

Отчет (промежуточный) по ГРАНТУ РФФИ 15-01-00026 _a

November 29, 2015

" Аппроксимация дифференциальных уравнений дробного порядка и проинтегрированных полугрупп "

Наши превосходно выполненные по данной тематике предыдущие проекты РФФИ-NSFC 07-01-92104 ГФЕН_a (2008 - 2009) "Дробные эволюционные уравнения в функциональных пространствах" и РФФИ 12-01-90401-Укр_a (2012 - 2013) "Современная теория эволюционных задач: дробные уравнения, проинтегрированные полугруппы, численный анализ, спектральная теория" вдохновили нас на развитие более интенсивных исследований в различных аспектах этой тематики.

Кроме того, наше сотрудничество по данной тематике с Китаем вышло на новый уровень [1], [2], [3] и в 2014 в МГУ был принят на годичную стажировку аспирант из Китая по тематике аппроксимации дробных уравнений [4].

В последние годы огромный интерес к дробному исчислению и теории проинтегрированных полугрупп стимулировался приложениями, в которых эти объекты встречаются в самых различных областях физики и техники [7, 8, 10], включая диффузионные модели в хаотичных средах с фрактальной природой.

Отметим также, что в нашей стране в 2015 году проводится Международная Российско-Китайская конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и физики" <http://rcc.niipma.ru/>

1 Основные результаты за 2015 год

Напомним, что целью проекта является разработка приближенных методов и алгоритмов, ориентированных на аппроксимацию эволюционных задач для уравнений с дробными производными и уравнений, когда порождается проинтегрированное семейство операторов.

Хорошо известно, что абстрактная задача Коши в банаховом пространстве E

$$\zeta'(t) = A\zeta(t), t \geq 0, \zeta(0) = \zeta^0,$$

является корректно поставленной [13] тогда и только тогда, когда оператор A порождает в банаховом пространстве E C_0 -полугруппу $\exp(\cdot A)$, а задача Коши для уравнения второго порядка

$$\xi''(t) = A\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = \xi^0, \xi'(0) = \xi^1,$$

является корректно-поставленной [11, 14] тогда и только тогда, когда оператор A порождает C_0 -косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$. Обобщенные решения этих проблем даются по формулам

$$\zeta(t) = \exp(tA)\zeta^0, \quad \xi(t) = C(t, A)\xi^0 + S(t, A)\xi^1,$$

где $S(t, A) = \int_0^t C(s, A)ds$. Если $\zeta^0 \in D(A)$ или $\xi^0 \in D(A), \xi^1 \in E^1$, то соответствующие решения дифференцируемы подходящее число раз и дают классические решения исходных задач. Здесь E^1 – пространство Кызынского. При этом выполняются следующие соотношения:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA) dt,$$

$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A) dt, \quad (\lambda^2 I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t, A) dt.$$

Наряду с этим можно рассмотреть абстрактную задачу Коши в банаховом пространстве E

$$D^\alpha w(t) = Aw(t), \quad t \geq 0, \quad w(0) = w^0, \quad \text{если } 0 < \alpha < 1, \quad (1.1)$$

или с дополнительным условием $w'(0) = w^1$, если $1 < \alpha < 2$, а дробная производная D^α понимается в смысле Сарито. Тогда, обозначая разрешающее семейство задачи (1.1) через $\Psi_\alpha(\cdot)$, имеем

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_\alpha(t) dt.$$

с $0 < \alpha < 2$. Когда $\alpha = 1$, то разрешающее семейство задачи (1.1) является C_0 -полугруппой, а когда $\alpha = 2$, то разрешающее семейство задачи (1.1) является C_0 -косинус оператор-функцией. Таким образом, изучение разрешающих семейств $\Psi_\alpha(\cdot)$ существенно расширяет возможности исследования C_0 -полугруппы и C_0 -косинус оператор-функций.

В работе [6] мы продолжаем наши исследования [4] по дискретизации задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка в банаховом пространстве.

Пусть $\alpha > 0$ и $m = \lceil \alpha \rceil$. Обозначим через $S_\alpha(t, A)$, $t > 0$, разрешающий оператор $x \mapsto u(t)$ (называемый также α -дробной полугруппой) равномерно корректно поставленной задачи Коши

$$(D_t^\alpha u)(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \quad u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (1.2)$$

в банаховом пространстве E , где D_t^α – производная по Капуто. Задача (1.2) называется корректно поставленной [36], если для любого $x \in D(A)$ существует единственное решение $u(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^{m-1}(\mathbb{R}_+, E)$ задачи (1.2) такое, что $g_{m-\alpha} * (u - x) \in C^m(\mathbb{R}_+, E)$ и для любых начальных данных $x^n \in D(A)$, $x^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ следует $u(t, x^n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в E равномерно на компактных интервалах.

Полудискретная аппроксимация на общей дискретизационной схеме задачи (1.2) определяется задачами Коши в банаховых пространствах E_n

$$(D_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t), \quad t > 0, \quad u_n(0) = x_n, \quad u_n^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (1.3)$$

Общая аппроксимационная схема может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E – банаховы пространства, а $\{p_n\}$ – последовательность линейных ограниченных операторов: $p_n : E \rightarrow E_n$, $p_n \in B(E, E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, со свойством $\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $x \in E$.

Определение 1.1. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$ -сходящейся к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; это записывается как $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 1.2. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}\mathcal{P}$ -сходящейся к ограниченному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, имеем $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. Это записывается в виде $B_n \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} B$.

Напомним теорему Троттера-Като:

Теорема 1.1. [35] (*ABC*) Пусть $A \in \mathfrak{C}(E)$, $A_n \in \mathfrak{C}(E_n)$ и они порождают C_0 -полугруппы. Следующие условия (A) и (B) эквивалентны условию (C).

(A) *Согласованность.* Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$ такое, что резольвенты сходятся $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} (\lambda I - A)^{-1}$;

(B) *Устойчивость.* Существуют константы $M \geq 1$ и ω , не зависящие от n и такие, что $\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(\omega t)$ при $t \geq 0$ и любых $n \in \mathbb{N}$;

(C) *Сходимость.* Для любого конечного числа $T > 0$ имеем $\max_{t \in [0, T]} \|\exp(tA_n)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ при любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.

Замечание 1.1. Для аналитических C_0 -полугрупп имеют место следующие изменения в формулировке Теоремы 1.1:

(B₁) *Устойчивость.* Существуют константы $M_1 \geq 1$ и $\omega_1 \in \mathbb{R}$, не зависящие от n , и такие, что

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leq \frac{M_1}{|\lambda - \omega_1|}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega_1, n \in \mathbb{N};$$

(C₁) *Сходимость.* Для некоторого конечного числа $\mu > 0$ и некоторого $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\max_{\eta \in \Sigma(\theta, \mu)} \|e^{\eta A_n} u_n^0 - p_n e^{\eta A} u^0\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ как только } u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0.$$

Мы изучим здесь разностные схемы для аппроксимации задачи (1.3) с $0 < \alpha < 1$. Обозначим $t_k = k\tau_n$ и рассмотрим аппроксимацию дробной производной для гладких функций $\theta_n(\cdot) \in C^2([0, T]; E_n)$,

$$(\mathbf{D}_t^\alpha \theta_n)(t_k) \equiv \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{t_k} \frac{\theta'_n(t_k - \xi)}{\xi^\alpha} d\xi,$$

и для сеточной функции $\Theta_n(\cdot)$ конечно-разностной схемой

$$\Delta_{t_k}^\alpha \Theta_n(\cdot) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) \frac{\Theta_n(t_{k-j}) - \Theta_n(t_{k-j-1})}{\tau_n}. \quad (1.4)$$

Проаппроксимируем задачу (1.3) неявной схемой

$$\Delta_{t_k}^\alpha \overline{U}_n(\cdot) = A_n \overline{U}_n(t_k), \quad \overline{U}_n(0) = x_n, \quad (1.5)$$

а также явной схемой

$$\Delta_{t_k}^\alpha U_n(\cdot) = A_n U_n(t_{k-1}), \quad U_n(0) = x_n. \quad (1.6)$$

В случае явной схемы (1.6) мы считаем, что операторы A_n ограничены, хотя $\|A_n\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В статье [6] установлены следующие результаты.

Предложение 1.1. Для неявной разностной схемы (1.5), т.е. для схемы

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} b_j \frac{\overline{U}_n((k-j)\tau_n) - \overline{U}_n((k-j-1)\tau_n)}{\tau_n^\alpha} = A_n \overline{U}_n(k\tau_n), \quad (1.7)$$

мы имеем

$$\overline{U}_n(k\tau_n) = \sum_{j=1}^k c_j^{(k)} R^j x_n \text{ для любого } k \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

где $R = (I_n - \Gamma(2 - \alpha)\tau_n^\alpha A_n)^{-1}$, $\overline{U}_n(0) = x_n$ и $c_1^{(k)} = b_{k-1}$, $c_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-j+1} (b_{i-1} - b_i) c_{j-1}^{(k-i)}$, $j = 2, \dots, k$. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$, мы имеем $c_j^{(k)} > 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, и $\sum_{j=1}^k c_j^{(k)} = 1$.

Теорема 1.2. Предположим, что C_0 -полугруппы e^{tA_n} удовлетворяют условию (B) и $\omega = 0$. Тогда неявная разностная схема (1.5) устойчива: $\|\overline{U}_n(k\tau_n)\| \leq M\|x_n\|$ для всех $k\tau_n \in [0, T]$.

Для любого $\alpha > 0$ существует такое минимальное число $l \in \mathbb{N}$, что $(l+1)\alpha \geq 2$. Тогда имеем представление $u_n(t) = S_\alpha(t, A_n)x_n := w_n(t) + v_n(t)$, где $w_n(t) = x_n + \frac{t^\alpha A_n x_n}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{l\alpha} A_n^l x_n}{\Gamma(l\alpha+1)}$, $v_n(t) = (g_{(l+1)\alpha} * S_\alpha)(t, A_n)A_n^{l+1}x_n \in C^2([0, T], E_n)$ для гладких $x_n \in D(A_n^{l+1})$, и $v_n''(t) = (g_{(l+1)\alpha-2} * S_\alpha)(t, A_n)A_n^{l+1}x_n$. Кроме того, легко видеть, что при $(l+1)\alpha \geq 2$ задача

$$(\mathbf{D}_t^\alpha v_n)(t) = A_n v_n(t) + f_n(t), t > 0, v_n(0) = 0, f_n(t) = \frac{t^{l\alpha} A_n^{l+1} x_n}{\Gamma(l\alpha+1)}, \quad (1.9)$$

имеет решение $v_n(\cdot) \in C^2([0, T], E_n)$. Действительно, из $(\mathbf{D}_t^\alpha(u_n - w_n))(t) = A_n(u_n - w_n)(t) + f_n(t)$ и $(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t)$, имеем $f_n(t) = A_n w_n(t) - (\mathbf{D}_t^\alpha w_n)(t)$. Таким образом, $A_n w_n(t) = A_n x_n + \frac{t^\alpha A_n^2 x_n}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{(l-1)\alpha} A_n^{l-1} x_n}{\Gamma((l-1)\alpha+1)} + \frac{t^{l\alpha} A_n^l x_n}{\Gamma(l\alpha+1)}$ и $(\mathbf{D}_t^\alpha w_n)(t) = A_n x_n + \frac{t^\alpha A_n^2 x_n}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{(l-1)\alpha} A_n^{l-1} x_n}{\Gamma((l-1)\alpha+1)}$. Отсюда, $v_n(t)$ удовлетворяет уравнению (1.9).

Для аппроксимации (1.9) мы используем неявную разностную схему

$$\Delta_{k\tau_n}^\alpha \overline{V}_n(\cdot) = A_n \overline{V}_n(k\tau_n) + f_n(k\tau_n), \overline{V}_n(0) = 0. \quad (1.10)$$

Теорема 1.3. Справедливо следующее представление решения (1.10):

$$\overline{V}_n(k\tau_n) = \Gamma(2-\alpha)\tau_n^\alpha \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{k-j+1} d_{i,j}^{(k)} R^i f_n(j\tau_n), \quad (1.11)$$

где $d_{1,j}^{(k)} = 0$, $d_{i,j}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-i-j+2} (b_{l-1} - b_l) d_{i-1,j}^{(k-l)}$, $i = 2, \dots, k-j+1$, $j = 1, \dots, k-1$, $d_{1,k}^{(k)} = 1$. Кроме того, для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $d_{i,j}^{(k)} \geq 0$, $i = 1, \dots, k-j+1$, $j = 1, \dots, k$, и $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{k-j+1} d_{i,j}^{(k)} b_{j-1} = 1$.

Теорема 1.4. Предположим, что C_0 -полугруппы e^{tA_n} удовлетворяют условию (B) с $\omega = 0$. Тогда неявная разностная схема (1.10) устойчива

$$\begin{aligned} \|\overline{V}_n(k\tau_n)\| &\leq M\Gamma(2-\alpha)\tau_n^\alpha b_{k-1}^{-1} \sup_{1 \leq j \leq k} \|f_n(j\tau_n)\| \\ &\leq M\Gamma(1-\alpha)(k\tau_n)^\alpha \sup_{1 \leq j \leq k} \|f_n(j\tau_n)\|. \end{aligned}$$

Обозначим $\overline{z}_n(k\tau_n) = v_n(k\tau_n) - \overline{V}_n(k\tau_n)$.

Теорема 1.5. Пусть выполняется условие (B) с $\omega = 0$, т.е. C_0 -полугруппы e^{tA_n} таковы, что $\|e^{tA_n}\| \leq M$ для любого $t \geq 0$. Тогда для схемы (1.10) имеет место скорость сходимости $\|\overline{z}_n(k\tau_n)\| = O(\tau_n)$.

Теорема 1.6. Пусть $\alpha > \frac{1}{2}$ и выполняется условие (B) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\tau_n^{2\alpha-1} A_n^2\| \leq c$, где c не зависит от n . Тогда $\|U_n(k\tau_n)\| \leq M e^{\frac{c\Gamma^2(2-\alpha)}{(1-b_1)^2} k\tau_n} \|x_n\|$.

Теорема 1.7. Предположим, что аналитические C_0 -полугруппы e^{tA_n} удовлетворяют условию (B₁) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-b_1)} \tau_n^\alpha A_n\| \leq c$, где $c < \frac{1}{M_{1+2}}$. Тогда $\|U_n(k\tau_n)\| \leq M\|x_n\|$ с некоторой константой M .

Рассмотрим следующую явную схему для аппроксимации задачи (1.9)

$$\Delta_{k\tau_n}^\alpha V_n(\cdot) = A_n V_n((k-1)\tau_n) + f_n((k-1)\tau_n), V_n(0) = 0.$$

Теорема 1.8. *Имеет место равенство*

$$V_n(k\tau_n) = \Gamma(2 - \alpha)\tau_n^\alpha \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-j-1} \bar{d}_{i,j}^{(k)} \bar{R}^i f_n(j\tau_n), \quad (1.12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{d}_{0,j}^{(k)} &= \sum_{l=2}^{k-j-1} (b_{l-1} - b_l) \bar{d}_{0,j}^{(k-l)}, \quad j = 1, \dots, k-3, \\ \bar{d}_{i,j}^{(k)} &= (1 - b_1) \bar{d}_{i-1,j}^{(k-1)} + \sum_{l=2}^{k-i-j-1} (b_{l-1} - b_l) \bar{d}_{i,j}^{(k-l)}, \quad i = 1, \dots, k-j-3, j = 1, \dots, k-3, \\ \bar{d}_{i,j}^{(k)} &= (1 - b_1) \bar{d}_{i-1,j}^{(k-1)}, \quad i = k-j-2, k-j-1, j = 1, \dots, k-3; \\ \bar{d}_{0,k-2}^{(k)} &= 0, \quad \bar{d}_{1,k-2}^{(k)} = (1 - b_1) \bar{d}_{0,k-2}^{(k-1)}, \quad \bar{d}_{0,k-1}^{(k)} = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{d}_{i,j}^{(k)} \geq 0, i = 0, \dots, k-j-1, j = 1, \dots, k-1$, и $\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-j-1} \bar{d}_{i,j}^{(k)} b_{j-1} = 1$.

Теорема 1.9. Пусть $\alpha > \frac{1}{2}$ и пусть C_0 -полугруппы e^{tA_n} удовлетворяют условию (B) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\tau_n^{2\alpha-1} A_n^2\| \leq c$. Тогда

$$\|V_n(k\tau_n)\| \leq M\Gamma(1 - \alpha) e^{\frac{c\Gamma^2(2-\alpha)}{(1-b_1)^2} k\tau_n} ((k-1)\tau_n)^\alpha \sup_{1 \leq j \leq k-1} \|f_n(j\tau_n)\|.$$

Обозначим $z_n(k\tau_n) = v_n(k\tau_n) - V_n(k\tau_n)$.

Теорема 1.10. Пусть $\alpha > \frac{1}{2}$ и пусть C_0 -полугруппы e^{tA_n} удовлетворяют условию (B) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\tau_n^{2\alpha-1} A_n^2\| \leq c$. Тогда $\|z_n(k\tau_n)\| = O(\tau_n)$.

Теорема 1.11. Пусть выполняется условие (B_1) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-b_1)} \tau_n^\alpha A_n\| \leq c$, где $c < \frac{1}{M_1+2}$. Тогда

$$\|V_n(k\tau_n)\| \leq \bar{M}\Gamma(1 - \alpha) ((k-1)\tau_n)^\alpha \sup_{1 \leq j \leq k-1} \|f_n(j\tau_n)\|,$$

с некоторой константой $\bar{M}$.

Теорема 1.12. Пусть выполняется условие (B_1) с $\omega = 0$. Предположим, что $\|\frac{\Gamma(2-\alpha)}{(1-b_1)} \tau_n^\alpha A_n\| \leq c$, где $c < \frac{1}{M_1+2}$. Тогда $\|z_n(k\tau_n)\| = O(\tau_n)$.

Замечание 1.2. В условиях Теорем 1.4, 1.9, 1.11 функции $w_n(k\tau_n) + V_n(k\tau_n)$ и $w_n(k\tau_n) + \bar{V}_n(k\tau_n)$ могут рассматриваться как аппроксимации решения $u_n(k\tau_n)$. Аппроксимация значения Ax в случае C_0 -полугрупп и проинтегрированных полугрупп рассматривалась в [3]. Аппроксимация значения оператора A^{l+1} на элементе $x \in D(A^{l+1})$, в случае дробных уравнений будет рассмотрена в следующих работах.

В [5] мы приводим анализ полудискретной аппроксимации задачи Коши

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) &= Au(t) + J^{1-\alpha} f(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1; \\ u(0) &= u^0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

в банаховом пространстве E с оператором A , который порождает аналитическое и компактное разрешающее семейство $\{S_\alpha(t, A)\}_{t \geq 0}$. Полудискретной аппроксимацией задачи (1.13) на общей аппроксимационной схеме являются задачи Коши в банаховых пространствах E_n

$$\begin{aligned} (D_t^\alpha u_n)(t) &= A_n u_n(t) + J^{1-\alpha} f_n(t, u_n(t)), 0 \leq t \leq T, \\ u_n(0) &= u_n^0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

с операторами A_n , порождающими аналитические и компактные разрешающие семейства $S_\alpha(\cdot, A_n)$, а функции $f_n(\cdot, \cdot)$ должны быть достаточно гладки. Доказано, что компактная сходимостъ резольвент влечет сходимость полудискретных аппроксимаций к точному решению. А именно, доказана

Теорема 1.13. Пусть A и A_n порождают аналитические разрешающие семейства $S_\alpha(\cdot, A)$ и $S_\alpha(\cdot, A_n)$ соответственно. Предположим, что выполняются условия (A) и (B'), а компактные резольвенты $R(\lambda^\alpha; A_n)$, $R(\lambda^\alpha; A)$ сходятся компактно, т.е. $R(\lambda^\alpha; A_n) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} R(\lambda^\alpha; A)$ компактно для некоторого $\lambda^\alpha \in \rho(A)$ and $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$. Предположим также, что выполняется следующее:

(i) Функции f_n, f непрерывны по обоим аргументам и существует константа $\bar{M}$, которая не зависит от n , и такая, что

$$\sup_{t \in [0, T], \|x_n\|_{E_n} \leq 1} \|f_n(t, x_n)\|_{E_n} \leq \bar{M};$$

(ii) $f(\cdot, \cdot)$ такова, что существует единственное мягкое решение $u^*(t)$ задачи (1.13) на $[0, T]$ (например: $f(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию (*));

(iii) $f_n(t, x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(t, x)$ равномерно по $t \in [0, T]$ для $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Тогда, для почти всех n задачи (1.14) имеют мягкие решения $u_n^*(t), t \in [0, T]$ в окрестности $p_n u^*(t)$. Каждая последовательность $\{u_n^*(t)\}$ является P -компактной и $u_n^*(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u^*(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

В статье [9] рассматривается возможность доказательства неравенств коэрцитивности для абстрактных дифференциальных гиперболических уравнений второго порядка. Кроме того, показано, что нельзя доказать неравенств коэрцитивности для дискретизированных дифференциальных гиперболических уравнений. Вводится понятие слабой коэрцитивности, которая и установлена для различных задач, обсуждаемых в работе.

В работах [15], [16], [17] описывается поведение итеративно регуляризированных процессов Гаусса-Ньютона в присутствии случайного шума. Используется модель случайного шума предложенная ранее одними из авторов. Получены теоремы о сходимости возмущенных процессов типа Гаусса-Ньютона в среднем квадратическом к точному решению.

В работах [25, 26] исследовано сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа и его дискретного аналога. Определено понятие эквивалентности сингулярного интегрального уравнения и бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Найдены спектры классического оператора Гильберта и интегрального оператора нейтрального типа и их дискретных аналогов. Проведен анализ разрешимости и однозначной разрешимости интегрального уравнения. Однозначная разрешимость дискретных задач установлена с применением беспараметрного метода регуляризации сдвигом. Доказаны теоремы сходимости этих решений к решениям соответствующих задач. Разработаны быстрые алгоритмы решения дискретных уравнений, основанные на методе быстрого преобразования Фурье.

В работах [27, 28] редложен приближенный метод вычисления сингулярных интегралов для случая, когда ядра интегральных операторов в регулярной части уравнения Гильберта нейтрального типа являются тригонометрическими функциями. Предложенный подход обобщен на случай сингулярных интегральных уравнений Гильберта первого и второго рода

с разностными регулярными частями, являющимися произвольными тригонометрическими полиномами. Разработан общий подход к решению и регуляризации их дискретных аналогов.

В гильбертовом пространстве рассмотрена задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной и самосопряженным оператором. Поставлена задача определения параметра в неоднородном члене уравнения по значению решения в фиксированной точке [29]. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

Стандартные явные схемы для параболических уравнений не очень удобны для вычислительной практики поскольку они имеют сильные ограничения на шаг по времени. Такие ограничения не возникают для некоторых явных схем, основанных на явно-неявном расщеплении оператора (асимметричные схемы Саульева, явное переменное направление). Эти схемы абсолютно устойчивы, однако, их свойства аппроксимации хуже, чем обычные неявные схемы. Эти явные схемы рассмотрены в [18]. Здесь предлагается многоуровневую модификацию метода переменных направлений, который демонстрирует лучшие свойства с точки зрения точности. Также рассматриваются явные схемы переменных направлений для численного решения краевых задач системы уравнений. Исследование основано на общей теории устойчивости разностных схем операторов.

Работа [19] имеет дело с проблемой выбора шага по времени для численного решения краевых задач для параболических уравнений. Решение задачи получено, используя полностью неявную схему, тогда как временной шаг получен через явные вычисления. Используя явную схему, вычисляется решение на новом уровне времени. Далее происходит корректировка до получения решения задачи на этом уровне времени с предписанной точностью. Такой алгоритм приводит к явным формулам для вычисления шага по времени.

В [20] рассматривается уравнение для дробной степени эллиптического оператора второго порядка. Оно решается численно, используя задачу для псевдопараболического уравнения с зависимостью от времени. Для этой вспомогательной задачи Коши применяется двуслойная схема. Получены условия устойчивости полностью дискретной схемы. Изучается зависимость точности на сетках по времени и пространству.

Работа [21] тоже имеет дело с проблемой выбора шага по времени для численного решения краевых задач для параболических уравнений. Решение задачи получено, используя полностью неявную схему, тогда как шаг по времени выбран через явные вычисления. Стратегия выбора состоит из следующих двух стадий. В первой стадии мы используем явные вычисления для выбора подходящего шага по времени. На второй стадии, используя неявную схему, мы вычисляем решение на новом уровне по времени. Это решение должно быть близко к решению нашей задачи с предписанной точностью. Такой алгоритм приводит к явным формулам для вычисления шага по времени и принимает во внимание как динамику решения задачи, так и изменения в коэффициентах уравнения и в его правой части. Те же самые формулы для оценки шага по времени получены при помощи сравнения из двух аппроксимирующих решений, которые получены, используя явную схему с основным временным шагом и шагом, который уменьшен наполовину.

Как уже отмечалось, стандартные явные схемы для параболических уравнений не очень удобны для вычислительной практики вследствие того, что у них есть сильные ограничения на шаг по времени. В работе [22] рассматриваются более многообещающие явные схемы связаны с явно-неявным расщеплением. Исследование базируется на общей теории устойчивости разностных схем.

Шесть работ нашего коллектива уже приняты (но не опубликованных еще) в печать в 2015 году.

2 Участие в конференциях в 2015 году

В 2015 году опубликованы следующие тезисы конференций:

1. Bakushinsky A., Kokurin M. Iteratively Regularized Gauss-Newton Methods under Random Noise. Springer Proceedings in Math & Stat "Inverse Problems and Applications" ISBN 978-3-319-12498-8, DOI 10.1007/978-3-319-12499-5, p.1-12.
2. Bakushinsky A., Smirnova A., de Camp.L. On stable parametr estimation in epidemiology using abstract discrepancy principle . Proceedings of the Inverse Problems from Theory to Applications , Conference IPTA, IOP Publishing 2015 pp.53-57.
3. Ильютко В.П., Мокин А.Ю., Высикайло Ф.И., Савенкова Н.П. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛСТРАТЫ В НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДАХ. В сборнике 22 международная конференция Математика Компьютер Образование, место издания НИЦ Регулярная и хаотическая динамика Пущино, тезисы, с. 173-173.
4. Ильютко В.П., Мокин А.Ю., Высикайло Ф.И., Савенкова Н.П. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛСТРАТЫ В НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДАХ. Математика Компьютер Образование, Пущино, 19-26 января, 2015.
5. Морозов В.А., Назимов А.Б. Метод регуляризации сдвигом решения сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа // Труды Международной конференции по оптимизации вычислений. Киев: Институт кибернетики АН Украины, 2015. 72-73.
6. Назимов А.Б., Морозов В.А. О решении интегрального уравнения Гильберта методом регуляризации сдвигом // Тезисы Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015". Новосибирск: Институт вычислительной математики и математический геофизики СО РАН, 2015. 12.
7. Назимов А.Б., Морозов В.А. Метод регуляризации сдвигом решения сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа // Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015". Новосибирск: Институт вычислительной математики и математический геофизики СО РАН, 2015. 914-918.
8. Морозов В.А., Назимов А.Б. О решении сингулярного уравнения Гильберта методом регуляризации // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. М.: Изд-во РУДН, 2015. 128-129.
9. Petr N. Vabishchevich. Time Step for Numerically Solving Parabolic Problems. Finite Difference Methods, Theory and Applications. 6th International Conference, FDM 2014, Lozenetz, Bulgaria, June 18-23, 2014, Springer, 2015, Pp. 96-103.
10. Piskarev S. Stability of difference schemes for fractional Cauchy problem. International conference "Pontryaginskie chtenija" dedicated to the memory of V.A. Il'in. Abstracts. Voronezh, 2015, pp. 128-129.
11. S. Piskarev. Stability of difference schemes for fractional equations in Banach space. International conference on mathematical control theory and mechanics, July 3-7, Abstracts, Suzdal, Russia, 2015. p. 185-186.
12. Piskarev S. Approximation of fractional Cauchy problems. The 8-th International scientific seminar "Analytic methods of analysis and differential equations" dedicated to the memory of A.A. Kilbas. Abstracts. Minsk, 2015, pp. 68-68.
13. Piskarev S. Difference Schemes for Fractional Cauchy Problem The abstract book of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences, Turkey, Antalya , November 5-7, 2015, p. 182-182.
14. Piskarev S. Stability of difference schemes for fractional evolution equations in Banach spaces. Abstracts of International Russian-Chinese Conference on Actual Problems of Applied Mathematics and Physics (IRCCAPAMP). December 14 - December 18, 2015, Prielbrusie, Kabardino-Balkarian Republic, Russia.

References

- [1] M. Li, S. Piskarev. On approximation of integrated semigroups. Taiwanese journal of mathematics. Vol. 14, N 6, 2010, 2137 – 2161.

- [2] Miao Li, Vladimir Morozov, Sergey Piskarev. On the approximations of derivatives of integrated semigroups. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2010, Vol. 18, No. 5, 515II-550.
- [3] Miao Li, Vladimir Morozov and Sergey Piskarev. On the approximations of derivatives of integrated semigroups II. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2011, Vol. 19, Issue 3-4, p. 643 – 688.
- [4] Ru Liu, Miao Li, Javier Pastor and Sergey Piskarev. On approximation of fractional resolution families. *Differential equations*, 2014, 50, N7, p. 937 – 946.
- [5] Ru Liu, Miao Li and Sergey Piskarev. Approximation of Semilinear Fractional Cauchy Problem. *Comput. Methods Appl. Math.* 2015, vol.15, Issue 2, p. 203–212.
- [6] Ru Liu, Miao Li and Sergey Piskarev. Stability of difference schemes for fractional equations. *Differential equations*, 2015, 51, N7, p. 908 – 927.
- [7] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [8] V.V. Uchaikin, *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, Higher Education Press, Beijing, 2013.
- [9] Allaberen Ashyralyev, Javier Pastor, Sergey Piskarev, and Hasan Yurtsever. Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2015, Article ID 948321, 63 pages, 2015. doi:10.1155/2015/948321
- [10] Yu.I. Babenko. Method of fractional differentiation in the applied problems of the theory of heat-mass transfer. Saint Petersburg, "Professional", 2009.
- [11] H.O. Fattorini. Second order linear differential equations in Banach spaces. North Holland. Amsterdam.- 1985. 314 p.
- [12] Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S. Approximation of abstract differential equations. *Functional analysis. J. Math. Sci. (N. Y.)* 122 (2), 2004, 3013–3054.
- [13] S. G. Krein. Linear differential equations in Banach space, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by J. M. Danskin, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 29.
- [14] V. V. Vasilev, S. G. Krein, and S. Piskarev. Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations, In: *Mathematical analysis*, **28** (Russian), *Itogi Nauki i Tekhniki*, pages 87–202, 204. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990. Translated in *J. Soviet Math.* **54** (1991), 1042–1129.
- [15] Bakushinsky A., Kokurin M.Y. Iteratively Regularized Gauss-Newton Methods under Random Noise// Springer Proceedings in Math & Stat "Inverse Problems and Applications" ISBN 978-3-319-12498-8, DOI 10.1007/978-3-319-12499-5, pp. 1-12 .
- [16] Бакушинский А., Кокурин М.Ю. Итеративные методы стохастической аппроксимации для решения нерегулярных операторных уравнений // *ЖБМ и МФ* , 2015, т 55 №10 , стр 1637-1545.
- [17] Bakushinsky A., Smirnova A., de Camp L. On stable parametr estimation in epidemiology using abstract discrepancy principle// *Proceedings of the Inverse Problems from Theory to Applications*, Conference IPTA2014, IOP Publishing 2015 pp.63-57.
- [18] Petr N. Vabishchevich, Petr E. Zakharov. Explicit-Implicit Splitting Schemes for Parabolic Equations and Systems. *Numerical Methods and Applications*, Springer, 2015, Pp. 157-166.

- [19] Petr N. Vabishchevich. Time Step for Numerically Solving Parabolic Problems. Finite Difference Methods, Theory and Applications. 6th International Conference, FDM 2014, Lozenetz, Bulgaria, June 18-23, 2014, Springer, 2015, Pp. 96-103.
- [20] Petr N. Vabishchevich. Numerically solving an equation for fractional powers of elliptic operators. Journal of Computational Physics. 2015, Vol. 282, No.1, pp. 289-302.
- [21] Petr N. Vabishchevich. A Priori Estimation of a Time Step for Numerically Solving Parabolic Problems. Mathematical Modelling and Analysis. 2015, Vol.20, No. 1, pp. 94-111.
- [22] P. N. Vabishchevich. Explicit schemes for parabolic and hyperbolic equations. Applied Mathematics and Computation 250 (2015), 424-431.
- [23] Ильютко В.П., Мокин А.Ю., Высикайло Ф.И., Савенкова Н.П. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛСТРАТЫ В НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДАХ в сборнике 22 международная конференция Математика Компьютер Образование, место издания НИЦ Регулярная и хаотическая динамика Пущино, тезисы, 2015, с. 173-173
- [24] Ильютко В.П., Мокин А.Ю., Высикайло Ф.И., Савенкова Н.П. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛСТРАТЫ В НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДАХ. Математика Компьютер Образование, Пущино, 19-26 января 2015.
- [25] Морозов В.А., Назимов А.Б. Метод регуляризации сдвигом решения сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа // Труды Международной конференции по оптимизации вычислений. Киев: Институт кибернетики АН Украины, 2015. 72-73.
- [26] Назимов А.Б., Морозов В.А. О решении интегрального уравнения Гильберта методом регуляризации сдвигом // Тезисы Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015". Новосибирск: Институт вычислительной математики и математический геофизики СО РАН, 2015. 12.
- [27] Назимов А.Б., Морозов В.А. Метод регуляризации сдвигом решения сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа // Труды Международной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики - 2015". Новосибирск: Институт вычислительной математики и математический геофизики СО РАН, 2015. 914-918.
- [28] Морозов В.А., Назимов А.Б. О решении сингулярного уравнения Гильберта методом регуляризации // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. М.: Изд-во РУДН, 2015. 128-129.
- [29] Orlovsky D. Parameter Determination in a Differential Equation of Fractional Order with Riemann-Liouville Fractional Derivative in a Hilbert space. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2015, 8 (1), 55-63.
- [30] Piskarev S. Stability of difference schemes for fractional Cauchy problem. International conference "Pontryaginskie chteniya" dedicated to the memory of V.A. Il'in. Abstracts. Voronezh, 2015, pp. 128-129.
- [31] S. Piskarev. Stability of difference schemes for fractional equations in Banach space. International conference on mathematical control theory and mechanics, July 3-7, Abstracts, Suzdal, Russia, 2015. p. 185-186.

- [32] Piskarev S. Approximation of fractional Cauchy problems. 8-th International scientific seminar "Analytic methods of analysis and differential equations" dedicated to the memory of A.A. Kilbas. Abstracts. Minsk, 2015, pp. 68–68.
- [33] Piskarev S. Difference Schemes for Fractional Cauchy Problem The abstract book of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences, Turkey, Antalya , November 5-7, 2015, p. 182-182.
- [34] Piskarev S. Stability of difference schemes for fractional evolution equations in Banach spaces. Abstracts of International Russian–Chinese Conference on Actual Problems of Applied Mathematics and Physics (IRCCAPAMP). December 14 - December 18, 2015, Prielbrusie, Kabardino-Balkarian Republic, Russia.
- [35] D. Guidetti, B. Karasozen and S. Piskarev. *Approximation of abstract differential equations*. Journal of Mathematical Sciences, **122** (2004), 3013–3054.
- [36] *Bajlekova E.G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 2001.