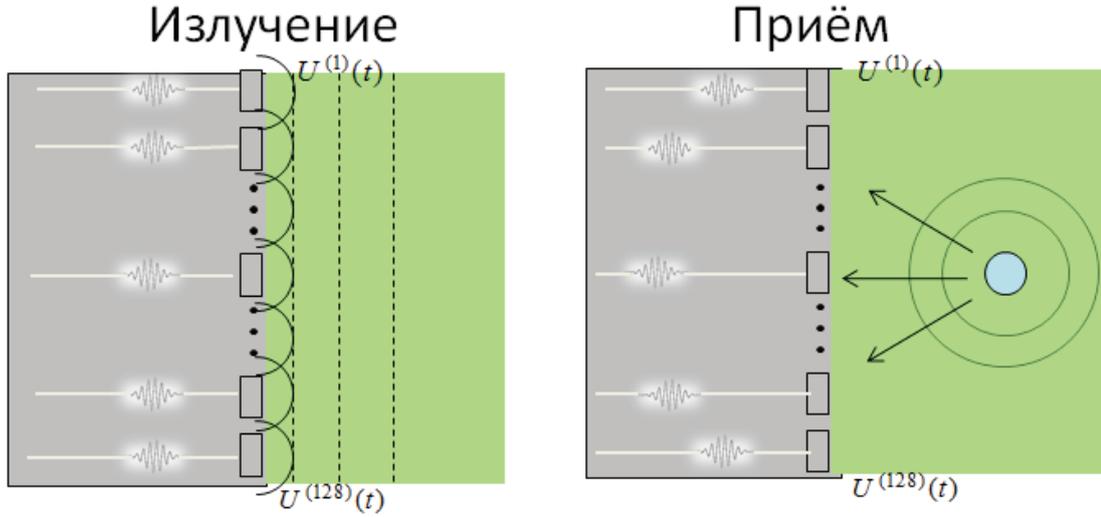


Рис. 1.24. Схема построения изображения рассеивателя в ультразвуковых сканерах

ветствующего разложения в ряд Фурье:

$$S_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t) e^{i\omega_m t} dt, \quad (1.20)$$

где $\omega_m = 2\pi m/T$ – циклическая частота m -й гармоники волны. После подстановки (1.20) в (1.19) в пределе $\omega_0 T \gg 1$ с учетом малости возмущения вдали от центра импульса получим интеграл Пуассона. В результате получим:

$$S_m = \frac{U_0}{2i} \sqrt{\pi} \frac{\tau_0}{T} \left\{ \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m + \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m - \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.21)$$

Следовательно, падающая импульсная волна $p_i(z, t) = U(t - \frac{z}{c})$, где z – пространственная координата, является суммой гармонических волн с известными амплитудами S_m :

$$U(t) = \sum_m S_m e^{-i\omega_m t}. \quad (1.22)$$

Согласно (1.21), функция давления падающей волны для определенного m имеет вид:

$$\begin{aligned}
p_m^{(i)}(z, t) &= S_m \exp \left[-i\omega_m \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] = \\
&= \frac{U_0}{2i} \sqrt{\pi} \frac{\tau_0}{T} \left\{ \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m + \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m - \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad \exp \left[-i\omega_m \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] = \\
&= \frac{U_0}{2i} \sqrt{\pi} \frac{\tau_0}{T} \left\{ \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m + \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m - \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad e^{-i\omega_m t} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) i^{-n} j_n(k_m r)] P_n(\cos \theta). \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Тогда рассеянная волна описывается:

$$\begin{aligned}
p_m^{(s)}(r, \theta, t) &= \frac{U_0}{2i} \sqrt{\pi} \frac{\tau_0}{T} \left\{ \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m + \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] - \exp \left[-\left(\frac{(\omega_m - \omega_0) \tau_0}{2} \right)^2 \right] \right\} \\
&\quad e^{-i\omega_m t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(k_m r) P_n(\cos \theta), \tag{1.24}
\end{aligned}$$

где $k_m = \frac{\omega_m}{c}$. Таким образом, находим давление рассеянной волны в точке r, θ .

Наконец, имея в виду, что исходный импульс представляется в виде суммы волн с разными ω_m , полное давление рассеянной волны равно:

$$p_s(r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p_m^{(s)}(r, \theta, t). \tag{1.25}$$

Типичные параметры в системах ультразвуковой медицинской диагностики: длительность импульса $\tau_0 = 2-3$ мкс, период их следования $T = 100$ мкс. В расчетах m можно ограничить от $\omega_{min} = \omega_0 - 5/\tau_0$ до $\omega_{max} = \omega_0 + 5/\tau_0$, т.е. от 60 до 140. Берем данные, представленные выше, и численными методами восстанавливаем исходный импульс по его спектру. Амплитуду импульса для простоты берем равную единице.

Как видим, импульс восстановился достаточно точно (рис. 1.25). Рассмотрим его рассеяние на абсолютно мягкой сфере радиуса 10 мм.

Результаты расчета показали, что форма рассеянного сигнала не изменяется, амплитуда уменьшается с расстоянием, а также наблюдается запаздывание по времени рассеянного импульса (рис. 1.26). Сильное изменение амплитуды рассеяния под разными углами вызвало интерес к изучению диаграммы направленности.

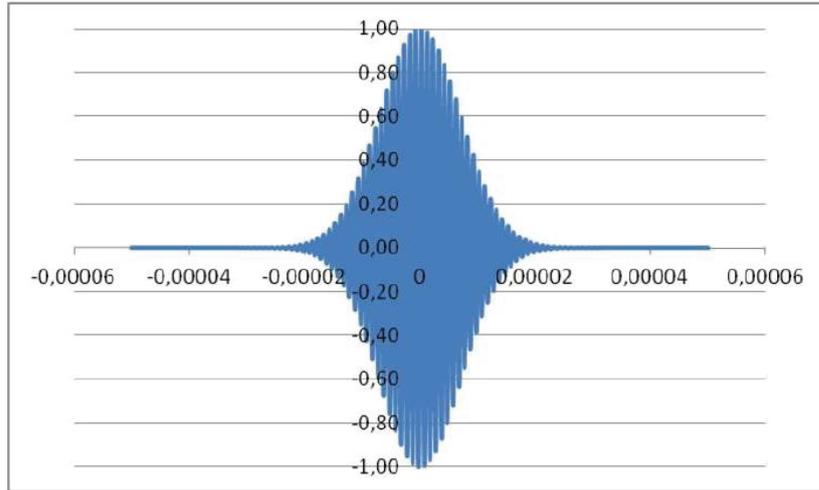


Рис. 1.25. Результат расчета для восстановления импульса по спектру

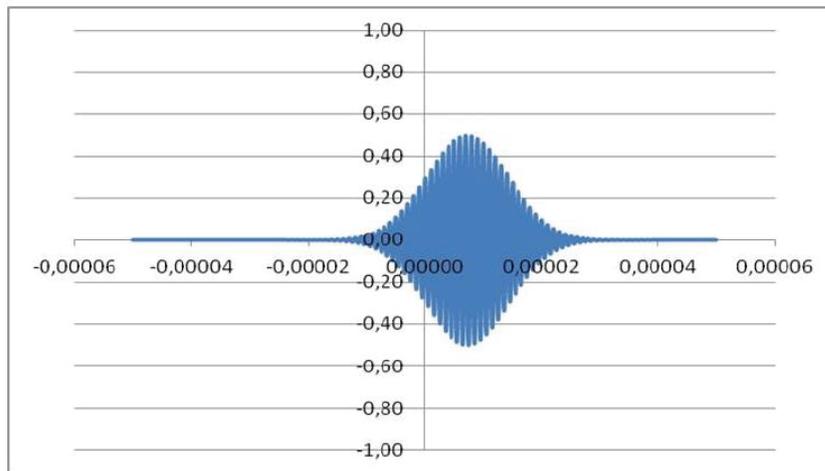


Рис. 1.26. Результат расчета импульса, рассеянного на мягкой сфере радиуса 10 мм на расстоянии 11 мм от центра сферы в направлении рассеяния вперед

Для упрощения расчетов в дальнем поле ($r \rightarrow \infty$) используем то, что функция Ханкеля имеет следующую асимптотику:

$$h_n^{(1)}(kr) = (-i)^{n+1} \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (1.26)$$

Тогда формула для давления рассеянного поля вдали от рассеивателя имеет вид:

$$p_s = e^{-i\omega t} f(ka, \theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad \text{где } f(ka, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^{2n+1} \frac{j_n(ka)}{h_n(ka)} P_n(\cos \theta), \quad (1.27)$$

где a – радиус рассеивателя, θ – угол рассеяния (отсчет от $\theta = 0^\circ$ при рассеянии вперед – рис. 1.27). Рассмотрим, как изменяется коэффициент $f(ka, \theta)$ для разных значений радиуса рассеивателя при углах рассеяния $\theta = 180^\circ$ (рассеяние назад),

$\theta = 170^\circ$, $\theta = 160^\circ$, $\theta = 150^\circ$ (рис. 1.28). Расчеты были проведены в среде программирования Fortran.

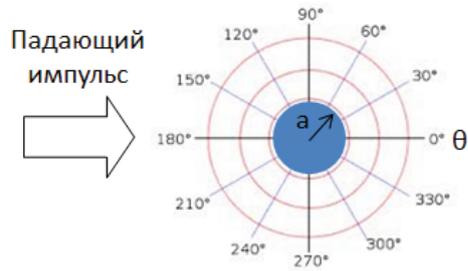


Рис. 1.27. Геометрия задачи для расчета $f(ka, \theta)$

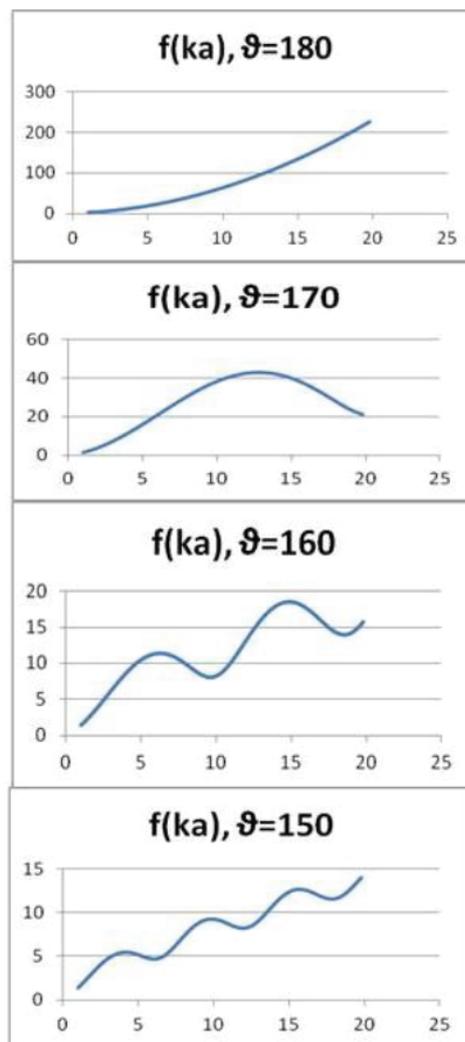


Рис. 1.28. Зависимость коэффициента $f(ka, \theta)$ от ka при различных углах θ (значения углов указаны в градусах) в формуле давления рассеянного поля

Наблюдается возникновение осциллирующего характера зависимости коэффициента $f(ka, \theta)$ в направлениях, отстоящих на некоторый угол от рассеяния строго

назад. Таким образом, при увеличении радиуса рассеивателя или частоты посылаемого ультразвукового сигнала давление рассеянного поля является монотонно возрастающей функцией только для рассеяния назад, в остальных случаях давление растет не монотонно. Тот факт, что при рассеянии назад зависимость силы рассеяния от размера рассеивателя является монотонно растущей функцией, чрезвычайно важен для рассматриваемых здесь задач визуализации пузырьков. Действительно, такая зависимость позволяет однозначно определить размер рассеивателя по амплитуде рассеянного назад сигнала (именно такие сигналы используются в ультразвуковых сканерах для построения изображений).

1.3.2. Численное моделирование построения ультразвуковых изображений в разных режимах работы УЗ-сканера

Для построения ультразвукового изображения рассеивателя по аналогии с тем, как это делается в УЗ-сканере, была написана программа в среде программирования Matlab. Реализованы 2 алгоритма построения: в режиме послыки квазиплоской волны и в режиме послыки сфокусированной волны. Алгоритм построения изображения можно разбить на несколько шагов. Опишем вкратце каждый из них для случая плоской волны.

Шаг 1. Рассеянный сигнал на элементах решетки

Из экспериментальных данных или из расчета находятся сигналы на каждом из $N = 128$ преобразователей. При задании $U_n(t)$ либо осуществляется полный расчет задачи рассеяния и приема рассеянного сигнала датчиками, либо берется импульс, который подробно разбирался в предыдущем параграфе:

$$U(t) = U_0 \exp(-t^2/\tau_0^2) \sin \omega_0 t \quad (1.28)$$

и для каждого $n = 1..N$ рассчитывается задержка:

$$\tau^{(n)} = \frac{z_0 + \sqrt{z_0^2 + (x_n - x_0)^2}}{c}, \quad (1.29)$$

где (x_0, z_0) – координаты, задающие положение рассеивателя, x_n – координата расположения n -го преобразователя по оси x (рис. 1.29).

Строится массив данных: набор рассеянных сигналов, пришедших на преобразователи:

$$U^{(n)}(t) = U_0 (t - \tau^{(n)}). \quad (1.30)$$

Производится оцифровка с шагом $h_t = 50$ нс:

$$U^{(n)}(t) \rightarrow U^{(n,m)} = U^{(n)}(t = m \times h_t). \quad (1.31)$$

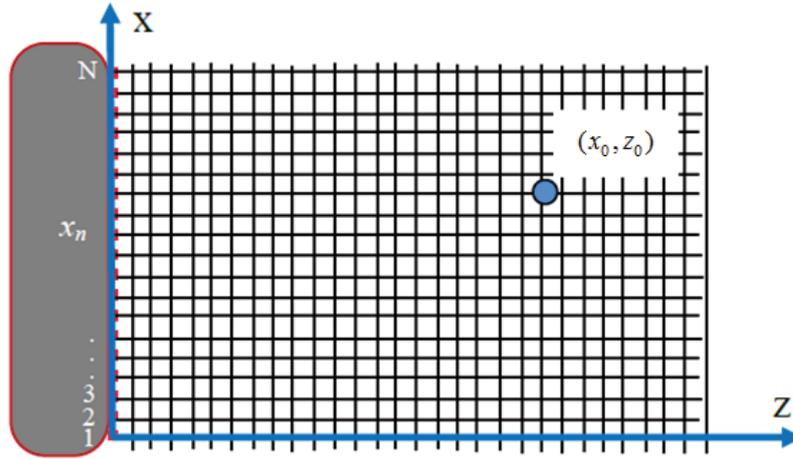


Рис. 1.29. Координатная сетка для построения рассеивателя в области обследования ультразвуковым сканером

Шаг 2. Расчет аналитического сигнала

Введем понятие аналитического сигнала. Пусть имеется сигнал $S(t)$; его ортогональным дополнением называется такой сигнал $S_{\text{орт}}(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) \times S_{\text{орт}}(t) dt = 0. \quad (1.32)$$

При этом подразумевается, что $S_{\text{орт}}(t)$ тождественно не равен нулю. Преобразование Гильберта позволяет рассчитать ортогональное дополнение сигнала $S(t)$:

$$S_{\text{орт}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{\pi \times (t - \tau)} d\tau. \quad (1.33)$$

Из этого выражения можно заметить, что преобразование Гильберта есть результат свертки сигнала $S(t)$ с функцией $h(t) = 1/(\pi t)$, называемой ядром преобразования Гильберта. Используем понятие аналитического сигнала, под которым понимается комплексный сигнал вида

$$z(t) = S(t) + i \times S_{\text{орт}}(t). \quad (1.34)$$

Спектр аналитического сигнала отличен от нуля только при положительных частотах, а в их отрицательной области спектр аналитического сигнала равен нулю. В данном алгоритме программы построения изображения аналитический сигнал применяется для получения огибающей исходного сигнала (рис. 1.30).

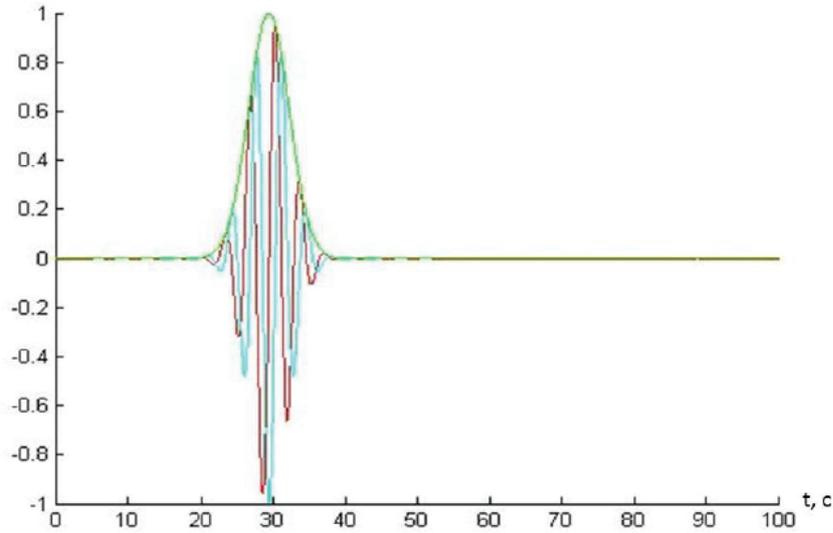


Рис. 1.30. График заданного сигнала $U(t)$ (красный), его ортогонального дополнения (голубой) и амплитуды аналитического сигнала (зеленый)

Для каждого $U^{(n,m)}$ находится ортогональное дополнение сигнала $V^{(n,m)}$. В итоге имеем комплексный массив из аналитических сигналов:

$$W^{(n,m)} = U^{(n,m)} + i \times V^{(n,m)}, \quad (1.35)$$

где $V^{(n,m)}$ – ортогональное дополнение оцифрованного сигнала $U^{(n,m)}$.

Шаг 3. Задание сетки

Вводится сетка на плоскости (x, z) с шагом $h = 0,5$ мм. Для каждой точки $(x_l, z_k) = (l, k)$, $z_k = kh$, $x_l = lh$, и каждого элемента n находим время задержки:

$$t_{lk}^{(n)} = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 + (x_n - x_l)^2}}{c}. \quad (1.36)$$

Через данное время сигнал, дошедший до точки (x_l, z_k) , возвращается на элемент n .

Шаг 4. Интерполяция

Для каждого элемента от 1 до N смотрим, чему равен аналитический сигнал $W^{(n,m)}(t_{lk}^{(n)})$. Число $t_{lk}^{(n)}$ не обязательно целое, а нам нужна оцифровка. Делаем интерполяцию, то есть находим 2 ближайших к $t_{lk}^{(n)}$ целых числа и по значениям функций от них строим промежуточное значение $F_{lk}^{(n)}$:

$$\left[\frac{t_{lk}^{(n)}}{h_t} \right] = m_{lk}^{(n)} = m_1, m_2 = m_1 + 1, \quad (1.37)$$

$$F_{lk}^{(n)} = \frac{t_{m_2} - t_{lk}^{(n)}}{h_t} W(n, m_1) + \frac{t_{lk}^{(n)} - t_{m_1}}{h_t} W(n, m_2). \quad (1.38)$$

Шаг 5. Суммирование

Находится $F_{lk}^{(n)}$ со всех преобразователей и вычисляется яркость B_{lk} в каждой точке сетки по формуле:

$$B_{lk} = \left| \sum_{n=1}^N F_{lk}^{(n)} \right|^2 = \left| \sum_{n=1}^N \left\{ U_{lk}^{(n)} + i \times V_{lk}^{(n)} \right\} \right|^2. \quad (1.39)$$

Шаг 6. Построение изображения

На сетке рисуется яркостная картина исследуемой области.

Несколько сложнее обстоит дело в случае посылки волны, сфокусированной на расстоянии F от поверхности ультразвукового сканера. Изображение строится путем последовательной посылки акустических импульсов и записи соответствующих рассеянных сигналов вдоль каждого из лучей 1, 2, ..., N . Рассмотрим луч с номером n (рис. 1.31). При посылке импульса вдоль луча на элементы преобразователя подаются сигналы с такой задержкой, чтобы происходила фокусировка в точку на луче с координатой $z = F$.

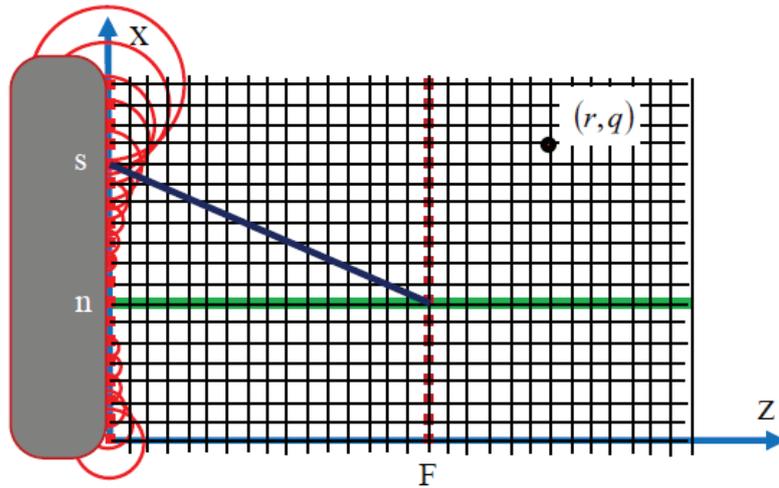


Рис. 1.31. Схема образования падающей волны, сфокусированной на расстоянии F

При посылке падающей волны вдоль луча с номером n на элемент с номером s подается импульс вида:

$$U_s^{(n)}(t) = U_* \left(t + \frac{\sqrt{(n-s)^2 h^2 + F^2}}{c} \right)^2, \quad (1.40)$$

где $U_*(t) = U_0 e^{-t^2/\tau^2} \sin \omega_0 t$ – заданная форма импульса, h – шаг сетки. Заметим, что при этом все точки сетки оказываются озвученными, хотя нами планировалось послать сигнал лишь вдоль луча n . Пусть $P_{rq}^{(n)}(t)$ – акустическое давление в точке

сетки с индексами (r, q) . В предположении цилиндрической расходимости имеем:

$$P_{rq}^{(n)}(t) = \sum_{s=1}^N \frac{U_s^{(n)} \left(t - \frac{h\sqrt{(r-s)^2 + q^2}}{c} \right)}{[(r-s)^2 + q^2]^{1/4} \sqrt{h}}. \quad (1.41)$$

Пусть Γ_{rq} – коэффициент, характеризующий эффективность рассеяния в точке (r, q) . Например, в случае одиночного точечного рассеятеля, расположенного в точке (r_0, q_0) , коэффициент Γ_{rq} можно считать равным $\Gamma_{rq} = \Gamma_0$ при $(r, q) = (r_0, q_0)$ и $\Gamma_{rq} = 0$ в других точках. Здесь Γ_0 – «сила» точечного рассеивателя, например пузыря. Каждая точка рассеивает волну, пропорциональную $\Gamma_{rq} P_{rq}^{(n)}(t)$. Эта волна достигает элементов решетки и создает там электрические сигналы. В частности, на элементе с номером g (рис. 1.32) появится такой сигнал:

$$V_g^{(n)}(t) = \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^M \Gamma_{rq} \frac{P_{rq}^{(n)} \left(t - \frac{h\sqrt{(r-g)^2 + q^2}}{c} \right)}{[(r-g)^2 + q^2]^{1/4} \sqrt{h}}. \quad (1.42)$$

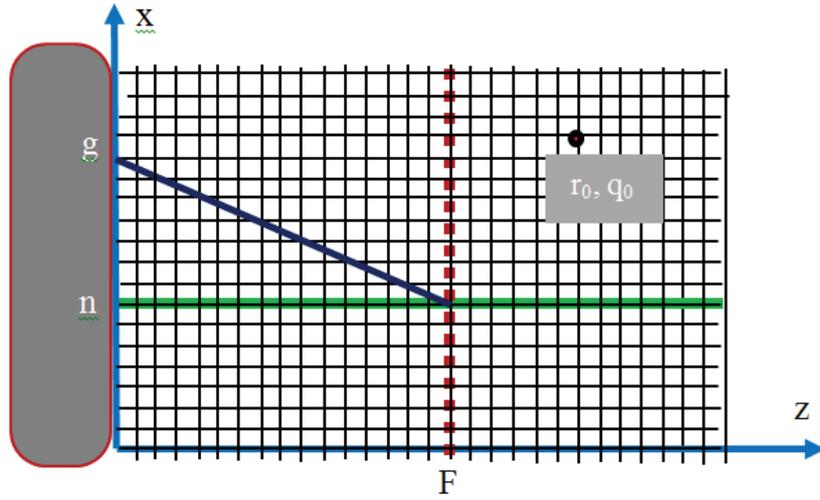


Рис. 1.32. Схема приема сигналов на элемент решетки с номером g

В частном случае, когда имеется лишь один точечный рассеиватель, расположенный в точке (r_0, q_0) , сигнал упрощается:

$$V_g^{(n)}(t) = \Gamma_{r_0 q_0} \frac{P_{r_0 q_0}^{(n)} \left(t - \frac{h\sqrt{(r_0-g)^2 + q_0^2}}{c} \right)}{[(r_0-g)^2 + q_0^2]^{1/4} \sqrt{h}}. \quad (1.43)$$

Итак, на g -й элемент приходит рассеянный сигнал $V_g^{(n)}(t)$. Все эти формулы описывают сигналы, приходящие на элементы решетки. Теперь рассмотрим, какое изображение сканер построит по таким сигналам. С точки зрения обработки ска-

нером, вдоль луча посылается плоская волна, и сигналы на элементы приходят от рассеивателей, расположенных только на рассматриваемом n -м луче. Если бы это было так, то рассеянный сигнал от точки на луче с координатой $z_m = mh$ приходил бы на g -й элемент в момент времени $t = h \frac{m + \sqrt{(n-g)^2 + m^2}}{c}$. С учетом цилиндрической расходимости, для характеристики соответствующего рассеивателя нужно рассмотреть сумму:

$$W_m^{(n)} = \sum_{g=1}^N [(n-g)^2 + m^2]^{1/4} V_g^{(n)} \left(t = h \frac{m + \sqrt{(n-g)^2 + m^2}}{c} \right). \quad (1.44)$$

Амплитуда функции $W_m^{(n)}$ задает распределение яркости вдоль n -го луча. Расчет $W_m^{(n)}$ нужно провести для всех лучей, а потом построить 2-мерную яркостную картину.

Подведем итог результатами расчетов моделирования. На основе выше описанных алгоритмов в среде программирования Matlab были выполнены построения ультразвукового изображения рассеивателя, расположенного в точке с координатами $(x, z) = (32 \text{ мм}, 60 \text{ мм})$ в разных режимах работы сканера и с различными положениями фокуса (рис. 1.33).

Результаты показали, что изображение рассеивателя, построенного в режиме излучения сфокусированной волны и расположенного в фокусе, получается наиболее локализованным. Если рассеиватель удален от фокуса на некоторое расстояние (ближе к сканеру или дальше от него) или же применяется режим посылы квазиплоской волны, то изображение рассеивателя размывается в поперечном направлении.

На основе описанного выше алгоритма был разработан интерфейс для программы, позволяющей получать ультразвуковое изображения, по образу и подобию интерфейса реальной УЗ-системы. В данном интерфейсе пользователь может задавать положение рассеивателя и некоторые параметры ультразвукового сканера, в частности положение фокуса и глубину сканирования (рис. 1.34). После нажатия кнопки «Сетка» в окне с соответствующим названием наглядно представляется то, что задал пользователь. После нажатия кнопки «Старт» программа начинает рассчитывать изображение (рис. 1.35). Так как это занимает некоторое время, на интерфейсе расположен таймер, показывающий, сколько времени осталось до конца расчетов. При смене заданных параметров повторяются все выше описанные процедуры.

1.3.3. Эксперименты по УЗ-визуализации моделей пузырьков газа

Для сопоставления теоретических представлений с экспериментальными данными был проведен ряд экспериментов по получению УЗ-изображения мягких рассеивателей сферической формы. В качестве измерительного прибора был использован УЗ-

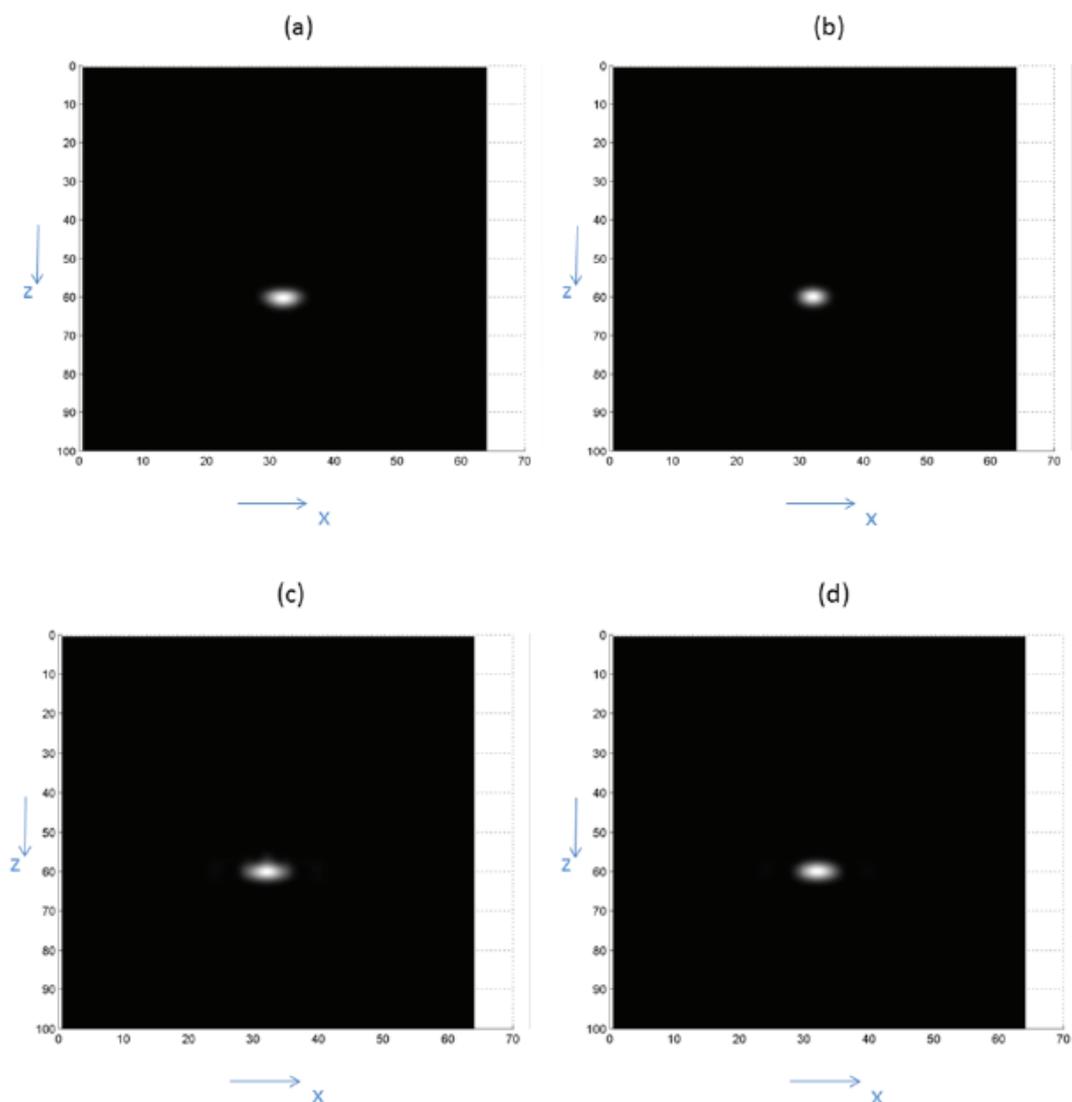


Рис. 1.33. Изображение точечного рассеивателя с координатами $(x, z) = (32 \text{ мм}, 60 \text{ мм})$ в режиме (а) посылки квазиплоской волны и (b), (c), (d) посылки сфокусированной волны с фокусным расстоянием $F = 60 \text{ мм}$, $F = 30 \text{ мм}$, $F = 90 \text{ мм}$, соответственно

сканер Terason Ultrasound System с числом элементов 128 и рабочей частотой 3 МГц (рис. 1.36). Изображение можно было наблюдать на экране ноутбука, включающего в себя также блок обработки данных, приходящих со сканера, и конструирования данных, посылаемых на него.

В качестве исследуемого объекта (модели биоткани) использовался желатин, а в качестве сильных рассеивателей, имитирующих газовые пузырьки, – кусочки пенопласта (см. Главу 2). Сложность заключалась в том, что кусочки пенопласта должны быть помещены в только что сваренный, еще жидкий раствор желатина. Но в жидком желатине невозможно фиксировать положение таких мелких деталей без использования дополнительных материалов. Было найдено следующее решение: при помощи английских булавок, фиксированных на определенном расстоянии друг

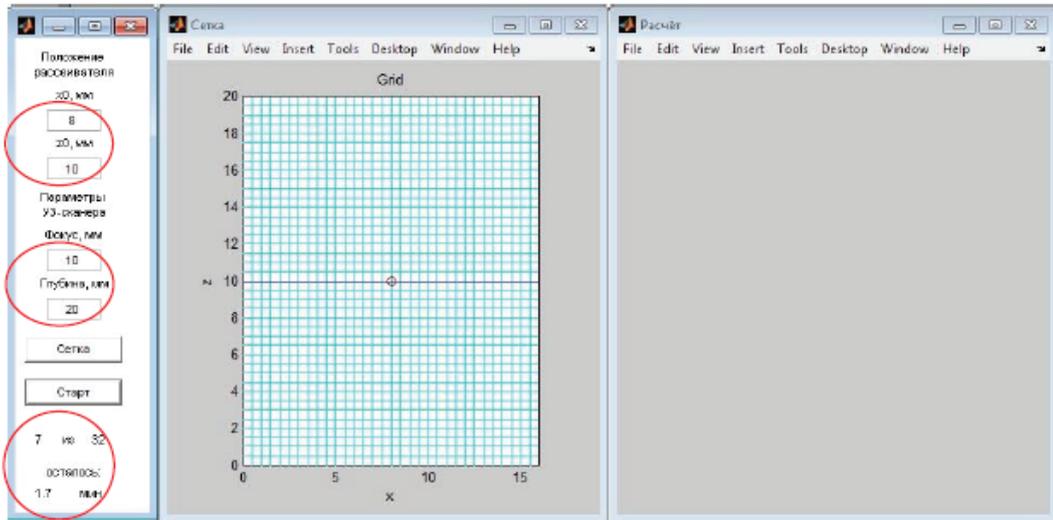


Рис. 1.34. Введение данных с визуализацией в окне «Сетка»

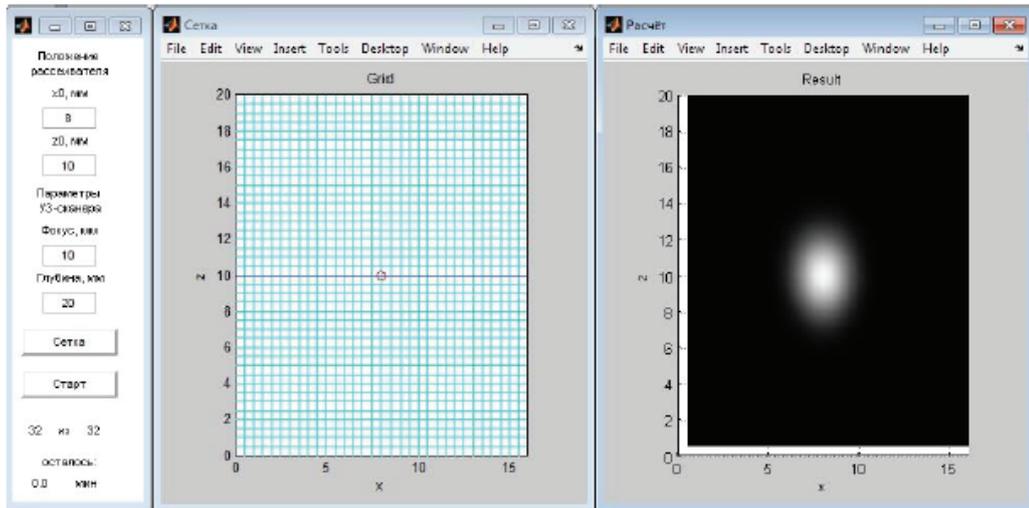


Рис. 1.35. Результат построения изображения в окне «Расчет»

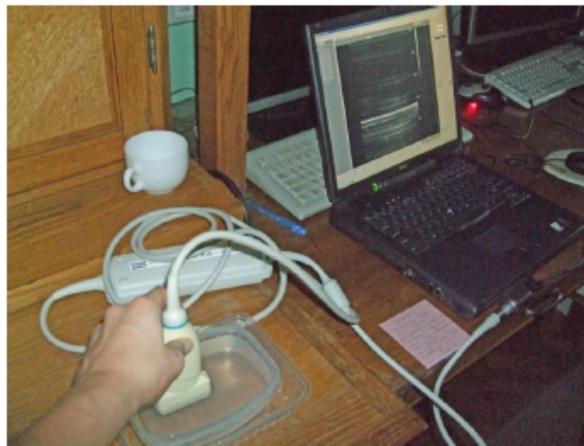


Рис. 1.36. УЗ-сканер Terason Ultrasound System

от друга в листе картона, кусочки пенопласта были размещены в жидком желатине, после застывания которого булавки были аккуратно извлечены из образца (рис. 1.37).

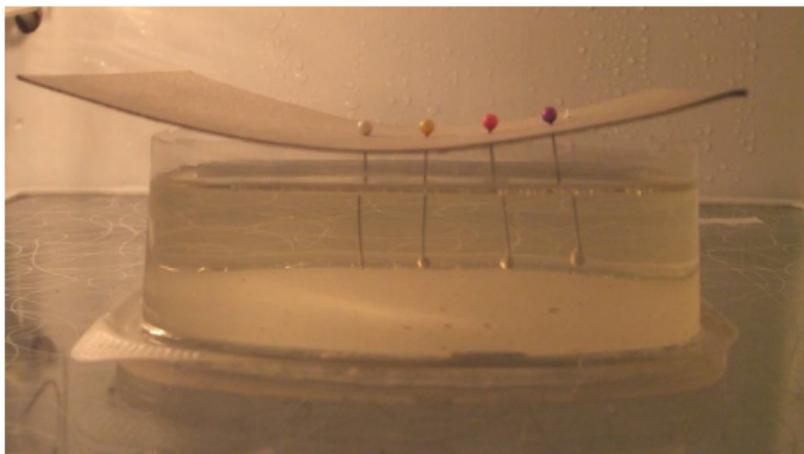


Рис. 1.37. Желатин с кусочками пенопласта в качестве моделей пузырьков

Были взяты четыре образца пенопласта в качестве моделей пузырьков, диаметрами примерно 2 мм, 1,5 мм, 1 мм и 0,5 мм. С помощью УЗ-сканера было получено изображение этих образцов пенопласта, из которого видно, что яркость изображения фантома зависит от его размера (рис. 1.38). При этом, когда диапазон размеров пузырьков широкий, максимальная яркость приходится на самый крупный пузырь, а изображения самых маленьких пузырьков имеют очень слабую интенсивность. Поэтому для тестирования разрешающей способности используемого УЗ-сканера следует брать пузырьки приблизительно одного размера.

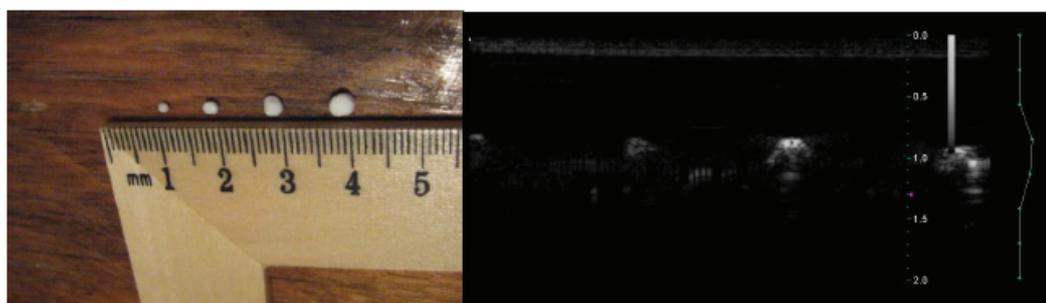


Рис. 1.38. Четыре образца пенопласта диаметрами порядка 2 мм, 1,5 мм, 1 мм и 0,5 мм; УЗ-изображение

Более того, размер рассеивателей не должен превышать разрешающей способности сканера. Среди 4 взятых образцов пенопласта изображения более крупных по размерам соответствуют действительным. Расхождение возникает для образцов размерами 1 мм и 0,5 мм.

Так как нас интересуют пузырьки миллиметровых размеров, были отобраны два самых маленьких образца пенопласта (диаметрами 1 и 0,5 мм) и рассмотрены бо-

лее подробно. При таком подборе параметра TGC (Time Gain Compensation), чтобы данные образцы пенопласта хорошо визуализировались, было обнаружено, что размеры полученных изображений практически не отличались друг от друга (рис. 1.39). Это говорит о том, что для данных размеров рассеивателей разрешающая способность УЗ-сканера уже не позволяет получить изображение размером с истинный рассеиватель. Изображения обоих пузырьков превышают по размерам истинные. Но различия между ними можно обнаружить по разной яркости пятен.

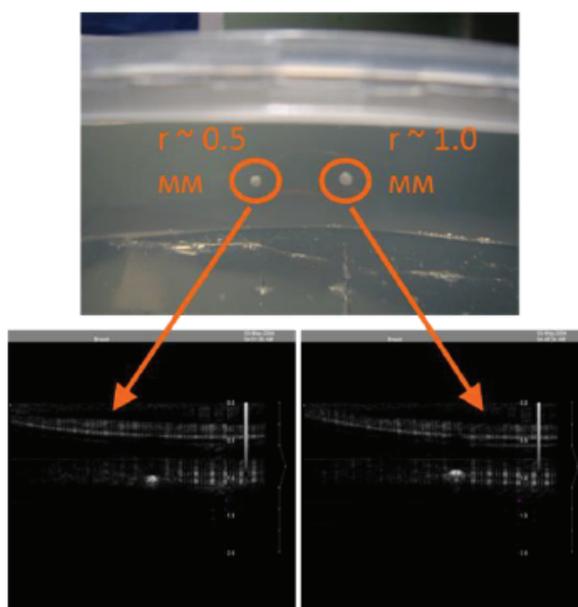


Рис. 1.39. Сравнение изображений двух моделей пузырьков размерами 0,5 мм и 1 мм

Предлагается следующий алгоритм для определения размера пузырька, меньшего, чем разрешающая способность УЗ-сканера [63, 64]. Сначала берется образец (пузырек) фиксированного размера, сканируется УЗ-машиной, и интенсивность полученного изображения сохраняется в ее памяти. Далее, при сканировании области с пузырьками неизвестных размеров, их изображения сопоставляются по яркости с изображением эталонного пузырька и на основе этого сравнения делается вывод об их размерах.

Следующим этапом исследования было рассмотрение двух образцов пенопласта, расположенных один за другим. Такая локализация предполагает возникновение некоторых трудностей при визуализации всей области исследования (рис. 1.40). Действительно, при расположении образца размером 0,5 мм глубже, чем образец размером 1 мм, «тень» от более крупного не позволяет хорошо визуализировать второй. В обратной ситуации, при расположении образца размером 1 мм глубже, чем образец размером 0,5 мм, визуализация реализуется беспрепятственно.

С данной ситуацией, когда сильный рассеиватель образует «тень», скрывающую часть интересующей нас области, уже неоднократно сталкивались в УЗ-диагности-

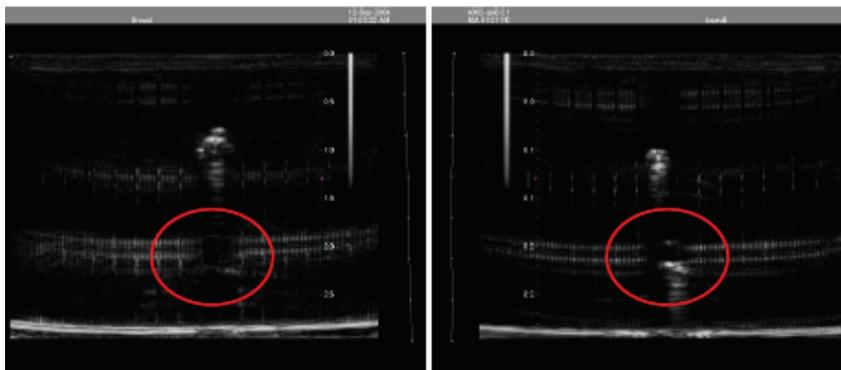


Рис. 1.40. Изображение пузырька размером 0,5 мм, расположенного под пузырьком размером 1 мм (выделенная зона – место, где должно быть изображение пузырька 0,5 мм) и наоборот: пузырька размером 1 мм под пузырьком размером 0,5 мм

ке. Существует несколько способов устранения возникающей проблемы. Например, можно немного изменить угол сканирования.

В итоге, результаты экспериментов показали, что ультразвуковые изображения рассеивателей с разными размерами порядка разрешающей способности прибора имеют вид ярких пятен практически одинакового размера, что затрудняет определение их истинных размеров.

§1.4. Заключение и выводы

В представляемой главе проанализировано рассеяние акустических импульсов на абсолютно мягких сферических объектах и изучены особенности построения ультразвуковых изображений пузырьков газа. Подытожим проведенные исследования.

Получены диаграммы рассеяния на сферическом пенопластовом образце, построены теоретические модели диаграмм рассеяния на абсолютно мягкой сфере в среде программирования Fortran и проведено сопоставление теории с экспериментом, которое подтвердило, что образцы сферической формы из пенопласта можно использовать для изучения рассеяния на пузырьках газа.

Построен алгоритм формирования ультразвукового изображения пузырьков с использованием многоэлементной антенной решетки ультразвукового сканера в режиме работы, при котором с элементов решетки посылается квазиплоская волна, и в режиме работы, при котором посылается сфокусированная волна. Точечный рассеиватель на ультразвуковом изображении имеет вид яркого пятна конечных размеров порядка длины волны, что обусловлено дифракционными эффектами. Размер пятна, тем самым, не позволяет определить истинный диаметр рассеивателя конечных размеров.

Проведен ряд экспериментов, иллюстрирующих ультразвуковую визуализацию пузырьков миллиметровых размеров в модели биоткани. В качестве моделей пузырь-

ков использованы пенопластовые образцы, а в качестве модели биоткани – желатин. При визуализации пузырьков с диаметром меньше и порядка разрешающей способности ультразвуковой сканер дает изображения в виде ярких пятен одинаковых размеров, превышающих истинные размеры рассеивателей.

Рассчитаны диаграммы рассеяния на абсолютно мягких сферах различных размеров и показано, что в общем случае зависимость амплитуды рассеянного назад сигнала от размера рассеивателя является монотонной функцией. При визуализации пузырьков с размером меньше разрешающей способности ультразвукового сканера можно определить их размер по амплитуде рассеянного назад сигнала, то есть по яркости изображения.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПАРОГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ЖИДКОСТИ В ПЕРЕГРЕТОЙ ОБЛАСТИ МАЛОГО РАЗМЕРА

В общем случае есть три основных фактора, определяющих рост парового пузыря в перегретой жидкости: инерция жидкости, поверхностное натяжение и давление пара. При этом температура и давление внутри пузыря падают вследствие испарения с поверхности пузыря в процессе его роста. Скорость роста определяет приток тепла, определенное количество которого приводит к испарению. Поэтому динамическая проблема роста пузыря и проблема тепловой диффузии оказываются взаимосвязаны.

Если в жидкости существуют маленькие зародыши, состоящие из газовой или паровой фазы, удерживающейся на поверхности твердых частиц, то их рост становится возможным при таком давлении пара жидкости, которое будет превышать давление окружающей среды. Поверхностное натяжение, инерция жидкости и разность между давлением внутри пузыря и давлением окружающей среды задают скорость роста уже образовавшегося парового пузыря.

Вначале, когда силы практически уравниваются друг друга, имеет место стадия медленного роста пузыря. Однако, при расширении пузыря, то есть увеличении площади его поверхности, сила поверхностного натяжения уменьшается, что приводит к ускорению роста пузыря. Но далее за счет этого же ускоренного роста температура и давление внутри пузыря падают, и скорость роста снова замедляется. Соответственно, существует максимум скорости движения стенки пузыря. Если говорить подробнее, то температура внутри пузыря падает, так как на границе пар – жидкость в процессе роста пузыря происходит потребление скрытой теплоты парообразования.

Чтобы можно было описать задачу количественно, обычно принимают следующие упрощения физической модели: форма пузыря в процессе роста сохраняется сферической для сферически-симметричного поля наружного давления и при действии сил поверхностного натяжения (при условии, что радиальное ускорение и скорость малы, это утверждение выполняется).

Известно, что в воде, перегретой на 10°C , пузырь за время около 10 мс вырастет от микроскопических размеров до сферы радиуса 1 мм. Соответствующая этому средняя радиальная скорость, равная 10 см/с, очень мала по сравнению со скоростью звука в жидкости, так что влиянием сжатия жидкости, возникающим при росте пузыря, можно полностью пренебречь.

Для описания процессов в жидкости используется гидродинамическое уравнение движения жидкости, которое отражает влияние инерционных сил в жидкости. Кроме того, можно пренебречь влиянием сжимаемости пара при условии, что скорость звука в паре много больше скорости стенки пузыря. Следующим приближением является однородность давления пара внутри пузыря; это свойство непосредственно вытекает из уравнения Бернулли при учете малости плотности пара, что позволяет пренебречь инерционным членом в указанном уравнении. Опираясь на тот факт, что скорость звука в паре достаточно велика, можно считать, что изменение давления на стенке пузыря практически мгновенно приводит к изменению давления внутри парового пространства. Отметим, что при малой скорости стенки пузыря давление пара можно считать равным давлению насыщенного пара при соответствующей температуре на стенке пузыря.

Что касается температуры пара внутри пузыря, то в общем случае она неоднородна и меняется во времени, но если допустить, что коэффициент термодиффузии D' пара достаточно велик, то градиент температуры в пузыре окажется пренебрежимо малым, т.е. температуру внутри пузыря в любой момент времени можно считать однородной. Характерная длина диффузии $(2D't)^{1/2}$ в водяном паре для $t = 10^{-2}$ с равна 2,4 мм. Вспомним, что для перегревов порядка $\approx 10^\circ\text{C}$ радиус пузыря за это время достигает примерно 1 мм, то есть величины заметно меньше характерной длины диффузии. А при меньших величинах перегрева предположение об однородности температуры внутри парового пространства выполняется еще лучше.

Таким образом, постановка расчетной задачи роста пузыря в перегретой области в общем случае основывается на том, что пузырь пара имеет сферическую форму с равномерным распределением температуры внутри и одинаковым паровым давлением, и температура пара равна температуре жидкости на стенке пузыря, а паровое давление внутри равно давлению насыщенного пара при той же температуре.

§2.1. Обзор литературы опытных наблюдений

В книге [65] представлено несколько экспериментальных работ, среди которых описаны опыты по наблюдению роста пузырей пара в перегретой жидкости П. Дергарабедяном [66] и сопоставление полученных им результатов экспериментов с теоретическими расчетами, проведенными М. Плессетом и С. Цвигом [67–69]. Совпадение оказалось хорошим, и подтвердилась важность влияния охлаждающего эффекта на изменение результатов, изначально полученных для роста пузыря по классической формуле Рэлея (рис. 2.1).

Сложность проведения экспериментальных измерений скорости роста пузырей пара в перегретой жидкости состоит в том, что для образования пузырей пара внутри жидкости при различных степенях перегрева требуется реализация необычных

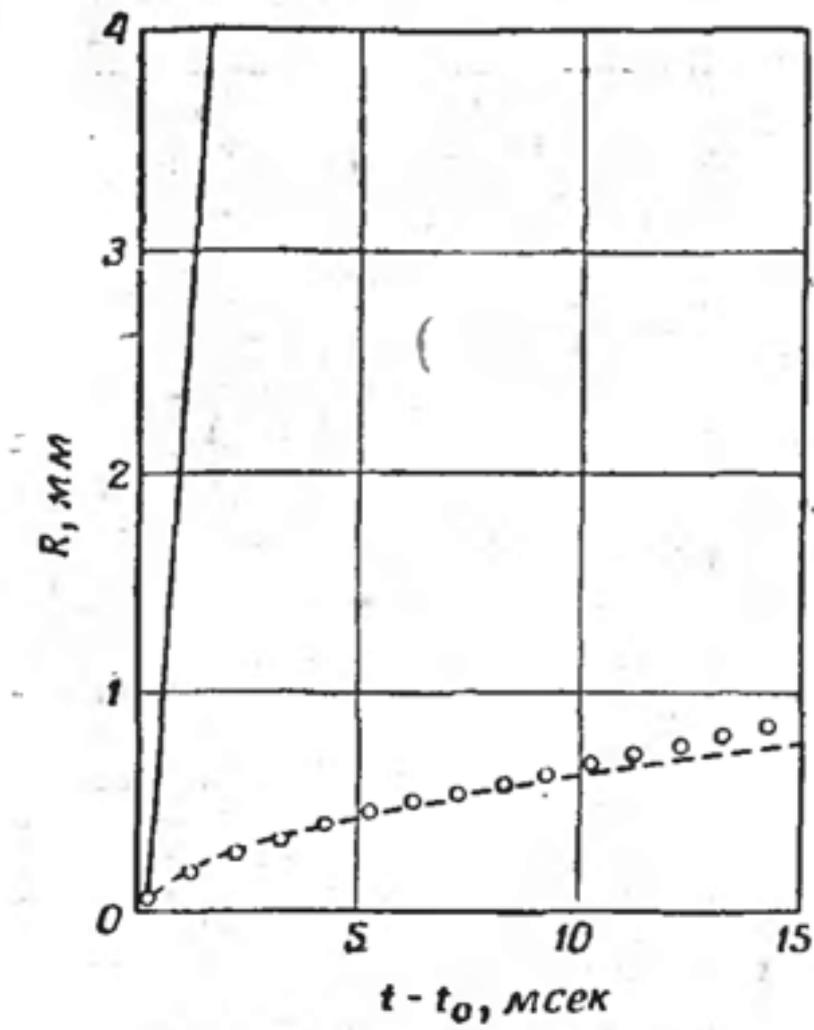


Рис. 2.1. Сравнение теоретических зависимостей радиуса пузыря от времени с экспериментальными данными для воды, перегретой до 103.1°C при давлении 1 атм. Сплошная кривая – кривая роста по Рэлею для случая пренебрежения влиянием охлаждения; пунктирная кривая построена с учетом этого эффекта по изложенному в статье методу, \circ – экспериментальные данные. Рисунок взят из статьи [68]

способов кипячения воды, а именно: жидкость надо нагревать медленно и равномерно по всему объему, иначе при большом перепаде температуры все пузыри будут образовываться в тонком слое у стенок сосуда и на твердых поверхностях сосуда. Для равномерного нагрева воды по всему объему П. Дергарабедян использовал тщательно отоженный сосуд, чтобы его внутренняя поверхность была максимально ровной и без впадин, дистиллированную воду двойной перегонки. В некоторых опытах ее загрязняли твердыми частицами (меловой пудрой или песком) для достижения различных степеней перегрева. С такой установкой удавалось перегревать воду до 107°C . Образующиеся пузыри снимали камерой на пленку (рис. 2.2) и определяли их размеры микроскопическим компаратором, измеряя непосредственно на негативе

три раза каждый пузырь. Таким образом удалось достигнуть точности измерений истинного размера пузырей 3%.

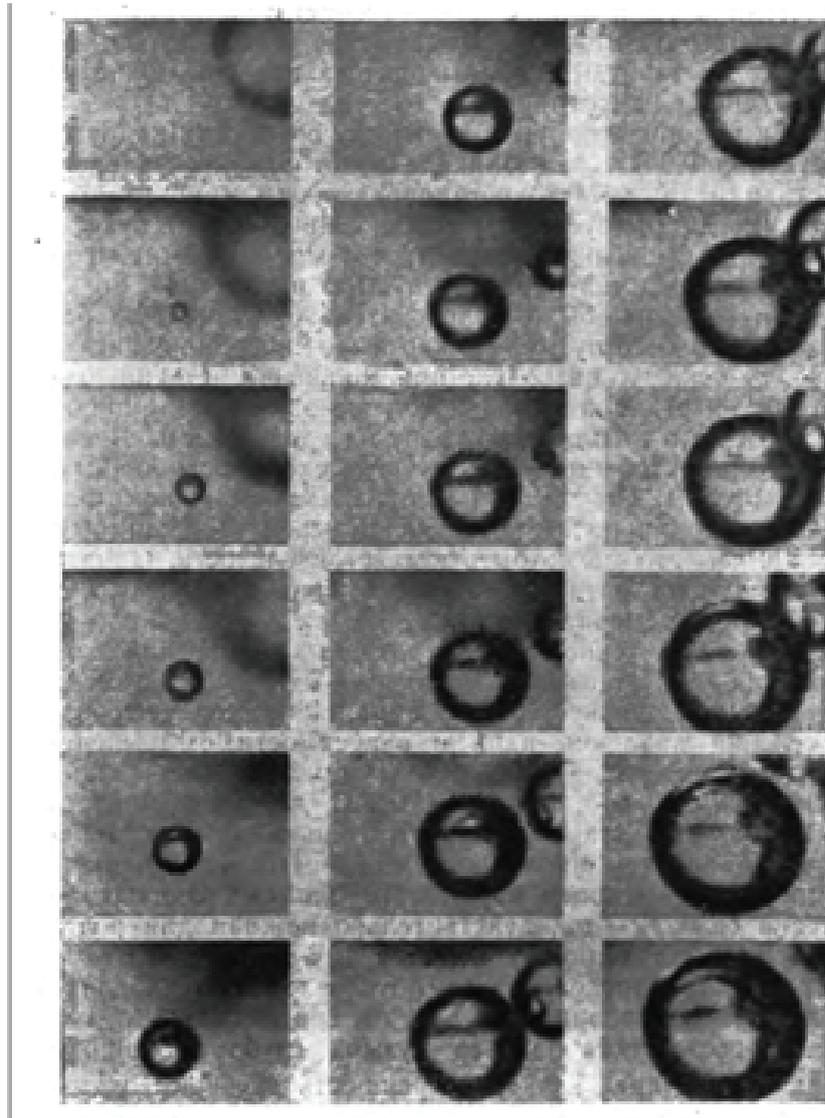


Рис. 2.2. История роста пузыря ($T = 103.1^{\circ}\text{C}$). Рисунок взят из статьи [66]

В экспериментах рассматривались пять различных температур (101.4°C , 102.1°C , 103.1°C , 104.5°C , 105.3°C), и при каждой проводилось несколько съемок развития пузырей. В итоге наблюдалось ограничение радиусов пузырей, находящихся в неустойчивом равновесии, областью значений, определяемой температурой воды и начальным содержанием воздуха в пузыре. При сопоставлении полученных экспериментальных данных с теоретическими расчетами, основанными на разных приближениях, было выявлено однозначно, что результаты экспериментального исследования гораздо ближе совпадают с решением, учитывающим диффузию тепла через стенки пузыря, чем с решением в предположении, что диффузия тепла через стенки пузыря отсутствует, что и иллюстрирует рис. 2.1.

§2.2. Постановка задачи

Высокоинтенсивный фокусированный ультразвуковой пучок может перегреть среду, в которой он распространяется, и инициировать кипение. Нужные для этого условия возникают в определенных режимах ультразвуковой терапии, таких как режим теплового разрушения и гистотрипсия [15]. Поглощение фокусированного пучка приводит к образованию локализованной нагретой области миллиметрового размера, которая совпадает с фокальной областью пучка (рис. 2.3). Если среда перегрета, то есть ее температура превышает температуру кипения, и в ней имеется микроскопический пузырь (зародыш кавитации), то под действием давления пара он может увеличиться до миллиметрового размера за несколько миллисекунд или даже быстрее. Такой быстрый рост приводит к увеличению механических напряжений вокруг пузыря и последующему излучению слышимого звука. Эти звуки могут быть полезны при контроле некоторых видов лечения. Более того, пузыри миллиметрового размера, возникающие при кипении, являются сильными акустическими рассеивателями и поэтому создают участки повышенной яркости на ультразвуковом изображении, что чрезвычайно полезно для надежной визуализации области воздействия. Данная глава посвящена теоретическому исследованию динамики парогазового пузыря в локально перегретой жидкости в условиях сферической симметрии.

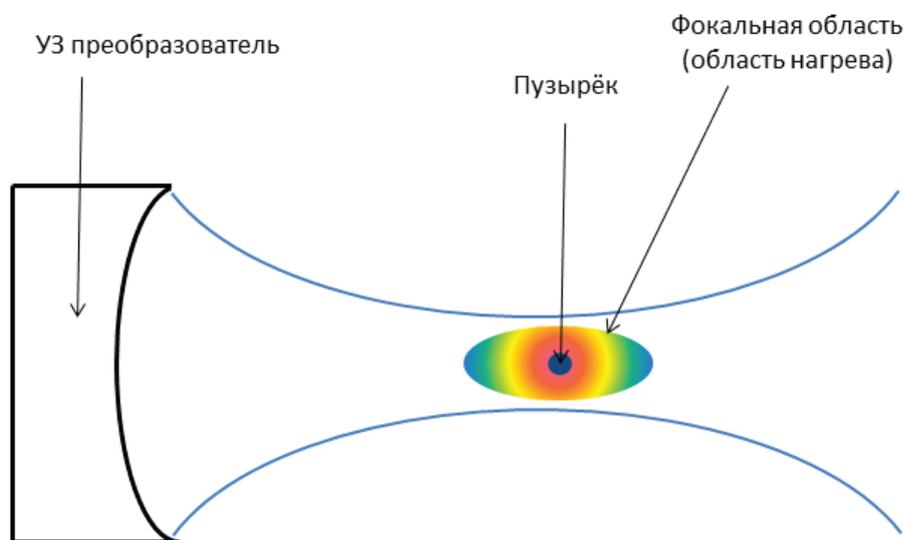


Рис. 2.3. Схема работы УЗ преобразователя в гистотрипсии

Аналогично подходу, описанному в работе [70], строится теория, основанная на уравнениях баланса массы, импульса и энергии, уравнении состояния и законах переноса тепла и массы [71–73]. Жидкость, которая расталкивается расширяющимся пузырем, при выводе уравнений для динамики пузырька предполагается несжимаемой. Хотя перегретые области, образованные высокоинтенсивным фокусированным

ультразвуковым пучком, имеют форму эллипсоида, целесообразно упростить задачу, рассматривая сферически-симметричную перегретую область. При таком упрощении и с учетом того, что начальный зародыш кипения располагается в центре перегретой области, задача становится сферически-симметричной. Уравнение движения жидкости вокруг пузыря имеет вид уравнения типа Рэлея-Плессета для радиуса пузыря [67, 69]. В модели переноса тепла учитываются и жидкая, и газовая фазы. Акустическое давление, создаваемое растущим пузырем, так же как и другие параметры, характеризующие рост, может быть рассчитано из системы уравнений, которая связывает эти параметры друг с другом.

2.2.1. Эволюционные уравнения для основных параметров

Получим систему дифференциальных уравнений первого порядка для четырех независимых переменных, которые зависят только от времени: радиуса пузыря R , скорости стенки пузыря V , давления внутри пузыря p_i и количества молей пара внутри пузыря n_v . Будем использовать подход из [72, 73], упомянутый выше. Введем обозначения переменных: r – радиус-вектор из центра пузырька в точку в жидкости вне пузырька ($r > R$), ρ – плотность, u_r – колебательная скорость, p – давление, e_i – внутренняя энергия на единицу массы, q_r – радиальный тепловой поток вне пузырька, $\rho_m = n_v/V$, $\hat{\sigma} = 0.4$ – коэффициент согласования, выбранный на основе моделирования молекулярной динамики. Параметры жидкости: $p_* = \rho_0 c_0^2 / \Gamma$ – характерное внутреннее давление, $p_w = p_i - 2\sigma/R - 4\mu V/R$ – давление в жидкости на стенке пузыря, σ – коэффициент поверхностного натяжения, c_0 – скорость звука, $C = \sqrt{c_0^2 + (\Gamma - 1)H}$ – скорость звука на стенке пузыря, Γ – эмпирическая константа ($\Gamma = 6.5$ для воды), ρ_0 – плотность, p_0 – давление вдали от пузыря, μ – вязкость, T_w – температура жидкости на стенке пузыря. Газовая составляющая пузыря описывается следующими параметрами: γ – показатель адиабаты, k_g – теплопроводность газа, θ – температура (которая предполагается одинаковой во всем пузыре, за исключением погранслоя вблизи стенки пузыря, рис. 2.4), δ_θ – толщина теплового погранслоя, M – молярный вес пара; \mathfrak{R} – универсальная газовая постоянная, p_v – парциальное давление пара, p_{sat} – давление насыщенного пара.

Базовые уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho u_r)}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_m \dot{e}_i = -\frac{3}{R} q_r + p_i \left(\frac{\dot{n}_v}{n_v} - \frac{3V}{R} \right), \quad (2.3)$$

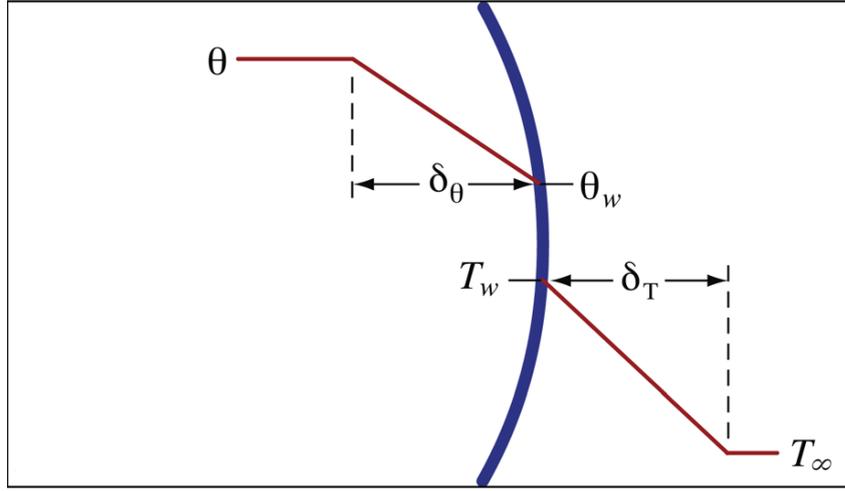


Рис. 2.4. Схема для модели переноса тепла. Рисунок взят из статьи [72]

$$p_i = \rho_m \mathfrak{R} \theta = \frac{n_v \mathfrak{R} \theta}{V}, \quad (2.4)$$

$$j_n = \left(\frac{1}{2\pi M \mathfrak{R} \theta} \right)^{1/2} p_i, \quad (2.5)$$

где (2.1) – закон сохранения массы, (2.2) – закон сохранения импульса, (2.3) – закон сохранения энергии, (2.4) – уравнение состояния, (2.5) – выражение для молярного потока, полученное из уравнения идеального газа и распределения Максвелла по скоростям. Уравнение (2.3) используется как отправная точка для оценки баланса энергии содержимого пузырька. Из выражения (2.5), применяя суперпозицию потоков конденсации и парообразования, получим уравнение для эволюции количества молей пара внутри пузырька.

В итоге, система эволюционных уравнений для переменных R , V , p_i и n_v имеет вид:

$$\dot{R} = V, \quad (2.6)$$

$$\dot{V} = k_{2V} \left\{ \frac{k_{1V}}{C} \left(\dot{p}_i + \frac{2\sigma}{R^2} V + \frac{4\mu}{R^2} V^2 \right) + \frac{1}{R(1-V/C)} \left[\left(1 + \frac{V}{C} \right) H - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{V}{3C} \right) V^2 \right] \right\}, \quad (2.7)$$

$$\dot{p}_i = \gamma p_i \left(\frac{\dot{n}_v}{n_v} - \frac{3V}{R} \right) + (\gamma - 1) \frac{3k_g T_w - \theta}{R \delta_\theta}, \quad (2.8)$$

$$\dot{n}_v = 4\pi R^2 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2\pi M \mathfrak{R} T_w}} (p_{sat} - p_v). \quad (2.9)$$

В уравнении (2.7) используются следующие обозначения:
 $k_{1V} = [p_*/(p_* + p_w - p_0)]^{1/\Gamma} / \rho_0$, $k_{2V} = [1 + 4\mu k_{1V}/(CR)]^{-1}$. Энтальпия жидкости на стенке пузыря выражается следующим образом:

$$H = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p_*}{\rho_0} \left[\left(1 + \frac{p_w - p_0}{p_*} \right)^{(\Gamma-1)/\Gamma} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

2.2.2. Уравнения для температуры на границе пузыря

Для учета неоднородно перегретой жидкости к системе уравнений (2.6)-(2.9) нужно добавить аналогичное эволюционное уравнение для температуры жидкости T_w на границе пузыря. Оно может быть получено из решения уравнения теплопроводности и уравнения баланса энергии на границе пузыря. Последнее может быть записано следующим образом:

$$4\pi R^2 \left(k_g \frac{T_w - \theta}{\delta_\theta} - k_L \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \right) + \dot{n}_v L = 0. \quad (2.11)$$

Здесь k_L – теплопроводность жидкости, $\partial T/\partial r|_{r=R}$ – пространственная производная температуры жидкости на границе пузыря, L – теплота парообразования. Так же как в уравнении (2.8), градиент температуры газа в погранслое приближен конечной разностью $(T_w - \theta)/\delta_\theta$.

Введем новые переменные $h = (r^3 - R^3)/3$ и $\tau = \int_0^t R^4(t') dt'$. Также введем $D = k_L/(\rho_0 c_p)$ – коэффициент теплопроводности, где c_p – теплоемкость при постоянном давлении. Тогда задачу теплопроводности можно сформулировать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 T}{\partial h^2} \\ T(h, 0) = T_{00} e^{-(3h + R^3(0))^{2/3} / r_{00}^2} \\ T(0, \tau) = T_w(\tau) \\ T(\infty, \tau) = 0 \\ T_w(0) = T_{00} \end{cases} \quad \dots \quad (2.12)$$

Решение задачи теплопроводности в жидкости можно представить в виде суммы решений двух более простых краевых задач – начальной и граничной задач. Тогда температура будет состоять из двух соответствующих частей: $T = T_1 + T_2$. Начальное распределение температуры в перегретой области для определенности будем считать гауссовским:

$$T|_{t=0} = T_{00} \exp(-r^2/r_{00}^2), \quad (2.13)$$

где r – радиальная координата, r_{00} – радиус перегретой области, T_{00} – температура в центре области.

Тогда начальная краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 T_1}{\partial h^2} \\ T_1(h, 0) = T_{00} e^{-(3h + R^3(0))^{2/3} / r_{00}^2} \\ T_1(0, \tau) = 0 \\ T_1(\infty, \tau) = 0 \end{cases} . \quad (2.14)$$

И граничная краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 T_2}{\partial h^2} \\ T_2(h, 0) = 0 \\ T_2(0, \tau) = T_w(\tau) \\ T_2(\infty, \tau) = 0 \end{cases} . \quad (2.15)$$

С использованием приближений, представленных в [67, 69], получаются следующие аналитические выражения для температуры:

$$T_1 = \frac{T_{00}}{\sqrt{4\pi D\tau}} \int_0^\infty dh' e^{-\frac{(3h' + R_0^3)^{2/3}}{r_{00}^2}} \left[e^{-\frac{(h-h')^2}{4D\tau}} - e^{-\frac{(h+h')^2}{4D\tau}} \right], \quad (2.16)$$

$$T_2 = \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\tau' \frac{T_w(\tau')}{[D(\tau - \tau')]^{3/2}} e^{-\frac{h^2}{4D(\tau - \tau')}} . \quad (2.17)$$

Здесь $R_0 = R(0)$ – начальный радиус пузыря. Решения уравнений (2.16) и (2.17) позволяют рассчитать пространственную производную температуры жидкости на границе пузыря $\partial T / \partial r|_{r=R}$. Так как эта величина определяется и уравнением (2.11), то выражение для \dot{T}_w может быть рассчитано численно. Результаты расчетов приведены на рис. 2.5.

§2.3. Рост парового пузыря в однородно перегретой жидкости

Для оценки характерного поведения парогазового пузыря рассмотрим упрощенную задачу для случая, когда температура жидкости постоянна во времени и пространстве. Жидкость предполагается невязкой, т.е. $\mu = 0$. Кроме того, пренебрежем изменением давления внутри пузыря ($\dot{p}_i = 0$), то есть влиянием охлаждения жидкости при испарении, и силой поверхностного натяжения, которая мала в сравнении с давлением внутри ($\sigma = 0$). Тогда остается только два уравнения – для радиуса пузыря (2.6) и следующее из (2.7) уравнение для скорости стенки пузыря:

$$\dot{V} = \frac{1}{R(1 - V/C)} \left[\left(1 + \frac{V}{C}\right) H - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{V}{3C}\right) V^2 \right]. \quad (2.18)$$

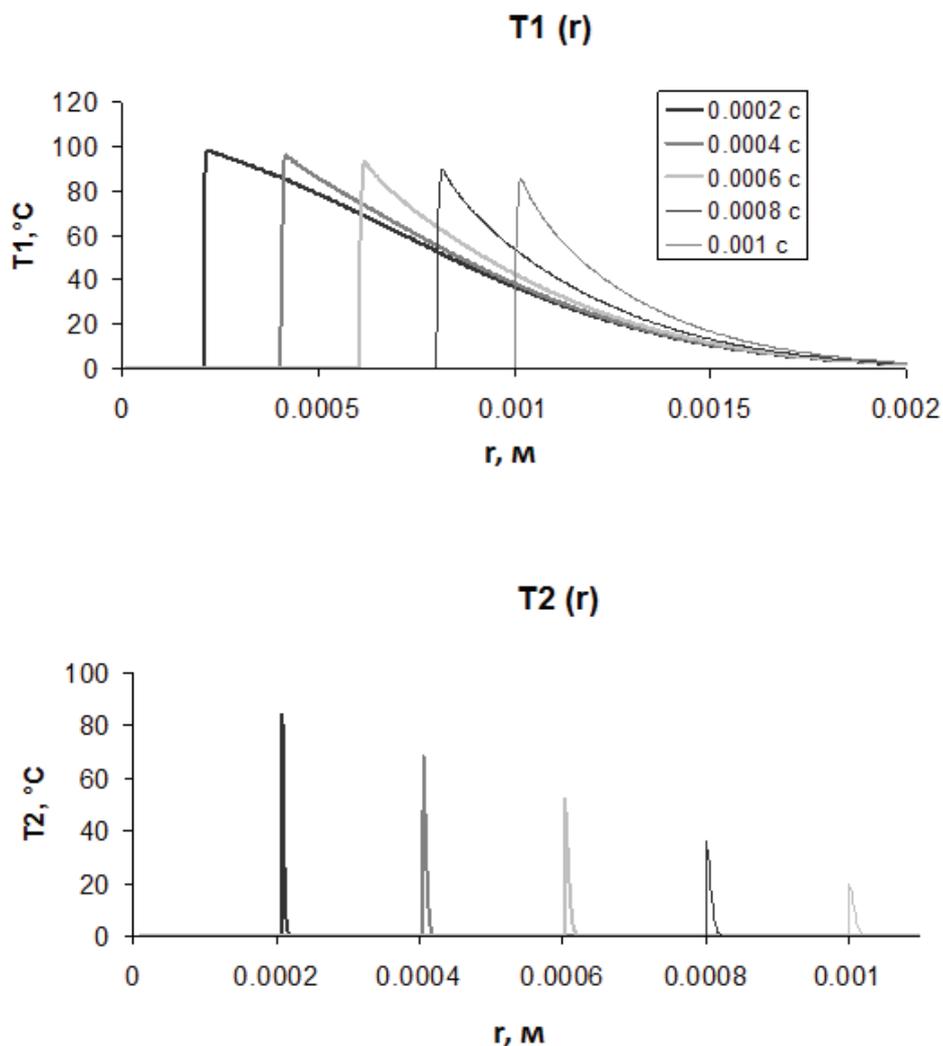


Рис. 2.5. Решения начальной и граничной краевых задач для температуры на границе пузыря

Результаты численного моделирования уравнений (2.6) и (2.18) представлены на рис. 2.6 В этих расчетах начальный радиус пузыря выбирался равным $R_0 = 10$ мкм. Другие значения R_0 тоже рассматривались, но результирующие кривые зависимости радиуса пузыря от времени на стадии роста, когда радиус пузыря много больше начального радиуса, практически не зависели от выбора конкретного значения R_0 . Радиус пузыря имеет почти линейный рост и, как и следовало ожидать, скорость роста увеличивается с температурой жидкости.

Этот численный результат может быть проверен аналитически, если жидкость рассматривать несжимаемой. Тогда уравнение для энтальпии принимает вид $H = (p_w - p_0)/\rho_0$ и уравнение динамики пузыря превращается в известное уравнение Рэлея:

$$R\ddot{R} + 3\dot{R}^2/2 = (p_v - p_0)/\rho_0. \quad (2.19)$$

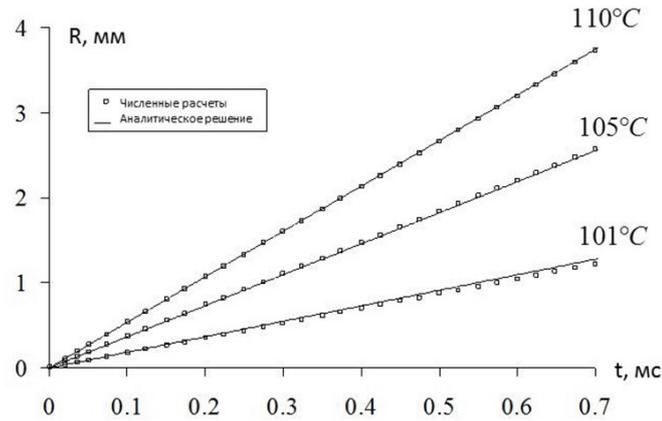


Рис. 2.6. Зависимость радиуса пузыря от времени при разных температурах жидкости

Если теплопроводность в жидкости и газе считать достаточно сильной для того, чтобы при росте пузыря температура успевала выравниваться, а процесс парообразования считать достаточно быстрым для того, чтобы пар внутри пузыря всегда был насыщенным, то правую часть в уравнении (2.19) можно считать не зависящей от времени. Тогда решение может быть найдено аналогично решению Рэлея для коллапсирующей пустой полости [74, 75]. Экспериментальные кривые на рис. 2.6 хорошо согласуются с аналитическим решением.

При учете неравновесного парообразования, описываемого уравнением (2.9), скорость роста пузыря уменьшается (рис. 2.7). Это связано с тем, что пар образуется с задержкой, из-за чего давление внутри пузыря падает и он растет не так быстро.

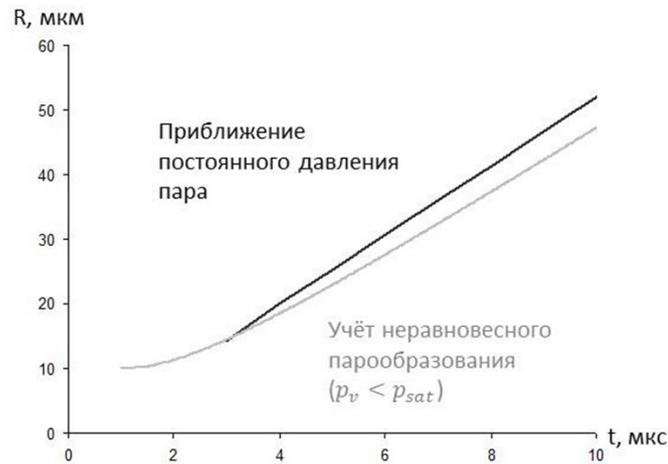


Рис. 2.7. Зависимость радиуса пузыря от времени без учета и с учетом неравновесного парообразования

Влияние теплопроводности также выражается в замедлении роста пузыря, что обусловлено заметным падением давления пара из-за его охлаждения вследствие увеличения объема. Были проделаны численные расчеты роста пузыря с учетом и

парообразования, и теплопроводности для различных случаев перегрева жидкости (см. рис. 2.8, а) в программе, написанной на основе алгоритма, представленного в [72, 73].

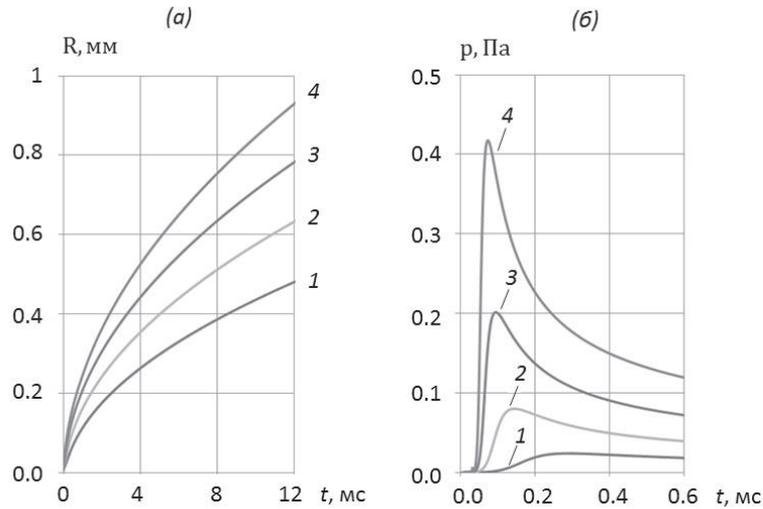


Рис. 2.8. Зависимости радиуса пузыря (а) и акустического давления излучаемой им волны на расстоянии $r = 5$ см от центра пузыря (б) от времени при различных температурах перегрева: 1 – 103°C , 2 – 104°C , 3 – 105°C , 4 – 106°C

§2.4. Излучение сферических волн растущим паровым пузырем

Растущие паровые пузыри излучают сферические волны. Известно, что в таком случае [76] потенциал скорости можно выразить в виде $\varphi(r, t) = F(t - r/c_0)/r$, и давление выражается через потенциал как $p = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t = -\rho_0 \dot{F}(t - r/c_0)/r$. Учитывая граничное условие $\partial\phi/\partial r|_{r=R} = \dot{R}$, получим $F(t - R/c_0) = -R^2(t) \dot{R}(t)$, откуда следует:

$$p(r, t) = \frac{\rho_0}{3r} \frac{d^2(R^3)/dt_R^2}{1 + c_0^{-1} dR/dt_R}. \quad (2.20)$$

Здесь радиус пузыря $R = R(t_R)$ рассматривается в момент времени t_R , когда происходит излучение того акустического возмущения, которое доходит до точки наблюдения позже, в момент времени $t = t_R + [r - R(t_R)]/c_0$. Отметим, что в рассматриваемом процессе скорость стенки пузыря намного меньше скорости звука, поэтому знаменатель во втором множителе правой части при расчетах можно опустить.

На рис. 2.8, б для различных случаев перегрева жидкости изображены кривые акустического давления растущего пузыря, рост которого представлен на рис. 2.8, а. Также проделывались расчеты для разных начальных условий и было установлено, что зависимость максимума давления от способа возбуждения роста пузыря несущественна.

§2.5. Заключение и выводы

Система уравнений, представленная в данной работе, является основой для моделирования роста перегретых паровых пузырей в условиях сферической симметрии. Предварительные результаты, представленные на рис. 2.6, показывают, что даже при малом перегреве на 101°C пузырь с начальным радиусом 10 мкм вырастает до миллиметрового размера менее чем за 1 мс. Если температура жидкости составляет 110°C , то соответствующее время еще меньше, около 0.2 мс. При учете неравновесного парообразования и теплопроводности рост пузыря замедляется, но все равно достигает миллиметрового размера за несколько миллисекунд. В экспериментах по гистотрипсии температура кипения достигается за несколько миллисекунд и парогазовая полость наблюдается на тех же временах [15]. Данные указанного наблюдения находятся в согласии с численными результатами работы. Также важно отметить, что на стадии роста, когда радиус пузыря много больше начального радиуса, от него скорость роста пузыря практически не зависит.

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ СТОЯЧЕЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ЖИДКОЙ КАПЛЕ

Стоячие акустические волны конечной амплитуды привлекают внимание исследователей в связи с возможностью получения заметных нелинейных эффектов в небольших областях, занятых газом или жидкостью [77–79]. Большинство исследований было посвящено изучению плоских волн в закрытых участках прямых труб постоянного сечения [80–88]. При теоретическом описании в указанных работах акустическое поле представлялось в виде двух невзаимодействующих встречных плоских волн римановского типа, и особое внимание уделялось режимам с образованием разрывных (ударных) волновых профилей. Как правило, в упомянутых работах волновой процесс рассматривался в газовой среде, поэтому стенки резонатора считались жесткими. Это создавало благоприятные условия для проявления акустической нелинейности, поскольку при отражении от зеркал резонатора волна не меняла своей формы и при дальнейшем (встречном) распространении продолжала испытывать нелинейные искажения. В связи с исследованиями возможности получения интенсивных стоячих волн с профилями без разрывов в ряде публикаций рассматривались также стоячие волны в трубах с изменяющимся сечением [89–91] и в резонаторах с концентрическими сферическими и цилиндрическими стенками [92–94].

В настоящей работе рассматривается случай нелинейного акустического резонатора, принципиально отличающегося от устройств, рассмотренных в предшествующих работах. В качестве резонатора рассматривается жидкая сфера с абсолютно мягкой границей. В начальный момент сфера предполагается акустически возбужденной на своем основном или другом низкочастотном резонансе. Анализируется процесс эволюции сферически-симметричного звукового поля с течением времени. Предполагается, что никаких внешних источников нет, т.е. исследуется процесс затухания свободных колебаний.

Внимание к задаче в такой постановке было привлечено в связи с наблюдениями поведения капель жидкости в процессе развития акустического фонтана [95–104] – акусто-гидродинамического явления, нашедшего применение, например, в ультразвуковых увлажнителях воздуха и ингаляторах. Скоростная съемка акустических фонтанов показала, что через некоторое время после включения источника ультразвука из жидкости вырывается струя, распадающаяся на цепочку из капель одинакового размера [105]. Через некоторое время капли, обычно начиная с самой верхней, начинают по невыясненной пока причине терять устойчивость и взрываться, при-

водя к распылению жидкости (рис. 3.1). Проведенные недавно экспериментальные исследования поведения капель в акустическом фонтане позволили выявить, что непосредственно перед потерей устойчивости в центре прозрачной капли появляется темная точка [106, 107], что указывает на возможный разрыв жидкости, т.е. возникновение кавитации. Поскольку начальный уровень акустического давления в капле по оценкам намного ниже порога кавитации, можно предположить, что в процессе нелинейных колебаний возбужденной капли происходит концентрация акустической энергии в ее центре. Эта возможность анализируется в настоящей работе.

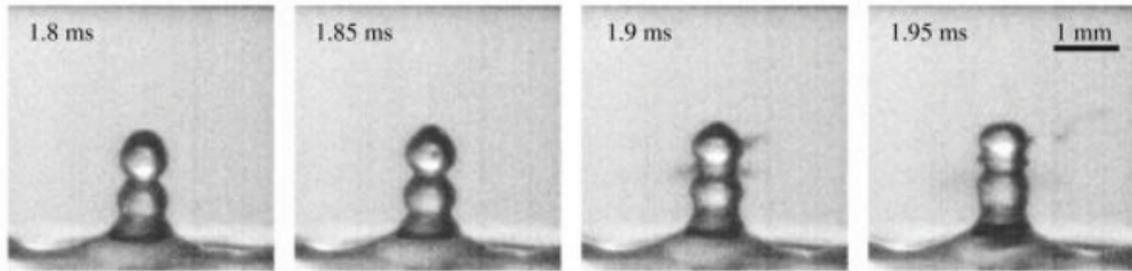


Рис. 3.1. Поэтапная съемка акустического фонтана на границе вода–воздух. Рисунок взят из работы [107]

§3.1. Теоретическая модель для описания нелинейных стоячих акустических волн внутри жидкой сферы

3.1.1. Исходные уравнения

В отличие от традиционно исследуемого случая плоских волн, для описания нелинейных акустических полей в условиях сферической симметрии не существует решений, имеющих вид суперпозиции встречных волн (инвариантов Римана). Поэтому подход, при котором ведется поиск решения в виде переотражающейся от границ резонатора нелинейной волны с медленно изменяющимся профилем, здесь не представляется возможным. Возможно, однако, альтернативное описание, при котором акустическое поле рассматривается в форме стоячей волны, структура которой мало меняется на временах порядка ее периода. Для анализа закономерностей нелинейного волнового процесса требуется в явном виде отделить быстрые изменения от медленных. В настоящей работе с этой целью используется базис из слабо взаимодействующих стоячих волн различных частот.

Будем исходить из общего вида волнового уравнения для потенциала колебательной скорости ϕ акустического поля в жидкости или газе при учете квадратично-нелинейных членов. Оно было получено в работе [108] и часто называется уравнением Кузнецова [87, 109]:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta\phi) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta - 1}{c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla\phi)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Здесь c_0 – скорость звука, ρ_0 – равновесная плотность среды, $b = \zeta + 4\eta/3$ – диссипативный коэффициент, ζ и η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, β – коэффициент акустической нелинейности среды. Потенциал ϕ позволяет полностью охарактеризовать акустическое поле. В частности, колебательная скорость \mathbf{v} и акустическое давление p' выражаются через потенциал следующим образом:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \quad (3.2)$$

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{\rho_0}{2} (\nabla\phi)^2. \quad (3.3)$$

Для описания нелинейного поля в акустически возбужденной капле жидкости будем рассматривать сферически-симметричное решение уравнения (3.1) в сферическом объеме с акустически мягкой границей. Пусть r – расстояние от центра капли, a – ее радиус. Как видно из (3.2), потенциал ϕ определен с точностью до аддитивной функции времени $\Phi_0(t)$. Выберем ее такой, чтобы при $r = a$ оставшаяся часть потенциала равна нулю: $\tilde{\phi} = \phi - \Phi_0 = 0$. Поскольку центр капли неподвижен, то при $r = 0$ выполняется условие $\partial\tilde{\phi}/\partial r = \partial\phi/\partial r = 0$. При указанных граничных условиях функция $\tilde{\phi}(r, t)$ может быть разложена по базису из функций $\sin(k_n r)/(k_n r)$, где $k_n = \pi n/a$. Каждая из этих функций описывает стоячую волну. Указанный базис является полным и ортогональным, если под скалярным произведением двух базисных функций понимать интеграл от их произведения по объему капли. Таким образом, в общем случае потенциал колебательной скорости может быть представлен в виде суперпозиции стоячих волн вида:

$$\phi = \Phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \quad (3.4)$$

где Φ_n – весовые коэффициенты, зависящие только от времени. Отметим, что функция $\Phi_0(t)$ не является независимой: она может быть выражена через остальные весовые коэффициенты Φ_n в силу равенства нулю акустического давления на границе капли (см. ниже). В процессе колебаний эта граница движется, поэтому при решении задачи в нелинейной постановке нужно учитывать, что акустическое давление равно нулю при $r = a + \xi(t)$, где ξ – смещение поверхности. Из условия $p(a + \xi, t) = 0$ в квадратичном приближении следует $p(a, t) + \xi(\partial p/\partial r)|_{r=a} \approx 0$, откуда с учетом уравнения движения получаем граничное условие $(p - \rho_0 \xi \partial v/\partial t)|_{r=a} \approx 0$, где $v = \partial\phi/\partial r$

– радиальная компонента колебательной скорости. Заметим, что $v(a, t) = d\xi/dt$, поэтому из формул (3.2)-(3.4) получим в квадратичном приближении:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} \approx -\frac{1}{2a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \left(\Phi_m \Phi_n + 2\Pi_m \frac{d\Phi_n}{dt} \right), \quad (3.5)$$

где $\Pi_m(t)$ – первообразная функции $\Phi_m(t)$. Подробности аналитического вывода уравнений для описания сферически-симметричного нелинейного акустического поля в сферическом резонаторе с мягкой границей приведены в Приложении А.

3.1.2. Решение задачи методом медленно изменяющихся амплитуд

Подставим разложение (3.4) в уравнение (3.1) и, учитывая (3.5), отбросим слабые 3-го и более высоких порядков малости:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_0}{dt^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + \frac{bk_n^2}{\rho_0} \frac{d\Phi_n}{dt} + k_n^2 c_0^2 \Phi_n \right) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} = \\ - \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} \frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \frac{\sin(k_l r)}{k_l r} \\ & + \Phi_m \Phi_l \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_l r)}{k_l r} \right] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Домножим обе части этого равенства на функцию $2k_m r \sin(k_m r)/a$ и проинтегрируем по радиальной координате от 0 до a . Используя условие ортогональности $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(mx) \sin(nx) = \delta_{mn}$, выражение (3.5) и тригонометрические тождества, получим следующую систему связанных уравнений для коэффициентов Φ_n , имеющих форму уравнения для классического осциллятора с квадратично-нелинейной правой частью:

$$\frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + 2\delta_n \frac{d\Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n = \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_{nml}. \quad (3.7)$$

Здесь коэффициенты $\omega_n = k_n c_0$ имеют смысл резонансных частот, а $\delta_n = b\omega_n^2/(2\rho_0 c_0^2)$ – декрементов затухания мод. Кроме того, для записи правой части введено обозначение

$$\begin{aligned} \Psi_{nml} = -(-1)^{n+m+l} \frac{\Phi_m \Phi_l}{a^2} + \\ \frac{n}{2\pi ml} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \times, \\ \left[\frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Phi_m \Phi_l \frac{n^2 - m^2 - l^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

где S_n являются дискретными значениями интегрального синуса:

$$S_n = \text{Si}(\pi n) = \int_0^{\pi} dx \frac{\sin(nx)}{x} = \int_0^{\pi n} dx \frac{\sin x}{x}. \quad (3.9)$$

Решение может быть проанализировано с использованием метода медленно изменяющихся амплитуд. В отсутствие диссипации и нелинейности свободные решения уравнений (3.7) имеют вид гармонических колебаний с постоянной амплитудой:

$$\Phi_n = \frac{C_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{C_n^*}{2} e^{i\omega_n t}. \quad (3.10)$$

Влияние диссипации и нелинейности приводит к тому, что амплитуды C_n медленно изменяются во времени. При этом с точностью до членов второго порядка малости производная потенциала на границе капли может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} \approx \frac{1}{4a^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{D_n^*}{2} e^{i\omega_n t} \right) \right], \quad (3.11)$$

где амплитуды гармонических составляющих D_n выражаются через C_n следующим образом:

$$D_n = (-1)^n \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^2 + m^2 + mn}{m(n+m)} C_m^* C_{m+n} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n+m}{n-m} C_{n-m} C_m \right\}. \quad (3.12)$$

Отбрасывая малые члены, связанные с производными по времени от медленно изменяющихся величин, из (3.7) получим систему укороченных уравнений для комплексных амплитуд C_n :

$$\frac{dC_n}{dt} + \delta_n C_n = -\frac{1}{4a^2} \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{n^2+m^2+mn}{m(n+m)} + \frac{n\beta\pi}{2} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2m+2n}) \right] C_m^* C_{m+n} \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} \left[\frac{n+m}{n-m} + \frac{n\beta\pi}{2} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2n-2m}) \right] C_{n-m} C_m \end{aligned} \right\}. \quad (3.13)$$

Примечательно, что нелинейные эффекты определяются параметром акустической нелинейности среды β не в полной мере: первые слагаемые в обеих квадратных скобках от этого параметра не зависят. Эти члены учитывают тот факт, что в нелинейном случае потенциал на границе капли имеет малое ненулевое значение.

Отметим, однако, что в практически интересных случаях вторые слагаемые в квадратных скобках правой части (3.13) намного превышают соответствующие первые слагаемые. Так, для воды ($\beta \approx 3.5$) вторые слагаемые по величине больше первых в несколько раз даже при $n = 1$, а при больших n разница становится еще более существенной. Поэтому достаточно хорошим приближением может служить запись уравнений в пренебрежении указанных малых членов:

$$\frac{dC_n}{dt} + \delta_n C_n = -\frac{n\pi\beta}{8a^2} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m^* C_{n+m} [S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}] + \\ \sum_{m=1}^{n-1} C_m C_{n-m} [S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}] \end{array} \right\}. \quad (3.14)$$

Сделанное приближение соответствует занулению величины Φ_0 в разложении (3.4). При этом, согласно (3.4) и (3.10),

$$\phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{2} e^{-i\omega_n t} + \frac{C_n^*}{2} e^{i\omega_n t} \right) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}. \quad (3.15)$$

Важным критерием правильности описания может служить проверка закона сохранения энергии. Полная акустическая энергия в капле может быть выражена в виде следующей суммы:

$$E = \pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2. \quad (3.16)$$

Отсюда следует: $dE/dt = \pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^* dC_n/dt + C_n dC_n^*/dt)$. Если использовать выражения для dC_n/dt из (3.13) или (3.14) и выполнить перегруппировку соответствующих двойных сумм, то можно получить: $dE/dt = -\pi\rho_0 a \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta_n |C_n|^2$. Следовательно, при наличии вязкости энергия убывает, а при $\delta_n \rightarrow 0$ остается постоянной (см. также ниже рис. 3.6). Таким образом, и система (3.13), и ее приближенная версия (3.14) при отсутствии вязкости удовлетворяют закону сохранения энергии.

3.1.3. Решение задачи методом медленно изменяющегося профиля

Решим задачу другим способом для сверки результатов, так как вывод решения методом медленно изменяющихся амплитуд довольно громоздкий и есть риск допущения ошибки.

Сферические стоячие волны в капле можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн – сходящейся и расходящейся, и даже проще – в виде одной волны, которая периодически отражается от поверхности капли и является попеременно то расходящейся, то сходящейся. При таком представлении изменение акустического поля в капле под воздействием диссипации и нелинейности среды может быть проанализировано в виде медленной эволюции профиля указанной попеременно сходящейся и расходящейся волны. Под медленной эволюцией здесь имеется в виду не поведение формы волны при ее распространении в пространстве (пространственная неоднородность акустического поля в капле существенна), а малое изменение периодического повторяющегося временного профиля акустического давления в каждой

пространственной точке при последовательном переходе во времени от периода к периоду.

Представим искомое решение для потенциала в виде:

$$\phi(r, t) = \frac{F(r, t)}{r}. \quad (3.17)$$

Из уравнения (3.1) для $F(r, t)$ получается классическое одномерное уравнение:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = q. \quad (3.18)$$

Здесь правая часть описывает источники, обусловленные нелинейно-диссипативными процессами:

$$q = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r c_0^2} \left[\frac{\beta - 1}{c_0^2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.19)$$

Функция $F(r, t)$ рассматривается на интервале $0 \leq r \leq a$. Из конечности потенциала ϕ в центре капли и из обсужденного выше приближенного условия равенства нулю потенциала на поверхности капли вытекают нулевые граничные условия на обоих концах интервала:

$$F(0, t) = F(a, t) = 0. \quad (3.20)$$

Решение волнового уравнения с нулевой правой частью имеет вид переотражающейся от границ интервала волны вида $F(r, t) = \psi(t - r/c_0) - \psi(t + r/c_0)$, где функция $\psi(t)$ описывает профиль волны. После добавления малой правой части указанная структура решения сохранится, но в процессе многих переотражений из-за влияния слабых источников профиль $\psi(t)$ будет медленно изменяться.

Выписанный выше вид $F(r, t)$ позволяет записать начальные ($t = 0$) условия для волновой функции и ее производной по времени:

$$F(r, 0) = \psi(-r/c_0) - \psi(r/c_0), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(r, 0) = \dot{\psi}(-r/c_0) - \dot{\psi}(r/c_0), \quad (3.22)$$

где точка обозначает производную по аргументу функции. Решение одномерного волнового уравнения (3.18), как известно, выражается по формуле Даламбера [110]. Для случая бесконечной прямой эта формула имеет вид:

$$F(r, t) = \frac{F(r+c_0t, 0) + F(r-c_0t, 0)}{2} + \frac{1}{2c_0} \int_{r-c_0t}^{r+c_0t} \frac{\partial F}{\partial t}(r', 0) dr' - \frac{1}{2c_0^3} \int_0^t dt' \int_{r-c_0(t-t')}^{r+c_0(t-t')} q(r', t') dr'. \quad (3.23)$$

Если учесть начальные условия (3.21) и (3.22), то получим:

$$F(r, t) = \psi\left(t - \frac{r}{c_0}\right) - \psi\left(t + \frac{r}{c_0}\right) + F_q(r, t), \quad (3.24)$$

где дополнительное возмущение F_q , порождаемое источниками, в явном виде выражается через плотность источников q :

$$F_q(r, t) = -\frac{c_0}{2} \int_0^t dt' \int_{r-c_0(t-t')}^{r+c_0(t-t')} q(r', t') dr'. \quad (3.25)$$

Первые два слагаемых в решении (3.24) описывают переотражающуюся от концов отрезка волну, которая присутствовала изначально, а последнее слагаемое отвечает за волну, возбужденную источником q . Здесь $q(r, t)$ имеет носитель $[0, a]$, т.е. вне этого интервала $q = 0$. Если теперь решать задачу на отрезке с граничными условиями (3.20), то $F_q(0, t) = F_q(a, t) = 0$ и, следуя методу отражений, вместо $q(r, t)$ нужно задать источники $\hat{q}(r, t)$, являющиеся периодическим продолжением с периодом $2a$ следующего вида:

$$\hat{q}(r, t) = \begin{cases} \dots \\ q(r + 2a, t), & -2a \leq r \leq -a \\ -q(-r, t), & -a \leq r \leq 0 \\ q(r, t), & 0 \leq r \leq a \\ -q(-r + 2a, t), & a \leq r \leq 2a \\ \dots \end{cases}. \quad (3.26)$$

Рассмотрим соответствующее решение в центре капли, т.е. $\phi_q(t) = \lim_{r \rightarrow 0} (F_q(r, t)/r)$. Из (3.25) и (3.26) можно получить:

$$\phi_q(t) = \frac{1}{2} \int_{-c_0 t}^0 dr' \hat{q}\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) - \frac{1}{2} \int_0^{c_0 t} dr' \hat{q}\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right). \quad (3.27)$$

Изменение на одном периоде с учетом периодичности получается таким:

$$\delta\phi_q(t) = \phi_q\left(t + \frac{2a}{c_0}\right) - \phi_q(t) = -\int_0^a dr' \left[q\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right) - q\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) \right]. \quad (3.28)$$

Пусть $\phi_0(\tau, t)$ – потенциал в центре капли, где введен аргумент τ , отслеживающий медленное изменение профиля волны. В качестве величины τ выберем время, которое изменяется дискретно с шагом, равным периоду $\delta\tau = 2a/c_0$. Поскольку про-

филь за время, равное одному периоду, изменяется слабо, можно перейти к непрерывному «медленному» времени τ и приблизить производную конечной разностью:

$$\frac{\partial \phi_0(\tau, t)}{\partial \tau} \approx \frac{\delta \phi_q(t)}{\delta \tau} = -\frac{c_0}{2a} \int_0^a dr' \left[q\left(r', t - \frac{r'}{c_0}\right) - q\left(r', t + \frac{r'}{c_0}\right) \right]. \quad (3.29)$$

Подставляя в правую часть (3.29) выражение для q (см. (3.19)) и учитывая, что $F(\tau, r, t) = \psi(\tau, t - r/c_0) - \psi(\tau, t + r/c_0)$, после ряда преобразований получим следующее нелинейное эволюционное уравнение для описания потенциала в центре капли:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0(\tau, t)}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 \phi_0(\tau, t)}{\partial t^2} = \\ = -\frac{\beta}{8ac_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a \frac{dr'}{r'} \left[\phi_0\left(\tau, t - \frac{2r'}{c_0}\right) - \phi_0\left(\tau, t + \frac{2r'}{c_0}\right) \right] \times \\ \times \left[\phi_0\left(\tau, t - \frac{2r'}{c_0}\right) + \phi_0\left(\tau, t + \frac{2r'}{c_0}\right) - 2\phi_0(\tau, t) \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отметим, что потенциал вне центра $\phi(\tau, r, t) = [\psi(\tau, t - r/c_0) - \psi(\tau, t + r/c_0)]/r$ выражается через потенциал в центре, поскольку $\phi_0(\tau, t) = -(2/c_0) \partial \psi(\tau, t) / \partial t$. Таким образом, функциональное уравнение (3.30) описывает нелинейно-диссипативную эволюцию акустического поля в капле, т.е. позволяет полностью решить рассматриваемую задачу. Согласно (3.15),

$$\phi_0(\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n(\tau) e^{-i\omega_n t} + C_n^*(\tau) e^{i\omega_n t}}{2}. \quad (3.31)$$

В отличие от предыдущего раздела, здесь аргумент C_n обозначен буквой τ (вместо t), чтобы отличить медленное изменение от быстрого. Если подставить разложение (3.31) в уравнение (3.30), то для медленно изменяющихся амплитуд мод $C_n(\tau)$ получатся уравнения (3.14). Таким образом, два рассмотренных способа описания – метод медленно меняющихся амплитуд и метод медленно меняющегося профиля – находятся в полном соответствии друг с другом.

3.1.4. Связь уравнения для динамики акустического поля в капле с уравнением Бюргера

При анализе системы укороченных уравнений (3.13) и связанного с ним функционального уравнения (3.30) удобно использовать безразмерные переменные. Пусть P_0 – амплитуда акустического давления в капле, исходно возбужденной на своей нижней резонансной частоте $\omega_0 = c_0 \pi / a$, так что акустическое давление в капле $p(r, t) = P_0 \sin \omega_0 t \operatorname{sinc}(\omega_0 r / c_0)$. Введем характерные времена проявления нелинейных и диссипативных эффектов:

$$\tau_{nl} = 4\rho_0 c_0^2 / (\beta \omega_0 P_0), \quad (3.32)$$

$$\tau_{diss} = 2\rho_0 c_0^2 / (b \omega_0^2), \quad (3.33)$$

а также безразмерный параметр, характеризующий конкуренцию указанных явлений:

$$\Gamma = \tau_{nl} / \tau_{diss}. \quad (3.34)$$

Обозначим также для краткости

$$g_{nm} = \frac{2}{\pi} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2m+2n}), \quad (3.35)$$

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \beta} \frac{n^2 + m^2 + mn}{mn(n+m)}, \quad (3.36)$$

$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \beta} \frac{n+m}{(n-m)n}. \quad (3.37)$$

Будем нормировать медленное время на нелинейный временной масштаб: $z = \tau / \tau_{nl}$. Используя характерное амплитудное значение для потенциала $C_0 = P_0 / (\omega_0 \rho_0)$, введем безразмерные амплитуды гармоник $\bar{C}_n = C_n / C_0$. Тогда система укороченных уравнений (3.13) примет следующий вид:

$$\frac{d\bar{C}_n}{dz} + \Gamma n^2 \bar{C}_n = -\frac{n}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} (g_{nm} - a_{nm}) \bar{C}_m^* \bar{C}_{m+n} - \sum_{m=1}^{n-1} (g_{n-m,m} - b_{nm}) \bar{C}_{n-m} \bar{C}_m \right\}. \quad (3.38)$$

Ее нужно решать при следующих начальных условиях: $\bar{C}_1(0) = 1$, $\bar{C}_{n>1}(0) = 0$.

Заметим, что аргумент интегрального синуса (3.9) в коэффициентах $S_n = \text{Si}(\pi n)$ всегда много больше единицы. С учетом этого обстоятельства можно использовать приближение $S_n \approx \pi/2$, т.е. $g_{nm} \approx 1$. Если к тому же пренебречь малыми коэффициентами a_{nm} и b_{nm} , что соответствует переходу от (3.13) к (3.14), то из (3.38) получим:

$$\frac{d\bar{C}_n}{dz} + \Gamma n^2 \bar{C}_n = -\frac{n}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_m^* \bar{C}_{m+n} - \sum_{m=1}^{n-1} \bar{C}_{n-m} \bar{C}_m \right\}. \quad (3.39)$$

Введя вспомогательные величины $B_n = i\bar{C}_n$, перепишем (3.39) в следующем виде:

$$\frac{dB_n}{dz} + \Gamma n^2 B_n = -\frac{in}{4} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m^* B_{m+n} + \sum_{m=1}^{n-1} B_{n-m} B_m \right\}. \quad (3.40)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (3.40) является не чем иным, как системой уравнений для гармоник нелинейной плоской волны, описываемой уравнением Бюргерса [111]:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad (3.41)$$

$$V(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n}{2} e^{-in\theta} + \frac{B_n^*}{2} e^{in\theta} \right). \quad (3.42)$$

Здесь $\theta = \omega_0 t$ – безразмерное «быстрое время», а функция $V(z, \theta)$ описывает профиль волны. Заметим, что запись $B_n = i\bar{C}_n$ означает, что функции $V(z, \theta)$ и $U(z, \theta) = \phi_0(\tau, t)/C_0$ связаны друг с другом посредством преобразования Гильберта:

$$U(z, \theta) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(z, \theta')}{\theta - \theta'} d\theta'. \quad (3.43)$$

Благодаря такой связи, многие известные периодические решения уравнения Бюргерса (3.41) могут быть использованы для построения приближенных решений при описании акустического поля в капле.

§3.2. Результаты численных экспериментов

3.2.1. Спектр и временной профиль акустического давления в центре капли

Спектральные амплитуды потенциала в центре капли описываются бесконечной системой связанных уравнений (3.13). При численном интегрировании количество удерживаемых гармоник приходится ограничивать. Обрывание спектра пренебрежимо мало влияет на точность расчетов при использовании достаточно большого количества N гармоник – такого, при котором амплитуды старших гармоник практически полностью подавлены диссипативными процессами. Разумная оценка следует из решения уравнения Бюргерса (3.41) в виде ряда Фейя [110]: $N = 2/\Gamma$. На практике для уточнения указанной оценки число гармоник увеличивалось до тех пор, пока результаты расчетов не переставали от него зависеть. Вычисления проводились методом конечных разностей на языке Фортран с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Практический интерес представляет не потенциал ϕ , а акустическое давление в центре капли. Соответствующая связь в линейном приближении имеет вид $p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t$, откуда следует связь амплитуд гармоник давления и потенциала: $P_n = i\omega_n C_n$. Удобно нормировать амплитуды гармоник давления на исходную амплитуду первой гармоники P_0 , т.е. ввести $\bar{P}_n = P_n/P_0 = in\bar{C}_n$.

На рис. 3.2 для случая $\Gamma = 0.01$ показаны результаты расчета амплитуд $|\bar{P}_n|$ некоторых гармоник в зависимости от безразмерного медленного времени $z = \tau/\tau_{nl}$. Здесь и ниже считается, что $\beta = 3.52$ (вода). Видно, что активный рост высших гармоник начинается при $z \approx 1.2$. При дальнейшем увеличении времени z амплитуды разных гармоник в результате взаимодействия становятся близкими по величине, а затем спадают из-за вязкого поглощения.

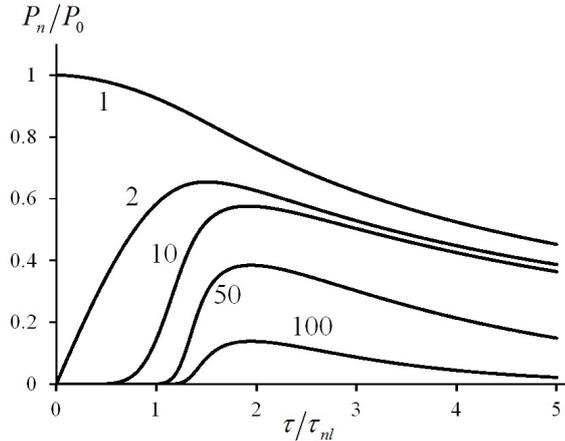


Рис. 3.2. Зависимость амплитуд некоторых гармоник акустического давления в центре сферического резонатора от времени при $\Gamma=0.01$. Амплитуды нормированы на исходную амплитуду давления P_0 , а время – на характерный нелинейный масштаб τ_{nl} . Номера гармоник приведены около соответствующих кривых

Амплитуды гармоник позволяют рассчитать и профиль акустического давления в центре капли. На рис. 3.3 для случая $\Gamma = 0.01$ показаны нормированные профили давления на одном периоде колебаний. Исходный синусоидальный профиль заметно искажается, причем пиковые отрицательное и положительное давления (они равны по величине) растут, а форма волны на одном периоде приобретает вид короткого биполярного импульса. Расчеты показывают, что пиковое давление в зависимости от медленного времени имеет характерное поведение: сначала оно под влиянием нелинейности растет, через некоторое время достигает своего максимума p_{\max} , а далее спадает из-за вязкого поглощения.

Величина наибольшего пикового давления p_{\max} , достигаемого в центре капли, зависит от параметра Γ . На рис. 3.4 приведены результаты расчета величины $p_{\max}\Gamma/P_0$ в зависимости от величины $\Gamma^{-1} \sim P_0$. Видно, что после небольшого роста при $1/\Gamma \gg 1$ кривая насыщается, что позволяет сделать вывод о том, что коэффициент усиления хорошо аппроксимируется следующей простой зависимостью:

$$\frac{p_{\max}}{P_0} \approx \frac{1}{4\Gamma}. \quad (3.44)$$

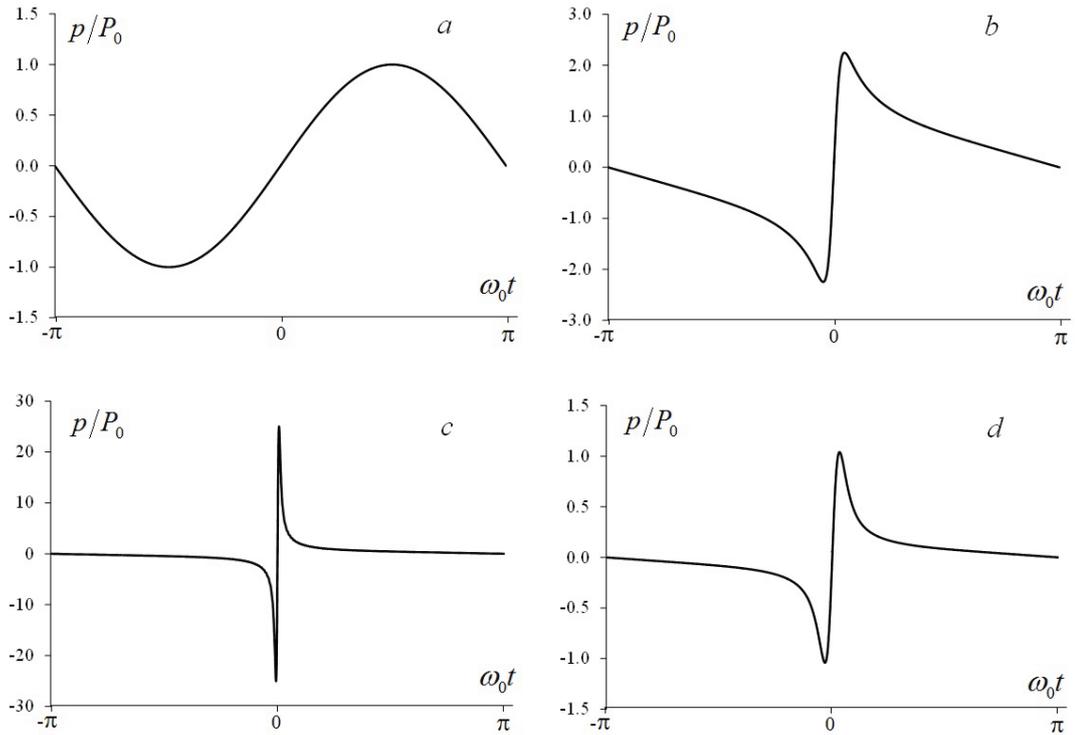


Рис. 3.3. Временной профиль одного периода акустического давления в центре сферического резонатора при $\Gamma=0.01$ в разные моменты «медленного» времени τ . Давление p нормировано на исходную амплитуду P_0 . Кривые а – d соответствуют $z = \tau/\tau_{nl} = 0, 1, 2, 20$

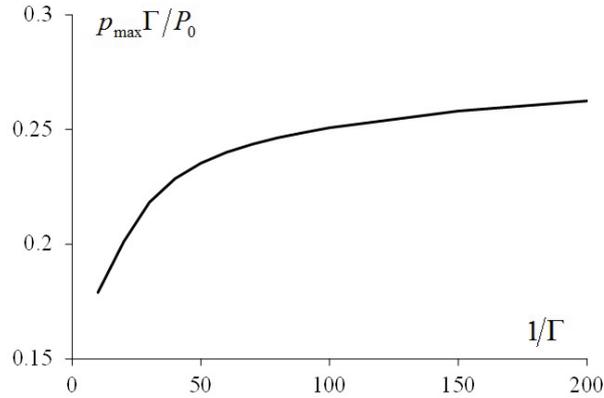


Рис. 3.4. Зависимость приведенного максимального пикового давления $p_{\max}\Gamma/P_0$ от величины $1/\Gamma$

Отсюда следует, что максимальное пиковое давление, достигаемое в центре капли в процессе ее колебаний, квадратично зависит от исходной амплитуды: $p_{\max} \approx P_0^2 \cdot \beta / (8b\omega_0)$.

3.2.2. Характеристики акустического поля в объеме капли

Выше при описании волнового процесса в капле методом медленно изменяющегося профиля было показано, что если ввести вспомогательную функцию $\psi(\tau, t)$ на основе равенства $\phi_0(\tau, t) = -(2/c_0) \partial\psi(\tau, t)/\partial t$, то пространственно-временной профиль потенциала колебательной скорости в капле может быть представлен в виде $\phi(\tau, r, t) = [\psi(\tau, t - r/c_0) - \psi(\tau, t + r/c_0)]/r$. На практике интерес представляет профиль акустического давления. Используя линейную связь давления с потенциалом $p = -\rho_0 \partial\phi/\partial t$, получим

$$p(\tau, r, t) = \frac{\rho_0 c_0}{2} \frac{\phi_0(\tau, t - r/c_0) - \phi_0(\tau, t + r/c_0)}{r}. \quad (3.45)$$

Таким образом, задача построения акустического поля во всем объеме капли сводится к описанной выше задаче расчета потенциала в центре капли. На рис. 3.5 приведены пространственные профили акустического давления в различные моменты быстрого времени при значении безразмерного медленного времени $z = 5$ в случае $\Gamma = 0.01$.

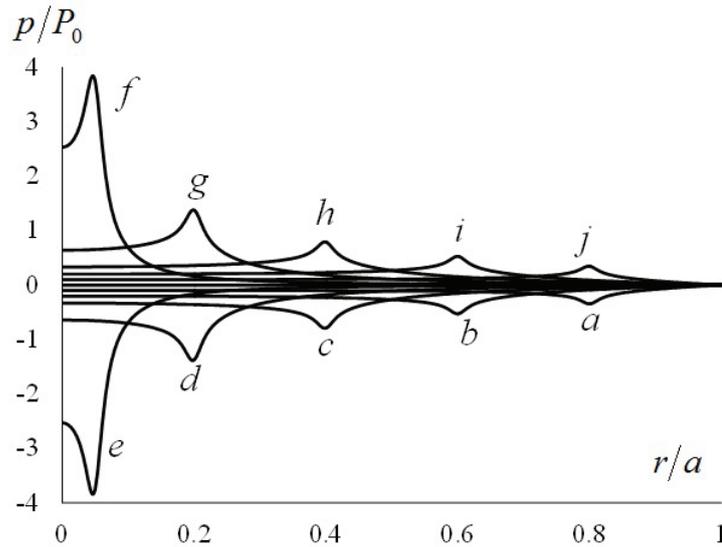


Рис. 3.5. Зависимость нормированного акустического давления в капле от радиальной координаты r в последовательные моменты «быстрого» времени t при $\Gamma=0.01$ и нормированном «медленном» времени $\tau/\tau_{nl}=5$. Различные волновые профили соответствуют нормированным моментам времени $\omega_0 t/\pi$, равным -0.8 (a), -0.6 (b), 0.4 (c), -0.2 (d), -0.05 (e), 0.05 (f), 0.2 (g), 0.4 (h), 0.6 (i), 0.8 (j). Дважды за период, при $t = 0$ и $\omega_0 t/\pi = 1$, давление в капле зануляется

В отличие от случая линейного возбуждения капли на основной частоте, когда распределение давления в стоячей волне на интервале $0 \leq r/a \leq 1$ все время имеет вид косинусоиды, в нелинейном случае четко выделяется импульс с острой вершиной, который распространяется попеременно вправо и влево, отражаясь от границ интервала. При этом при отражении от обоих краев происходит инвертирование формы

волны, а при подходе к центру капли $r = 0$ к тому же происходит заметное усиление пикового давления, обусловленное фокусировкой импульсной сферической волны. Отметим, что в отличие от поведения профиля акустической плоской волны конечной амплитуды, когда начальный синусоидальный профиль по мере распространения превращается в пилообразный с ударными фронтами, нелинейное искажение волны в капле проявляется в виде появления излома профиля на острой вершине импульса.

Ранее отмечалось, что полная акустическая энергия в капле выражается в виде (3.16), т.е. при нормировке на исходное значение энергии E_0 получим $E/E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{C}_n|^2$. На рис. 3.6 приведены зависимости этой величины от безразмерного медленного времени z для нескольких значений Γ . Видно, что на начальном этапе энергия меняется слабо, несмотря на генерацию гармоник. Спад начинается лишь при $z > 1$. Такое поведение энергии напоминает соответствующую зависимость для нелинейных плоских волн, описываемых уравнением Бюргера.

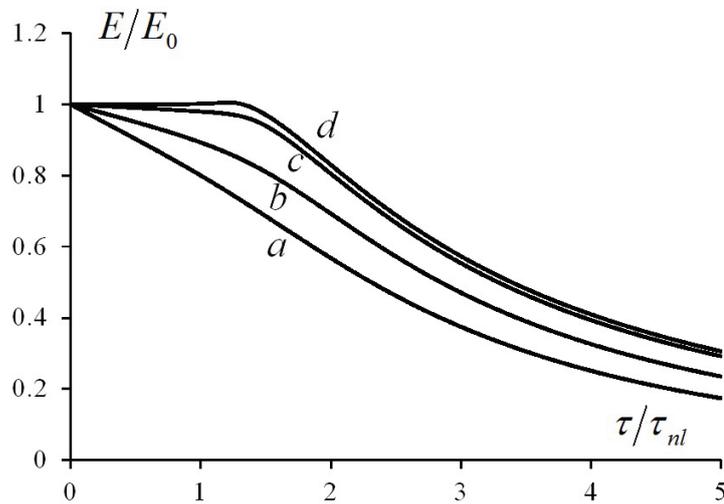


Рис. 3.6. Акустическая энергия в капле E , нормированная на свое исходное значение E_0 , в зависимости от нормированного медленного времени τ/τ_{nl} при различных значениях параметра Γ : 0.1 (a), 0.05 (b), 0.01 (c), 0.001 (d)

3.2.3. Пример расчета акустического давления в капле акустического фонтана

Рассмотрим в заключение практический пример, связанный с проведенным ранее экспериментом по наблюдению капель в акустическом фонтане [107]. Будем считать диаметр капли равным $2a=1.5$ мм, а параметры жидкости следующими: скорость звука $c_0=1500$ м/с, плотность $\rho_0 = 1000$ кг/м³, параметр акустической нелинейности $\beta=3.52$, эффективный коэффициент вязкости $b = 3.9 \cdot 10^{-3}$ Па·с (вода). Будем интересоваться режимами, при которых исходная амплитуда давления стоячей волны в центре капли P_0 имеет порядок одного мегапаскаля. Характерные масштабы

(3.32) и (3.33) при этом $\tau_{nl}=0.4$ мс (для $P_0=1$ МПа) и $\tau_{diss}=29$ мс, что соответствует $\Gamma \approx 0.014$. Таким образом, нелинейные искажения заметны ($\Gamma \ll 1$) и развиваются за время порядка одной миллисекунды или меньше.

На рис. 3.7 приведены зависимости размерного пикового давления от времени для нескольких значений исходной амплитуды давления в центре капли. Там пиковое давление сначала растет, достигает некоторого максимума, а потом начинает уменьшаться. Как видно, рост наступает раньше и максимальное пиковое давление p_{max} оказывается выше для более высоких начальных амплитуд давления. Этот факт отмечался выше (см. формулу (3.44)).

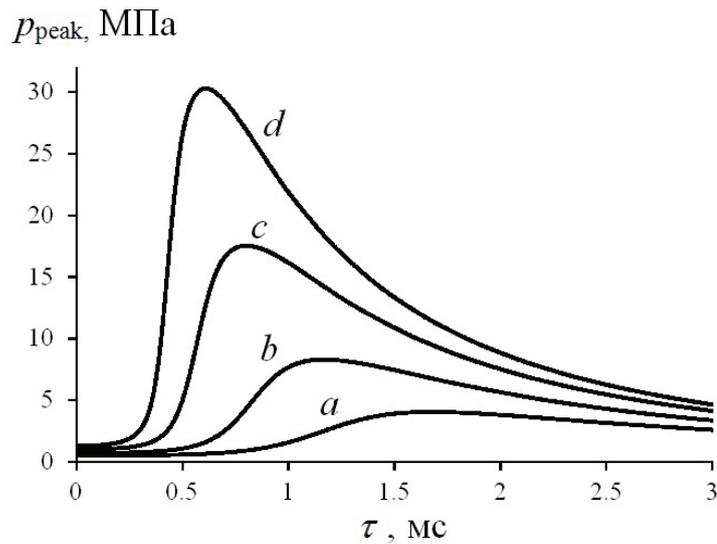


Рис. 3.7. Зависимость пикового давления p_{peak} (МПа) от медленного времени τ (мс) в капле воды диаметром 1.5 мм при различных значениях исходной амплитуды давления P_0 (МПа): 0.5 (a), 0.7 (b), 1 (c), 1.3 (d)

§3.3. Заключение и выводы

Использованное в данной работе допущение о медленности изменения амплитуд гармоник и соответствующего профиля давления хорошо согласуется с результатами проведенного анализа. Действительно, при $\Gamma \ll 1$ характерные изменения амплитуд происходят на масштабе τ_{nl} . Из выражения (3.30) видно, что количество периодов колебаний акустического давления в капле за время τ_{nl} составляет $N = 2\rho_0 c_0^2 / (\pi \beta P_0) \gg 1$. Например, для капли воды при $P_0=1$ МПа указанная оценка дает $N \approx 400$, т.е. характерное изменение амплитуды происходит за несколько сотен периодов колебаний, т.е. действительно очень медленно.

Из проведенного выше анализа видно, что эволюция нелинейной стоячей волны в сферическом жидком резонаторе с абсолютно мягкой границей имеет ряд ярко выраженных особенностей. В отличие от ранее рассмотренных случаев нелинейных

акустических резонаторов с жесткими стенками, нелинейное искажение не приводит к образованию ударных (ступенчатых) участков (рис. 3.5). Физической причиной этой особенности поведения волн является их инвертирование при отражении как от поверхности резонатора, так и в результате превращения сходящейся волны в расходящуюся в центре резонатора. В то же время указанное инвертирование оказывается не в состоянии подавить нелинейные искажения: в рассмотренном резонаторе происходит эффективный процесс генерации гармоник (рис. 3.2). При этом в процессе нелинейной эволюции стоячая волна приобретает вид попеременно сходящегося и расходящегося импульса с острой вершиной, пиковое давление в котором вблизи центра резонатора может намного превышать исходную амплитуду волны (рис. 3.5). Наибольшее усиление пикового давления происходит в центре капли, где зависимость акустического давления от времени имеет вид периодической последовательности коротких биполярных импульсов. Согласно (3.43), такая форма волны с хорошим приближением является преобразованием Гильберта от формы производной пилообразной волны, описываемой уравнением Бюргерса.

На практике в результате нелинейного усиления пиковое давление может вырасти существенно, в соответствии с оценкой (3.44). Так, для рассмотренного выше примера колебания капли акустического фонтана, при $P_0=1.3$ МПа за время $\tau \approx 0.6$ мс пиковое давление достигает значения $p_{\max} \approx 30$ МПа (рис. 3.7). Отрицательное акустическое давление такого уровня превышает максимально достижимый порог прочности воды [111, 112]. Это указывает на возможную роль рассмотренных нелинейных явлений в процессе развития неустойчивости капель акустического фонтана [107].

Отметим в заключение важную специфику нелинейной эволюции акустического поля в рассмотренном резонаторе: типичное для недиспергирующих волн перераспределение энергии в пределах спектра (между гармониками) в сферическом резонаторе приводит к перераспределению энергии и в пространстве. При этом, несмотря на общую убыль энергии, вблизи центра резонатора на определенном временном интервале может достигаться экстремально высокая концентрация энергии.

ТЕПЛОВЫЕ И КАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАК МЕХАНИЗМЫ ВЗРЫВОВ КАПЕЛЬ В АКУСТИЧЕСКИХ ФОНТАНАХ

Рост отрицательного давления и дополнительный нагрев вблизи центра капли могут привести к кавитации и последующему взрыву капли. В связи с этим возникает необходимость проверить, какие тепловые и кавитационные явления могут возникать в акустически возбужденной сферической капле жидкости. В экспериментальных работах по акустическому фонтану [106, 107] наблюдалось темное пятно в центре его верхней капли (рис. 4.1), которое может быть объяснено и тепловыми, и кавитационными явлениями. Интерес представляет также изучение возможности развития неустойчивости вибрирующей поверхности капли. Если методы анализа тепловых и кавитационных эффектов уже известны, то анализ устойчивости сферической формы жидкой капли еще не проводился, но существует достаточно много работ по анализу устойчивости сферической формы парогазового пузыря в жидкости, что является близкой задачей. Впервые этот вопрос был, по-видимому, рассмотрен Рябушинским [113]. Об этом сказано в статье Биркхофа [114]. Рябушинский выявил, что сферическая форма устойчива, когда давление газа в пузырьке меньше, чем внешнее давление в жидкости, и неустойчива в обратной ситуации. Уравнения, описывающие возмущения, связанные с несферичностью, были выписаны в работе [115]. Позже Тэйлор рассмотрел проблему устойчивости плоской границы раздела двух жидкостей разных плотностей и показал, что она устойчива, если ускорение направлено от тяжелой жидкости к легкой, и неустойчива в противном случае [116]. Этот вывод Биркхоф распространил на случай сферических полостей. Подробное рассмотрение провел Плессет в статье [69]. Теория была обобщена Просперетти [117] на вязкие жидкости. В историческом аспекте следует упомянуть работу Фарадея [118]. Он обнаружил, что при периодических колебаниях жидкости в направлении, перпендикулярном ее свободной поверхности, возбуждаются поверхностные волны (волны Фарадея), частота которых в 2 раза меньше частоты внешнего воздействия. Лонге-Хиггинс показал, что этот эффект возникает и на сферических поверхностях [119]. Соответствующая (параметрическая) неустойчивость развивается на нескольких циклах свободных колебаний, т.е. на нескольких повторных коллапсах после основного инерционного коллапса – это масштаб порядка 1 мкс. Неустойчивость Рэлея-Тэйлора имеет характерный масштаб порядка наносекунд и более выражена для маленьких пузы-

рей (когда равновесный радиус меньше 3 мкм), которые испытывают сильные коллапсы, а неустойчивость Фарадея ответственна за искажение формы более крупных пузырей. Таким образом, для случая сферических капель акустического фонтана, имеющих миллиметровые размеры, в первую очередь можно ожидать возникновения неустойчивости Фарадея, однако лишь численное решение дифференциального уравнения для амплитуды возмущения поверхности капли поможет ответить на вопрос о наличии или отсутствии самой неустойчивости вне зависимости от ее природы.

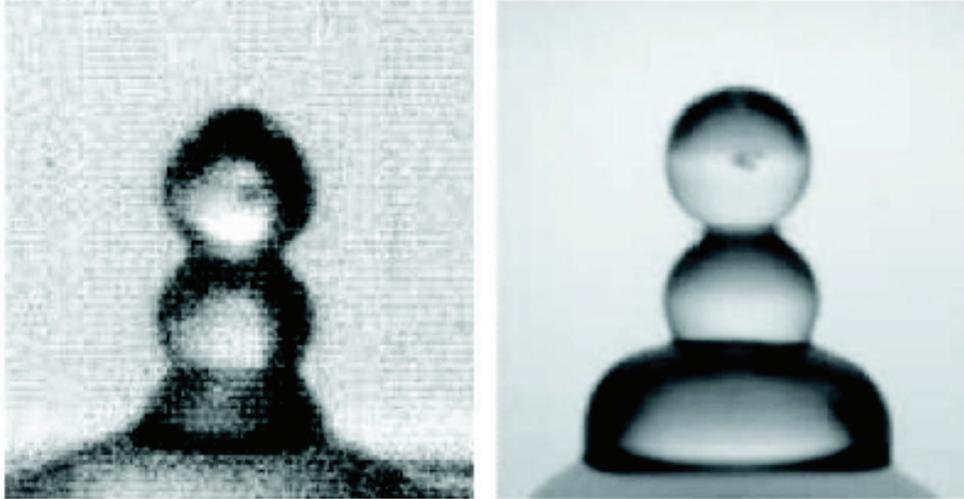


Рис. 4.1. Образование темного пятна в центре верхней капли акустического фонтана. Изображения взяты из работ [107] (слева) и [106] (справа)

§4.1. Температура в центре капли акустического фонтана

Вязкое поглощение в капле приводит к нагреву жидкости из-за перехода акустической энергии в тепло. Так как энергия более высоких гармоник локализована вблизи центра капли, тепловыделение там наиболее эффективно. Энергия, диссипируемая в единице объема в единицу времени (в среднем по периоду), равна сумме вкладов от каждой из гармоник:

$$Q_{heat} = \frac{b}{4\rho_0^2 c_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |P_n|^2 \left\{ \frac{1}{(k_n r)^2} - \frac{\sin(2k_n r)}{(k_n r)^3} + \frac{\sin^2(k_n r)}{(k_n r)^4} \right\}. \quad (4.1)$$

Пусть T – приращение температуры относительно исходного равновесного уровня, $\chi = \kappa/\rho_0 C_p$ – температуропроводность, κ – коэффициент теплопроводности, C_p – удельная теплоемкость жидкости. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{Q_{heat}(r, t)}{\rho_0 C_p}. \quad (4.2)$$

Наиболее просто приращение температуры находится в пренебрежении теплопроводностью:

$$T(r, t) = \frac{1}{\rho_0 C_p} \int_0^t Q_{heat}(r, t') dt'. \quad (4.3)$$

Эта формула предсказывает заметное повышение температуры в центре капли, вплоть до кипения, даже при относительно низких значениях исходного акустического давления в центре возбужденной капли (рис. 4.2).

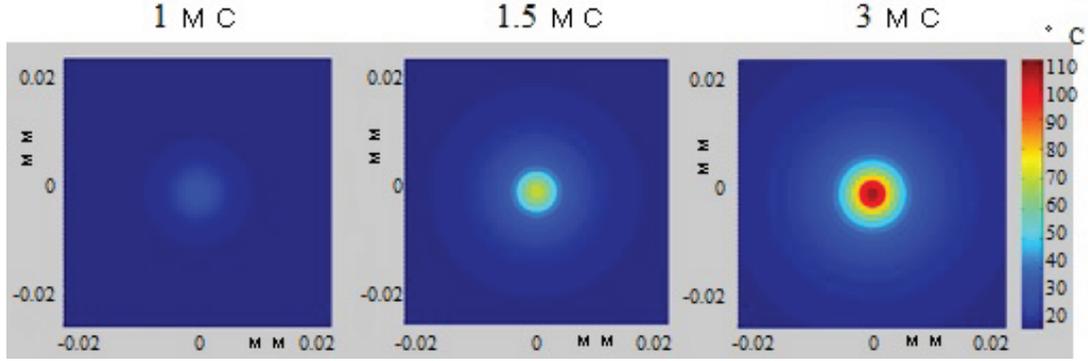


Рис. 4.2. Распределение температуры в центре капли в пренебрежении теплопроводностью в различные моменты времени

Однако такая упрощенная оценка не учитывает того факта, что область локализации тепловых источников чрезвычайно мала и поэтому эффект диффузии тепла может быть заметным. Чтобы учесть вклад теплопроводности, приращение температуры удобно разложить по пространственным гармоникам – аналогично тому, как это делалось для акустического давления:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \cdot \frac{\sin k_n r}{k_n r}, \quad (4.4)$$

где θ_n – амплитуды соответствующих гармоник. После некоторых преобразований уравнение теплового баланса сводится к системе связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для гармоник температуры:

$$\frac{d\theta_n}{dt} + \frac{\pi^2 \chi}{a^2} n^2 \theta_n = \frac{b\pi}{2a^2 \rho_0^3 c_0^2 C_p} n \sum_{m=1}^{n_{\max}} |P_m|^2 \frac{(2m+n)(2m-n)}{4m^2} \left(S_n + \frac{S_{2m-n} - S_{2m+n}}{2} \right), \quad (4.5)$$

Расчет температуры на основе данной системы показал, что учет влияния теплопроводности (второе слагаемое в левой части) действительно важен. В условиях, характерных для капель акустического фонтана, предсказанный нагрев в центре капли оказался не выше долей градуса (рис. 4.3).

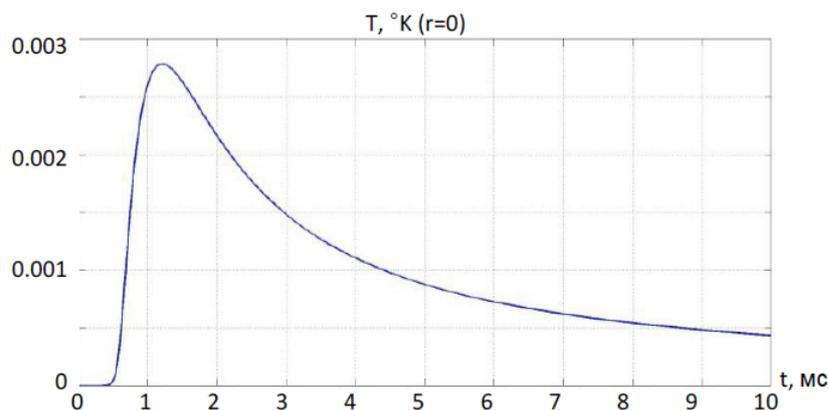


Рис. 4.3. Приращение температуры в центре капли с учетом теплопроводности

§4.2. Условия для кавитации в центре капли акустического фонтана

На начальном этапе колебания капли гармонические и давление в центре относительно мало. С течением времени из-за акустической нелинейности возникают высшие гармоники, а профиль приобретает несинусоидальный вид. Можно оценить, какая акустическая энергия окажется в капле при воздействии мощного ультразвукового пучка. Для пучка с мощностью 1 Вт и частотой 1 МГц энергия равна 1 мкДж. Для значений начального давления 0.5 МПа и 0.7 МПа энергия в капле примерно в 60 и 30 раз меньше, что говорит о большом запасе в оценке возможности достижения порога кавитации в ней, максимум которого составляет 30 МПа для воды: кавитация может возникнуть, даже если в каждую каплю фонтана в сферически-симметричную моду колебаний поступает в 100 раз меньшая энергия, чем это дает проведенная выше идеализированная оценка для пучка мощностью 1 Вт (рис. 4.4).

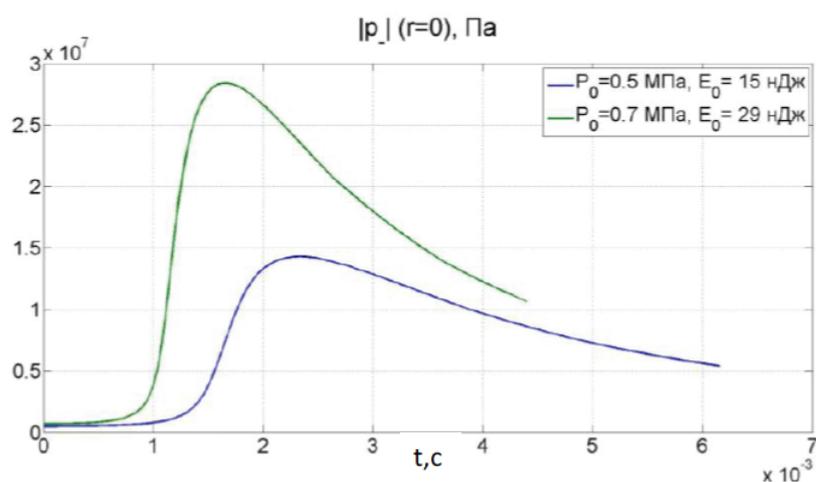


Рис. 4.4. Пиковое давление в центре капли

§4.3. Динамика пузырька в центре капли акустического фонтана

При известном давлении в центре капли может быть проанализирована динамика образовавшегося там пузырька. Поведение его радиуса во времени описывается уравнением Рэлея:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_i - \frac{2\sigma}{R} - p_{ac}}{\rho_0}, \quad (4.6)$$

где $p_i = p_g = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}$, $p_{g0} = p_{ac0} + \frac{2\sigma}{R_0}$, p_{ac} – акустическое давление в центре капли. Ранее было получено, что оно представимо в виде $p' \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n e^{-i\omega_n t} + P_n^* e^{i\omega_n t}}{2} \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}$, откуда следует значение давления в ее центре: $p_{ac} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n e^{-i\omega_n t} + P_n^* e^{i\omega_n t}}{2}$. Указанная зависимость рассматривается в определенный момент медленного времени, а в качестве интервала изменения быстрого времени t берется несколько периодов импульса акустического давления в центре капли в этот определенный момент медленного времени.

Возьмем момент медленного времени, когда временной профиль акустического давления в центре капли максимально искажен (рис. 3.3, с), и рассчитаем, как в ней будут вести себя пузырьки с разными начальными радиусами (рис. 4.5). Видно, что совсем маленькие будут быстро схлопываться, но начиная со значения начального радиуса около 10 мкм они начинают расти под воздействием давления, возникающего в центре капли акустического фонтана.

§4.4. Явление поверхностной неустойчивости в акустически возбужденной сферической капле

4.4.1. Анализ в пренебрежении вязкостью

Наблюдаемое в экспериментальных работах помутнение верхней капли акустического фонтана незадолго до ее взрыва (рис. 4.6) может быть связано с неустойчивостью поверхности капли. Рассмотрим задачу об устойчивости сферической формы акустически возбужденной капли, совершающей сферически-симметричные колебания. Пренебрежем влиянием газа на жидкость, считая его давление нулевым или, то же самое, считая каплю находящейся в вакууме.

Жидкость рассматриваем в приповерхностном слое, где развиваются возмущения, вызванные возмущениями сферической формы. В этом слое жидкость будем считать несжимаемой. Это разумное приближение, т.к. давление на поверхности капли равно нулю. Для начального сферически-симметричного колебания считать жидкость несжимаемой во всей капле нельзя, т.к. в таком случае жидкость либо всюду

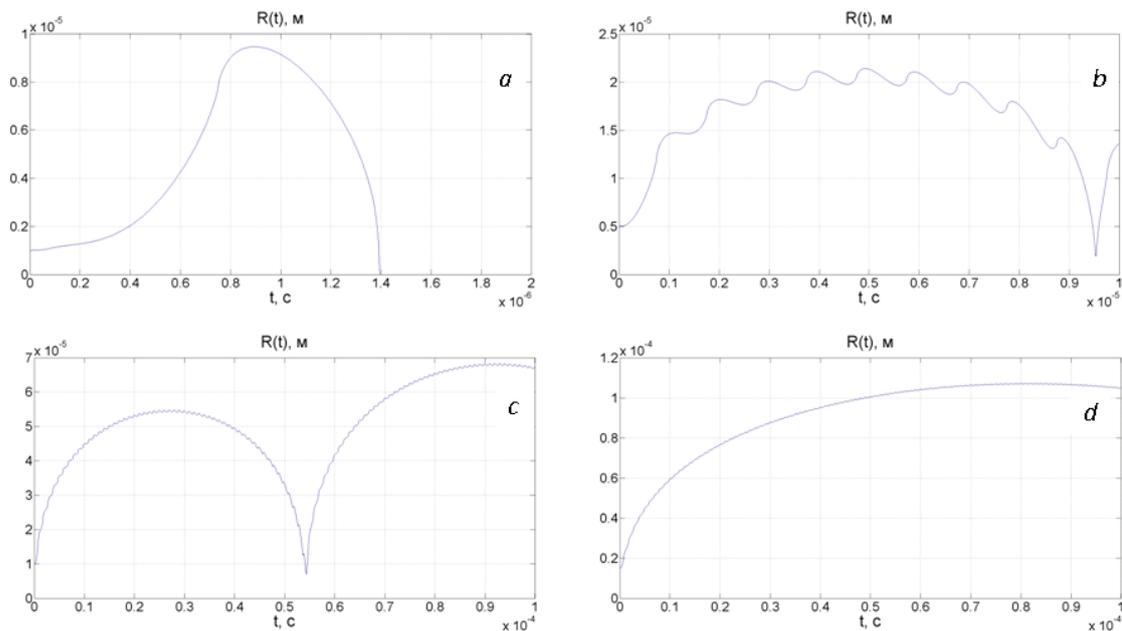


Рис. 4.5. Зависимость радиуса пузырька от времени. Кривые *a* – *d* соответствуют его начальному радиусу $R_0 = 1$ мкм, 5 мкм, 10 мкм, 15 мкм

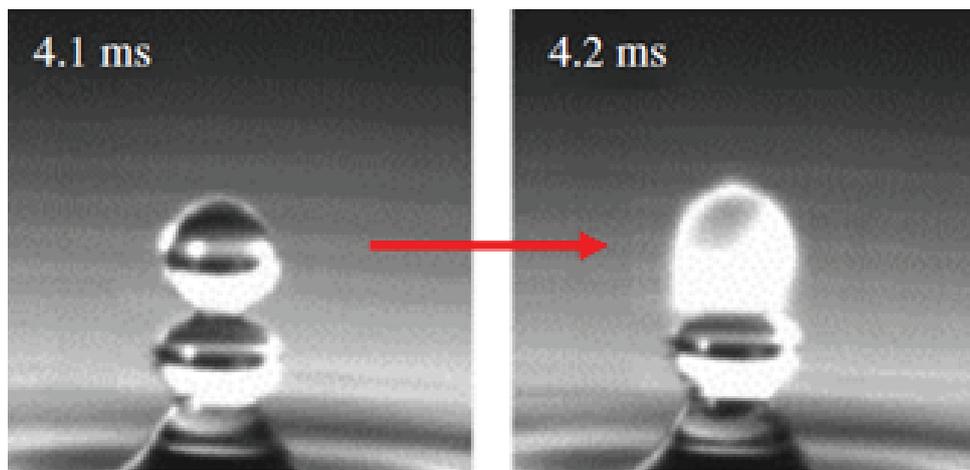


Рис. 4.6. Помутнение верхней капли акустического фонтана незадолго до взрыва капли. Рисунок взят из работы [107]

должна будет покоиться (свойство решений уравнения Лапласа), либо содержать источник и сток массы (например, колеблющийся пузырек) в центре капли. Поэтому можно считать, что где-то глубоко внутри капли есть сферически-симметричный источник массы, обеспечивающий колебания несжимаемого приповерхностного слоя, но само движение поверхности и приповерхностного слоя искажается по причине развития неустойчивостей, которые возникают на поверхности и постепенно затухают при удалении от нее вглубь капли.

Итак, жидкость в приповерхностном слое считается несжимаемой:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.8)$$

Поскольку вначале движение жидкости было безвихревым, а вязкости нет, то поток будет потенциальным всегда:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (4.9)$$

С учетом (4.9) уравнение Эйлера (4.7) сведется к интегралу Бернулли, уравнение неразрывности (4.8) превратится в уравнение Лапласа:

$$\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] + p = P(t), \quad (4.10)$$

$$\Delta \phi = 0. \quad (4.11)$$

Здесь $P(t)$ – некоторая функция (только) времени, имеющая размерность давления.

Рассмотрим теперь границу раздела жидкости и газа. В 0-м приближении она сферическая. Любые отклонения от сферической формы будем считать возмущениями. Поверхность капли Σ можно описать в сферической системе координат:

$$r = r_{\Sigma}(\theta, \psi, t) = R(t) + \xi(\theta, \psi, t), \quad (4.12)$$

где $R(t)$ – невозмущенное значение $r_{\Sigma}(\theta, \psi, t)$, θ и ψ – зенитный и азимутальный углы, соответственно.

Потенциал скорости представим в виде слагаемого, не возмущенного асферичностью, и возмущения: $\phi = \phi_0(r, t) + \phi_1(r, \theta, \psi, t)$. Возмущения будем считать малыми: $|\phi_1| \ll |\phi_0|$. После подстановки в уравнения (4.10)-(4.11) и линеаризации получим в 0-м приближении невозмущенную сферически-симметричную систему уравнений:

$$\rho \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right)^2 \right] + p_0 = P(t), \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) = 0, \quad (4.14)$$

а в 1-м приближении – систему уравнений для описания возмущения:

$$\rho \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right] + p_1 = 0, \quad (4.15)$$

$$\Delta \phi_1 = 0. \quad (4.16)$$

Здесь p_0 – возмущение давления в жидкости при сферически-симметричных колебаниях, p_1 – дополнительное возмущение, вызванное асферичностью.

Из уравнения (4.14) получаем, что

$$\phi_0(r, t) = \frac{C(t)}{r}, \quad (4.17)$$

где $C(t)$ – некоторая функция, определяемая граничными условиями. Подставляя в (4.13), получим выражение для невозмущенного давления:

$$p_0(r, t) = P(t) - \rho \left(\frac{\dot{C}}{r} + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^4} \right). \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь уравнения для возмущений. Общее решение уравнения Лапласа (4.16) в сферической системе координат имеет вид:

$$\phi_1(r, \theta, \psi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_{nm} r^n + \frac{B_{nm}}{r^{n+1}} \right) Y_{nm}(\theta, \psi), \quad (4.19)$$

где $A_{nm}(t)$ и $B_{nm}(t)$ – коэффициенты разложения, $Y_{nm}(\theta, \phi)$ – сферические гармоники. Они являются решениями уравнения

$$\Delta_{\theta, \psi} Y_{nm} + n(n+1) Y_{nm} = 0. \quad (4.20)$$

Сферические гармоники выражаются через присоединенные функции Лежандра $P_n^m(\cos \theta)$:

$$Y_{nm}(\theta, \psi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\psi}, \quad (4.21)$$

где

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (4.22)$$

В частности, $P_0^{(0)} = 1$, $P_1^{(0)} = \cos \theta$, $P_1^{(\pm 1)} = \sin \theta$, $P_2^{(0)} = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos 2\theta)$, $P_2^{(\pm 1)} = \frac{3}{2} \sin 2\theta$, $P_2^{(\pm 2)} = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Отметим, что случай $n = 1$ ($\cos \theta$ или $\sin \theta$) при малых возмущениях не связан с нарушением сферичности, т.к. при этом капля просто сдвигается как целое вдоль определенного направления. Таким образом, несферичность

соответствует $n \geq 2$. Например, случай $n = 2$ соответствует превращению сферы в эллипсоид.

В выражении (4.19) члены с $n = 0$ соответствуют сферически-симметричному случаю и поэтому в возмущенном решении отсутствуют. Кроме того, в рассматриваемой задаче предполагается, что возмущения возникают на поверхности, т.е. при продвижении вглубь капли они должны уменьшаться. Это означает, что члены с коэффициентами B_{nm} нужно отбросить. В итоге имеем для возмущения потенциала:

$$\phi_1(r, \theta, \psi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=-n}^n A_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.23)$$

Подставим (4.17) и (4.23) в уравнение (4.15) и получим выражение для возмущения давления:

$$p_1(r, \theta, \psi, t) = -\rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(r^n \dot{A}_{nm} - C n r^{n-3} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.24)$$

При решении задачи нужно иметь в виду, что граничные условия нелинейны, поэтому на границе ϕ_0 и ϕ_1 нужно рассматривать совместно. Согласно (4.17) и (4.18), имеем для полного значения потенциала:

$$\phi(r, \theta, \psi, t) = \frac{C(t)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=-n}^n A_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.25)$$

Отсюда следует выражение для радиальной компоненты скорости:

$$v_r(r, \theta, \psi, t) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{C(t)}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \sum_{m=-n}^n A_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.26)$$

Из (4.18) и (4.24) имеем для полного значения давления:

$$p(r, \theta, \psi, t) = P(t) - \rho \left(\frac{\dot{C}}{r} + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^4} \right) - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(r^n \dot{A}_{nm} - C n r^{n-3} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.27)$$

В линейном по возмущениям приближении можно считать, что частицы жидкости движутся в радиальном направлении, и поэтому имеем следующее граничное условие для скорости:

$$v_r(r, \theta, \psi, t)|_{r=R+\xi} \approx \dot{R} + \dot{\xi}. \quad (4.28)$$

Линеаризуя выражение (4.26) по возмущениям, получим отсюда:

$$-\frac{C}{R^2} \left(1 - 2\frac{\xi}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_{nm}(\theta, \psi) \approx \dot{R} + \dot{\xi}. \quad (4.29)$$

Что касается давления на поверхности, оно равно давлению из-за поверхностного натяжения возмущенной поверхности. Рассмотрим давление поверхностного натяжения на неплоской поверхности более подробно. Оно, как известно, задается формулой Лапласа:

$$p_L = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.30)$$

где $R_{1,2}$ – главные радиусы кривизны поверхности в данной точке, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Нам удобнее будет альтернативная запись для давления из-за поверхностного натяжения. Рассмотрим малый участок искривленной поверхности площадью S (рис. 4.7). На него действует давление поверхностного натяжения, т.е. в каждой точке есть сила, направленная по нормали. Позволим среде сдвинуться на малое расстояние Δl в направлении нормали. При этом будет совершена работа $p_L S \Delta l$. Она будет равна соответствующему изменению энергии поверхности, которое равно $\sigma \Delta S$. Следовательно, лапласовское давление равно $p_L = \sigma (\Delta S/S) / \Delta l$. Заметим, что $(\Delta S/S) / \Delta l = \nabla \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности. Действительно, если проинтегрировать дивергенцию $\nabla \cdot \mathbf{n}$ по малому объему $\Delta V = S \Delta l$, то в силу теоремы Остроградского-Гаусса получим $(\nabla \cdot \mathbf{n}) \Delta V = (S + \Delta S) - S = \Delta S$, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{n} = \Delta S / \Delta V = (\Delta S/S) / \Delta l$, что и требовалось. Таким образом, лапласовское давление выражается через дивергенцию внешней нормали к поверхности:

$$p_L = \sigma (\nabla \cdot \mathbf{n}). \quad (4.31)$$

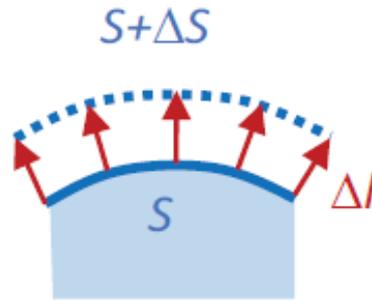


Рис. 4.7. Поверхность капли

Это представление эквивалентно (4.30), но более удобно для нашего анализа. Рассмотрим уравнение для поверхности капли (4.12) и запишем его в виде:

$$F(r, \theta, \psi, t) = r - R(t) - \xi(\theta, \psi, t) \equiv 0. \quad (4.32)$$

Единичная нормаль имеет, как известно, следующее выражение:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \quad (4.33)$$

Проведем рассмотрение в сферической системе координат. В этом случае оператор градиента такой:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\psi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (4.34)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_ψ – орты сферической системы координат. Получим:

$$\nabla F = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \xi}{\sin \theta \partial \varphi} \mathbf{e}_\psi \right) \Big|_{r=R+\xi}. \quad (4.35)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|\nabla F| = 1 + O(|\xi|^2)$, т.е. в линейном по возмущениям приближении $\mathbf{n} \approx \nabla F$. Поэтому выражение (4.31) для лапласовского давления принимает вид:

$$p_L = \sigma \Delta F. \quad (4.36)$$

Здесь $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа. В сферических координатах он выражается следующим образом:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \psi}, \quad (4.37)$$

где

$$\Delta_{\theta, \psi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \quad (4.38)$$

– угловая часть оператора Лапласа. С учетом (4.36) и (4.37) получим в линейном по возмущениям приближении:

$$p_L|_{r=R+\xi} = \sigma \left(\frac{2}{r} - \frac{\Delta_{\theta, \psi} \xi}{r^2} \right) \Big|_{r=R+\xi} \approx \frac{2\sigma}{R} \left(1 - \frac{\xi}{R} \right) - \sigma \frac{\Delta_{\theta, \psi} \xi}{R^2}. \quad (4.39)$$

С другой стороны, согласно (4.27):

$$p|_{r=R+\xi} \approx P(t) - \rho \left[\frac{\dot{C}}{R} \left(1 - \frac{\xi}{R} \right) + \frac{1}{2} \frac{C^2}{R^4} \left(1 - 4 \frac{\xi}{R} \right) \right] - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(R^n \dot{A}_{nm} - C n R^{n-3} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.40)$$

Приравнявая (4.39) и (4.40), получим:

$$P(t) - \rho \left[\frac{\dot{C}}{R} \left(1 - \frac{\xi}{R}\right) + \frac{1}{2} \frac{C^2}{R^4} \left(1 - 4 \frac{\xi}{R}\right) \right] - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(R^n \dot{A}_{nm} - CnR^{n-3} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi) \approx \frac{2\sigma}{R} \left(1 - \frac{\xi}{R}\right) - \sigma \frac{\Delta_{\theta, \psi} \xi}{R^2}. \quad (4.41)$$

Таким образом, граничные условия для полной радиальной скорости и полного давления дали выражения (4.29) и (4.41). Теперь в них можно разделить граничные условия для сферически-симметричного невозмущенного случая и граничные условия для возмущений:

$$-\frac{C}{R^2} = \dot{R}, \quad (4.42)$$

$$P(t) - \rho \left(\frac{\dot{C}}{R} + \frac{1}{2} \frac{C^2}{R^4} \right) = \frac{2\sigma}{R}, \quad (4.43)$$

$$\frac{2C}{R^3} \xi + \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_{nm}(\theta, \psi) = \dot{\xi}, \quad (4.44)$$

$$\rho \left[\frac{\dot{C}}{R^2} + 2 \frac{C^2}{R^5} \right] \xi - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(R^n \dot{A}_{nm} - CnR^{n-3} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi) = -\frac{2\sigma}{R^2} \xi - \frac{\sigma}{R^2} \Delta_{\theta, \psi} \xi. \quad (4.45)$$

Соотношение (4.42) дает:

$$C(t) = -R^2 \dot{R}. \quad (4.46)$$

Из (4.43) выражается функция $P(t)$:

$$P(t) = -\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) - \frac{2\sigma}{R}. \quad (4.47)$$

На самом деле вспомогательная функция $P(t)$ нам для анализа возмущений не нужна. Подставим (4.41) в (4.44) и (4.45) и получим:

$$-\frac{2\dot{R}}{R} \xi + \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} \sum_{m=-n}^n A_{nm} Y_{nm}(\theta, \psi) = \dot{\xi}, \quad (4.48)$$

$$-\rho \ddot{R} \xi - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(R^n \dot{A}_{nm} + nR^{n-1} \dot{R} A_{nm} \right) Y_{nm}(\theta, \psi) = -\frac{2\sigma}{R^2} \xi - \frac{\sigma}{R^2} \Delta_{\theta, \psi} \xi. \quad (4.49)$$

Отклонение поверхности капли от сферы также разложим по сферическим гармоникам:

$$\xi(t, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.50)$$

Согласно (4.20),

$$\Delta_{\theta, \psi} \xi = - \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) \sum_{m=-n}^n a_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \psi). \quad (4.51)$$

Как видно, разные составляющие разложения возмущений по сферическим гармоникам (разные «моды») ведут себя независимо друг от друга. Поэтому рассмотрим одну из мод возмущений (n, m) и для краткости записи опустим индексы при $A = A_{nm}$ и $a = a_{nm}$. Тогда два полученных условия (4.48) и (4.49) принимают вид:

$$nR^{n-1}A = \dot{a} + \frac{2\dot{R}}{R}a, \quad (4.52)$$

$$-\rho \left(R^n \dot{A} + nR^{n-1} \dot{R}A \right) = \left[\rho \ddot{R} - \frac{2\sigma}{R^2} + \frac{\sigma}{R^2} n(n+1) \right] a. \quad (4.53)$$

Из (4.52) выразим $A = \left(\dot{a} + \frac{2\dot{R}}{R}a \right) / nR^{n-1}$ и подставим в (4.53). После вычисления \dot{A} и приведения членов получим:

$$\ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} + (n+2) \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\sigma n(n-1)}{\rho R^3} \right] a = 0. \quad (4.54)$$

Это и есть искомое уравнение для амплитуды возмущения.

Если взять в разложении (4.19) вместо $A_{nm}r^n$ альтернативное выражение B_{nm}/r^{n+1} , то аналогичные преобразования дают похожее уравнение:

$$\ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} - (n-1) \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\sigma(n+1)(n+2)}{\rho R^3} \right] a = 0. \quad (4.55)$$

Видно, что тогда знак множителя при a отрицателен даже при отсутствии колебаний радиуса капли, т.е. возникает неустойчивость, что явно нефизично. Это подтверждает правильность выбора вида решения.

Введем новую переменную

$$b = \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} a. \quad (4.56)$$

Тогда из уравнения (4.54) получается уравнение без слагаемого, содержащего первую производную по времени:

$$\ddot{b} + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{3\dot{R}^2}{4R^2} + \frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R^3} \right] b = 0. \quad (4.57)$$

В отличие от газового пузырька, колеблющегося в жидкости, в случае осциллирующей капли ее радиус меняется незначительно: $R(t) = R_0 + \delta R(t)$, где $|\delta R| \ll R_0$. Обозначим $V(t) = dR/dt = \dot{R}$ и перепишем (4.57) с учетом малости изменения радиуса капли:

$$\ddot{b} + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\dot{V}}{R_0} + \frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R_0^3} \right] b = 0. \quad (4.58)$$

Отметим, что в силу того, что $|\delta R| \ll R_0$, согласно (4.56) можно считать:

$$b \approx a. \quad (4.59)$$

Введем еще одно обозначение:

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R_0^3}}. \quad (4.60)$$

Величина Ω_n является собственной частотой свободных колебаний соответствующей моды. В результате из (4.58) и (4.59) запишем получившееся уравнение для амплитуды возмущений моды $a = a_{nm}$:

$$\ddot{a} + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\dot{V}}{R_0} + \Omega_n^2 \right] a = 0. \quad (4.61)$$

Рассчитаем, как зависят частоты мод $\Omega_n/(2\pi)$ (в кГц) от их номера n для капли воды диаметром $2R_0=1.5$ мм (рис. 4.8). При расчете принималось $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\sigma=0.0725 \text{ Н/м}$. Видно, что примерно при $n=600$ частота становится равной 1 МГц, и при $n=1000$ – равной 2 МГц. Соответствующий масштаб возмущений – микронный.

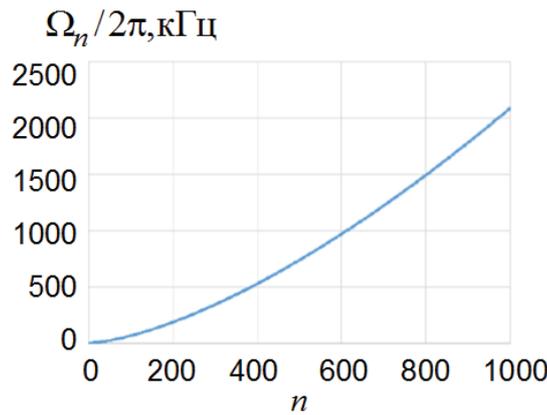


Рис. 4.8. Зависимость частот мод $\Omega_n/2\pi$ (в кГц) от их номера n для капли воды диаметром $2R_0=1.5$ мм

Из свойств присоединенных функций Лежандра $P_n^{(m)}(x = \cos \theta)$ известно, что на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ их нули определяются нулями функции $d^m P_n(x)/dx^m$, явля-

ющейся классическим ортогональным полиномом $(n - m)$ -го порядка. Поэтому при $m > 0$ присоединенные функции Лежандра имеют $n - m$ простых нулей внутри отрезка $-1 \leq x \leq 1$ и обращаются в нуль в граничных точках ± 1 . Следовательно, можно считать, на полуокружности длиной πR_0 для n -й моды укладывается n всплесков, разделенных нулями. Считая, что это стоячая волна, длина одного всплеска равна половине длины соответствующей бегущей волны. Значит, длина бегущей волны $\Lambda_n = 2\pi R_0/n$, т.е. волновое число $K_n = 2\pi/\Lambda_n = n/R_0$. Соответствующая частота при $n \gg 1$, согласно (4.60), равна $\Omega_n \approx \sqrt{\sigma n^3/(\rho R_0^3)} = \sqrt{K_n^3 \sigma/\rho}$. Получившийся закон дисперсии $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3$ есть не что иное, как закон дисперсии для капиллярных волн на поверхности жидкости.

4.4.2. Анализ при учете вязкости

При малых порядках n сферических гармоник возмущения являются крупномасштабными и поэтому в маловязких жидкостях, к которым можно отнести воду, эффектами вязкости можно пренебречь. При больших n вязкость может играть заметную роль. В частности, порог параметрического возбуждения капиллярных стоячих волн на поверхности капли будет ненулевым именно из-за эффектов вязкости. Анализ вязких явлений можно проводить по аналогии с выводом, проведенным в работе [117] для случая колебаний сферического пузырька газа в жидкости. На самом деле в той же работе Просперетти рассмотрел влияние эффектов вязкости не только на колебание пузырька, но и на колебание капли из несжимаемой жидкости (когда $R \equiv \text{const}$). Было получено, что

$$\ddot{a} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{R^2} \dot{a} + \frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R^3} a \approx 0. \quad (4.62)$$

Здесь $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость, η – коэффициент сдвиговой вязкости жидкости. Нетрудно видеть, что уравнение (4.62) при $\nu = 0$ совпадает с выведенным нами уравнением (4.54) при $R = \text{const}$, т.е. результаты согласуются. С учетом вязкого члена, присутствующего в (4.62), уравнение (4.54) для осциллирующей капли может быть модифицировано следующим образом:

$$\ddot{a} + \left[3 \frac{\dot{R}}{R} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{R^2} \right] \dot{a} + (n+2) \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\sigma n(n-1)}{\rho R^3} \right] a = 0. \quad (4.63)$$

Если использовать замену (4.55), то

$$\begin{aligned} & \ddot{b} + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{R^2} \dot{b} \\ & + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - 3\nu \frac{(n-1)(2n+1)\dot{R}}{R^3} + \frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R^3} \right] b = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Учитывая (4.59), получим обобщение уравнения (4.61) с учетом вязкости:

$$\ddot{a} + 2\delta_n \dot{a} + \left[\frac{n + 1/2}{R_0} \dot{V} - 3\nu \frac{(n-1)(2n+1)}{R_0^3} V + \Omega_n^2 \right] a = 0, \quad (4.65)$$

где, как и раньше, $V(t) = dR/dt = \dot{R}$, а также использовано определение (4.60) и введено обозначение для декремента затухания n -й моды:

$$\delta_n = (n-1)(2n+1) \frac{\nu}{R_0^2}. \quad (4.66)$$

Как известно, декремент затухания поверхностных волн (неважно, капиллярных, гравитационных или гравитационно-капиллярных волн) в вязкой жидкости имеет следующее выражение [120]: $\delta = 2\nu k^2$. Здесь δ – коэффициент в множителе $e^{-\delta t}$ для амплитуды затухающей во времени волны. Формула (4.66) находится в соответствии с этим выражением. Действительно, при $n \gg 1$ из (4.66) получаем $\delta_n \approx 2\nu(n/R_0)^2$. Выше уже пояснялось, что длина бегущей волны $\Lambda_n = 2\pi R_0/n$, т.е. волновое число $K_n = 2\pi/\Lambda_n = n/R_0$, а значит $\delta_n \approx 2\nu K_n^2$.

Заметим, что в уравнении отношение второго слагаемого в квадратных скобках к первому слагаемому примерно равно $6n \frac{\nu/\omega}{R_0^2}$, где ω – характерная частота изменения скорости. Как известно, $\sqrt{\nu/\omega}$ имеет порядок толщины погранслоя. Он гораздо тоньше радиуса капли. Так, для воды на частоте 1 МГц получаем ($\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$): $\sqrt{\nu/\omega} \approx 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0.4 \text{ мкм}$. Поскольку на этой частоте $R_0 = 0.75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, то $6n \frac{\nu/\omega}{R_0^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-6} n$. Как видно, эта величина очень мала даже при $n \sim 1000$. Поэтому для маловязких жидкостей типа воды соответствующее вязкое слагаемое можно не учитывать и использовать более короткое уравнение:

$$\ddot{a} + 2\delta_n \dot{a} + \left[\frac{n + 1/2}{R_0} \dot{V} + \Omega_n^2 \right] a = 0. \quad (4.67)$$

Уравнение (4.67) – искомое нами уравнение для описания неустойчивости сферической формы капли, поверхность которой колеблется со скоростью $V(t)$.

4.4.3. Зоны неустойчивости поверхности капли

Уравнение для амплитуды поверхности капли без учета вязкости жидкости (4.67) при $V(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ имеет структуру уравнения Матье, решения которого уже построены – это функции Матье, которым посвящена обширная литература [121–128]). Зоны неустойчивости решения данного уравнения тоже уже рассчитаны, поэтому получим их из известных соотношений в [121] в параметрах (P_0, n) , где P_0 – начальное давление в центре капли, n – номер гармоники (рис. 4.9).

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения уравнения для амплитуды поверхности капли с учетом вязкости жидкости (4.67) аналогично анализу уравнения Ма-

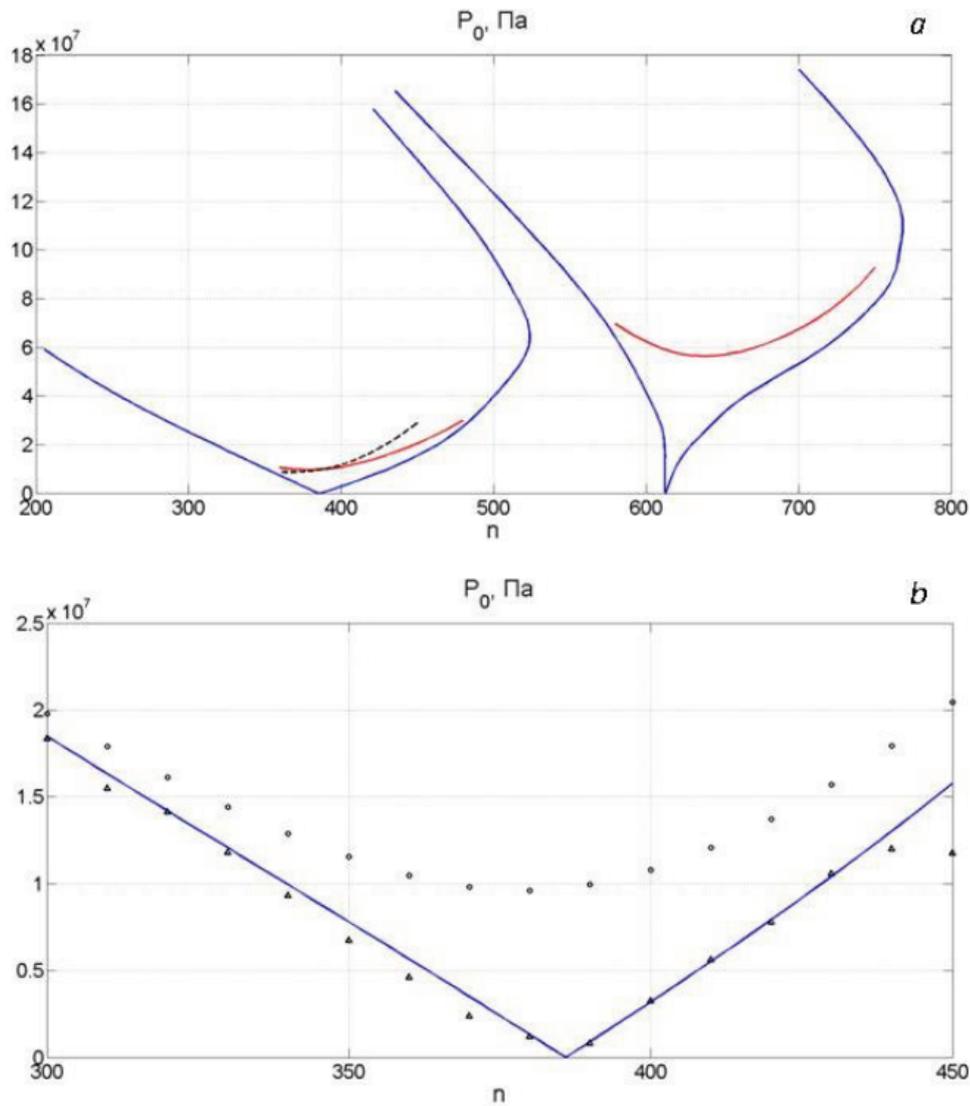


Рис. 4.9. *a* – первые две зоны неустойчивости поверхности капли в параметрах (P_0, n) : синие кривые – без учета вязкости жидкости, красные кривые – с учетом вязкости, черная – приближение, описанное в учебнике Боголюбова-Митропольского [129], *b* – первая зона неустойчивости: синяя кривая – теоретическая без учета вязкости, Δ – численная без учета вязкости, \circ – численная с учетом вязкости

ть с учетом затухания [129]. Для проведения данного анализа перейдем в уравнении (4.67) к новой независимой переменной $\tau = \omega t$ и примем $V(t) = V_0 \sin \omega t$, где $V_0 = \frac{P_0}{\pi \rho c_0}$, $\omega = \frac{\pi c_0}{R_0}$:

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} + 2 \frac{\delta_n}{\omega} \frac{da}{d\tau} + \left(\frac{n + 1/2}{R_0 \omega^2} \omega V_0 \cos \tau + \frac{\Omega_n^2}{\omega^2} \right) a = 0. \quad (4.68)$$

Введем обозначения $\delta'_n = \frac{\delta_n}{\omega} = (n - 1)(2n + 1) \frac{\nu}{\omega R_0^2}$, $\gamma_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{P_0}{\pi^2 \rho c_0^2}$ и $\lambda_n = \frac{\Omega_n^2}{\omega^2} = \frac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R_0^3 \omega^2}$. Тогда (4.68) примет вид:

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} + 2\delta'_n \frac{da}{d\tau} + (\gamma_n \cos \tau + \lambda_n) a = 0. \quad (4.69)$$

Условия на первую и вторую зоны неустойчивости решения уравнения (4.69), исходя из поиска действительных корней характеристического уравнения, при которых амплитуда a будет возрастать по экспоненциальному закону [129], примут вид:

$$1 - \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{2\lambda_n}\right)^2 - (4\delta_n)^2} < 4\lambda_n < 1 + \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{2\lambda_n}\right)^2 - (4\delta_n)^2}, \quad (4.70)$$

$$4 + \frac{2}{3}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - 64(2\delta_n)^2} < 4\lambda_n < 4 + \frac{2}{3}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - 64(2\delta_n)^2}. \quad (4.71)$$

Так как в задаче с каплей нас больше интересуют пороги неустойчивости в параметрах (P_0, n) , то учитывая, что $\gamma_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{P_0}{\pi^2 \rho_0 c_0^2}$, получим, что на графике $P_0(n)$ в окрестности параметрического резонанса, то есть такого n , при котором $\lambda_n = \frac{1}{4}$ для первой зоны и $\lambda_n = 1$ для второй зоны (это оказались $n=386$ и $n=613$ соответственно), неустойчивость будет развиваться при P_0 , находящихся выше кривых $P_0 = \frac{8\lambda_n}{n+\frac{1}{2}} \left[(\lambda_n - \frac{1}{4})^2 + (\delta_n)^2 \right] \pi^2 \rho_0 c_0^2$ и $P_0 = \frac{\lambda_n}{n+\frac{1}{2}} \pi^2 \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)_*$, где $\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)_*$ – положительный корень уравнения $\frac{5}{9}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^4 - 2(4 - 4\lambda_n)\frac{2}{3}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - (4 - 4\lambda_n)^2 - 256(\delta_n)^2 = 0$ (рис. 4.9). Видно, что учет вязкости жидкости существенно повышает порог неустойчивости, и в линейном режиме необходимо давление P_0 в центре капли больше 10 МПа, чтобы достичь неустойчивого режима, в то время как в капле акустического фонтана давление P_0 составляет около 1 МПа. Однако надо отметить, что этот метод работает только вблизи параметрического резонанса.

Для получения более точных границ зон неустойчивости дифференциальное уравнение второго порядка (4.69) было решено численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка, и найдены такие пары (P_0, n) , при которых начинается раскочка решения уравнения (4.69). Полученные результаты представлены на рис. 4.9: a – красные кривые, b – точечные значения Δ – без учета вязкости, o – с учетом вязкости. Расчеты также подтвердили, что наличие вязкости повышает порог неустойчивости, и вблизи параметрического резонанса результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными по методу, описанному в учебнике Боголюбова-Митропольского [129], а при отсутствии вязкости согласуются с известными теоретическими кривыми зон неустойчивости уравнения Матье. Таким образом, мы убедились, что наш численный алгоритм подходит для анализа неустойчивости поверхности капли, значит, можно применять его и к более общему случаю – решению уравнения (4.67), где в качестве \dot{V} берется производная профиля скорости на поверхности капли, рассчитываемой из задачи динамики акустического поля в капле (3.13).

Сам профиль ускорения на поверхности капли является в начальный момент времени гармоническим, и задача сводится к решению уравнения (4.69), которое

было описано выше. Со временем форма профиля искажается, а его амплитуда увеличивается. На рис. 4.10 представлены профили ускорения на поверхности капли в разные моменты времени при начальном давлении в центре капли $P_0 = 15$ МПа.

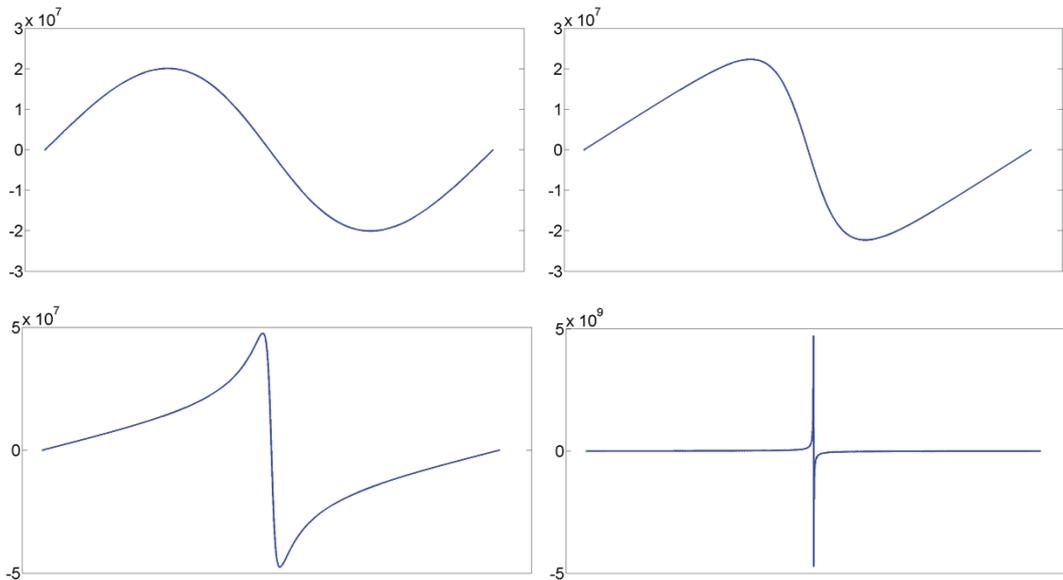


Рис. 4.10. профили \dot{V} на поверхности капли при $P_0 = 15$ МПа в различные моменты безразмерного времени τ : $\tau = 0$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1$, $\tau = 2.4$

Видно, что чем сильнее искажается профиль, тем больше становится его амплитуда, причем максимальное значение амплитуды (при $\tau = 2.4$) превышает начальное (при $\tau = 0$) на 2 порядка. Однако даже такое увеличение не приводит к снижению порога неустойчивости, а даже, напротив, повышает его, так как искривленная форма при этом имеет вид слишком короткого «всплеска», который не успевает привести к возникновению неустойчивости: при длительности полного импульса 1 мкс биполярный всплеск составляет менее 10%, то есть менее 0.1 мкс.

Такие резкие пики в профиле импульса требуют уточнить некоторые детали моделирования, в частности – подбор такого малого шага по времени, при котором пики пропишутся с достаточной точностью. Анализ решений при шагах $d\tau = 7 \cdot 10^{-4}$ и $d\tau = 1 \cdot 10^{-4}$ показал, что шага $d\tau = 7 \cdot 10^{-4}$ уже достаточно для верного обнаружения порога неустойчивости с точностью до десятых в значениях. На рис. 4.11 приведены две кривые раскочки, полученные при разных шагах расчета по времени, демонстрирующие незначительное различие в результатах: разница амплитуд составляет в среднем 4% от самих амплитуд кривых.

При анализе параметрической неустойчивости важно было убедиться, что начальное условие не оказывает влияния на результат возникновения (или отсутствия) неустойчивости. Начальное условие можно задавать, делая ненулевой либо саму начальную амплитуду возмущения $a(0)$, либо ее производную $\dot{a}(0)$. Общий случай сводится к этим двум. На рис. 4.12 представлены решения с описанными выше двумя ва-

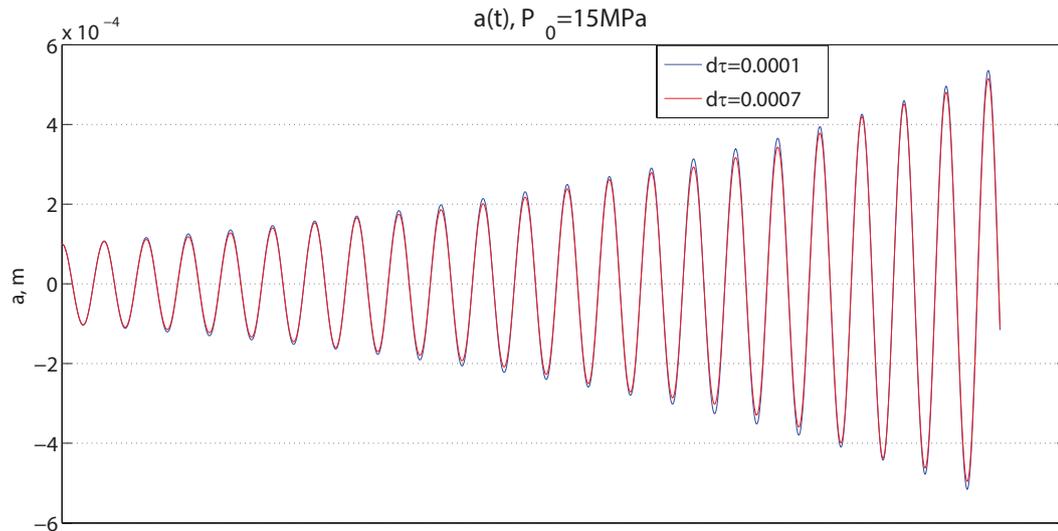


Рис. 4.11. Кривые раскочки амплитуды возмущения поверхности капли $a(t)$ при шагах моделирования $d\tau = 1 \cdot 10^{-4}$ (синяя кривая) и $d\tau = 7 \cdot 10^{-4}$ (красная кривая). $n = 386$

риантами задания начальных условий: разница амплитуд составляет в среднем 30% от самих амплитуд, это может быть существенно при поиске пороговых P_0 с более высокой точностью, но в нашем случае, когда пороговые значения ищутся с точностью до десятых, задание начальных условий для синусоидального или косинусоидального профилей не влияет на характер процесса (раскочка или затухание), а только на темп данной раскочки или затухания. Так как нашей задачей являлось только нахождение зон неустойчивости, то есть фиксирование начала процесса раскочки решения вместо затухания, то мы ограничились расчетами во всех точках только решений с начальными условиями $a(0) \neq 0$ и $\dot{a}(0) = 0$, и только в нескольких точках для проверки провели расчеты с начальными условиями $a(0) = 0$ и $\dot{a}(0) \neq 0$, чтобы убедиться в том, что они совпадают при поиске P_0 с точностью до десятых. Однако надо иметь ввиду, что если понадобится более высокая точность значений или важна сама скорость раскочки, то важно учитывать и то, какие начальные условия на амплитуду возмущения поверхности a были наложены.

Приведем иллюстрацию поиска порога неустойчивости по виду решения $a(t)$ при профилях \dot{V} на поверхности капли, полученных при различных P_0 . На рис. 4.13 продемонстрирован процесс поиска порогового значения с точностью до единиц МПа, далее уточнение до десятых делалось методом последовательных приближений. Здесь представлены решения воздействия профиля \dot{V} в момент времени $\tau = 2.4$, когда его амплитуда достигает максимального значения. Далее начинается спад амплитуды при сохранении аналогичной формы профиля, что уже гарантированно не приведет к раскочке, если она не возникла при $\tau = 2.4$. Видно, что такая форма профиля приво-

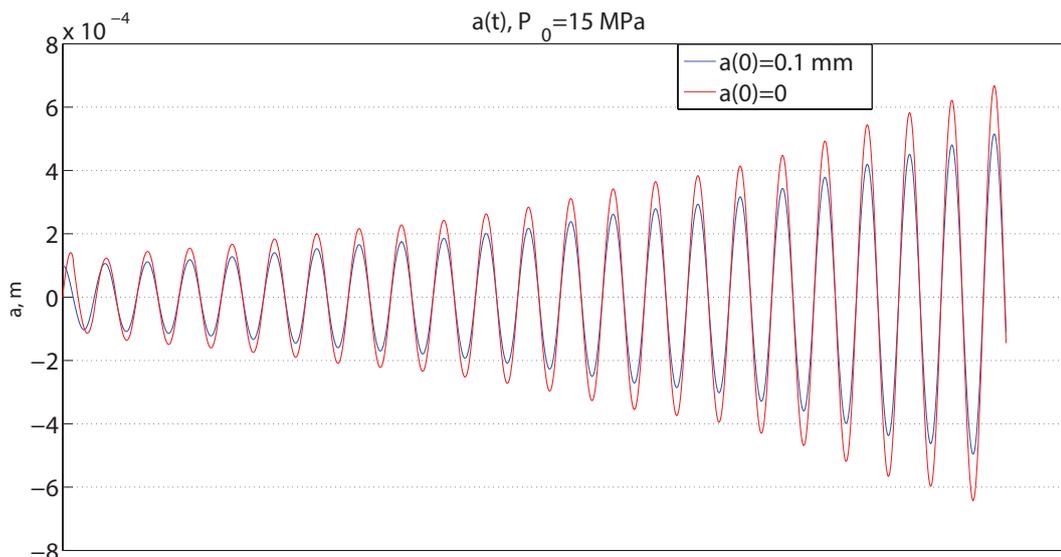


Рис. 4.12. Кривые раскачки амплитуды возмущения поверхности капли $a(t)$ при начальных условиях $a(0) = 0.1$ мм, $\dot{a}(0) = 0$ (синяя кривая) и $a(0) = 0$ и $\dot{a}(0) \neq 0$ (красная кривая). $n = 386$

дит к раскачке самой неустойчивой моды $n = 386$ только при значении $P_0 > 14$ МПа, в то время как гармонический профиль (при $\tau = 0$) приводит к раскачке уже при $P_0 = 9.7$ МПа.

Таким образом, на плоскости параметров (P_0, n) происходит подъем зон неустойчивости поверхности капли по мере искажения профиля ускорения на поверхности (рис. 4.14).

§4.5. Заключение и выводы

Оказалось, что, несмотря на заметное усиление диссипации в центре капли по сравнению с линейным случаем, эффект теплопроводности приводит к тому, что нагрев центра капли не превышает долей градуса. В то же время, нелинейное усиление пикового давления довольно существенно. В практически реализуемых режимах формирования акустического фонтана в центре капель могут достигаться уровни отрицательного давления в десятки и даже сотни мегапаскалей, что близко или превышает уровни прочности жидкости на разрыв. Проведенный анализ позволил сделать вывод о том, что основным механизмом взрывов капель является разрыв жидкости в центре капли (кавитация) под действием высоких отрицательных давлений, вызванных нелинейно-акустическими процессами. Полученные результаты находятся в согласии с экспериментальными наблюдениями взрывов капель, что позволяет глубже понять процессы, сопровождающие явление ультразвуковой атомизации.

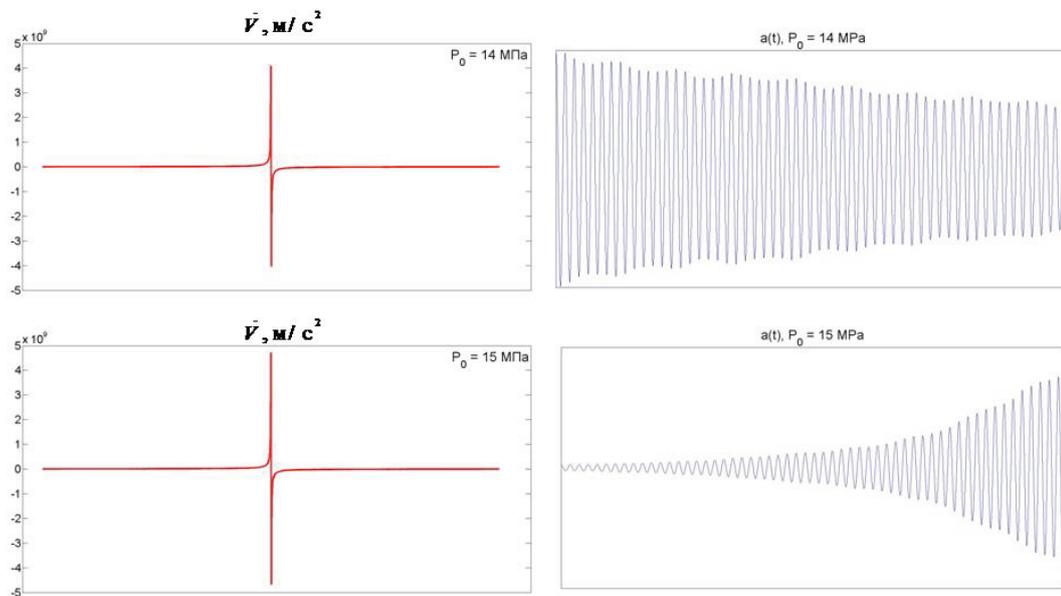


Рис. 4.13. Слева: профили \dot{V} на поверхности капли при $P_0 = 14 \text{ МПа}$ и $P_0 = 15 \text{ МПа}$. Справа: кривые затухания и раскачки амплитуды возмущения поверхности капли $a(t)$, соответствующие воздействиям приведенных справа профилей. $n = 386$

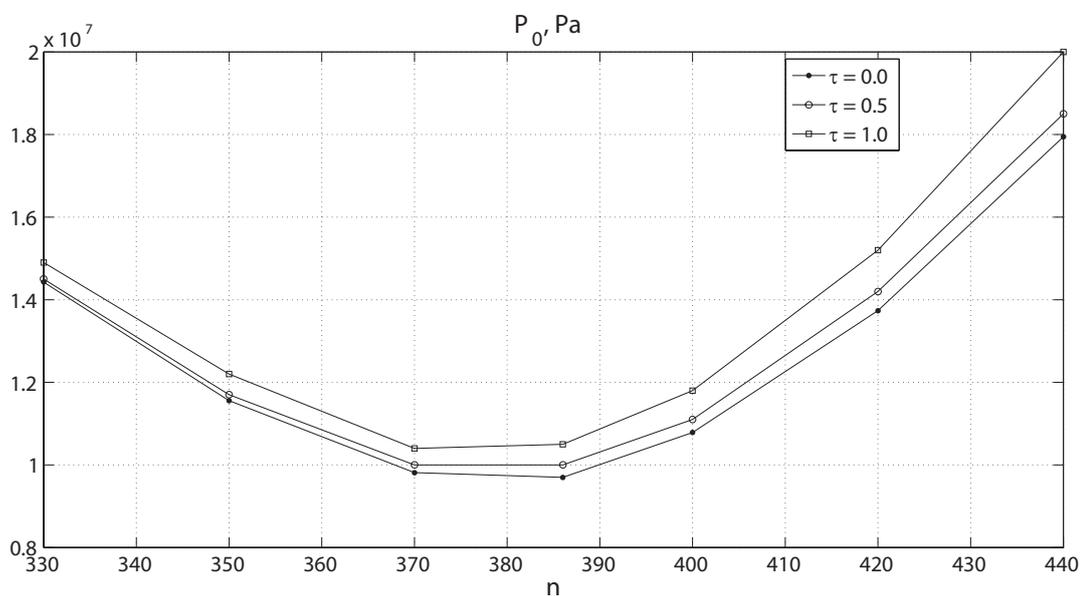


Рис. 4.14. Граница первой зоны неустойчивости поверхности капли в параметрах (P_0, n) в различные моменты безразмерного времени $\tau = 0, \tau = 0.5, \tau = 1$

Анализ неустойчивости поверхности капли показал, что при определенных начальных параметрах в ней возможна раскачка амплитуды возмущений поверхности, что приводит к значительным искривлениям поверхности, которые могут спровоцировать дальнейший разрыв капли. Более мутный вид верхней капли перед ее взрывом на съемке акустического фонтана скоростной камерой может быть вызван именно указанными микроскопическими искажениями ее поверхности, которые не видны глазу непосредственно ($\Lambda_n = 2\pi R_0/n$, радиус капли $R_0 = 0.75$ мм, номер самой неустойчивой моды $n = 386$, то есть $\Lambda_{386} \approx 12$ мкм), но рассеивают световые волны и создают оптический эффект в виде помутнения.

Основные результаты и выводы

1. Разработан способ оценки размера газового пузырька, расположенного в жидкости или мягкой биологической ткани, в условиях, когда масштаб пространственного разрешения эхо-импульсного ультразвукового сканера превышает размер пузырька. Способ основан на измерении амплитуды эхо-сигнала и сравнении его с амплитудой аналогичного сигнала, измеренного с использованием эталонных сферических рассеивателей. На основе классической теории рассеяния плоской волны на абсолютно мягком шаре разработан алгоритм по анализу ультразвуковых изображений пузырьков.

2. Предложено использовать сферические частицы из пенопласта в качестве сферических моделей газовых пузырьков, расположенных в жидкости или мягкой биоткани, сильно рассеивающих акустические волны. Экспериментально показано, что отражательные свойства образцов из пенопласта, расположенных в воде, позволяют использовать их в качестве акустически мягких рассеивателей ультразвука.

3. Разработан алгоритм численного моделирования нелинейной динамики парогазового пузыря в перегретой области малого размера в условиях сферической симметрии, и на его основе исследована эволюция радиуса и скорости стенки пузыря, давления внутри пузыря, количества молей пара внутри пузыря и температуры на границе пузыря. В соответствии с динамикой роста пузыря рассчитано излучаемое им акустическое давление и показано, что расширяющийся перегретый пузырь излучает акустический импульс, уровень давления в котором намного превышает уровень эхо-сигналов при визуализации пузырей традиционными сканерами.

4. Построена численная модель нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно мягкой границей. Показано, что в процессе нелинейной эволюции стоячая волна приобретает вид попеременно сходящегося и расходящегося импульса с острой вершиной, пиковое давление в котором вблизи центра резонатора может намного превышать исходную амплитуду волны. Наибольшее усиление пикового давления происходит в центре капли, где зависимость акустического давления от времени имеет вид периодической последовательности коротких биполярных импульсов. При этом, несмотря на общую убыль энергии, вблизи центра резонатора на определенном временном интервале может достигаться экстремально высокая концентрация энергии.

5. На основе разработанной численной модели нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно

мягкой границей проанализированы физические процессы внутри капель жидкости, возникающих в акустическом фонтане при фокусировке ультразвукового пучка на ее свободную поверхность. Показано, что в результате нелинейной эволюции сферической стоячей волны в центре капли могут достигаться уровни отрицательного давления, превышающие порог механической прочности воды (более 30 МПа), что является одним из механизмов разрушения капель. Показано, что нагрев жидкости при этом не превышает сотых долей градуса.

6. Проведен анализ устойчивости поверхности акустически возбужденной капли жидкости на основе полученного уравнения для амплитуд мод возмущения в базисе сферических гармоник. Построены зоны параметрической (фарадеевской) неустойчивости, позволяющие анализировать поведение капель акустического фонтана. Показано, что при превышении амплитуды акустического давления в центре капли нескольких мегапаскалей возможно развитие неустойчивости поверхности, приводящее к атомизации (распылению) жидкости на ее поверхности.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, Сапожникову Олегу Анатольевичу, за грамотное руководство, неоценимую помощь и поддержку в процессе моей научной деятельности. Во время проводимого исследования важную роль также сыграла рабочая атмосфера в нашей лаборатории, в коллектив которой входят доценты Хохлова Вера Александровна, Андреев Валерий Георгиевич и Цысарь Сергей Алексеевич, научные сотрудники Юлдашев Петр Викторович, Карзова Мария Михайловна и Крит Тимофей Борисович, а также аспиранты Николаева Анастасия Васильевна и Росницкий Павел Борисович. Все они помогали ценными советами, участвовали в обсуждении результатов, оказывали поддержку при решении возникающих проблем, вдохновляли на достижение намеченной цели.

Также я очень признательна всем сотрудникам кафедры акустики физического факультета за консультирование и помощь в решении научных задач, за приобретенные ценные знания и навыки. В особенности я благодарна Шанину Андрею Владимировичу за вычитку рукописи и ценные замечания и Рожкову Валерию Александровичу за помощь в изготовлении элементов экспериментальных установок, без его помощи проведение ряда экспериментов было бы просто невозможным.

В заключение я бы хотела поблагодарить родных и друзей, которые поддерживали меня на протяжении всей работы над диссертацией, и выразить отдельную благодарность Кушнарченко Юлии Валерьевне за грамотное редактирование моего текста.

Приложение А

Уравнения для описания сферически-симметричного нелинейного акустического поля в сферическом резонаторе с мягкой границей

В главе 3 была рассмотрена задача нелинейной динамики в акустически возбужденном сферическом резонаторе. Выведем аналитически уравнения для описания данной задачи. Будем исходить из системы уравнений гидродинамики. На первом этапе пренебрежём эффектами диссипации. Соответствующие члены можно добавить позже – такой подход оправдан при малом проявлении нелинейности и диссипации на периоде волны, что соответствует реальной ситуации в интересующем нас случае возбуждения капель в фонтане. Для идеальной жидкой или газообразной среды эта система включает в себя уравнения Эйлера, уравнение неразрывности и уравнение состояния:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$p = p(\rho). \quad (\text{A.3})$$

Здесь p – это давление, \mathbf{u} – скорость и ρ – плотность среды. Уравнение (A.1) – это закон изменения количества движения (2-й закон Ньютона), уравнение неразрывности (A.2) – закон сохранения массы. Конкретный вид уравнения состояния (A.3) зависит от типа среды.

Пусть исходное равновесное состояние среды характеризуется параметрами $\mathbf{u} = 0$, $\rho = \rho_0$ и $p = p(\rho_0) = p_0$. При наличии акустических волн среда приходит в движение и начинает сжиматься или растягиваться, т.е. изменяются все три указанных параметра \mathbf{u} , ρ и p . Обозначим отклонения плотности и давления от равновесных значений как ρ' и p' : $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$. Система уравнений гидродинамики с учетом этих обозначений будет иметь вид:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \rho' (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = -\rho' \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \rho', \quad (\text{A.5})$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \rho'^2 + \dots \quad (\text{A.6})$$

В первых двух уравнениях линейные по возмущениям \mathbf{u} , ρ' и p' члены собраны в левой части, а все нелинейные члены – в правой части уравнений. Уравнение состояния представлено в виде разложения функции $p(\rho)$ в ряд Тейлора; а соответствующие производные заданы при $\rho = \rho_0$. Введём следующие обозначения:

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0, \quad (\text{A.7})$$

$$\beta = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0. \quad (\text{A.8})$$

Величина c_0 – это скорость звука. Безразмерный параметр β характеризует нелинейные свойства среды и называется коэффициентом акустической нелинейности. Важной особенностью акустических волн является тот факт, что возмущения \mathbf{u} , ρ' и p' обычно малы: $|\mathbf{u}/c_0| \ll 1$, $|\rho'/\rho_0| \ll 1$, $|p'/p_0| \ll 1 \ll 1$, поэтому линейные и нелинейные члены в уравнениях ((A.4) – (A.6)) имеют разный порядок малости. Линейные члены являются главными, квадратично нелинейные члены имеют следующий порядок малости, а кубично нелинейные и, тем более, члены более высоких степеней играют несущественную роль. Поэтому для описания нелинейных эффектов можно ограничиться записью уравнений в квадратично нелинейном приближении. Исключив с помощью уравнения (A.6) возмущения плотности, перепишем уравнения (A.4) и (A.5), сохраняя линейные и квадратичные по переменным \mathbf{u} и p' члены:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx - \frac{p'}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = \frac{(\beta - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial}{\partial t} (p'^2) - \frac{p' \nabla \mathbf{u}}{c_0^2} - \frac{(\mathbf{u} \nabla) p'}{c_0^2}. \quad (\text{A.10})$$

Эта система с учетом безвихревого характера движения имеет вид:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx - \frac{p'}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} \nabla (\mathbf{u}^2), \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = \frac{(\beta - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial}{\partial t} (p'^2) - \frac{p' \nabla \mathbf{u}}{c_0^2} - \frac{(\mathbf{u} \nabla) p'}{c_0^2}. \quad (\text{A.12})$$

Используем представление скорости через потенциал: $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Тогда из (A.11):

$$\begin{aligned}
\nabla \left\{ p' + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} &= -\frac{p'}{c_0^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{c_0^2} \nabla \left(p' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla p' = \\
&= -\frac{1}{c_0^2} \nabla \left(p' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(-\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \dots \right) \approx -\frac{1}{c_0^2} \nabla \left(p' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = . \\
&= -\frac{1}{c_0^2} \nabla \left(p' \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\rho_0}{2c_0^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = -\nabla \left(\frac{1}{c_0^2} p' \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Отсюда

$$\nabla \left\{ p' + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c_0^2} p' \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} = 0. \tag{A.14}$$

Следовательно,

$$p' + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c_0^2} p' \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = C(t) = 0. \tag{A.15}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
p' &= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{c_0^2} p' \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \approx \\
&= -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{c_0^2} \left(-\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 .
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Таким образом, получили выражение для акустического давления через потенциал скорости в квадратичном приближении:

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2. \tag{A.17}$$

Подставим это представление в уравнение (A.12):

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\beta - 1)}{c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 \right]. \tag{A.18}$$

Это уравнение – уравнение Кузнецова. При наличии поглощения уравнение выглядит так:

$$\Delta \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta - 1}{c_0^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 \right], \tag{A.19}$$

где $b = \zeta + \frac{4}{3}\eta$ – диссипативный коэффициент.

Поскольку $\phi \cdot r$ обращается в ноль при $r = 0$ и $r = a$, то потенциал может быть записан так:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \quad (\text{A.20})$$

где $k_n = \pi n/a$ – волновые числа мод, Φ_n – медленно изменяющиеся амплитуды гармоник стоячей волны. Базис из функций $\sin(k_n r)/(k_n r)$ является полным и ортогональным. Действительно, любые две функции $\sin(k_n r)/(k_n r)$ и $\sin(k_m r)/(k_m r)$ при $m \neq n$ ортогональны, если под их скалярным произведением понимать интеграл от их произведения по интервалу $0 \leq r \leq a$ с весом r^2 , т.е. при интегрировании по объёму капли.

При подстановке в волновое уравнение учтем, что

$$\Delta \left(\frac{\sin(k_n r)}{k_n r} \right) = -k_n^2 \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \quad (\text{A.21})$$

Нам понадобится также следующий интеграл:

$$\int_0^{\pi} dx \frac{\sin(nx)}{x} = \int_0^{\pi n} dx \frac{\sin x}{x} = \text{Si}(\pi n), \quad (\text{A.22})$$

где $\text{Si}(x) = \int_0^x dt \frac{\sin t}{t}$ – интегральный синус. Это нечетная функция $\text{Si}(-x) = -\text{Si}(x)$. Также $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = \pi/2$. Она имеет экстремумы в точках $x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

Подставим представление (A.20) в уравнение (A.19):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + \frac{b k_n^2}{\rho_0} \frac{d \Phi_n}{dt} + k_n^2 c_0^2 \Phi_n \right) \frac{\sin(k_n r)}{k_n r} = \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d \Phi_m}{dt} \frac{d \Phi_l}{dt} \frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \frac{\sin(k_l r)}{k_l r} + \Phi_m \Phi_l \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_m r)}{k_m r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sin(k_l r)}{k_l r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Обозначим $\frac{\pi r}{a} = x$, т.е. $r = \frac{a}{\pi} x$. Обозначим также $\omega_n = k_n c_0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + \frac{b \omega_n^2}{\rho_0 c_0^2} \frac{d \Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n \right) \frac{\sin(nx)}{nx} = \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{ml} \left\{ \frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d \Phi_m}{dt} \frac{d \Phi_l}{dt} \frac{\sin(mx)}{x} \frac{\sin(lx)}{x} + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \Phi_m \Phi_l \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sin(mx)}{x} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sin(lx)}{x} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Домножим обе части на x :

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \Phi_s}{dt^2} + \frac{b\omega_s^2}{\rho_0 c_0^2} \frac{d\Phi_s}{dt} + \omega_s^2 \Phi_s \right) \frac{\sin(sx)}{s} =$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{ml} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} \frac{\sin(mx) \sin(lx)}{x} \\ + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Phi_m \Phi_l \left[ml \frac{\cos(mx) \cos(lx)}{x} - l \frac{\sin(mx) \cos(lx)}{x^2} \right. \\ \left. - m \frac{\cos(mx) \sin(lx)}{x^2} + \frac{\sin(mx) \sin(lx)}{x^3} \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Учтем, что $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(sx) \sin(nx) = \delta_{sn}$. Умножим обе части на $\frac{2}{\pi} \sin(nx)$ и проинтегрируем по интервалу $0 \leq x \leq \pi$. Получим:

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + \frac{b\omega_n^2}{\rho_0 c_0^2} \frac{d\Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n =$$

$$- \frac{2n}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{ml} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} \int_0^{\pi} dx \frac{\sin(nx) \sin(mx) \sin(lx)}{x} + \\ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Phi_m \Phi_l \int_0^{\pi} dx \sin(nx) \left[ml \frac{\cos(mx) \cos(lx)}{x} - l \frac{\sin(mx) \cos(lx)}{x^2} \right. \\ \left. - m \frac{\cos(mx) \sin(lx)}{x^2} + \frac{\sin(mx) \sin(lx)}{x^3} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{A.26})$$

Используем, что

$$\sin(nx) \sin(mx) \sin(lx) =$$

$$\frac{1}{4} \{ -\sin[(n+m+l)x] + \sin[(n+m-l)x] + \sin[(n-m+l)x] - \sin[(n-m-l)x] \}, \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{d}{dx} [\sin(nx) \sin(mx) \cos(lx)] =$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} (n+m+l) \sin[(n+m+l)x] + (n+m-l) \sin[(n+m-l)x] \\ - (n-m+l) \sin[(n-m+l)x] - (n-m-l) \sin[(n-m-l)x] \end{array} \right\}, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [\sin(nx) \sin(mx) \sin(lx)] =$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} (n+m+l)^2 \sin[(n+m+l)x] - (n+m-l)^2 \sin[(n+m-l)x] \\ - (n-m+l)^2 \sin[(n-m+l)x] + (n-m-l)^2 \sin[(n-m-l)x] \end{array} \right\}. \quad (\text{A.29})$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi} dx \sin(nx) \left[ml \frac{\cos(mx) \cos(lx)}{x} - l \frac{\sin(mx) \cos(lx)}{x^2} \right. \\ \left. - m \frac{\cos(mx) \sin(lx)}{x^2} + \frac{\sin(mx) \sin(lx)}{x^3} \right]$$

$$= \frac{n^2 - m^2 - l^2}{8} \{ \text{Si} [\pi(n+m+l)] - \text{Si} [\pi(n+m-l)] - \text{Si} [\pi(n-m+l)] + \text{Si} [\pi(n-m-l)] \} \quad (\text{A.30})$$

Введём обозначение для коэффициентов:

$$S_n = \text{Si} (\pi n). \quad (\text{A.31})$$

В итоге получаем относительно компактную правую часть:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + \frac{b\omega_n^2}{\rho_0 c_0^2} \frac{d\Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n = \\ & \frac{n}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}}{ml} \left[\frac{\beta-1}{c_0^2} \frac{d\Phi_m}{dt} \frac{d\Phi_l}{dt} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \Phi_m \Phi_l \frac{n^2 - m^2 - l^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Заметим, что поскольку правая часть дифференцируется, то $\Phi_m = \text{const}$ вклад не дает, поэтому постоянную составляющую амплитуды потенциала можно не учитывать. Ищем решение в виде, учитывающем возможность (слабого) взаимодействия между модами и появления из-за этого в данной моде возмущений на частотах соседних мод:

$$\Phi_n = \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_s^{(n)} e^{-i\omega_s t}, \quad (\text{A.33})$$

где

$$D_s^{(n)*} = D_{-s}^{(n)} \quad (\text{A.34})$$

в силу действительности Φ_n . Любое решение может быть представлено в указанном виде. Обозначим амплитуду колебания на собственной частоте моды так:

$$C_n \equiv D_n^{(n)}. \quad (\text{A.35})$$

При $C_n = \text{const}$ и $D_s^{(n)} = 0$ ($s \neq n$) выбранное представление дает точное решение в случае отсутствия диссипации и нелинейности. Мы же теперь считаем $D_s^{(n)}$ изменяющимися во времени. Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} + \frac{b\omega_n^2}{\rho_0 c_0^2} \frac{d\Phi_n}{dt} + \omega_n^2 \Phi_n = \\ & \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[\ddot{D}_s^{(n)} - i2\omega_s \dot{D}_s^{(n)} + (\omega_n^2 - \omega_s^2) D_s^{(n)} + \frac{b\omega_s^2}{\rho_0 c_0^2} \left(\dot{D}_s^{(n)} - i\omega_s D_s^{(n)} \right) \right] e^{-i\omega_s t} \\ & = \left\{ -i\omega_n \left(\dot{C}_n + C_n \frac{bk_n^2}{2\rho_0} \right) e^{-i\omega_n t} + \left[\frac{1}{2} \ddot{C}_n + \frac{bk_n^2}{2\rho_0} \dot{C}_n \right] e^{-i\omega_n t} \right\} + \{c.c.\} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty, s \neq n}^{\infty} \left[\ddot{D}_s^{(n)} - i2\omega_s \dot{D}_s^{(n)} + (\omega_n^2 - \omega_s^2) D_s^{(n)} + \frac{b\omega_s^2}{\rho_0 c_0^2} \left(\dot{D}_s^{(n)} - i\omega_s D_s^{(n)} \right) \right] e^{-i\omega_s t} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Введем порядки малости: $\phi \propto \mu \ll 1$, откуда $C_n \propto \mu$. Также считаем вязкость малой: $b \propto \mu$. Поскольку в невозмущенном случае $C_n = \text{const} \propto \mu$, $D_s^{(n)} = 0$ ($s \neq n$), то $C_n = C_n(\mu t)$, $C_n \propto \mu$, $D_s^{(n)} = D_s^{(n)}(\mu t)$, $D_s^{(n)} \propto \mu^2$. Отметим, что поскольку

моды $s \neq n$ в первом приближении не содержат возмущений на собственной частоте n -ой моды, то квадратичная добавка $D_{s=n}^{(n)} \propto \mu^2$ может считаться отсутствующей. Логика такая: при перетекании возмущений на заданной частоте из моды в моду происходит ослабление, эквивалентное повышению порядка малости на $\propto \mu$. "Неродные" для данной моды колебания имеют порядок $\propto \mu^2$, поэтому при перетекании из моды в моду они ослабляются и становятся $\propto \mu^3$, т.е. могут не учитываться.

Оставляя и справа, и слева члены не выше второго порядка малости (точнее, только 2-го, т.к. члены 1-го порядка, соответствующие невозмущённому случаю, уже сократились), получим:

$$\begin{aligned}
& -i\omega_n \left(\dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) e^{-i\omega_n t} + c.c. + \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty, s \neq n}^{\infty} (\omega_n^2 - \omega_s^2) D_s^{(n)} e^{-i\omega_s t} = \\
& -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \\
& \left[\begin{aligned} & + (\beta - 1) (C_m C_l e^{-i\omega_{m+l}t} - C_m^* C_l e^{i\omega_{m-l}t} - C_m C_l^* e^{-i\omega_{m-l}t} + C_m^* C_l^* e^{i\omega_{m+l}t}) \\ & + \frac{n^2 - m^2 - l^2}{2ml} (C_m C_l e^{-i\omega_{m+l}t} + C_m^* C_l e^{i\omega_{m-l}t} + C_m C_l^* e^{-i\omega_{m-l}t} + C_m^* C_l^* e^{i\omega_{m+l}t}) \end{aligned} \right] \quad (A.37)
\end{aligned}$$

Здесь было учтено, что $\omega_n = n \frac{\pi c_0}{a}$. Перегруппируем члены:

$$\begin{aligned}
& -i\omega_n \left(\dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) e^{-i\omega_n t} + c.c. + \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty, s \neq n}^{\infty} (\omega_n^2 - \omega_s^2) D_s^{(n)} e^{-i\omega_s t} = \\
& -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \\
& \left[\begin{aligned} & \beta (C_m C_l e^{-i\omega_{m+l}t} - C_m^* C_l e^{i\omega_{m-l}t} - C_m C_l^* e^{-i\omega_{m-l}t} + C_m^* C_l^* e^{i\omega_{m+l}t}) \\ & + \frac{1}{2ml} \left(\begin{aligned} & C_m C_l (n^2 - (m+l)^2) e^{-i\omega_{m+l}t} + C_m^* C_l (n^2 - (m-l)^2) e^{i\omega_{m-l}t} \\ & + C_m C_l^* (n^2 - (m-l)^2) e^{-i\omega_{m-l}t} + C_m^* C_l^* (n^2 - (m+l)^2) e^{i\omega_{m+l}t} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \quad (A.38)
\end{aligned}$$

Домножим на $e^{i\omega_n t}$ и усредним по периоду (учтем, что при этом оператор-множитель $\frac{\partial}{\partial t}$ перед суммами можно заменить на $-i\omega_n$, т.к. при такой процедуре в сумме выделяются члены $\propto e^{-i\omega_n t}$):

$$\begin{aligned}
& \dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} = \\
& -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \\
& \left[\begin{aligned} & \beta (C_m C_l \delta_{l,n-m} - C_m^* C_l \delta_{l,n+m} - C_m C_l^* \delta_{l,-n+m} + C_m^* C_l^* \delta_{l,-n-m}) \\ & + \frac{1}{2ml} \left(\begin{aligned} & C_m C_l (n^2 - (m+l)^2) \delta_{l,n-m} + C_m^* C_l (n^2 - (m-l)^2) \delta_{l,n+m} \\ & + C_m C_l^* (n^2 - (m-l)^2) \delta_{l,-n+m} + C_m^* C_l^* (n^2 - (m+l)^2) \delta_{l,-n-m} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] = \\
& -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \\
& \left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & C_m C_{n-m} \begin{pmatrix} S_{2n} \\ -S_{2m} \\ -S_{2(n-m)} \end{pmatrix} - C_m^* C_{n+m} \begin{pmatrix} S_{2(n+m)} \\ -S_{2n} \\ +S_{-2m} \end{pmatrix} - \\ & -C_m C_{-n+m}^* \begin{pmatrix} S_{2m} \\ -S_{2n} \\ +S_{2(n-m)} \end{pmatrix} + C_m^* C_{-n-m}^* \begin{pmatrix} -S_{2(n+m)} \\ -S_{-2m} \\ +S_{2n} \end{pmatrix} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \\
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Учтем, что $S_0 = 0$ и $S_{-n} = -S_n$:

$$\dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} = -\beta \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} C_m C_{n-m} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) \\ + C_m^* C_{n+m} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}) \\ + C_m C_{-(n-m)}^* (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) \\ + C_m^* C_{-(n+m)}^* (S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}) \end{pmatrix}. \tag{A.40}$$

При суммировании нужно учесть, что у нас индексы положительны, т.е. если C_n имеет неположительный индекс, то эта амплитуда равна нулю. Поэтому $C_{-(n+m)}^* = 0$, т.е. соответствующее слагаемое исчезает. Кроме того, часть сумм исчезает:

$$\begin{aligned}
& \dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} = -\beta \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{n}{8\pi} \times \\
& \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} C_m^* C_{n+m} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}) + \sum_{m=1}^{n-1} C_m C_{n-m} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) + \\ & + \sum_{m=n+1}^{\infty} C_m C_{-(n-m)}^* (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) \end{aligned} \right\}. \\
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Переобозначим в последней сумме индексы и объединим получившееся значение с первым (суммы оказались равными, поэтому происходит удвоение):

$$\dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} = -\beta \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{n}{8\pi} \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m^* C_{n+m} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}) + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} C_m C_{n-m} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) \end{array} \right\}. \quad (\text{A.42})$$

Для поиска добавки второго приближения нужно теперь рассчитать коэффициенты $D_{s, s \neq n}^{(n)}$, считая, что C_n уже известны. Рассмотрим уравнение, которое было получено выше:

$$\begin{aligned} & -i\omega_n \left(\dot{C}_n + C_n \frac{b\omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) e^{-i\omega_n t} + c.c. + \frac{1}{2} \sum_{s=-\infty, s \neq n}^{\infty} (\omega_n^2 - \omega_s^2) D_s^{(n)} e^{-i\omega_s t} = \\ & - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{n}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \\ & \left[\begin{array}{l} \beta (C_m C_l e^{-i\omega_{m+l} t} - C_m^* C_l e^{i\omega_{m-l} t} - C_m C_l^* e^{-i\omega_{m-l} t} + C_m^* C_l^* e^{i\omega_{m+l} t}) \\ + \frac{1}{2ml} \left(C_m C_l (n^2 - (m+l)^2) e^{-i\omega_{m+l} t} + C_m^* C_l (n^2 - (m-l)^2) e^{i\omega_{m-l} t} \right. \right. \\ \left. \left. + C_m C_l^* (n^2 - (m-l)^2) e^{-i\omega_{m-l} t} + C_m^* C_l^* (n^2 - (m+l)^2) e^{i\omega_{m+l} t} \right) \right] \end{array} \right]. \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

Домножим на $e^{i\omega_s t}$ и усредним по периоду (учтем, что при этом оператор-множитель $\frac{\partial}{\partial t}$ перед суммами можно заменить на $-i\omega_s$, т.к. при такой процедуре в сумме выделяются члены $/propto e^{-i\omega_s t}$):

$$\begin{aligned} D_{s, s \neq n}^{(n)} &= i\omega_s \frac{n}{4\pi(\omega_n^2 - \omega_s^2)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (S_{n+m+l} - S_{n+m-l} - S_{n-m+l} + S_{n-m-l}) \\ & \left\{ \begin{array}{l} \beta [C_m C_l \delta_{l, s-m} - C_m^* C_l \delta_{l, s+m} - C_m C_l^* \delta_{l, -(s-m)} + C_m^* C_l^* \delta_{l, -(s+m)}] \\ + \frac{1}{2ml} \left[C_m C_l [n^2 - (m+l)^2] \delta_{l, s-m} + C_m^* C_l [n^2 - (m-l)^2] \delta_{l, s+m} \right. \\ \left. + C_m C_l^* [n^2 - (m-l)^2] \delta_{l, -(s-m)} + C_m^* C_l^* [n^2 - (m+l)^2] \delta_{l, -(s+m)} \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

Суммируя, получим:

$$\begin{aligned} D_{s, s \neq n}^{(n)} &= i\omega_s \frac{n}{4\pi(\omega_n^2 - \omega_s^2)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \left(\beta + \frac{n^2 - s^2}{2m(s-m)} \right) (C_m C_{s-m} + C_m C_{-s+m}^*) \begin{pmatrix} S_{n+s} \\ +S_{n-s} \\ -S_{n+s-2m} \\ -S_{n-s+2m} \end{pmatrix} \\ + \left(\beta - \frac{n^2 - s^2}{2m(s+m)} \right) (C_m^* C_{s+m} + C_m^* C_{-(s+m)}^*) \begin{pmatrix} S_{n+s} \\ +S_{n-s} \\ -S_{n+s+2m} \\ -S_{n-s-2m} \end{pmatrix} \end{array} \right]. \quad (\text{A.45}) \end{aligned}$$

Поскольку $D_{-s}^{(n)} = D_s^{(n)*}$, достаточно рассмотреть индексы $s \geq 0$. Отбрасывая явно присутствующие C_n с неположительными индексами, получим:

$$\begin{aligned}
D_{s, s \neq n, s \geq 0}^{(n)} = & i\omega_s \frac{n}{4\pi(\omega_n^2 - \omega_s^2)} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\beta - \frac{n^2 - s^2}{2m(s+m)} \right) \begin{pmatrix} S_{n+s} \\ +S_{n-s} \\ -S_{n+s+2m} \\ -S_{n-s-2m} \end{pmatrix} C_m^* C_{s+m} \right. \\
& + \left. \sum_{m=1}^{s-1} \left(\beta + \frac{n^2 - s^2}{2m(s-m)} \right) \begin{pmatrix} S_{n+s} \\ +S_{n-s} \\ -S_{n+s-2m} \\ -S_{n-s+2m} \end{pmatrix} C_m C_{s-m} + \right. \\
& \left. + \sum_{m=s+1}^{\infty} \left(\beta + \frac{n^2 - s^2}{2m(s-m)} \right) \begin{pmatrix} S_{n+s} \\ +S_{n-s} \\ -S_{n+s-2m} \\ -S_{n-s+2m} \end{pmatrix} C_m C_{-s+m} \right\} . \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

Переобозначим в последней сумме индексы и объединим получившееся значение с первым (суммы оказались равными, поэтому происходит удвоение):

$$\begin{aligned}
D_{s>0, s \neq n}^{(n)} = & i \frac{ns}{4c_0 a} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{n^2 - s^2} - \frac{1}{2m(s+m)} \right) (S_{n+s} + S_{n-s} - S_{n+s+2m} - S_{n-s-2m}) C_m^* C_{s+m} \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{s-1} \left(\frac{\beta}{n^2 - s^2} + \frac{1}{2m(s-m)} \right) (S_{n+s} + S_{n-s} - S_{n+s-2m} - S_{n-s+2m}) C_m C_{s-m} \right\} . \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

В рамках второго приближения тогда получается следующий алгоритм расчета: сначала решается система уравнений относительно C_n и, исходя из найденных C_n , рассчитываются $D_{s>0, s \neq n}^{(n)}$. Учитывая, что $D_n^{(n)} = C_n$, получим искомое решение:

$$\Phi_n = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} D_s^{(n)} e^{-i\omega_s t} + \text{c.c.} \quad (\text{A.48})$$

Публикации автора по теме диссертации

в рецензируемых научных изданиях, удовлетворяющих Положению о присуждении ученых степеней в МГУ

А1. Анненкова Е.А., Цысарь С.А., Сапожников О.А. *Построение ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей* // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62, № 2. С. 167–177.

А2. Анненкова Е.А., Крайдер У., Сапожников О.А. *Нелинейная динамика парогазового пузыря в перегретой области малого размера* // *Известия РАН. Серия физическая.* 2017. Т. 81, № 1. С. 85–88.

А3. Сапожников О.А., Анненкова Е.А. *Нелинейные сферические стоячие волны в акустически возбужденной жидкой капле* // *Акуст. журн.* 2016. Т. 64, № 3. С. 308–317.

в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК РФ

А4. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Саймон Д., Крайдер У. *Нелинейная эволюция сферической стоячей волны в акустически возбужденной жидкой капле* // *Ученые записки физического факультета Московского Университета.* 2017. № 5. С. 1750902-1–1750902-4.

в трудах конференций

А5. Анненкова Е.А., Сапожников О.А. *Построение ультразвукового изображения пузырьков миллиметрового размера в биоткани на основе решения задачи рассеяния акустических импульсов на сферической полости в жидкости* // *Сборник трудов XXV сессии РАО и сессии Научного совета РАН по акустике.* Т.1. С. 238–241.

А6. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Цысарь С.А. *Построение ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей* // *Сборник трудов XXVII сессии РАО, 16-18 апреля 2014, Санкт-Петербург.* с. на CD.

А7. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Цысарь С.А. *Модель пузырька газа миллиметрового размера в биоткани и особенности построения ультразвукового изображения* // *Труды I Всероссийской акуст. конф-ии, 6-10 октября 2014, Москва, РАН.* С. 31–37.

А8. Анненкова Е.А., Крайдер У., Сапожников О.А. *Нелинейная динамика парогазового пузыря в перегретой области малого размера* // *Сборник трудов XV Всероссийской школы-семинара “Волны-2016”, секция «Акустика неоднородных сред»,* С. 32–34.

А9. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Саймон Д., Крайдер У. *Акустическая нелинейность как механизм взрывов жидких капель в акустических фонтанах* // *Сборник трудов II Всероссийской акуст. конф-ии и XXX сессии РАО, 6-9 июня 2017, Нижний Новгород.* С. 392–399.

А10. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Цысарь С.А. *Теоретические и экспериментальные исследования модели пузырька газа – мягкого сферического рассеивателя* // *Сборник тезисов XXI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2014», Секция «Физика», Москва.* С. 197–199.

- A11. Анненкова Е.А., Сапожников О.А., Саймон Д., Крайдер У. *Акустическая нелинейность как механизм взрывов жидких капель в акустических фонтанах* // Программа и аннотации докладов 2-й Всероссийской акуст. конф-ии и 30-й сессии Российского акуст. общ-ва (6 – 9 июня 2017 г., Нижний Новгород). С. 56.
- A12. Annenkova E.A., Kreider W., Simon J.C., Sapozhnikov O.A. *Acoustic nonlinearity as a mechanism for liquid drop explosions in drop-chain fountains generated by a focused ultrasound beam* // 2016 IEEE International Ultrasonics Symposium Proceedings (September 18 – 21, 2016, Tours, France). Pp. 1–3.
- A13. Annenkova E.A., Sapozhnikov O.A. *Ultrasound image formation of millimeter-sized bubbles in biological tissue based on the solution of scattering problem of acoustic pulses on the spherical cavity in the liquid* // Proceedings of the XXV Session of the RAS and Session of the Scientific Council on Acoustics of the Russian Academy of Sciences (Taganrog, September 17-20, 2012). Pp. 160–163.
- A14. Annenkova E., Kreider W., Sapozhnikov O. *Nonlinear dynamics of a vapor bubble expanding in a superheated region of a finite size* // Book of Abstracts of 20th International Symposium on Nonlinear Acoustics and 2nd International Sonic Boom Forum, Lyon, 2015. P. 101.
- A15. Sapozhnikov O., Kreider W., Annenkova E., Simon J. *Acoustic nonlinearity and the generation of large tensile pressures to explain atomization in drop-chain acoustic fountains* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. Vol. 141, № 5. P. 3506.

Литература

1. Хилл К., Бэмбер Дж., тер Хаар Г. Ультразвук в медицине. Физические основы применения. Москва: М.: Физматлит, 2008. 544 с.
2. Руденко О.В., Сапожников О.А., Хохлова В.А. *Нелинейная акустика в медицине // Медицинская физика*. 2001. Т. 11. С. 31–32.
3. Руденко О.В. *Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // Успехи физических наук*. 2007. Т. 177, № 4. С. 374–383.
4. Crum L., Hynynen K. *Sound therapy // Physics world*. 1996. Vol. 9, no. 8. Pp. 28–33.
5. ter Haar G. *High intensity focused ultrasound for the treatment of tumors // Echocardiography*. 2001. Vol. 18, no. 4. Pp. 317–322.
6. Khokhlova T., Canney M., Khokhlova V., Sapozhnikov O., Crum L., Bailey M. *Controlled tissue emulsification produced by high intensity focused ultrasound shock waves and millisecond boiling // J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 130. Pp. 3498–3510.
7. Hoff L. *Acoustic characterization of contrast agents for medical ultrasound imaging // Kluwer Academic Publishers*. 2002. P. 230.
8. Crum L., Bailey M., Carter S., Curra K. P., F., Kargl S. *Image-guided acoustic hemostasis // New Acoustics: Selected Topics by C. Ranz-Guerra and J. A. Gallego-Juarez (eds.)*. 2002. Pp. 26–36.
9. Vaezy S., Martin R., Crum L. *High intensity focused ultrasound: a method of hemostasis // Echocardiography*. 2001. Vol. 18, no. 4. Pp. 309–315.
10. Tavakkoli J., Birer A., Arefiev A., Prat F., Chapelon J., Cathingol D. *Piezocomposite shock wave generator with electronic focusing capability: Application for producing cavitation-induced lesions in rabbit liver // Ultrasound Med. Biol.* 1997. Vol. 23, no. 1. Pp. 107–115.
11. Parsons J., Cain C., Abrams G., Fowlkes J. *Pulsed cavitation ultrasound therapy for controlled tissue homogenization // Ultrasound Med. Biol.* 2006. Vol. 32, no. 1. Pp. 115–129.
12. Roberts W., Hall T., Ives K., Wolf J., Fowlkes J., Cain C. *Pulsed cavitation ultrasound: A noninvasive technology for controlled tissue ablation (histotripsy) in the rabbit kidney // J. Urol.* 2006. Vol. 175, no. 2. Pp. 734–738.
13. Hall T., Hempel C., Wojno K., Xu Z., Cain C., Roberts W. *Histotripsy of the prostate: dose effects in a chronic canine model // Urology*. 2009. Vol. 74, no. 4. Pp. 932–937.
14. Xu Z., Hall T., Fowlkes J., Cain C. *Effects of acoustic parameters on bubble cloud dynamics in ultrasound tissue erosion (histotripsy) // J. Acoust. Soc. Am.* 2007. Vol. 122, no. 1. Pp. 229–236.
15. Maxwell A., Sapozhnikov O., Bailey M., Crum L., Xu Z., Fowlkes B., Cain C., Khokhlova V. *Disintegration of tissue using HIFU // Acoustics Today*. 2012. Vol. 8, no. 4. Pp. 24–37.
16. Крылов В.В. Основы теории излучения и рассеяния звука. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 118 с.
17. Лепендин Л.Ф. Акустика: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1978. 448 с.

18. Hickling R. Acoustic radiation and reflection from spheres. Pasadena, California: California Institute of Technology, 1962.
19. Красильников В.А. Введение в акустику: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1992. 152 с.
20. Бартенев О.В. Современный Фортран. 3-е изд., доп. и перераб. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. 449 с.
21. Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing. QA297.N866, 1992.
22. Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. Numerical recipes in Fortran 90: the art of scientific computing. Foreword by Michael Metcalf. QA76.73.F25N85, 1996.
23. Чухланов В.Ю., Панов Ю.Т., Синявин А.В., Ермолаева Е.В. Газонаполненные пластмассы. Учебное пособие. Владимир: Издательство Владимирского государственного университета, 2007. 152 с.
24. Павлов В.А. Пенополистирол. М., «Химия», 1973. 240 с.
25. Кержковская Е.М. Свойства и применение пенопласта. Санкт-Петербург: ЛДНТП, 1960. 24 с.
26. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Каргл С.Г., Крам Л.А. *Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань (обзор)* // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49, № 4. С. 437–464.
27. Smith N., Hynynen K. *The feasibility of using focused ultrasound for transmyocardial revascularization* // *Ultrasound Med. Biol.* 1998. Vol. 24, no. 7. Pp. 1045–1054.
28. Xu Z., Ludomirsky A., Eun L., Hall T., Tran B., Fowlkes J., Cain C. *Controlled ultrasound tissue erosion* // *IEEE Trans. Ultrasound Ferroelect. Freq. Control.* 2004. Vol. 51. Pp. 726–736.
29. Xu Z., Fowlkes J. B., Rothman E. D., Levin A. M., Cain C. A. *Controlled ultrasound tissue erosion: The role of dynamic interaction between insonation and microbubble activity* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. Vol. 117, no. 1. Pp. 424–435.
30. Canney M., Khokhlova V., Hwang J., Khokhlova T., Bailey M., Crum L. *Tissue erosion using shock wave heating and millisecond boiling in high intensity ultrasound field* // Proc. 9th International Symposium on Therapeutic Ultrasound. 2009. Pp. 36–39.
31. Canney M., Khokhlova V., Bessonova O., Bailey M., Crum L. *Shock-induced heating and millisecond boiling in gels and tissue due to high intensity focused ultrasound* // *Ultrasound Med. Biol.* 2010. Vol. 36. Pp. 250–267.
32. Xu Z., Owens G., Gordon D., Cain C., Ludomirsky A. *Effects of acoustic parameters on bubble cloud dynamics in ultrasound tissue erosion (histotripsy)* // *Circulation.* 2011. Vol. 121. Pp. 742–749.
33. Khokhlova T. D., Simon J. C., Wang Y., Khokhlova V. A., Paun M., Starr F. L., Kaczkowski P. J., Crum L. A., Hwang J. H., Bailey M. R. *In vivo tissue emulsification using millisecond boiling induced by high intensity focused ultrasound.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 129, no. 4. Pp. 2477–2477.
34. Leighton T. The Acoustic Bubble. Academic Press, 1994. 613 pp.
35. Temperley H. *The behaviour of water under hydrostatic tension* // *Proc. Phys. Soc.* 1947. Pp. 199–208.

36. Fisher J. *The fracture of liquids* // *J. Appl. Phys.* 1948. Vol. 19. Pp. 1062–1067.
37. Fowlkes J. B., Crum L. A. *Cavitation threshold measurements for microsecond length pulses of ultrasound* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 83, no. 6. Pp. 2190–2201.
38. Coleman A., Kodama T., Choi M., Adams T., Sainders J. *The cavitation threshold of human tissue exposed to 0.2-MHz pulsed ultrasound: Preliminary measurements based on a study of clinical lithotripsy* // *Ultrasound Med. Biol.* 1995. Vol. 21. Pp. 405–417.
39. Apfel R., Holland C. *Gauging the likelihood of cavitation from short-pulse, low-duty cycle diagnostic ultrasound* // *Ultrasound Med. Biol.* 1991. Vol. 17. Pp. 179–185.
40. Harvey E., Barnes D., McElroy W., Whiteley A., Pease D., Cooper K. *Bubble formation in animals. I. Physical factors* // *J. Cell. Comp. Physiol.* 1944. Vol. 24. Pp. 1–22.
41. Yount D. E. *Skins of varying permeability: A stabilization mechanism for gas cavitation nuclei* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1979. Vol. 65, no. 6. Pp. 1429–1439.
42. Maxwell A. D., Wang T.-Y., Cain C. A., Fowlkes J. B., Sapozhnikov O. A., Bailey M. R., Xu Z. *Cavitation clouds created by shock scattering from bubbles during histotripsy* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 130, no. 4. Pp. 1888–1898.
43. Sapozhnikov O. A., Khokhlova V. A., Bailey M. R. *Ultrasonic atomization on the tissue-bubble interface as a possible mechanism of tissue erosion in histotripsy.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 129, no. 4. Pp. 2478–2478.
44. Simon J. C., Sapozhnikov O. A., Khokhlova V. A., Khokhlova T. D., Bailey M. R., Crum L. A. *Miniature acoustic fountain mechanism for tissue emulsification during millisecond boiling in high intensity focused ultrasound fields.* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 129, no. 4. Pp. 2478–2478.
45. Wood R., Loomis A. *Physical and biological effects of high frequency sound-waves of great intensity* // *Phil. Mag.* 1927. Vol. 4. Pp. 417–436.
46. Розенберг Л.Д. *Физика и техника мощного ультразвука, Том 2.* М.: Издательство «Наука», 1968.
47. Simon J., Sapozhnikov O., Khokhlova V., Wang Y., Crum L., Bailey M. *Ultrasonic atomization of tissue and its role in tissue fractionation by high intensity focused ultrasound* // *Phys. Med. Biol.* 2012. Vol. 57. Pp. 8061–8078.
48. ГОСТ 15588-86 от 1986-07-01. *Плиты пенополистирольные. Технические условия.* <http://www.vashdom.ru/gost/15588-86/>.
49. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. *Неразрушающий контроль: Справочник, в 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева, т.3: Ультразвуковой контроль.* М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
50. Rinde J. *Poisson's ratio for rigid plastic foams* // *Journal of Applied Polymer Science.* 1970. Vol. 14, no. 8. Pp. 1913–1926.
51. Yoshihara H., Ataka N., Maruta M. *Measurement of the Young's modulus and shear modulus of extruded polystyrene foam by the longitudinal and flexural vibration methods* // *Journal of Cellular Plastics.* 2018. Vol. 54, no. 2. Pp. 199–216.
52. Selfridge A. *Approximate material properties in isotropic materials* // *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics.* 1985. Vol. SU-32, no. 3. Pp. 381–394.
53. Brandrup J., Immergut E., Grulke E. *Physical constants of polystyrene"and "physical constants of poly(methyl methacrylate) and "solubility parameter values" in poly-*

- mer handbook, 2nd Ed. New York: NY: John Wiley, 1975.
54. Goodman R., Stern R. *Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. Vol. 34, no. 3. Pp. 338–344.
 55. Hickling R. *Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1964. Vol. 36, no. 6. Pp. 1124–1137.
 56. Jensen J. *A program for simulating ultrasound systems* // *Medical and Biological Engineering and Computing.* 1996. Vol. 34, no. 1. Pp. 351–353.
 57. Jensen J., Svendsen N. *Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers* // *IEEE Trans. Ultrasound Ferroelect. Freq. Control.* 1992. Vol. 39, no. 2. Pp. 262–267.
 58. Jensen J. A. *A model for the propagation and scattering of ultrasound in tissue* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. Vol. 89, no. 1. Pp. 182–190.
 59. Tupholme G. *Generation of acoustic pulses by baffled plane pistons* // *Mathematika.* 1969. Vol. 16. Pp. 209–224.
 60. Stepanishen P. R. *Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1971. Vol. 49, no. 5B. Pp. 1629–1638.
 61. Jensen J., Svendsen N. *Linear description of ultrasound imaging systems* // DK-2800 Lyngby, Denmark. 1999.
 62. Jensen J., Nikolov S., Gammelmark K., Pedersen M. *Synthetic aperture ultrasound imaging* // *Ultrasonics.* 2006. Vol. 44. Pp. e5–e15.
 63. Анненкова Е.А., Сапожников О.А. *Построение ультразвукового изображения пузырьков миллиметрового размера в биоткани на основе решения задачи рассеяния акустических импульсов на сферической полости в жидкости* // Сборник трудов XIII Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах". 2012. С. 3–6.
 64. Анненкова Е.А., Сапожников О.А. *Построение ультразвукового изображения пузырьков миллиметрового размера в биоткани на основе решения задачи рассеяния акустических импульсов на сферической полости в жидкости* // Сборник трудов Научной конференции "Сессия Научного совета РАН по акустике и XXV сессия Российского акустического общества". Т. I., - М.: ГЕОС. 2012. С. 238–241.
 65. Аладьев И.Т. *Вопросы физики кипения.* М.: Мир, 1964. 444 с.
 66. Dergarabedian P. *The rate of growth of vapor bubbles in superheated waters* // *J. Appl. Mech.* 1953. Vol. 20, no. 4. Pp. 537–545.
 67. Plesset M., Zwick S. *A nonsteady heat diffusion problem with spherical symmetry* // *J. Appl. Phys.* 1952. Vol. 23, no. 1. Pp. 95–98.
 68. Plesset M. S. *On the stability of fluid flows with spherical symmetry* // *J. Appl. Phys.* 1954. Vol. 25, no. 1. Pp. 96–98.
 69. Plesset M., Zwick S. *The growth of vapor bubbles in superheated liquids* // *J. Appl. Phys.* 1954. Vol. 25, no. 4. Pp. 493–500.
 70. Kreider W. *Gas-vapor bubble dynamics in therapeutic ultrasound: Ph. D. thesis* / University of Washington. 2008.
 71. Gilmore F. *The Growth or Collapse of a Spherical Bubble in a Viscous Compressible Liquid* // California Institute of Technology, Hydrodynamics Laboratory Report

26-4. 1952.

72. Kreider W., Crum L., Bailey M., Sapozhnikov O. *A reduced-order, single-bubble cavitation model with applications to therapeutic ultrasound* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 130, no. 5. Pp. 3511–3530.
73. Kreider W., Crum L. A., Bailey M. R., Sapozhnikov O. A. *Observations of the collapses and rebounds of millimeter-sized lithotripsy bubbles* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 130, no. 5. Pp. 3531–3540.
74. Rayleigh. *On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity* // *Phil. Mag.* 1917. Vol. 6. P. 94.
75. Lacour T., Guedra M., Valier-Brasier T., Coulouvrat F. *A model for acoustic vaporization dynamics of a bubble/droplet system encapsulated within a hyperelastic shell* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. Vol. 143, no. 1. Pp. 23–37.
76. Vokurka K. *On Rayleigh's model of a freely oscillating bubble* // *Czech. J. Phys.* 1985. Vol. 35. Pp. 110–120.
77. Руденко О.В. *Нелинейные взаимодействия регулярных и шумовых спектров при формировании интенсивного излучения поршнем в линейной среде* // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44, № 6. С. 786–791.
78. Руденко О.В. *Нелинейные колебания линейно деформируемой среды в закрытом резонаторе, возбуждаемые конечными смещениями его границы* // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45, № 3. С. 397–403.
79. Руденко О.В., Шанин А.В. *Нелинейные явления при установлении колебаний слоя линейной диссипативной среды, возбуждаемых конечными смещениями его границы* // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46, № 3. С. 392–400.
80. Betchov R. *Nonlinear oscillations of a column of gas* // *Physics of Fluids.* 1958. Vol. 1, no. 3. Pp. 205–212.
81. Горьков А.П. *Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе* // *Инженерный журнал.* 1963. Т. 3, № 2. С. 246–250.
82. Chester W. *Resonant oscillations in closed tubes* // *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 18, no. 1. Pp. 44–64.
83. Островский Л.А. *О разрывных колебаниях в акустическом резонаторе* // *Акуст. журн.* 1974. Т. 20, № 1. С. 140–142.
84. Канер В.В., Руденко О.В., Хохлов Р.В. *К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах* // *Акуст. журн.* 1977. Т. 23, № 5. С. 756–765.
85. Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О. *Нелинейные стоячие волны в слое, возбуждаемые периодическим движением его границы* // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47, № 4. С. 525–533.
86. Rudenko O.V. *Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems* // *Acoust. Phys.* 2009. Vol. 55, no. 1. Pp. 27–54.
87. Bednarik M., Cervenka M. *Equations for description of nonlinear standing waves in constant-cross-sectioned resonators* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. Vol. 135, no. 3. Pp. EL134–EL139.
88. Ткаченко Л.А., Фадеев С.А. *Генерация высших гармоник при резонансных колебаниях в трубе с открытым концом* // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63, № 1. С. 9–16.

89. Ilinskii Y. A., Lipkens B., Lucas T. S., Doren T. W. V., Zabolotskaya E. A. *Nonlinear standing waves in an acoustical resonator* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104, no. 5. Pp. 2664–2674.
90. Hamilton M. F., Ilinskii Y. A., Zabolotskaya E. A. *Linear and nonlinear frequency shifts in acoustical resonators with varying cross sections* // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. Vol. 110, no. 1. Pp. 109–119.
91. Mortell M., Seymour B. *Nonlinear resonant oscillations in closed tubes of variable cross-section* // *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 519. Pp. 183–199.
92. Kurihara E., Yano T. *Nonlinear analysis of periodic modulation in resonances of cylindrical and spherical acoustic standing waves* // *Physics of Fluids*. 2006. Vol. 18. Pp. 117107–1–117107–11.
93. Seymour B., Mortell M., Amundsen D. *Resonant oscillations of an inhomogeneous gas between concentric spheres* // *Proc. Royal Soc. London A.* 2011. Vol. 467. Pp. 2149–2167.
94. Chester W. *Acoustic resonance in spherically symmetric waves* // *Proc. Royal Soc. London A.* 1991. Vol. 434. Pp. 459–463.
95. Сорокин В.И. *Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости* // *Акуст. журн.* 1957. Т. 3, № 3. С. 262–273.
96. Lang R.J. *Ultrasonic atomization of liquids* // *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. Vol. 34. Pp. 6–8.
97. Экнадиосянц О.К. *О кинетике ультразвукового туманообразования* // *Акуст. журн.* 1963. Т. 9, № 2. С. 247–248.
98. Экнадиосянц О.К. *О распылении жидкости низкочастотными акустическими колебаниями* // *Акуст. журн.* 1966. Т. 12, № 1. С. 127–132.
99. Экнадиосянц О.К., Ильин Б.И. *К вопросу о природе распыления жидкостей в ультразвуковом фонтане* // *Акуст. журн.* 1966. Т. 12, № 3. С. 310–318.
100. Экнадиосянц О.К. *О роли кавитации в процессе распыления жидкостей в ультразвуковом фонтане* // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14, № 1. С. 107–122.
101. Богуславский Ю.Я., Экнадиосянц О.К. *О физическом механизме распыления жидкости акустическими колебаниями* // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15, № 1. С. 17–32.
102. Розенберг Л.Д. *Физика и техника мощного ультразвука, Том 3.* М.: Издательство «Наука», 1970. С. 337–395.
103. Шалунов А.В. *Исследования процесса и разработка аппаратов ультразвукового диспергирования жидкостей: Кандидатская диссертация* / Бийск. 2006.
104. Конопацкая И. И., Миронов М. А., Пятаков П. А., Фатеев В. О. *Измерение производительности акустического фонтана* // *Техническая акустика.* 2016. Т. 4. С. 1–12.
105. Богуславский Ю.Я., Экнадиосянц О.К. *О физическом механизме распыления жидкости акустическими колебаниями* // *Акуст. журн.* 1969. Т. 15, № 1. С. 17–24.
106. Tomita Y. *Jet atomization and cavitation induced by interactions between focused ultrasound and a water surface* // *Physics of Fluids.* 2014. Vol. 26. Pp. 097105–1–097105–11.

107. Simon J., Sapozhnikov O., Khokhlova V., Crum L., Bailey M. *Ultrasonic atomization of liquids in drop-chain acoustic fountains* // *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 766. Pp. 129–146.
108. Кузнецов В.П. *Уравнения нелинейной акустики* // *Акуст. журн.* 1970. Т. 26, № 4. С. 548–553.
109. Jordan P. *An analytical study of Kuznetsov's equation: diffusive solutions, shock formation, and solution bifurcation* // *Physics Letters A.* 2004. Vol. 326, no. 1–2. Pp. 77–84.
110. Hamilton M., Blackstock D. *Nonlinear Acoustics.* Academic Press, AIP, 2008. 455 pp.
111. Briggs L. *Limiting negative pressure of water* // *J. Appl. Phys.* 1950. Vol. 21. Pp. 721–722.
112. Maxwell A., Cain C., Hall T., Fowlkes J., Xu Z. *Probability of cavitation for single ultrasound pulses applied to tissues and tissue-mimicking materials* // *Ultrasound Med. Biol.* 2013. Vol. 39, no. 3. Pp. 449–465.
113. Riabouchinsky D. *Sur quelques problemes generaux relatifs au mouvement et a la resistance des fluides: Theorie cavitationnelle de la resistance des fluides* // *Proc. Int. Congress Appl. Mech., Stockholm.* 1930. Vol. 1. Pp. 137–148.
114. Birkhoff G. *Stability of spherical bubbles* // *Quarterly of Applied Mathematics.* 1956. Vol. 13. Pp. 451–453.
115. Penney W., Price A. *Pressure–time curves for underwater explosions* // *Underwater Explosion Research.* 1942. Vol. 1. Pp. 289–299.
116. Taylor G. *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes* // *Proc. Royal Soc. London A.* 1950. Vol. 201. Pp. 192–196.
117. Prosperetti A. *Viscous effects on perturbed spherical flows* // *Quarterly of Applied Mathematics.* 1977. Vol. 34. Pp. 339–352.
118. Faraday M. *On a peculiar class of Acoustical Figures; and on certain Forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic Surfaces* // *Philos. Trans. Royal Soc. London.* 1831. Vol. 121. Pp. 299–340.
119. Longuet-Higgins M. *Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations. Part 2. An initial-value problem* // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 201. Pp. 543–565.
120. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика, т. VI Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 736 с.
121. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* М.: Наука, 1979. 832 с.
122. Власов В.К., Глухова М.Н., Королев Л.Н. *О вычислении функций Маттье* // *Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика.* 1992. № 1. С. 65–69.
123. Березман А.М., Керимов М.К., Скороходов С.Л., Шадрин Р.А. *О вычислении собственных значений уравнения Маттье с комплексным параметром* // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1986. Т. 26, № 9. С. 1350–1361.
124. Kokkorakis J., G.C. Roumeliotis. *Power series expansions for Mathieu functions with small arguments* // *Math. Comput.* 2000. Vol. 70, no. 235. Pp. 1221–1235.
125. Frenkel D., Portugal T. *Algebraic methods to compute Mathieu functions* // *Laboratorio Nacional de Computacao Cientifica.* 2002. Pp. 1–14.

126. Gutierrez V. *Theory and numerical analysis of the Mathieu functions* // Monterrey, NL, Mexico. 2003.
127. Leeb W. *Characteristic values of Mathieu's differential equation* // *ACM Trans. Math. Software*. 1979. Vol. 5, no. 1. Pp. 112–117.
128. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики: Учебное пособие*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
129. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. 408 с.