

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЛОСОФСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Беликов Александр Александрович

**Отношения следования в логиках с обобщенными истинностными значениями и
их формализация**

Специальность 09.00.07 – Логика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата философских наук

Научный руководитель:
доктор философских наук, профессор
Зайцев Дмитрий Владимирович

Москва – 2018

Содержание

Введение	4
Предварительные определения	14
1 Первоуровневая релевантная логика	18
1.1 История возникновения	18
1.2 Семантика Данна-Белнапа	21
1.3 Логики с обобщенными истинностными значениями	26
2 Прямая сохранность истинности и неложности, обратная сохранность ложности и неистинности	36
2.1 Семантика логики ETL	36
2.2 Формализация А. Питца и У. Ривиеччио	41
2.3 Формализация логики ETL в виде системы бинарных выводимостей	46
2.4 Семантика логики NFL	64
2.5 Подходы к формализации логики NFL	67
2.6 Формализация логики NFL в виде системы бинарных выводимостей	69
2.7 Семейство логик первого уровня	72
3 Семантика Е. К. Войшвилло для логик с обобщенными истинностными значениями	76
3.1 Общая характеристика семантики обобщенных описаний состояний	76
3.2 Семантика полубообщенных описаний состояний для логики Клини и логики Приста	78
3.3 Аксиоматизация	81
3.4 Семантика обобщенных описаний состояний для ETL и NFL	88

Заключение	94
Список литературы	99

Введение

Актуальность темы исследования обусловлена активным развитием в последние годы такого направления философской логики, как *логики с обобщенными истинностными значениями*. Будучи достаточно молодым направлением, оно уже продемонстрировало свою плодотворность в обсуждении одних из самых проблемных и интересных разделов современной логики.

Во-первых, обобщенные истинностные значения могут использоваться в качестве своеобразной методологической установки для обсуждения вопроса о предмете современной логики. Этот вопрос не перестает быть чрезвычайно актуальным уже на протяжении целого столетия. Ввиду бурного развития логики, расширения области её применений и увеличения объема её инструментария, вопрос о её предмете крайне запутан. Особая роль понятий истины и истинностного значения в вопросе определения предмета логики отмечалась как самим изобретателем этого термина Г. Фреге:

«Открывать истины — это задача всех наук; подход же логики состоит в том, чтобы познавать законы бытия истинного, бытия истины». [22, стр. 326],

так и другим классиком логической науки Я. Лукасевичем:

«Под *логикой* я имею в виду науку о логических оценках (logical values). Воспринимаемая таким образом логика имеет свой собственный предмет исследований, к которому ни одна другая дисциплина не имеет отношения. Логика не является наукой о высказываниях (propositions), поскольку это дело грамматики; она не является наукой о суждениях или убеждениях, поскольку это дело психологии; она не является наукой о содержании, выражаемом высказываниями; поскольку это, в зависимости от этого содержания, является предметом множества специальных наук; она не является наукой об «объектах вообще», поскольку это дело

онтологии. Логика — это наука об объектах особого типа, а именно — наука о *логических оценках*». [64, стр. 90, перевод автора]

В связи с этим парадигма обобщенных истинностных значений и логические системы, основанные на подобных семантических структурах, дают мощный фундамент для исследования как внутрилогических вопросов на стыке эпистемической, модальной, интуиционистской, релевантной, многозначной, субструктурной и многих других логик, так и вопросов теории познания, когнитивных наук или классических метафизических вопросов, например, вопроса о природе истинности. Первые шаги в этом направлении уже осуществлены в некоторых работах отечественных и зарубежных исследователей [40, 88, 25, 23, 8, 101].

Во-вторых, обобщенные истинностные значения представляют собой удобный материал для построения различного рода алгебраических структур, которые в общем виде можно отнести к классу решеток¹. Эти алгебраические структуры крайне популярны в исследованиях мультиагентных систем, систем представления знаний и искусственного интеллекта. С этой точки зрения, обобщенные истинностные значения могут служить связующим звеном между философией и компьютерными науками. Уже сейчас получен ряд результатов о соответствии алгебраических структур на основе обобщенных истинностных значений определенным отношениям логического следования, которые можно исследовать более привычными для философской логики синтаксическими и семантическими методами.

В-третьих, несмотря на то, что за всего лишь десятилетнюю историю логик с обобщенными истинностными значениями в этой области уже получено много серьезных результатов, она все еще содержит много белых пятен, до которых, выражаясь быденным языком, попросту ещё «не дошли руки» современных исследователей. Среди таких проблем можно выделить: различные имплицативные и модальные расширения базовых логик с обобщенными истинностными значениями (так как последние зачастую основаны на конъюнктивно-

¹Теория решеток представлена в ряде работ отечественных и зарубежных специалистов, см. например [39, 17, 45, 18]

дизъюнктивно-негативных пропозициональных языках) [71, 84, 70, 13, 14], а также изучение предикатных версий логик с обобщенными истинностными значениями [86].

На первый взгляд может показаться, что интерес к изучению этих вопросов носит исключительно внутривероятностный характер, однако это в высшей степени обманчивое ощущение. В проблемное поле современной аналитической философии² входит ряд вопросов, связанных с эпистемологическими особенностями модальных высказываний, или, как их принято называть в англоязычной литературе, *модальными истинами* (*modal truths*). Эти вопросы можно объединить под общей рубрикой *эпистемология модальности* (см. [98]). Кроме того, для многих философов стало привычным делом формулировать свои идеи в виде так называемых *аргументов представимости* (*conceivability arguments*), которые также напрямую связаны с феноменом модальности. Все это требует осторожного исследования, со строгим прояснением базовых понятий, что, естественно, стимулирует исследования в различных направлениях современной логики. С этой точки зрения, использование парадигмы обобщенных истинностных значений, как удобного и эффективного инструмента для построения неклассических логик – прежде всего многозначных и модальных – представляется очень актуальной и перспективной областью исследований.

Степень разработанности темы. Логика с обобщенными истинностными значениями как программное направление возникает после публикации в 2005 и 2006 годах статей Я. В. Шрамко и Х. Ванзинга [91]³, [92]. Единственной на сегодняшний день монографией по логикам с обобщенными истинностными значениями является работа Я. В. Шрамко и Х. Ванзинга [94], опубликованная на английском языке в 2011 году. На русском языке тема обобщенных истинностных значений основательно представлена в монографии Д. В. Зайцева [9], однако эта работа не посвящена специально этой теме. Некоторые логики, которые можно отнести к классу логик с обобщенными истинностными значениями, представлены в книге

²Я оставляю вне рамок настоящей работы обсуждение уместности термина «аналитическая философия» и присоединяюсь к точке зрения Е. В. Логинова, изложенной в [15], где эта проблема основательно разъясняется.

³Эта работа переведена на русский язык: [2]

А. С. Карпенко [12]. Различные варианты обобщения истинностных значений исследованы в работах М. Данна, Т. Такенаки, Д. В. Зайцева, Я. В. Шрамко, О. М. Григорьева, Х. Ванзинга, Е. А. Кубышкиной [90, 106, 108, 109, 89, 92, 7, 62]. Свойства различных логических связок в логиках с обобщенными истинностными значениями рассматриваются в работах Д. В. Зайцева, О. М. Григорьева, Л. Ю. Девяткина, Х. Омори, К. Сано [6, 72, 53, 7]. Различные варианты гильбертовских формулировок логик с обобщенными истинностными значениями предлагаются в работах С. П. Одинцова, Д. В. Зайцева, Я. В. Шрамко, Х. Ванзинга [107, 91, 69], аналитико-табличные формулировки исследуются в работах О. М. Григорьева, С. Винтейна, Р. Маскенса, Ж. Маркоса [54, 104, 68, 66], секвенциальные формулировки предложены в ряде работ Н. Камиде, Х. Ванзинга, Я. В. Шрамко, М. Такано [100, 60, 55, 56, 57, 58, 59, 95, 103], натуральные исчисления исследуются в работах А. Тамминги, К. Танаки, Б. Койи, Я. И. Петрухина, В. О. Шангина [61, 77, 76, 75, 73, 74, 78, 96, 97]

Объектом исследования являются различные отношения следования, основанные на четырехзначной семантике Данна-Белнапа и информационной семантике Е. К. Войшвилло. **Предметом** исследования является аксиоматизация этих отношений, их металогические свойства, а также классификация полученных систем доказательств среди уже известных расширений первоуровневой релевантной логики.

Научная новизна исследования:

- Настоящая работа является первым в отечественной логической традиции диссертационным исследованием, специально посвященным логикам с обобщенными истинностными значениями.
- В работе предлагаются различные семантические способы определения следования в семантике с обобщенными истинностными значениями, а также исследуются свойства этих отношений.
- В работе впервые предлагаются системы бинарных выводимостей, которые адекватно

аксиоматизируют отношения следования $\models_{\text{etl}}$ и $\models_{\text{nfl}}$, сформулированные в терминах четырехзначной семантики Данна-Белнапа. Последние хорошо известны в связи с недавними исследованиями расширений первоуровневой релевантной логики: одно следование позволяет семантически определить логику **ETL** (см. [79]), другое – логику **NFL** (см. [87]). Ключевая особенность предлагаемых в диссертации исчислений состоит в том, что каждое из них определяется с использованием двух отношений выводимости, одно из которых находится в подчинении другому.

- В работе впервые вводится понятие полубобщенного описания состояний и с его использованием предлагаются адекватные семантики, которые можно отнести к типу информационных семантик Е. К. Войшвилло, для двух логик: логики Клини и логики Приста. Также предлагаются адекватные семантики обобщенных описаний состояний для логик **ETL** и **NFL**.

Цель и задачи исследования. В круг основных целей данной работы входит: аксиоматизация логик **ETL** и **NFL** в виде систем бинарных выводимостей, исследование их металогических свойств, исследование взаимоотношений **ETL** и **NFL** с уже известными расширениями логики **FDE**, построение адекватных семантик полубобщенных описаний состояний для логик **K₃** и **LP**, построение адекватных семантик обобщенных описаний состояний для логик **ETL** и **NFL**. Для достижения этих целей требуется решить ряд задач:

- Сформулировать семантические определения следований $\models_{\text{etl}}$ и $\models_{\text{nfl}}$ в семантике Данна-Белнапа через прямую сохранность истинности-и-не-ложности и обратную сохранность ложности-и-не-истинности.
- Предложить аксиоматизацию этих отношений в виде систем бинарных выводимостей.
- Сформулировать соответствующие теоремы об адекватности и доказать их.
- Описать дедуктивные свойства полученных систем.

- Рассмотреть полученные системы в их связи с другими расширениями логики **FDE**.
- Сформулировать семантические определения следований $\models_{\mathbf{K}_3}$ и $\models_{\mathbf{LP}}$ в семантике обобщённых описаний состояний через прямую сохранность истинности-и-не-ложности и обратную сохранность ложности-и-не-истинности.
- Сформулировать и доказать теоремы о том, что системы бинарных выводимостей для **K₃** и **LP** адекватно аксиоматизируют $\models_{\mathbf{K}_3}$ и $\models_{\mathbf{LP}}$.
- Сформулировать семантические определения следований $\models_{\mathbf{ETL}}$ и $\models_{\mathbf{NFL}}$ в семантике обобщённых описаний состояний через прямую сохранность истинности-и-не-ложности и обратную сохранность ложности-и-не-истинности.
- Доказать эквивалентность отношений $\models_{\mathbf{ETL}}$ и $\models_{\mathbf{etl}}$, а также $\models_{\mathbf{NFL}}$ и $\models_{\mathbf{nfl}}$.

Методологическую основу исследования составляет аппарат современной символической логики. В качестве инструмента, используемого для синтаксической формализации отношений следования, выступают так называемые системы выводимостей и, в частности, системы бинарных выводимостей, которые можно отнести к классу формализмов гильбертовского типа. Семантическая формализация исследуемых отношений следования основывается на использовании матричных и теоретико-множественные семантик. Соответствие между синтаксическим и семантическим подходами устанавливается за счет специальных теорем.

Положения, выносимые на защиту:

- Сравнительный анализ исчислений А. Питца и У. Ривиеччио, а также Дж. М. Фонта, для логик **ETL** и **VL**, соответственно, показывает, что аксиоматизации в виде систем бинарных выводимостей, широко используемые в логиках с обобщёнными истинностными значениями, обладают рядом преимуществ. Кроме того, в рамках данного анализа установлено, что исчисления упомянутых авторов сформулированы не достаточно

строого. В частности, некоторые правила вывода, которые используются для построения доказательств в этих исчислениях, лишь подразумеваются, но непосредственно не формулируются. Принимая во внимание эту особенность, классификация данных исчислений как систем «гильбертовского типа» является не совсем корректной.

- Отношение следования $\models_{\text{etl}}$, детерминирующее логику Питца-Ривиеччио, может быть адекватно аксиоматизировано в виде системы бинарных выводимостей $\mathbf{L}_{\text{etl}}$.
- Отношение следования $\models_{\text{nfl}}$ позволяет семантически определить логику $\mathbf{NFL}$, двойственную логике Питца-Ривиеччио. Данное отношение естественным образом может быть задано через сохранность значений $\{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}$ в матрице Белнапа. Альтернативным образом это отношение может быть определено через сохранность ложности-и-не-истинности от заключения к посылкам.
- Отношение $\models_{\text{nfl}}$ может быть адекватно аксиоматизировано в виде системы бинарных выводимостей $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$.
- Замена аксиомы $\sim A \wedge (A \vee B) \vdash B$ на $A \wedge \sim A \vdash B$ в исчислении $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ позволяет получить аксиоматизацию в виде системы бинарных выводимостей ($\mathbf{L}_{\text{etl}}^-$) для логики $\mathcal{ECQ}$, открытой У. Ривиеччио. Аналогичная замена аксиомы $B \vdash \sim A \vee (A \wedge B)$ на $B \vdash A \vee \sim A$ в системе $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ позволяет получить логику $\mathbf{L}_{\text{nfl}}^-$, двойственную логике $\mathcal{ECQ}$, которая ранее в литературе не встречается. Каждая из систем $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ есть расширение соответствующей системы из $\mathbf{L}_{\text{etl}}^-$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}^-$ в том смысле, что множества теорем исчислений $\mathbf{L}_{\text{etl}}^-$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}^-$ представляют собой подмножества множеств теорем $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$, соответственно.
- Отношения $\models_{\mathbf{K}_3}$ и $\models_{\mathbf{LP}}$, детерминирующие трехзначную логику Клини ($\mathbf{K}_3$) и логику Приста ($\mathbf{LP}$), могут быть сформулированы в терминах семантики полубообщённых описаний состояний. Для $\models_{\mathbf{K}_3}$ требуется использование непротиворечивых, но возможно неполных описаний состояний, для $\models_{\mathbf{LP}}$ – полных, но возможно противоречивых. Эти

отношения адекватно аксиоматизируются системами бинарных выводимостей $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{LP}$.

- Отношения $\models_{\mathbf{ETL}}$ и $\models_{\mathbf{NFL}}$, детерминирующие логику $\mathbf{ETL}$ и логику $\mathbf{NFL}$, могут быть сформулированы в терминах семантики обобщённых описаний состояний. Каждое из этих следований эквивалентно соответствующему отношению из двух уже упомянутых $\models_{\mathbf{etl}}$ и $\models_{\mathbf{nfl}}$. Таким образом, $\models_{\mathbf{ETL}}$ и $\models_{\mathbf{NFL}}$ адекватно аксиоматизируются системами $\mathbf{L}_{\mathbf{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\mathbf{nfl}}$, соответственно.

Теоретическое и практическое значение диссертации. Одним из главных результатов диссертации, имеющим теоретическое значение, является введение двухуровневых логических систем, которые позволяют аксиоматизировать различные отношения следования. Работа вносит вклад в развитие методов построения аксиоматизаций гильбертовского типа для широкого класса логик. Полученные в диссертации результаты позволяют уточнить понятие логического следования и выявить новые проблемы, связанные с формализацией подобных отношений.

Практическое значение диссертации заключается в том, что она может быть использована для чтения курсов по релевантной, многозначной логике, логикам с обобщенными истинностными значениями, отдельным аспектам логической семантики и теории доказательств для студентов, магистров и аспирантов, специализирующихся по логике. Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования могут быть использованы специалистами в области логик с обобщенными истинностными значениями, многозначных логик и алгебры логики.

Апробация диссертации. По теме диссертационного исследования автором были опубликованы статьи (в том числе, в соавторстве) в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, Scopus и Web of Science:

- Беликов А. А. Интерпретация идей Н. А. Васильева в русле теории обобщенных истинностных значений // Ценности и смыслы. — 2018. — Т. 54, №2. — С. 127-136.

- Беликов А. А. Обобщенные описания состояний для сильных логик первого уровня // Гуманитарный вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. — 2018. — Т. 65, №3. — С. 1-7.
- Беликов А. А. Семантики Войшвилло для некоторых расширений логики **FDE**: часть I // Логические исследования. — 2018. — Т. 24. №1. — С. 46-61.
- Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. First-Degree Entailment and Its Relatives // Studia Logica. — 2017. — V. 105, no. 6. — С. 1291-1317.

Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, были представлены на региональных и международных научных конференциях:

- Беликов А. А. «Свойство анти-простоты логических теорий». 6-я научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Философия. Язык. Культура», Высшая Школа Экономики, Россия, 29-30 апреля 2015.
- Беликов А.А. «Аксиоматизация логики Данна-Белнапа с одним выделенным значением». Девятые Смирновские чтения по логике. Международная научная конференция. 17-19 июня 2015 года, Москва, Россия, 17-19 июня 2015.
- Беликов А.А. «Первоуровневая релевантная логика и теория решеток». Философия в XXI веке: новые стратегии философского поиска, Философский факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, 1-4 декабря 2015.
- Беликов А. А. «Некоторые расширения логики Данна-Белнапа». XII международная научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке», Философский факультет СПбГУ, Россия, 22-24 июня 2016.
- Zaitsev D., Belikov A. «FDE and its Relatives». Десятые Смирновские чтения по логике, Философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 15-17 июня 2017.

- Belikov A., Zaitsev D. «FDE and Its Relatives, Part II: Axiomatization». Десятые Смирновские чтения по логике, Философский факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 15-17 июня 2017.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографии. Кроме того, первая глава предваряется специальным разделом, в котором приведены некоторые формальные определения, упрощающие восприятие работы.

Предварительные определения

Все логики, рассматриваемые в настоящей работе, построены в одном и том же пропозициональном языке $\mathcal{L}$, который мы определяем по форме Бакуса-Наура. Пусть $Prop$ обозначает множество пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$.

$$A := Prop \mid \sim A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A)$$

Множество пропозициональных переменных языка $\mathcal{L}$ обозначаем через $Prop$. Множество всех формул языка $\mathcal{L}$ обозначаем через $Form$.

Под *логикой* в общем случае будем называть такую пару $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, где $\mathcal{L}$ – пропозициональный язык, а $\vdash$ – отношение выводимости, характеризующее определенными правилами или аксиомами (аксиомными схемами). Также *логика* может быть определена семантически – $\langle \mathcal{L}, \models \rangle$, то есть с использованием отношения следования $\models$. Эти понятия будут уточняться по ходу работы.

В настоящей работе мы будем использовать термины «аксиома» и «аксиомная схема» как взаимозаменяемые. Но для точности заметим, что большинство исчислений, которые формулируются в настоящем исследовании, предполагают работу с аксиомными схемами, исключая потребность в рассмотрении правила подстановки. И все же некоторые системы будут приведены в авторских формулировках, и в них использование правила подстановки предполагается. Эти тонкости будут проясняться в последующих главах.

Отношение *следования* может быть определено разными способами: (1) между множеством формул и множеством формул (SET-SET), (2) между множеством формул и формулой (SET-FMLA), (3) между формулой и формулой (FMLA-FMLA) и (4) между формулой и множеством формул (FMLA-SET). Обычно принято рассматривать отношение следования (выводимости) типа SET-FMLA. Определим отношение $\vdash \subseteq \wp(Form) \times Form$, где $\wp(Form)$ обозначает множество всех подмножеств множества $Form$, удовлетворяющее следующим свойствам

$(\Gamma, \Delta \cup \{A, B\} \subseteq Form)$:

- (a). $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$ (рефлексивность);
- (b). $(\Gamma \vdash A \text{ и } \Delta \vdash B, \text{ для всякого } B \in \Gamma) \Rightarrow \Delta \vdash A$ (сечение);
- (c). $(\Gamma \vdash A \text{ и } \Gamma \subseteq \Delta) \Rightarrow \Delta \vdash A$ (монотонность);
- (d). $\Gamma \vdash A \Rightarrow \xi(\Gamma) \vdash \xi(A)$ (структурность), где ξ есть произвольная функция подстановки, определенная на множестве $Form$.

Отношение $\vdash$, удовлетворяющее (a) – (d), называется *отношением следования (выводимости) по Тарскому*. Аналогичным образом определяется и семантическое отношение $\models$. В настоящей работе большинство отношений следования (выводимости) будут рассматриваться как отношения типа FMLA-FMLA. Для такого рода отношений условия (a) – (d) могут быть переформулированы тривиальным образом.

Множество формул β называется *теорией* логики L , если оно удовлетворяет следующим условиям ($A, B \in Form$):

1. $A \in \beta \text{ и } B \in \beta \Leftrightarrow A \wedge B \in \beta$ (замыкание относительно конъюнкции);
2. $A \in \beta \text{ и } A \vdash_L B \Rightarrow B \in \beta$ (замыкание относительно отношения выводимости).

Теория β называется *простой теорией*, если она удовлетворяет условию:

3. $A \vee B \in \beta \Rightarrow A \in \beta \text{ или } B \in \beta$ (простота).

Теория β называется *непротиворечивой*, если она удовлетворяет условию:

4. $A \in \beta \Leftrightarrow \sim A \notin \beta$ (непротиворечивость).

Теория β называется *полной*, если она удовлетворяет условию:

5. $A \in \beta \text{ или } \sim A \in \beta$ (полнота).

Отношение $\vdash$ называется *эксплозивным*, если для него выполняется $A \wedge \sim A \vdash B$. Аналогичным образом эксплозивность определяется для семантического отношения следования $\models$.

Отношение $\vdash$ называется *импложивным*, если для него выполняется $A \vdash B \vee \sim B$. Аналогичным образом импложивность определяется для семантического отношения следования $\models$.

Логика L называется *паранепротиворечивой*, если $\vdash_L (\models_L)$ импложивно. Логика L называется *параполной*, если $\vdash_L (\models_L)$ эксплозивно.

Пусть M является множеством, и $\leq$ является бинарным отношением, определенным на M . Тогда $\leq$ называется *отношением частичного порядка* на множестве M , если оно удовлетворяет следующим условиям ($a, b, c \in M$):

1. $a \leq a$ (рефлексивность);
2. $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность);
3. $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = c$ (анти-симметричность).

Пусть M является множеством, и $\leq$ является бинарным отношением, определенным на M . Тогда пара $\langle M, \leq \rangle$ называется *частично упорядоченным множеством*, если $\leq$ есть отношение частичного порядка на M .

Пусть L есть частично упорядоченное множество. Если $B \subseteq L$ и $a \in L$, то a есть *верхняя грань* для B , если, для всякого x из B , $x \leq a$. *Точной верхней гранью* называется такая верхняя грань B , которая меньше всякой другой верхней грани B .

Понятие *нижней (точной) грани* определяется двойственным образом.

Частично упорядоченное множество L называем *решеткой*, если каждая пара элементов из L обладает точной нижней и точной верхней гранями.

Бирешеткой называется структура $\mathbf{B} = \langle B, \leq_1, \leq_2 \rangle$, где B — непустое множество, а $\leq_1$ и $\leq_2$ — отношения частичного порядка на B , такие, что $\langle B, \leq_1 \rangle$ и $\langle B, \leq_2 \rangle$ есть решетки.

N -мерной мультирешеткой (n -решеткой) называем структуру $\mathbf{M} = \langle S, \leq_1, \dots, \leq_n \rangle$, где S есть непустое множество, а $\leq_1, \dots, \leq_n$ — отношения порядка на S , такие, что $\langle B, \leq_1 \rangle, \dots, \langle B, \leq_n \rangle$ есть решетки.

1 Первоуровневая релевантная логика

1.1 История возникновения

Релевантная логика начинает активно развиваться с середины XX века, однако проблематика борьбы с парадоксами материальной импликации возникает в начале прошлого столетия как в работах К. И. Льюиса [63], так и в заметно опередившей свое время работе отечественного логика И. Е. Орлова [16]. Усилиями двух американских логиков Н. Белнапа и А. Андерсена релевантная логика обретает статус серьезного программного направления. По словам самого Н. Белнапа [37], отправной точкой в увлечении данной проблематикой послужили работы В. Аккермана [26].

В 1975 году выходит в свет первый том знаменитого «двухтомника» по релевантной логике – «Entailment: The Logic of Relevance and Necessity» [30, 31], в котором собраны практически все полученные на тот момент результаты в области релевантной логики. В этот объемный труд, помимо самих Н. Белнапа и А. Андерсена, внесли свой вклад их ученики и коллеги: М. Данн, Р. Раутли, Р. Мейер, А. Уркварт, Б. ван Фраасен, Х. Леблан и др.

Одним из первых этапов на пути реализации программы А. Андерсена и Н. Белнапа является возникновение системы **E** (of entailment) в работе «The pure calculus of entailment» [29], где, в сущности, предлагается система, свободная от парадоксов материальной импликации, а также строгой импликации Льюиса, уже подвергнутой к тому времени критике со стороны релевантистов⁴. Позднее, в 1962 году, выходит работа А. Андерсена и Н. Белнапа [28], в которой та же задача редуцируется на случай, когда импликация понимается как отношение между высказываниями, содержащими только связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то есть высказываниями вида $A \rightarrow B$, где ни A , ни B не содержат $\rightarrow$. Такого рода имплекативные высказывания А. Андерсен и Н. Белнап называют *следованиями первого*

⁴Напомним, что строгая импликация в действительности была рассмотрена К. И. Льюисом в качестве альтернативы материальной импликации с целью преодолеть парадоксальные свойства последней. Другими словами, первоначальной мотивацией К. И. Льюиса являлось создание и использование аппарата модальной логики для реализации, фактически, идеи релевантной логики.

уровня (*first-degree entailments*) или, что в большей степени характерно для их ранних работ, *тавтологическими следованиями* (*tautological entailments*)⁵.

С открытием этих систем возникла серьезная проблема поиска адекватных семантик для них. Хронологически, первая алгебраическая семантика для системы тавтологических следований появляется в диссертации М. Данна [42], где в качестве соответствующей семантической структуры предлагается четырехэлементная решетка де Моргана. В той же работе возникает так называемая *интуитивная семантика*, которая в дальнейшем привела к появлению знаменитой *четырёхзначной семантики Данна-Белнапа*. В 1976 году выходит работа М. Данна [43], в которой идея интуитивной семантики получает большее развитие, а уже в 1977 году выходят знаменитые работы Н. Белнапа [36, 35], где идея М. Данна переработана в виде семантики с четырьмя истинностными значениями (обозначим через **4** множество этих значений):

- **T** – «только истина»,
- **B** – «истина и ложь»,
- **N** – «ни истина, ни ложь»,
- **F** – «только ложь».

Н. Белнап предлагает для них оригинальную интерпретацию, рассматривая их как информацию, которая «сообщается компьютеру». Метафорическому компьютеру Белнапа может поступить информация о том, что высказывание *только истинно* (**T**), *только ложно* (**F**), *истинно и ложно* (**B**) или *ни истинно, ни ложно* (**N**). Заметим, что этот подход является своеобразной модификацией идеи М. Данна, которая заключается в обобщении класси-

⁵Еще раньше, 28 декабря 1959 года, в Колумбийском университете Нью-Йорка состоялось выступление Н. Белнапа на двадцать четвёртом ежегодном собрании Ассоциации символической логики, где им впервые была представлена проблематика тавтологических следований и опубликованы тезисы [34]. Опираясь на эту публикацию, можно вычислить самую первую и официально зарегистрированную дату упоминания системы следований первого уровня, а именно – 1 ноября 1959 года, день, когда тезисы Н. Белнапа поступили в редакцию «Journal of Symbolic Logic».

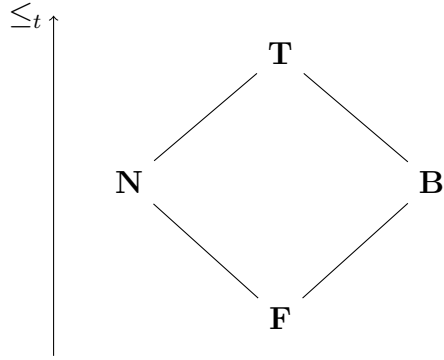


Рис. 1: Решетка
 L_4 .

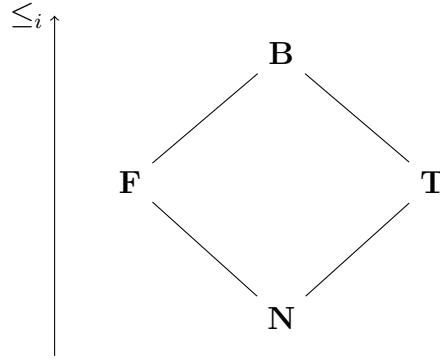


Рис. 2: Решетка
 A_4 .

ческой функции оценки. В классической логике, работая с множеством классических значений истинности $\mathbf{2} = \{T, F\}$, мы определяем функцию оценки как функцию, областью определения которой является множество высказываний рассматриваемого языка, а областью значений, соответственно, множество $\mathbf{2}$. Таким образом, каждому высказыванию функция оценки приписывает в точности одно и только одно⁶ значение из $\mathbf{2}$. По существу, революционная идея М. Данна состоит в определении оценки не как *функции*, а как *отношения*, означающего высказывания элементами множества всех подмножеств множества $\mathbf{2}$, то есть $\{\{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \emptyset\}$. Такой подход допускает существование «провалов» (*gaps*) при оценивании высказываний наряду с «пресыщенными оценками» (*gluts*).

На базе множества $\mathbf{4}$ Н. Белнап рассматривает логическую решетку L_4 и аппроксимационную решетку A_4 . На первой из них определяется частичный порядок по истинности $\leq_t$, а на второй – частичный порядок по информации $\leq_i$. Позднее [51, 52] М. Гинзберг вводит понятие *бирешетки*, структуры, на которой одновременно определяются два независимых порядка: $\leq_t$ и $\leq_i$. Бирешетку, основанную на множестве $\mathbf{4}$, обозначим через $FOUR_2$.

Заметим, что в 1984 году независимым образом Е. К. Войшвилло [4] предлагает так называемую *семантику обобщенных описаний состояний* для системы тавтологических следований А. Андерсена и Н. Белнапа. В более основательном виде результат Е. К. Войшвилло

⁶ Другими словами, в данном условии реализуется классический *принцип двузначности*, см. [1]

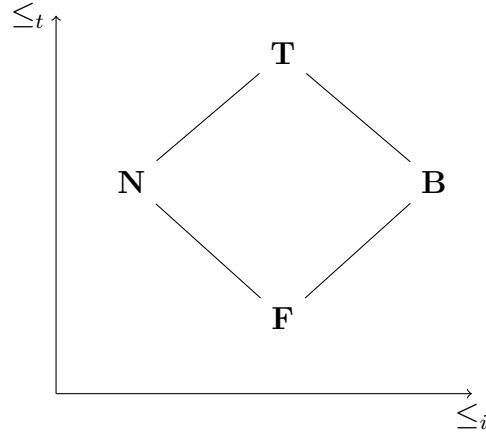


Рис. 3: $FOUR_2$

изложен в его фундаментальной монографии «Философско-методологические аспекты релевантной логики» [5]. На английском языке эти результаты публикуются только в 1996 году [99]. Подробное обсуждение подхода Е. К. Войшвилло представлено в главе 3.

1.2 Семантика Данна-Белнапа

Семантически систему первоуровневых следований можно охарактеризовать следующим образом. Рассмотрим пропозициональный язык $\mathcal{L}$, определенный ранее. Для означивания формул этого языка будем использовать так называемую *матрицу Белнапа*.

$$\mathcal{M}_{fde} = \langle \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}, \{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}, \{f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\sim}\} \rangle$$

Определим функцию приписывания значений как отображение $v : Prop \longrightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$. Значения логических связок определяются соответствующими функциями, основываясь на нижеследующем определении.

Определение 1.1. *Условия истинности для логических связок языка $\mathcal{L}$.*

$\wedge$	T	B	N	F	$\vee$	T	B	N	F	$\sim$	
T	T	B	N	F	T	T	T	T	T	F	T
B	B	B	F	F	B	T	B	T	B	B	B
N	N	F	N	F	N	T	T	N	N	N	N
F	F	F	F	F	F	T	B	N	F	T	F

Можно использовать целый спектр различных определений следования, которые задают одну и ту же логику Данна-Белнапа. Вслед за М. Данном [44, Definition 3, p.10.], мы определим три отношения следования.

Определение 1.2. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{fde1}} B \Leftrightarrow \forall v ((v(A) = \mathbf{T} \text{ или } v(A) = \mathbf{B}) \Rightarrow (v(B) = \mathbf{T} \text{ или } v(B) = \mathbf{B})).$$

Определение 1.3. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{fde2}} B \Leftrightarrow \forall v ((v(B) = \mathbf{F} \text{ или } v(B) = \mathbf{B}) \Rightarrow (v(A) = \mathbf{F} \text{ или } v(A) = \mathbf{B})).$$

Определение 1.4. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{fde3}} B \Leftrightarrow A \models_{\text{fde1}} B \text{ и } A \models_{\text{fde2}} B$$

Эти три отношения эквивалентны [44, Proposition 4, p.10].

Утверждения $A \models_{\text{fde1}} B$, $A \models_{\text{fde2}} B$ и $A \models_{\text{fde3}} B$ называем *fde-валидными*⁷. Будем использовать единый индекс $\models_{\text{fde}}$ для обозначения любого из этих трёх отношений, кроме тех случаев, где специально не оговаривается обратное.

Альтернативным образом $\models_{\text{fde}}$ можно определить с использованием порядка по истинности ($\leq_t$) на $FOUR_2$ [11, 46].

⁷В качестве перевода термина «valid», мы используем термин «валидный». Этот перевод может показаться не совсем удачным, однако, на наш взгляд, в контексте семантики обобщенных истинностных значений возможные переводы «valid» вроде «истинный», «общезначимый», «корректный» также являются неудачными. Поэтому мы используем указанный перевод вслед за Я. В. Шрамко, см. например [24].

Определение 1.5. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{fde}} B \Leftrightarrow \forall v : v(A) \leq_t v(B).$$

Эти отношения могут быть аксиоматизированы в виде системы бинарных выводимостей. Зачастую подобные исчисления фигурируют под именем «исчислений гильбертовского типа» или «формализмов гильбертовского типа». Стоит отметить, что в таком случае термин «исчисление гильбертовского типа» должен быть дополнен некоторой оговоркой. Мы, как и в стандартном понимании этого термина, будем иметь дело с системами, состоящими из аксиом и правил вывода. Единственное отличие заключается в том, что мы будем работать с аксиомами не как с синтаксическими аналогами *тавтологий* (то есть формул, которые принимают выделенное значение при любой интерпретации), а как с синтаксическими аналогами *валидных утверждений о следовании*. Соответственно, правила вывода рассматриваются как кортежи *выводимостей* (то есть отношений вида $A \vdash B$) со своими посылками и заключением; в этом случае корректность правила определяется естественным образом: если посылки являются теоремами исчисления (валидными утверждениями о следовании), то и заключение является таковым. Заметим, что термин «исчисление гильбертовского типа» сам по себе является спорным, поскольку, например, в литературе по теории сложности такого рода исчисления называют «системами Фреге» [38].

Итак, рассмотрим аксиоматизацию логики первоуровневых следствий в виде системы бинарных выводимостей, предложенную М. Данном в работе «Partiality and its Dual» [44]. Система **FDE** представляет из себя пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\text{fde}})$, где $\mathcal{L}$ — определенный ранее пропозициональный язык, а $\vdash_{\text{fde}}$ — бинарное отношение, удовлетворяющее следующим принципам и правилам:

$$\begin{aligned} & a1. A \wedge B \vdash_{\text{fde}} A; \quad a2. A \wedge B \vdash_{\text{fde}} B; \quad a3. A \vdash_{\text{fde}} A \vee B; \\ & a4. B \vdash_{\text{fde}} A \vee B; \quad a5. A \vdash_{\text{fde}} \sim\sim A; \quad a6. \sim\sim A \vdash_{\text{fde}} A; \\ & a7. A \wedge (B \vee C) \vdash_{\text{fde}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \\ & a8. \sim(A \wedge B) \vdash_{\text{fde}} \sim A \vee \sim B; \quad a9. \sim A \vee \sim B \vdash_{\text{fde}} \sim(A \wedge B); \end{aligned}$$

$$a10. \sim(A \vee B) \vdash_{\text{fde}} \sim A \wedge \sim B; \quad a11. \sim A \wedge \sim B \vdash_{\text{fde}} \sim(A \vee B);$$

$$r1. A \vdash_{\text{fde}} B; B \vdash_{\text{fde}} C / A \vdash_{\text{fde}} C;$$

$$r2. A \vdash_{\text{fde}} B; A \vdash_{\text{fde}} C / A \vdash_{\text{fde}} B \wedge C;$$

$$r3. A \vdash_{\text{fde}} C; B \vdash_{\text{fde}} C / A \vee B \vdash_{\text{fde}} C.$$

Определение 1.6. Выводом в системе **FDE** называем непустую последовательность утверждений о выводимости $A_1 \vdash_{\text{fde}} B_1, \dots, A_n \vdash_{\text{fde}} B_m$, каждое из которых либо является частным случаем аксиомной схемы из **FDE**, либо получено из предыдущих по одному из правил вывода системы **FDE**.

Утверждение $A \vdash_{\text{fde}} B$ называем теоремой исчисления **FDE**, если существует вывод в **FDE**, в котором последним утверждением является $A \vdash_{\text{fde}} B$; такой вывод называется выводом утверждения $A \vdash_{\text{fde}} B$.

Доказана следующая теорема [44, Theorem 7, p.12.].

Теорема 1.7. Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\text{fde}} B \Leftrightarrow A \vdash_{\text{fde}} B.$$

Утверждение 1.8. Следующее правило является допустимым в системе **FDE**.

$$A \vdash_{\text{fde}} B / \sim B \vdash_{\text{fde}} \sim A$$

Доказательство. [44, Proposition 11, p.14.] □

Система **FDE** может быть сформулирована альтернативным образом, т. е. через добавление правила контрапозиции, тогда законы де Моргана ($a8 - a11$) станут выводимыми.

Естественным образом можно расширить определение следования и рассмотреть его как отношение между множеством формул и формулой (SET-FMLA).

Определение 1.9. Для всяких $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \text{Form}$ верно, что

$$\Gamma \models_{\text{BL}} A \Leftrightarrow \forall v: v[\Gamma] \subseteq \{\mathbf{T}, \mathbf{B}\} \Rightarrow v(A) \in \{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}.$$

Мы используем индекс $\models_{\mathbf{BL}}$ для обозначения отношения следования такого типа, чтобы отличать его от того, которое мы определили ранее. Адекватная формализация этого отношения следования в виде системы генценовского типа впервые была исследована Дж. М. Фонтом, В. Верду и М. Муссави в ряде работ [49, 50, 48, 47]. В работе 1995 года [81] А. П. Пынько предлагает оригинальное секвенциальное исчисление без структурных правил вывода. В этой же работе предлагается первая гильбертовская аксиоматизация отношения $\models_{\mathbf{BL}}$, которую позднее, в 1997 году, независимо предложил Дж. М. Фонт в [46]⁸.

Определение 1.10. *Обозначим через $\mathbf{BL}$ исчисление, определяемое следующим множеством правил (без аксиом), где $p, q, r \in Prop$:*

$$\begin{array}{c}
\frac{p \wedge q}{p} (R1) \quad \frac{p \wedge q}{q} (R2) \quad \frac{p}{p \wedge q} (R3) \quad \frac{p}{p \vee q} (R4) \\
\\
\frac{p \vee q}{q \vee p} (R5) \quad \frac{p \vee p}{p} (R6) \quad \frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r} (R7) \\
\frac{p \vee (q \wedge r)}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)} (R8) \quad \frac{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}{p \vee (q \wedge r)} (R9) \quad \frac{p \vee r}{\sim \sim p \vee r} (R10) \\
\\
\frac{\sim \sim p \vee r}{p \vee r} (R11) \quad \frac{\sim (p \vee q) \vee r}{(\sim p \wedge \sim q) \vee r} (R12) \quad \frac{(\sim p \wedge \sim q) \vee r}{\sim (p \vee q) \vee r} (R13) \\
\\
\frac{\sim (p \wedge q) \vee r}{(\sim p \vee \sim q) \vee r} (R14) \quad \frac{(\sim p \vee \sim q) \vee r}{\sim (p \wedge q) \vee r} (R15)
\end{array}$$

Замечание 1.11. *Обсуждение понятия вывода для системы $\mathbf{BL}$ проводится в параграфе 2.2.*

Доказана следующая теорема (см. [81, 46])

Теорема 1.12. *Для всяких $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$ верно, что*

$$\Gamma \models_{\mathbf{BL}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{BL}} \varphi.$$

⁸Однако в работе [47] упоминается рукопись «Algebraic Study of Belnap's Four-Valued Logic» за авторством Дж. М. Фонта и В. Верду, в которой анонсирована гильбертовская аксиоматизация отношения $\models_{\mathbf{BL}}$. В личной переписке с автором Дж. М. Фонт подтвердил, что эта аксиоматизация была получена гораздо раньше публикации статьи А. П. Пынько [81]. Впоследствии упомянутая рукопись была опубликована Дж. М. Фонтом [46] только в 1997 году.

1.3 Логики с обобщенными истинностными значениями

Как упоминалось ранее, исследования в области логик с обобщенными истинностными значениями были инициированы работами Я. В. Шрамко и Х. Ванзинга (см. [92, 91]). Напомним, что значения семантики Данна-Белнапа можно рассматривать как множество всех подмножеств множества **2**, то есть как *обобщение* классических истинностных значений. Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг развивают метафору Н. Белнапа и задаются следующим вопросом: что если компьютер не только получает информацию от источников, но и коммуницирует с другими компьютерами, использующими ту же самую логику? В такой ситуации компьютер (с позиции которого мы рассуждаем) должен иметь дело, например, с ситуацией, когда ему приходит информация от другого компьютера, что какое-то высказывание имеет значение **T**, хотя наш компьютер, скажем, уже отмечал его как **B**. Другими словами, теперь истинностные значения имеют еще более сложную структуру, чем в четырехзначном случае. Говоря более формально, Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг предлагают обобщить множество **4** и рассмотреть множество всех его подмножеств. Множество этих значений мы обозначим через **16**:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \emptyset; & \mathbf{FT} &= \{\{F\}, \{T\}\}; \\
\mathbf{N} &= \{\emptyset\}; & \mathbf{FB} &= \{\{F\}, \{\{F\}, \{T\}\}\}; \\
\mathbf{F} &= \{\{F\}\}; & \mathbf{TB} &= \{\{T\}, \{\{F\}, \{T\}\}\}; \\
\mathbf{T} &= \{\{T\}\}; & \mathbf{NFT} &= \{\emptyset, \{F\}, \{T\}\}; \\
\mathbf{B} &= \{\{T, F\}\}; & \mathbf{NFB} &= \{\emptyset, \{F\}, \{T, F\}\}; \\
\mathbf{NF} &= \{\emptyset, \{F\}\}; & \mathbf{NTB} &= \{\emptyset, \{T\}, \{T, F\}\}; \\
\mathbf{NT} &= \{\emptyset, \{T\}\}; & \mathbf{FTB} &= \{\{F\}, \{T\}, \{T, F\}\}; \\
\mathbf{NB} &= \{\emptyset, \{T, F\}\}; & \mathbf{A} &= \{\emptyset, \{F\}, \{T\}, \{T, F\}\}.
\end{aligned}$$

Одним из наиболее интересных результатов этого обобщения становится то, что множество **16** образует алгебраическую структуру, которую Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг называют *Трирешеткой SIXTEEN₃*. На *SIXTEEN₃* мы можем определить три независимых

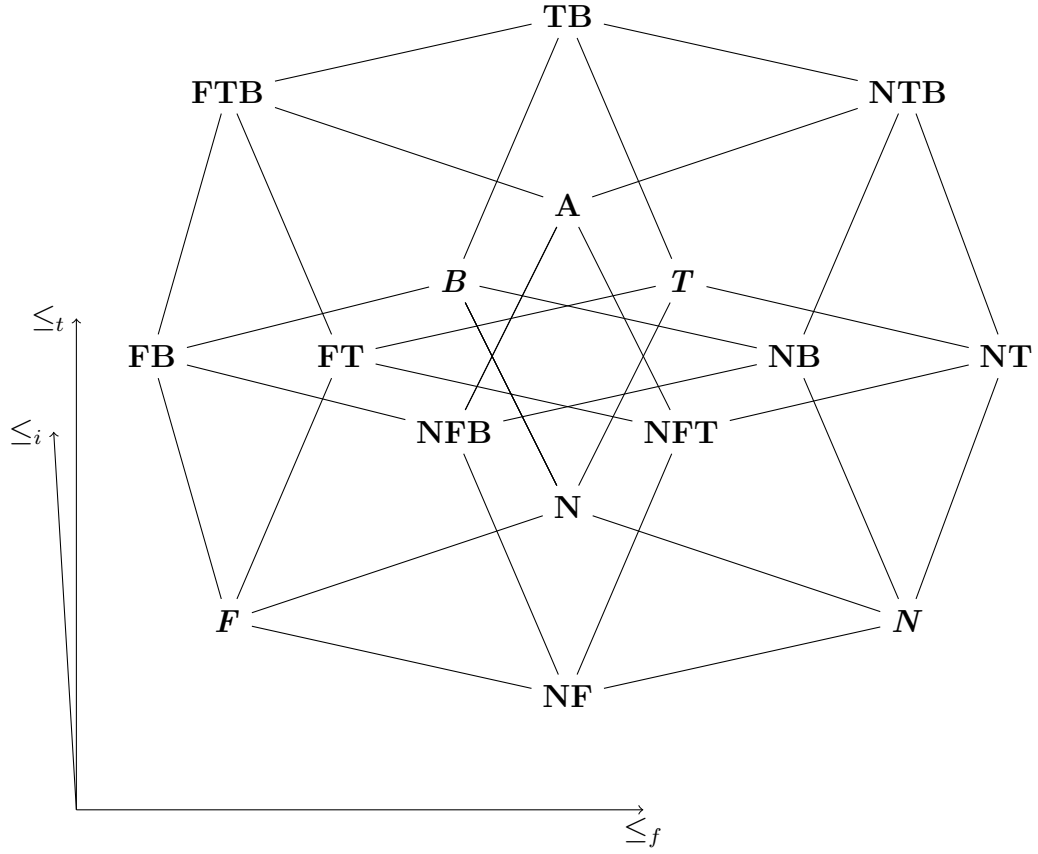


Рис. 4: $SIXTEEN_3$

отношения порядка: порядок по истинности $\leq_t$, порядок по ложности $\leq_f$, порядок по информации $\leq_i$. Для этого необходимо ввести определения истинностных, не-истинностных, ложностных и не-ложностных компонент для каждого значения из **16**.

Определение 1.13. Для всякого $x \in \mathbf{16}$ верно, что

$$\begin{aligned} x^t &= \{y \in x \mid T \in y\}; & x^{-t} &= \{y \in x \mid T \notin y\}; \\ x^f &= \{y \in x \mid F \in y\}; & x^{-f} &= \{y \in x \mid F \notin y\}. \end{aligned}$$

Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг обращают внимание, что при определении аналогичным образом истинностных и ложностных компонент на решетке $FOUR_2$ не-истинностные компоненты совпадут с ложностными, а не-ложностные совпадут с истинностными, то есть $x^{-t} = x^f$ и $x^{-f} = x^t$. Это приводит авторов к выводу, что истинность и ложность не являются незави-

симыми понятиями в логике Данна-Белнапа, в то время как в логике Шрамко-Ванзинга они независимы.

Определение 1.14. Для всяких $x, y \in \mathbf{16}$ верно, что

$$\begin{aligned} x \leq_i y &\Leftrightarrow x \subseteq y; \\ x \leq_t y &\Leftrightarrow x^t \subseteq y^t \text{ и } y^{-t} \subseteq x^{-t}; \\ x \leq_f y &\Leftrightarrow x^f \subseteq y^f \text{ и } y^{-f} \subseteq x^{-f}; \end{aligned}$$

Для каждого из трех порядков на $SIXTEEN_3$ можно определить операции пересечения, объединения и дополнения (см. [94]).

Особое значение $SIXTEEN_3$ приобретает, если мы переходим от алгебраического контекста к логическому. Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг рассматривают три пропозициональных языка. Пусть $Prop$ обозначает множество пропозициональных переменных в соответствующих языках.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t : A &:= Prop \mid \sim_t A \mid (A \wedge_t A) \mid (A \vee_t A); \\ \mathcal{L}_f : A &:= Prop \mid \sim_f A \mid (A \wedge_f A) \mid (A \vee_f A); \\ \mathcal{L}_{tf} : A &:= Prop \mid \sim_t A \mid \sim_f A \mid (A \wedge_t A) \mid (A \wedge_f A) \mid (A \vee_t A) \mid (A \vee_f A). \end{aligned}$$

Индексы на логических связках указывают на алгебраические операции, ассоциированные с соответствующими порядками на $SIXTEEN_3$, чьими логическими аналогами являются связки из $\mathcal{L}_t, \mathcal{L}_f, \mathcal{L}_{tf}$. Если мы определим функцию оценки v^{16} , которая стандартным образом отображает формулы из $\mathcal{L}_t, \mathcal{L}_f$ и $\mathcal{L}_{tf}$ на значения $SIXTEEN_3$, то мы можем определить отношения следования, ассоциированные с порядками на $SIXTEEN_3$.

Определение 1.15. Для всяких $\varphi, \psi \in Form$, для всякой оценки v^{16} верно, что

1. $\varphi \models_t \psi \Leftrightarrow v^{16}(\varphi) \leq_t v^{16}(\psi);$
2. $\varphi \models_f \psi \Leftrightarrow v^{16}(\psi) \leq_f v^{16}(\varphi).$

Эти отношения аксиоматизируются системой **FDE**. Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг различают два соответствующих варианта $\mathbf{FDE}_t^t$ и $\mathbf{FDE}_f^f$. Таким образом, можно утверждать, что порядок по истинности и порядок по ложности на $SIXTEEN_3$ порождают логику **FDE**. Более того, авторы расширяют этот результат на любой последующий шаг обобщения.

В 2009 году Д. В. Зайцев [106] рассмотрел альтернативный базис для проведения процедуры обобщения истинностных значений. Теперь в качестве базиса обобщения предлагается трехэлементное множество $\mathbf{3} = \{\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{u}\}$. Д. В. Зайцев пытается развить идею «рассуждающего компьютера Белнапа» за счет изменения степени компетентности источников информации. Если у Н. Белнапа источник, который посылает информацию на вход компьютера, мог либо знать об истинности, либо знать о ложности высказывания, то Д. В. Зайцев предлагает допустить ситуацию, в которой источник может сам не обладать информацией об истинности или ложности высказывания. Это и оправдывает названия упомянутых значений:

1. $\mathbf{a}$ – «asserts» – «утверждает»,
2. $\mathbf{d}$ – «denies» – «отвергает»,
3. $\mathbf{u}$ – «uncertainty» – «неопределенность».

Важный момент в данном подходе – это разделение значений на «сообщенные» (*reported values*), то есть те, которыми оперирует источник информации, и «отмеченные» (*marked values*) – те, которыми оперирует сам компьютер. Таким образом, Д. В. Зайцев предлагает в качестве базиса обобщения использовать множество «сообщенных значений» $\mathbf{3}$.

Следуя методологии Я. В. Шрамко и Х. Ванзинга, нам необходимо рассмотреть множество всех подмножеств множества $\mathbf{3}$, что приводит нас к следующему множеству истинностных значений $\mathbf{8} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{U}, \mathbf{TU}, \mathbf{FU}, \mathbf{BU}, \mathbf{B}, \emptyset\}$:

1. $\{\mathbf{a}\} = \mathbf{T}$,
2. $\{\mathbf{d}\} = \mathbf{F}$,

3. $\{\mathbf{u}\} = \mathbf{U}$,
4. $\{\mathbf{a}, \mathbf{u}\} = \mathbf{TU}$,
5. $\{\mathbf{d}, \mathbf{u}\} = \mathbf{FU}$,
6. $\{\mathbf{a}, \mathbf{d}\} = \mathbf{B}$,
7. $\{\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{u}\} = \mathbf{BU}$,
8. $\emptyset = \mathbf{N}$.

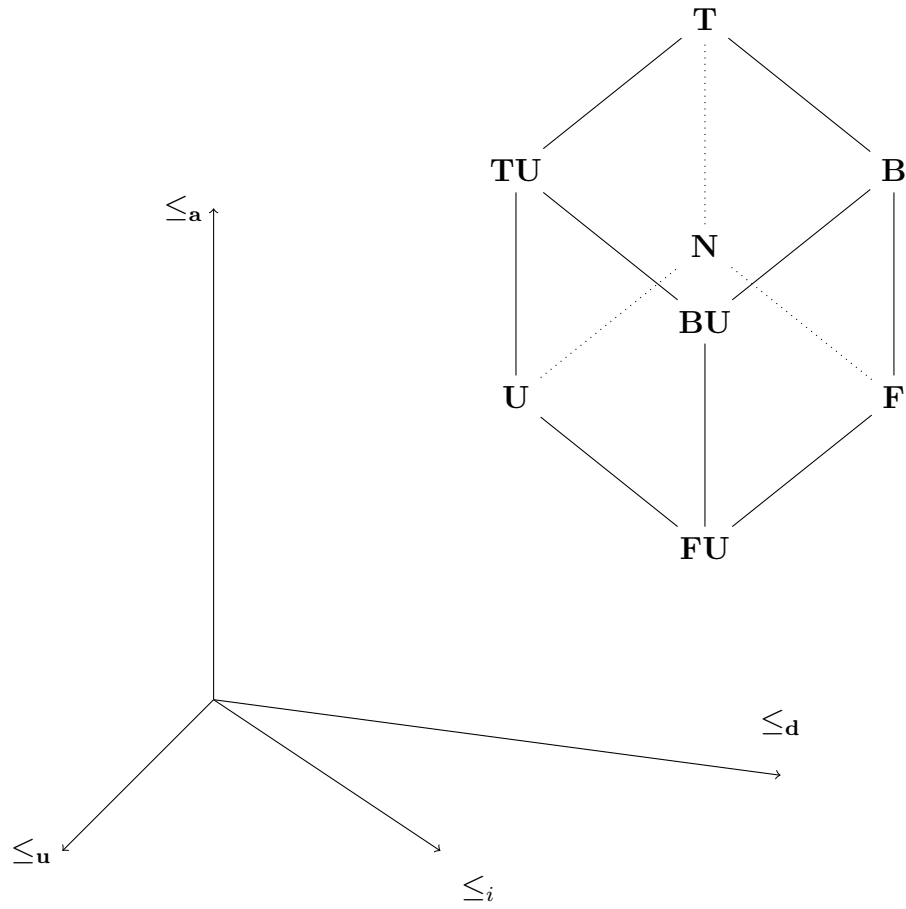


Рис. 5: $EIGHT_4$

Помимо уже известных ранее значений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{F}$, появляются значения с новой интерпретацией. В частности, различаются два уровня незнания: $\mathbf{N}$ означает своего рода тотальное незнание

как у источника информации, так и у компьютера, в свою очередь **U** предполагает информацию о незнании источника. Помимо этого, появляются две разновидности противоречивой информации: уже знакомое значение **B** и обогащенное незнанием источника значение **BU**. Аналогично, появляются две разновидности «лжи» и «истины»: **FU** и **TU**, соответственно.

На множестве **8** можно естественным образом задать четыре отношения частичного порядка: $\leq_a$, $\leq_d$, $\leq_u$ и $\leq_i$. Каждый из этих порядков сам по себе детерминирует полноценную решетку на множестве **8**, а объединенная структура со всеми четырьмя порядками дает так называемую *Тетрарешетку* $EIGHT_4$.

Примечательно, что каждый из порядков $\leq_a$ и $\leq_d$ может быть использован для определения отношения следования, эквивалентного логике **FDE**. Грубо говоря, $\leq_a$ и $\leq_d$ порождают логику **FDE**.

Еще одним показательным «кейсом» является концепция «двуликой истины» Д. В. Зайцева, Я. В. Шрамко и О. М. Григорьева [7, 109], где структура истинностных значений обосновывается за счет различия между онтологической и эпистемической характеристиками истинностного значения. Согласно данному подходу, мы можем рассматривать семантику, где множество истинностных значений есть результат смещения двух независимых множеств истинностных значений. Одно из этих множеств состоит из значений «истина» и «ложь», которые традиционным образом имеют онтологическое обоснование, то есть трактуются как значения (денотаты) произвольного высказывания в духе Г. Фреге, второе же состоит из значений «истина» и «ложь», которые есть «*истина*» и «*ложь*», с точки зрения *некоторого субъекта*, то есть выражают уже (субъективную) оценку высказывания как истинного или ложного. Таким образом, эта концепция открывает интересную перспективу на условия истинности высказываний. Они могут быть, скажем, истинными онтологически и ложными эпистемически, истинными онтологически и истинными эпистемически и т. п.

Вполне естественным кажется поддержать такую методологию эмансипации истины и лжи и классифицировать её как *сильный дуализм* между истинностью и ложностью.

В противоположность сильному можно выделить *слабый дуализм*. Согласно этому подходу высказывания могут быть: а) истинными и не-ложными, б) истинными и ложными, в) ложными и не-истинными и г) не-истинными и не-ложными. В отличие от слабого дуализма, сильный предполагает исключение из условий истинности мета-языковой связки «не-», что позволяет рассмотреть по-настоящему независимые понятия истинности и ложности, в духе вышеупомянутых авторов:

- высказывание A может быть истинным в первом смысле и истинным во втором смысле;
- высказывание A может быть истинным в первом смысле и ложным во втором смысле;
- высказывание A может быть ложным в первом смысле и истинным во втором смысле;
- высказывание A может быть ложным в первом смысле и ложным во втором смысле.

Интересно, что истинностные значения с подобной структурой рассматривал и Н. Белнап. В своей работе «How a computer should think» [36] Н. Белнап утверждает, что его четыре значения по своей природе явно являются эпистемическими, поскольку они были сообщены компьютеру, но это не исключает того, что высказывания могут иметь истинностные значения независимо от того, что сообщается компьютеру. Таким образом, Н. Белнап предлагает рассмотреть двухкомпонентные значения, первая компонента которых может включать одно из эпистемических белнаповских значений **T**, **B**, **N**, **F**, а вторая компонента — одно из онтологических фреговских значений «the True» и «the False». Полученная система значений, очевидно, является восьмизначной:

высказывание A может принять значение (**T**, «the True»);

высказывание A может принять значение (**T**, «the False»);

высказывание A может принять значение (**B**, «the True»);

высказывание A может принять значение (**B**, «the False»);

высказывание A может принять значение (**N**, «the True»);

высказывание A может принять значение ($\mathbf{N}$, «the False»);

высказывание A может принять значение ($\mathbf{F}$, «the True»);

высказывание A может принять значение ($\mathbf{F}$, «the False»).

Естественно, данная структура является еще одним частным случаем семантики обобщенных истинностных значений, только в отличие от семантики Зайцева-Григорьева-Шрамко множество эпистемических значений является не двухэлементным, а четырехэлементным. Белнап, однако, оставляет эту структуру без особого внимания, поскольку справедливо замечает, что, с теоретико-доказательной точки зрения, данная структура порождает ту же самую логику $\mathbf{FDE}$, что и в четырехзначном случае. Конечно, эта позиция не является бесспорной, поскольку все зависит от того, каким образом мы определяем отношение следования, точнее будет сказать, что тип логики зависит от того, какое следование мы хотим определить и какую истину оно должно сохранять.

Стоит также упомянуть и работу Г. Приста [80], где он использует практически ту же самую методологию обобщения истинностных значений, о которой мы говорили ранее. Одной из обсуждаемых проблем, с которой сталкивается так называемая «логика парадокса» ($\mathbf{LP}$), является возникновение «гипер-противоречий» (*hyper-contradictions*)⁹. Последние приводят к своеобразным модификациям «парадокса лжеца», что получило красноречивое название в зарубежной литературе «Revenge Liar»¹⁰. Напомним, что в качестве значений в трехзначной логике Приста рассматриваются: $\{1\}$ – «только истина», $\{0\}$ – «только ложь» и $\{1, 0\}$ – «истина и ложь». Суть парадокса сводится к следующему:

($\star$). «Рассмотрим высказывание: это высказывание только ложно. Оно является

либо истинным, либо ложным. Если оно истинно, то оно либо истинно и ложно

($\{1, 0\}$), либо только истинно ($\{1\}$). Но поскольку оно истинно, оно только ложно

⁹В сущности, с этой проблемой сталкивается любая многозначная логика, в которой можно пытаться анализировать парадоксальные высказывания наподобие «это высказывание ложно». Внимание акцентируется на логике Приста только потому, что она была специально предложена им для разрешения «парадокса лжеца».

¹⁰Дословно это название можно перевести как «Мсть за лжеца».

$(\{0\})$. Значит, оно принимает невозможное значение. Если, с другой стороны, оно ложно, тогда оно не является только ложным $(\{0\})$. Значит, оно истинно, что, как мы уже видели, приводит к невозможным значениям». [80, стр. 239, *перевод автора*]

Прист предлагает рассмотреть бесконечнозначное множество истинностных значений, которые получаются в результате обобщения множества исходных значений **LP**. Отличие от подхода Я. В. Шрамко и Х. Ванзинга состоит в том, что в результате обобщения исходного множества, пустое множество не учитывается в качестве самостоятельного значения. Более формально, если взять в качестве базового множества значений множество **2**, то процедура обобщения Приста может быть описана следующим образом: пусть $S_0 = \mathbf{2}$, тогда $S_{n+1} = \mathcal{P}(S_n) / \emptyset$. На полученном множестве значений стандартным путем определяются условия истинности для логических связок и задается отношение следования [80, стр. 240], которое детерминирует ту же самую «логику парадокса». В результате, по мнению Приста, аргумент $(\star)$ не состоятелен, поскольку обобщенные таким образом истинностные значения позволяют высказываниям принимать «невозможные» в трехзначном случае значения, сохраняя при этом ту же логику. В работе [92] авторы обращают внимание, что аналогичные рассуждения применимы и в случае, если мы рассматриваем трехзначную логику Клини (**K₃**).

В заключение настоящего параграфа хотелось бы отметить следующее. Обсуждаемые проблемы наводят на естественную мысль о том, что логика **FDE** является чем-то имманентным по отношению к обобщенным истинностным значениям. Действительно, различные степени или базисы обобщения в большинстве случаев приводят к семантическим и алгебраическим структурам, которые естественным образом порождают $\models_{\text{fde}}$. В некоторых случаях, конечно же, семантические структуры на базе обобщенных истинностных значений приводят нас к отношениям следования, детерминирующим логику Приста и логику Клини. Однако не менее естественной представляется попытка изменить эту «внутреннюю логику

обобщенных истинностных значений».

2 Прямая сохранность истинности и неложности, обратная сохранность ложности и неистинности

2.1 Семантика логики ETL

Семантически логику **ETL** можно задать через изменение множества выделенных значений в матрице Белнапа. Если в логике **FDE** в качестве множества выделенных значений используется $\{\mathbf{T}, \mathbf{B}\}$, то для построения **ETL** мы используем множество $\{\mathbf{T}\}$.

Рассмотрим пропозициональный язык $\mathcal{L}$, определенный ранее. Для интерпретации формул данного языка будем использовать следующую матрицу:

$$\mathcal{M}_{etl} = \langle \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}, \{\mathbf{T}\}, \{f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\sim}\} \rangle$$

Определим функцию оценки как отображение $v : Prop \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$. Значения логических связок определяются соответствующими функциями, основываясь на нижеследующем определении.

Определение 2.1. *Условия истинности для логических связок языка $\mathcal{L}$.*

$\wedge$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\vee$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\sim$	
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$

Определим отношение логического следования.

Определение 2.2. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \models_{etl} B \Leftrightarrow \forall v (v(A) = \mathbf{T} \Rightarrow v(B) = \mathbf{T}).$$

Утверждения вида $A \models_{\text{etl}} B$ будем называть *etl-валидными*.

Прежде чем перейти к рассмотрению семантических свойств $\models_{\text{etl}}$, напомним, что значения в $\mathcal{M}_{\text{etl}}$ могут быть интерпретированы как множество всех подмножеств множества классических значений $\{T, F\}$, и тогда мы можем переформулировать отношение $\models_{\text{etl}}$ в терминах сохранности истинности-и-не-ложности:

Определение 2.3. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{etl}} B \Leftrightarrow \forall v((T \in v(A) \text{ и } F \notin v(A)) \Rightarrow (T \in v(B) \text{ и } F \notin v(B))).$$

Отношение $\models_{\text{etl}}$ представляется нам естественной модификацией $\models_{\text{fde}}$. Последнее, как мы замечали ранее, может быть сформулировано на базисе степени-множества от $\{T, F\}$ через сохранность истинности от посылки к заключению.

Определение 2.4. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{fde}} B \Leftrightarrow \forall v(T \in v(A) \Rightarrow T \in v(B)).$$

Это определение подкупает своей простотой. Вообще говоря, отличительной чертой обсуждаемой нами семантики – построенной в русле идей интуитивной семантики М. Данна – является простота всех её семантических определений, а точнее сохранение их в том виде, в котором они формулируются в классической логике. Какая изящная идея: сохранить классические условия истинности для сложных высказываний, определить следование через сохранность истинности и получить в результате логику без парадоксов классического следования. Несмотря на то, что все мы прекрасно понимаем, какие подводные камни – в виде провальных и пресыщенных оценок – лежат в основании этой семантики, мало кто будет отрицать её неподдельность.

Следуя той же естественной методологии, мы в праве потребовать от следования сохранять истинность вместе с не-ложностью, что является чем-то само собой разумеющимся в классической логике, однако не наблюдается в релевантной логике первого уровня. В самом

деле, при всей внешней «классичности» отношения $\models_{fde}$ как отношения, сохраняющего истинность, оно все же не гарантирует сохранности не-ложности, в отличие от классики. Отсюда и можно черпать мотивацию для рассмотрения $\models_{etl}$.

Одним из первых интересных свойств этого отношения является некоторая преемственность по отношению к классу fde -валидных утверждений. Зафиксируем его в следующем утверждении.

Утверждение 2.5. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \models_{fde} B \Rightarrow A \models_{etl} B$$

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим, что $A \not\models_{etl} B$. Используя определение 2.3, получаем, что существует такая оценка v , что $T \in v(A)$, $F \notin v(A)$, и $T \notin v(B)$ или $F \in v(B)$.

Пусть $F \in v(B)$.

Если при этом $T \in v(B)$, то, согласно лемме 4 из [11, стр. 136] и, используя то, что $T \in v(A)$, $F \notin v(A)$, получаем, что $A \not\models_{fde} B$. Действительно, интересной особенностью отношения $\models_{fde}$ является то, что для любого fde -валидного утверждения верно, что если его посылка принимает значение **T**, то заключение не может принять значение **B**.

Если же при $F \in v(B)$, мы имеем $T \notin v(B)$, то, согласно определению 2.4 и, используя то, что $T \in v(A)$, $F \notin v(A)$, получаем, что $A \not\models_{fde} B$. $\square$

В последующих параграфах, когда речь пойдет о доказательстве полноты, это свойство будет существенно нами использовано.

К числу других примечательных свойств $\models_{etl}$ можно отнести появление среди класса валидных утверждений о следовании парадокса «взрывоопасности». Легко установить, используя заданные выше определения, что $A \wedge \sim A \models_{etl} B$. С другой стороны, двойственный ему парадокс остается некорректным в данной семантике. Опять же, основываясь на заданных определениях, нетрудно показать, что для некоторых $A, B \in Form$ имеет место

$B \not\models_{etl} A \vee \sim A$. Таким образом, логику **ETL** можно классифицировать как парapolную и не паранепротиворечивую.

Особого внимания заслуживает следующий факт. Согласно определению $\models_{etl}$, некорректным оказывается правило непрямого исключения дизъюнкции. Как отмечают У. Ривиеччио и А. Питц, $A \wedge \sim A \models_{etl} C$, $B \wedge \sim B \models_{etl} C$, но $(A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B) \not\models_{etl} C$, при $v(A) = \mathbf{B}$, $v(B) = \mathbf{N}$ и $v(C) = \mathbf{F}$. Однако мы не ограничимся простой констатацией этого факта и укажем на более фундаментальные его следствия. Введем некоторую нотацию. Пусть $X^\models = \{Y \mid X \models Y\}$, где $X, Y \in Form$. Отношение следования *по Тарскому* характеризуется множеством хорошо известных свойств, среди которых и так называемое свойство дизъюнктивности:¹¹

$$(I). (A \vee B)^\models = A^\models \cap B^\models \quad (\text{Свойство дизъюнктивности}).$$

Отношение $\models_{etl}$ не удовлетворяет этому свойству, поскольку можно найти контрпример, показывающий существование такой формулы C , что $C \in A^\models \cap B^\models$ и $C \notin (A \vee B)^\models$. Попробуем дать более неформальную характеристику этому свойству. Утверждение (I) говорит нам, что множество общих следствий произвольных высказываний A и B равнозначно множеству следствий дизъюнкции этих высказываний. Некорректность правила непрямого исключения дизъюнкции относительно $\models_{etl}$ иллюстрирует противоположное – множество следствий из дизъюнкции высказываний A и B находится в отношении подчинения к множеству общих следствий обоих дизъюнктов по отдельности.

Формально, причиной этого казуса выступает металогика, которая используется нами, и которая, в сущности, является классической. Определение 2.2, равно как и определение

¹¹Здесь необходимо некоторое уточнение. Традиционно отношение следования *по Тарскому* характеризуется четырьмя свойствами: *сечение*, *структурность*, *монотонность*, *рефлексивность*. Упомянутое свойство дизъюнктивности, равно как и многие другие свойства подобного рода, введено Р. Вуйцицким в [105] и не имеет отношения к работам А. Тарского. Свойства данного типа позволяют характеризовать пропозициональные связки при синтаксическом рассмотрении *логики* как оператора замыкания, ассоциированного с некоторым языком. Если оператор замыкания обладает тем или иным свойством, например, дизъюнктивности, то соответствующая связка может быть охарактеризована как *дизъюнкция* в данной *логике*; аналогично и с другими связками [см. там же]. По-видимому, Р. Вуйцицкий использовал термин «Tarski-style conditions», исходя из очевидной аналогии этих свойств с классическими условиями истинности Тарского.

2.3, сформулированы таким образом, что высказывание вида $A \wedge \sim A$ не может принять выделенное значение, отсюда – антецедент метаязыковой импликации, зашитой в этих определениях, оказывается заведомо ложным, а значит приводит к истинности самой импликации. В свою очередь дизъюнктивное высказывание вида $(A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B)$ может принять выделенное значение, когда $v(A) = \mathbf{B}$ и $v(B) = \mathbf{N}$. Таким образом и получается, что из высказываний $A \wedge \sim A$ и $B \wedge \sim B$ следует один и тот же класс высказываний, не совпадающий с классом следствий из высказывания $(A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B)$. Образно выражаясь, дизъюнкция выступает в роли некоторого фильтра.

На наш взгляд, логическое следование, обладающее таким свойством, порождает интересные перспективы в изучении некоторых современных метафизических концепций истинности. Несмотря на то, что само отношение $\models_{eti}$, скорее, является вырожденным случаем, оно может послужить своеобразным прототипом для исследования таких отношений, где подобные ограничения на свойство дизъюнктивности будут более гибкими и прикладными. Свойство дизъюнктивности играет существенную роль в теории *факторов истинности* (Truthmakers theory). Данная теория является своеобразной модификацией корреспондентной концепции истинности и активно обсуждается в современной метафизике (более подробно см. [65], [32]). Концепция фактора истинности основывается на предельно простом тезисе:

Фактор истинности – это то, в силу чего что-то является истинным.

Главным вопросом, связанным с изучением факторов истинности, является адекватная экспликация отношения между самим фактором истинности и носителем истинности (truth-bearer). В англоязычной традиции для обозначения этого отношения используется термин «truthmaker relation» (TR). Одним из активно развиваемых подходов является, фактически, отождествление этого отношения с отношением логического следования. Данный подход реализуется в работах многих зарубежных исследователей. Свойство дизъюнктивности выступает в качестве основного инструмента для критики TR, сформулированного в терминах строгой импликации Льюиса. Эта критика предложена Г. Ресталлом в ряде работ

(см. [82], [83]) и послужила стимулом для оживленных дискуссий касательно следования и, в частности, свойства дизъюнктивности в теории факторов истинности. В данном контексте отношения типа $\models_{etl}$ могут быть очень уместны.

2.2 Формализация А. Питца и У. Ривиеччио

Впервые отношение $\models_{etl}$ исследуется в работе Ж. Маркоса [66] в 2011 году, где автор предлагает аналитико-табличную формализацию этого отношения. Первая гильбертовская аксиоматизация $\models_{etl}$ была предложена А. Питцем и У. Ривиеччио в 2013 году [79]. Там же эта логика впервые обретает название «Exactly True Logic» (**ETL**). Заметим, что 11 ноября 2010 года состоялось выступление У. Ривиеччио на семинаре по неклассической логике в Университете Барселоны, где им рассматривалась матрица с одним выделенным значением **T** в контексте различных расширений логики **BL**¹². Кроме того, в 2003 году А. Аврон [33] высказывает идею генценовской формализации логики Белнапа с одним выделенным значением **T** и тремя выделенными значениями **T**, **B**, **N** на основе предлагаемого им универсального метода и даже демонстрирует подобную формализацию на примере четырехзначной логики Гёделя с одним выделенным значением. Мы же сконцентрируем своё внимание на подходе А. Питца и У. Ривиеччио.

Исчисление А. Питца и У. Ривиеччио, фактически, является расширением системы, предложенной Дж. М. Фонтом и А. П. Пынько для *логики Белнапа* **BL**, за счет присоединения следующего правила:

$$\frac{p \wedge (\sim p \vee q)}{q} \text{ (R16)}$$

Полностью система А. Питца и У. Ривиеччио (обозначим её **PR**_{etl}) имеет следующий вид:

Определение 2.6. *Обозначим через **PR**_{etl} исчисление, определяемое следующим множеством правил (без аксиом), где $p, q, r \in Prop$:*

¹²U. Riviuccio. «Some Extensions of the Belnap-Dunn logic», Non-classical Logics Seminar, University of Barcelona, Barcelona (Spain), 11 November 2010. Полный текст презентации У. Ривиеччио доступен по ссылке: http://www.cs.le.ac.uk/events/clog/birmingham/DeMorgan_BCN.pdf

$$\begin{array}{cccc}
\frac{p \wedge q}{p} \text{ (R1)} & \frac{p \wedge q}{q} \text{ (R2)} & \frac{p}{p \wedge q} \text{ (R3)} & \frac{p}{p \vee q} \text{ (R4)} \\
\frac{p \vee q}{q \vee p} \text{ (R5)} & \frac{p \vee p}{p} \text{ (R6)} & \frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r} \text{ (R7)} & \frac{p \vee (q \wedge r)}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)} \text{ (R8)} \\
\frac{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}{p \vee (q \wedge r)} \text{ (R9)} & \frac{p \vee r}{\sim \sim p \vee r} \text{ (R10)} & \frac{\sim \sim p \vee r}{p \vee r} \text{ (R11)} & \\
\frac{\sim(p \vee q) \vee r}{(\sim p \wedge \sim q) \vee r} \text{ (R12)} & \frac{(\sim p \wedge \sim q) \vee r}{\sim(p \vee q) \vee r} \text{ (R13)} & \frac{\sim(p \wedge q) \vee r}{(\sim p \vee \sim q) \vee r} \text{ (R14)} & \\
\frac{(\sim p \vee \sim q) \vee r}{\sim(p \wedge q) \vee r} \text{ (R15)} & \frac{p \wedge (\sim p \vee q)}{q} \text{ (R16)} & &
\end{array}$$

Авторы сформулированного выше исчисления не сопровождают его определением вывода. Кроме того, исчисление **BL**, расширением которого является **PR_{etl}**, также описывается без строго определенного понятия вывода как в работе Дж. М. Фонта, так и в статье А. Пынько. В связи с этим мы попробуем самостоятельно восстановить искомое определение для **PR_{etl}**.

Определение 2.7. Выводом P в системе **PR_{etl}** называем дерево, состоящее из формул языка $\mathcal{L}$, где каждая формула, кроме самой нижней, является посылкой некоторого правила из **PR_{etl}**, нижняя формула которого также принадлежит P .

Данное определение, фактически, является некоторой разновидностью стандартных определений вывода для натуральных или секвенциальных исчислений¹³.

Определение 2.8. Самые верхние формулы в P называем посылками вывода. Очевидно, что любой вывод P в **PR_{etl}** имеет единственную формулу, расположенную ниже всех остальных формул из P . Такую формулу будем называть заключением вывода P . Вывод с формулой φ в заключении также будем называть выводом формулы φ . Формула φ называется выводимой в **PR_{etl}**, если существует её вывод в **PR_{etl}**.

¹³См. например [21, 19]

Несмотря на то, что данное определение достаточно простое, все же для построения полноценных выводов в $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$ требуется использование дополнительных мета-правил, которые, в сущности, описывают стандартные свойства отношения выводимости.

В качестве иллюстрации рассмотрим вывод $p \vdash_{\text{PR}} \sim\sim p$ в $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$:

$$\frac{\frac{\frac{p}{p \vee \sim\sim p} (R4)}{\sim\sim p \vee \sim\sim p} (R10)}{\sim\sim p} (R6)$$

а также вывод $p \wedge q \vdash_{\text{PR}} q \wedge p$ в $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$:

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} (R2) \quad \frac{p \wedge q}{p} (R1)}{q \wedge p} (R3)$$

Еще раз отметим, что выводы в системе $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$ имеют древовидную структуру, в которой доказываемая формула помещена в корне дерева, и каждая ветвь упорядочена вверх, к посылкам. Кроме того, очевидно, что в этой системе используются своего рода мета-правила, которые непосредственно не формулируются. Во-первых, используется *транзитивность* для того, чтобы получить окончательный вывод из посылок (посылки) заключения, то есть от вершины дерева к его корню; и *сокращение*, чтобы устранять излишние повторяющиеся посылки. Во-вторых, само определение отношения выводимости $\Gamma \vdash_{\text{PR}} \varphi$, как отношения типа SET-FMLA предполагает имплицитное использование *перестановки* и *уточнения*, т. к. Γ является *множеством* формул.

В работе «First-degree entailment and its Relatives» [87] авторами предпринята попытка переформулировать исчисление $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$ в виде *системы выводимостей*¹⁴. Этот подход предполагает рассмотрение правил $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$ в качестве аксиомных схем и позволяет непосредственно работать с теми дополнительными правилами, о которых мы говорили выше.

Определение 2.9. Обозначим через $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$ исчисление, которое определяется следующим множеством аксиомных схем и правил, где $\{\Gamma, \Delta\} \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq \text{Form}$:

¹⁴Не путать с системами *бинарных выводимостей*. Разница состоит в том, что система выводимостей предполагает, что отношение $\vdash$ трактуется как отношение типа SET-FMLA, FMLA-SET или SET-SET, а в системах бинарных выводимостей оно трактуется в виде FMLA-FMLA, то есть является бинарным отношением между двумя формулами.

$$\begin{aligned}
& a1. \varphi \wedge \psi \vdash_{\text{etl}} \varphi; \quad a2. \varphi \wedge \psi \vdash_{\text{etl}} \psi; \quad a3. \varphi, \psi \vdash_{\text{etl}} \varphi \wedge \psi; \quad a4. \varphi \vdash_{\text{etl}} \varphi \vee \psi; \\
& a5. \varphi \vee \psi \vdash_{\text{etl}} \psi \vee \varphi; \quad a6. \varphi \vee \varphi \vdash_{\text{etl}} \varphi; \quad a7. \varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash_{\text{etl}} (\varphi \vee \psi) \vee \chi; \\
& a8. \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \vdash_{\text{etl}} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi); \quad a9. (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash_{\text{etl}} \varphi \vee (\psi \wedge \chi); \\
& a10. \varphi \vee \psi \vdash_{\text{etl}} \sim\sim\psi \vee \varphi; \quad a11. \sim\sim\psi \vee \varphi \vdash_{\text{etl}} \varphi \vee \psi; \\
& a12. \sim(\varphi \vee \psi) \vee \chi \vdash_{\text{etl}} (\sim\psi \wedge \sim\varphi) \vee \chi; \quad a13. (\sim\psi \wedge \sim\varphi) \vee \chi \vdash_{\text{etl}} \sim(\varphi \vee \psi) \vee \chi; \\
& a14. \sim(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \vdash_{\text{etl}} (\sim\psi \vee \sim\varphi) \vee \chi; \quad a15. (\sim\psi \vee \sim\varphi) \vee \chi \vdash_{\text{etl}} \sim(\varphi \wedge \psi) \vee \chi; \\
& a16. \sim\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash_{\text{etl}} \psi; \\
& r1. \Gamma \vdash_{\text{etl}} \varphi; \Delta, \varphi \vdash_{\text{etl}} \psi / \Gamma, \Delta \vdash_{\text{etl}} \psi; \quad r2. \Gamma \vdash_{\text{etl}} \psi / \Gamma, \varphi \vdash_{\text{etl}} \psi; \\
& r3. \Gamma, \varphi, \varphi \vdash_{\text{etl}} \psi / \Gamma, \varphi \vdash_{\text{etl}} \psi; \quad r4. \Gamma, \varphi, \psi \vdash_{\text{etl}} \chi / \Gamma, \psi, \varphi \vdash_{\text{etl}} \chi.
\end{aligned}$$

Определение 2.10. Выводом в системе $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$ называем непустую последовательность утверждений о выводимости $\Gamma_1 \vdash_{\text{etl}} \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash_{\text{etl}} \varphi_m$, каждое из которых либо является частным случаем аксиомной схемы из $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$, либо получено из предыдущих по одному из правил вывода системы $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$.

Утверждение $\Gamma \vdash_{\text{etl}} \varphi$ называем теоремой исчисления $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$, если существует вывод в $\mathbf{HG}_{\text{etl}}$, в котором последним утверждением является $\Gamma \vdash_{\text{etl}} \varphi$; такой вывод называется выводом утверждения $\Gamma \vdash_{\text{etl}} \varphi$.

Доказана следующая теорема [87, Theorem 2.6., Theorem 3.3.].

Теорема 2.11. Для всяких $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ верно, что

$$\Gamma \vdash_{\text{PR}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\text{etl}} \varphi.$$

На первый взгляд, основное различие исчислений $\mathbf{PR}_{etl}$ и $\mathbf{HG}_{etl}$ состоит в том, что $\mathbf{PR}_{etl}$ позволяет осуществлять непосредственные выводы формул из других формул или множеств формул, в то время как $\mathbf{HG}_{etl}$ позволяет осуществлять выводы одних утверждений о выводимости на основании других.

Характерной чертой «гильбертовских» систем является то, что в них традиционно выделяются два типа лингвистических объектов – аксиомы и правила вывода. С точки зрения теоретико-доказательного подхода к изучению логики, о первых можно говорить как о «самоочевидных логических истинах» или просто – тавтологиях. Для их вывода не требуется никаких посылок или допущений, поэтому при построении гильбертовских исчислений обычно формируется список аксиом, которые принимаются без доказательства. В свою очередь, правила вывода, число которых традиционно минимизируется до одного, а именно – *modus ponens*, позволяют выводить одни формулы из других.

С этой точки зрения, классификация фигур заключения систем $\mathbf{PR}_{etl}$ и $\mathbf{BL}$ как «правил» является вполне оправданной, поскольку в логиках, основанных на четырехзначной семантике Данна-Белнапа, попросту отсутствуют тавтологии, а значит и аксиом как таковых быть не может. Однако авторы этих исчислений вынуждены платить за это большую цену в виде изменения самой структуры выводов, что делает эти системы малопохожими на исчисления гильбертовского типа.

Принимая во внимание эти замечания, использование термина «исчисление гильбертовского типа» по отношению к системам $\mathbf{PR}_{etl}$ и $\mathbf{BL}$ мы находим не совсем подходящим. С этой точки зрения, системы бинарных выводимостей с большей уверенностью можно назвать системами «гильбертовского типа», поэтому далее предлагается формализация логики $\mathbf{ETL}$ в виде системы бинарных выводимостей.

2.3 Формализация логики ETL в виде системы бинарных выводимостей

Главная сложность на пути к построению указанной аксиоматизации логики **ETL** состоит в поиске подходящей замены правилу непрямого исключения дизъюнкции, которое в общем виде можно сформулировать так:

$$\frac{A \vdash C, B \vdash C}{A \vee B \vdash C} (R_V^1)$$

Любое правило вывода обладает существенным свойством, которое, собственно, и делает его правилом — это *всеобщность*. Оно заключается в сохранении валидности при любой подстановке формул в схему правила, что, фактически, выражает естественное понимание закона логики. В поисках адекватной формализации какого-либо отношения следования мы должны гарантировать сохранение этой всеобщности не только на синтаксическом, но и на семантическом уровне. Другими словами, подвергая каждый подстановочный случай правила вывода семантическому анализу, мы должны каждый раз (при любой интерпретации) наблюдать отношение логического следования между посылками и заключением (в нашем случае должна наблюдаться валидность посылок правила и валидность заключения). Именно эта семантическая всеобщность нарушается с появлением какого-либо семантического контрпримера. Если мы рассматриваем (R_V^1) в контексте **FDE**, то оно, естественно, отвечает всем требованиям к всеобщности. Однако как только мы определяем отношение следования через сохранность значения **T**, мы получаем контрпример, который фальсифицирует данное правило. В контексте сказанного это означает, что нарушается требование к семантической всеобщности. У. Ривеччио и А. Питц [79] обращают внимание, что $p \wedge \sim p \models_{\text{etl}} q$, $r \wedge \sim r \models_{\text{etl}} q$, но $(p \wedge \sim p) \vee (r \wedge \sim r) \not\models_{\text{etl}} q$. Действительно, при оценке $v(p) = \mathbf{B}$, $v(r) = \mathbf{N}$ и $v(q) = \mathbf{F}$, посылки являются *etl*-валидными, а заключение — нет. По этой причине мы не можем использовать (R_V^1) в качестве правила исключения дизъюнкции в **ETL**. С другой стороны, этот контрпример не затрагивает другие подстановочные случаи нашего правила. Рассмотрим следующий случай: $p \models_{\text{etl}} p \vee q$ и $q \models_{\text{etl}} p \vee q$, и в то же время $p \vee q \models_{\text{etl}} p \vee q$. Легко проверить, что

при любой оценке данные утверждения о следовании будут *etl*-валидными, но самое интересное – что при любой оценке данные утверждения будут и *fde*-валидными! При построении **ETL**, независимо от того, хотим мы этого или нет, мы автоматически имеем дело со всеми *etl*-валидными утверждениями, которые, образно говоря, перешли к нам по наследству от **FDE**, то есть те, которые являются как *etl*-валидными, так и *fde*-валидными. Это свойство отношения $\models_{etl}$ мы рассматривали выше (см. Утверждение 2.5). Все, что нам нужно теперь для адекватной аксиоматизации **ETL** – найти подходящий синтаксический способ получения их синтаксических аналогов (выводимостей). Попробуем наметить возможные пути решения этой проблемы и реализовать один из них.

Первый способ предполагает введение так называемой *контрапозитивной фильтрации* посылок правила (R_V^1) . Поскольку в системе **FDE** правило контрапозиции является допустимым, мы автоматически можем получить для любой *fde*-теоремы её контрапозитивный образ. Однако ранее мы уже обращали внимание, что не все *etl*-теоремы имеют своих контрапозитивных напарников (см. Утверждение 2.16). Но как раз эти, «плохие» выводимости и являются характеристическими для логики **ETL**, остальные же *etl*-выводимости имеют своих контрапозитивных напарников. Образно говоря, это те самые выводимости, которые являются *fde*-теоремами. Следующее правило позволяет выразить это свойство синтаксически.

$$\frac{A \vdash C, \sim C \vdash \sim A, B \vdash C, \sim C \vdash \sim B}{A \vee B \vdash C} (R_V^2)$$

Посылки (R_V^2) в некотором роде «фильтруют» *etl*-выводимости, пропуская те, чьи контрапозитивные образы выводимы в **ETL**, то есть отбирая, на первый взгляд, только те *etl*-выводимости, которые также являются *fde*-выводимостями. При всей естественности этого правила, оно, к сожалению, обладает существенным недостатком. А именно – оно, равно как и (R_V^1) , не корректно относительно $\models_{etl}$. Действительно, рассмотрим следующий контрпример. Пусть $A \vdash C$ имеет вид $p \wedge \sim p \models_{etl} r \vee \sim r$, а $B \vdash C$ имеет вид $q \wedge \sim q \models_{etl} r \vee \sim r$. Естественно,

контрапозитивные варианты этих утверждений, а именно: $\sim(r \vee \sim r) \models_{\text{etl}} \sim(p \wedge \sim p)$ и $\sim(r \vee \sim r) \models_{\text{etl}} \sim(q \wedge \sim q)$ являются *etl*-валидными¹⁵. Очевидно, что если $v(p) = \mathbf{B}$, $v(q) = \mathbf{N}$, и $v(r) = \mathbf{B}$, то получаем $(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \not\models_{\text{etl}} r \vee \sim r$. Следовательно, (R_V^2) также не подходит для исключения дизъюнкции.

К счастью, существует по крайней мере два возможных выхода из этой ситуации.

Для начала мы можем модифицировать правило (R_V^2) путем наложения дополнительного ограничения на его посылки. Обратимся к опыту «отцов-основателей». Один из первых способов релевантизации, предложенный А. Андерсеном и Н. Белнапом, заключался в требовании о наличии общей пропозициональной переменной (*variable sharing property*) у антецедента и консеквента первоуровневой импликации. Согласно этому подходу, мы должны привести антецедент произвольной первоуровневой импликации $A \rightarrow B$ к его дизъюнктивной нормальной форме, а консеквент – к конъюнктивной нормальной форме, и затем убедиться в том, что каждый член дизъюнкции из антецедента имеет общую пропозициональную переменную с каждым членом конъюнкции из консеквента. Любая первоуровневая импликация, удовлетворяющая данному требованию, является таким образом релевантной. Последнее означает, что для нее не верны классические парадоксы вида $(A \wedge \sim A) \rightarrow B$ и $A \rightarrow (B \vee \sim B)$. Напомним, что $\rightarrow$, фактически, эквивалентна утверждению о выводимости (следовании). Поэтому вышеописанный метод абсолютно без изменений можно приложить не только к анализу первоуровневых импликаций, но и к анализу утверждений вида $A \vdash B$ ($A \models B$), в контексте которых мы и проводим наше исследование.

Итак, очевидно, что $\models_{\text{etl}}$ и $\vdash_{\text{etl}}$ не удовлетворяют указанному критерию релевантности, поскольку они являются «взрывоопасными». Однако так же очевидно, что $\models_{\text{fde}}$ и $\vdash_{\text{fde}}$ ему удовлетворяют. Метод контрапозитивной фильтрации позволил нам избавиться от проникновения «парадокса взрывоопасности» в посылки правила (R_V^2) , но оказался бессилён перед частным случаем этого парадокса $A \wedge \sim A \models B \vee \sim B$. Мы не случайно обратились к

¹⁵Спасибо законам де Моргана!

опыту А. Андерсена и Н. Белнапа, поскольку использование критерия релевантности по отношению к посылкам правила $(R_{\vee}^2)$ позволяет решить эту проблему. Пусть запись $X \vdash^{vs} Y$ означает, что $X \vdash Y$, и формулы X и Y имеют хотя бы одну общую пропозициональную переменную. Тогда наше правило фильтрации можно переформулировать следующим образом:

$$(R_{\vee}^3) \frac{A \vdash^{vs} C, \sim C \vdash^{vs} \sim A, B \vdash^{vs} C, \sim C \vdash^{vs} \sim B}{A \vee B \vdash C}$$

Теперь рассмотренный ранее контрпример не представляет никакой опасности. Очевидно, что даже при условии того, что $p \wedge \sim p \models_{\text{etl}} r \vee \sim r$ и $q \wedge \sim q \models_{\text{etl}} r \vee \sim r$, они не удовлетворяют критерию релевантности. Единственным минусом этого решения является громоздкость полученного правила. В данном случае тяжело не поддаться соблазну и не попытаться переформулировать правило $(R_{\vee}^3)$ в более компактном виде, положившись при этом на мнимую эффективность критерия релевантности.

$$(R_{\vee}^4) \frac{A \vdash^{vs} C, B \vdash^{vs} C}{A \vee B \vdash C}$$

Данный вариант, к сожалению, тоже не является корректным. Пусть $A \vdash C$ имеет вид $p \wedge \sim p \models_{\text{etl}} p \wedge q$, а $B \vdash C$ имеет вид $q \wedge \sim q \models_{\text{etl}} p \wedge q$. Оба утверждения удовлетворяют критерию релевантности и являются *etl*-валидными. Однако при некоторой оценке, а именно: $v(p) = \mathbf{B}$, $v(q) = \mathbf{N}$, получаем $(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \not\models_{\text{etl}} p \wedge q$.

Второй способ выхода из сложившейся ситуации, который мы и реализуем в настоящей работе, заключается во введении некоторой иерархии между выводимостями нашей системы.

Система $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ представляет из себя упорядоченную тройку $(\mathcal{L}, \vdash_1, \vdash_2)$, где $\mathcal{L}$ — определенный ранее пропозициональный язык, а $\vdash_1$ и $\vdash_2$ — бинарные отношения, характеризующиеся следующими аксиомами и правилами, соответственно.

$$\begin{aligned}
& a1. A \wedge B \vdash_1 A; \quad a2. A \wedge B \vdash_1 B; \quad a3. A \vdash_1 A \vee B; \\
& a4. B \vdash_1 A \vee B; \quad a5. A \vdash_1 \sim\sim A; \quad a6. \sim\sim A \vdash_1 A; \\
& a7. A \wedge (B \vee C) \vdash_1 (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8. \sim(A \wedge B) \vdash_1 \sim A \vee \sim B; \\
& a9. \sim A \vee \sim B \vdash_1 \sim(A \wedge B); \quad a10. \sim(A \vee B) \vdash_1 \sim A \wedge \sim B; \\
& a11. \sim A \wedge \sim B \vdash_1 \sim(A \vee B); \quad a12. \sim A \wedge (A \vee B) \vdash_2 B; \\
& r1. A \vdash_1 B; B \vdash_1 C / A \vdash_1 C; \quad r2. A \vdash_2 B; B \vdash_2 C / A \vdash_2 C; \\
& r3. A \vdash_1 B; A \vdash_1 C / A \vdash_1 B \wedge C; \quad r4. A \vdash_2 B; A \vdash_2 C / A \vdash_2 B \wedge C; \\
& r5. A \vdash_1 C; B \vdash_1 C / A \vee B \vdash_1 C; \\
& r6. A \vdash_1 B / A \vdash_2 B.
\end{aligned}$$

Определение 2.12. Выводом в системе $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ называем непустую последовательность утверждений о выводимости $A_1 \vdash_i B_1, \dots, A_n \vdash_i B_m$, ($i \in \{1, 2\}$), каждое из которых либо является частным случаем аксиомной схемы из $\mathbf{L}_{\text{etl}}$, либо получено из предыдущих по одному из правил вывода системы $\mathbf{L}_{\text{etl}}$.

Утверждение $A \vdash_2 B$ называем теоремой исчисления $\mathbf{L}_{\text{etl}}$, если существует вывод в $\mathbf{L}_{\text{etl}}$, в котором последним утверждением является $A \vdash_2 B$; такой вывод называется выводом утверждения $A \vdash_2 B$.

Характерной чертой данной системы является разделение класса её выводимостей на два подкласса. Легко убедиться в том, что множество $\vdash_1$ -выводимостей совпадают с множеством $\vdash_{\text{fde}}$ -выводимостей. Другими словами, $(\mathcal{L}, \vdash_1)$ есть не что иное, как система **FDE**. Фактически, такая система позволяет нам симулировать следующее правило:

$$\frac{A \vdash_{\text{fde}} C, B \vdash_{\text{fde}} C}{A \vee B \vdash_{\text{etl}} C} (R_{\vee}^*)$$

Это в полной мере реализует обсуждаемые выше подходы к фильтрации посылок в правиле исключения дизъюнкции. В качестве расплаты за такое решение нам приходится рассматривать такую причудливую двухступенчатую систему выводимостей.

Продemonстрируем работу $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ на паре примеров.

Пример 2.13. Вывод утверждения $A \wedge \sim A \vdash_2 B$.

1. $A \wedge \sim A \vdash_1 \sim A$ (a2);
2. $A \wedge \sim A \vdash_1 A$ (a1);
3. $A \vdash_1 A \vee B$ (a3);
4. $A \wedge \sim A \vdash_1 A \vee B$ (2, 3, r1);
5. $A \wedge \sim A \vdash_1 \sim A \wedge (A \vee B)$ (1, 4, r3);
6. $A \wedge \sim A \vdash_2 \sim A \wedge (A \vee B)$ (5, r6);
7. $\sim A \wedge (A \vee B) \vdash_2 B$ (a12);
8. $A \wedge \sim A \vdash_2 B$ (6, 7, r2).

Следующий пример иллюстрирует использование правила исключения дизъюнкции.

Пример 2.14. Вывод утверждения $A \vee (\sim B \wedge \sim C) \vdash_2 A \vee \sim(B \vee C)$.

1. $A \vdash_1 A \vee \sim(B \vee C)$ (a3);
2. $\sim B \wedge \sim C \vdash_1 \sim(B \vee C)$ (a11);
3. $\sim(B \vee C) \vdash_1 A \vee \sim(B \vee C)$ (a4);

4. $\sim B \wedge \sim C \vdash_1 A \vee \sim(B \vee C)$ (2, 3, $r1$);
5. $A \vee (\sim B \wedge \sim C) \vdash_1 A \vee \sim(B \vee C)$ (1, 4, $r5$);
6. $A \vee (\sim B \wedge \sim C) \vdash_2 A \vee \sim(B \vee C)$ (5, $r6$).

Для дальнейшего рассмотрения свойств системы удобно иметь доказательство теоремы о семантической непротиворечивости (*soundness*).

Теорема 2.15. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \vdash_2 B \Rightarrow A \models_{etl} B.$$

Доказательство. Семантическая непротиворечивость доказывается с применением возвратной индукцией по параметру s , указывающему на ранг соответствующего утверждения $A \vdash_2 B$ в выводе. Для обоснования базисного случая необходимо показать, что все аксиомы являются *etl*-валидными утверждениями о следовании. Рассмотрим наиболее характерный случай.

- (а). Покажем, что $a12$ является *etl*-валидным утверждением о следовании. Допустим, что $\sim A \wedge (A \vee B) \not\models_{etl} B$. Согласно определению 2.2 это означает, что $v(\sim A \wedge (A \vee B)) = \mathbf{T}$, но $v(B) \neq \mathbf{T}$. В силу условий истинности для конъюнкции получаем, что $v(\sim A) = \mathbf{T}$ и $v(A \vee B) = \mathbf{T}$. Из того, что $v(\sim A) = \mathbf{T}$, получаем $v(A) = \mathbf{F}$. Отсюда и из условий истинности для дизъюнкции ясно, что $v(B) = \mathbf{T}$. Противоречие.

Кроме того, нам требуется показать, что правила вывода сохраняют *etl*-валидность от посылок к заключению. Аналогично рассмотрим пару характерных случаев.

- (б). Покажем, что правило $r2$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $A \models_{etl} B$, $B \models_{etl} C$, но $A \not\models_{etl} C$. Последнее означает, что $v(A) = \mathbf{T}$ и $v(C) \neq \mathbf{T}$. Из того, что $B \models_{etl} C$ по определению 2.2 получаем, что $v(B) \neq \mathbf{T}$. Из того, что $A \models_{etl} B$ по определению 2.2 получаем, что $v(A) \neq \mathbf{T}$. Противоречие.

(с). Доказательство того, что правило $r6$ удовлетворяет условию теоремы, является следствием результата Д. В. Зайцева и Я. В. Шрамко из [11] (лемма 4, стр. 136). Рассмотрим произвольное утверждение $A \models_{\text{fde}} B$. Согласно определению следования в **FDE** это означает, что при всякой оценке v , если $v(A) = \mathbf{T}$ или $v(A) = \mathbf{B}$, то $v(B) = \mathbf{T}$ или $v(B) = \mathbf{B}$. Лемма Зайцева-Шрамко утверждает, что если $A \models_{\text{fde}} B$, то не существует такой оценки, что $v(A) = \mathbf{T}$, а $v(A) = \mathbf{B}$. Другими словами, следование в **FDE** обладает свойством «прямого сохранения истины». Если посылка $A \models_{\text{fde}} B$ принимает значение $\mathbf{T}$, то и заключение сохраняет это же значение. Поскольку класс теорем $\vdash_{\text{fde}}$ совпадает с классом теорем $\vdash_1$, мы можем использовать этот результат.

Индуктивное допущение: пусть теорема справедлива для утверждения $A \vdash_2 B$, ранг которого меньше ранга s , где s — ранг рассматриваемого утверждения. Таким образом, доказательство данной теоремы тривиально. Если последнее утверждение в выводе является аксиомой, то, как мы показали ранее, оно является *etl*-валидным. Если последнее утверждение получено по одному из правил вывода, то, используя индуктивное допущение, мы получаем, что посылки правила являются *etl*-валидными, но тогда, используя (b), (с) и остальные случаи с правилами вывода, получаем, что результат применения соответствующего правила приведет к *etl*-валидному утверждению. $\square$

Обратим внимание на некоторые интересные свойства системы $\mathbf{L}_{\text{etl}}$.

Утверждение 2.16. *Следующие правила не являются допустимыми в системе $\mathbf{L}_{\text{etl}}$.*

$$(1). A \vdash_2 B / \sim B \vdash_2 \sim A;$$

$$(2). A \vdash_2 C; B \vdash_2 C / A \vee B \vdash_2 C.$$

Доказательство. Доказательство проводим, опираясь на теорему 2.15.

1. Необходимо показать, что $A \vdash_2 B$, но $\sim B \not\vdash_2 \sim A$. По теореме 2.15 получаем, что $A \models_{\text{etl}} B$.

Пусть $A \models_{\text{etl}} B$ имеет вид $p_1 \wedge \sim p_1 \models_{\text{etl}} q$. Пусть $v_{\text{etl}}(p_1) = \mathbf{B}$ и $v_{\text{etl}}(q) = \mathbf{F}$. Легко убедиться,

опираясь на определение 2.1, что $v_{etl}(\sim q) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}(\sim(p_1 \wedge \sim p_1)) = \mathbf{B}$. Но тогда по определению 2.2 имеем $\sim q \not\models_{etl} \sim(p_1 \wedge \sim p_1)$ и, соответственно, $\sim B \not\models_{etl} \sim A$. Отсюда по теореме 2.15 получаем, что $\sim B \not\models_2 \sim A$.

2. Необходимо показать, что $A \vdash_2 C$, $B \vdash_2 C$, но $A \vee B \not\models_2 C$. По теореме 2.15 получаем, что $A \models_{etl} C$ и $B \models_{etl} C$. Пусть $A \models_{etl} C$ имеет вид $p \wedge \sim p \models_{etl} r$, а $B \models_{etl} C$ имеет вид $q \wedge \sim q \models_{etl} r$. Пусть $v_{etl}(p) = \mathbf{B}$, $v_{etl}(q) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}(r) = \mathbf{F}$. Легко убедиться, опираясь на определение 2.1, что при таком приписывании значений, мы получим $v_{etl}((p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)) = \mathbf{T}$. Но тогда по определению 2.2 получим $(p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q) \not\models_{etl} r$ и, соответственно, $A \vee B \not\models_{etl} C$. Отсюда по теореме 2.15 получаем $A \vee B \not\models_2 C$.

□

Полнота системы $\mathbf{L}_{etl}$ относительно семантики $\mathbf{ETL}$ доказывается методом канонических моделей.

Определение 2.17. Для всякой простой теории τ и всякой $p_i \in Prop$ определим каноническую оценку v_{etl}^c :

1. $v_{etl}^c(p_i) = \mathbf{T} \Leftrightarrow p_i \in \tau$ и $\sim p_i \notin \tau$;
2. $v_{etl}^c(p_i) = \mathbf{B} \Leftrightarrow p_i \in \tau$ и $\sim p_i \in \tau$;
3. $v_{etl}^c(p_i) = \mathbf{N} \Leftrightarrow p_i \notin \tau$ и $\sim p_i \notin \tau$;
4. $v_{etl}^c(p_i) = \mathbf{F} \Leftrightarrow p_i \notin \tau$ и $\sim p_i \in \tau$;

Следующая лемма расширяет определение 2.17 на произвольные формулы.

Лемма 2.18. Пусть v_{etl}^c – каноническая оценка определенная выше. Тогда для всякой $A \in Form$ верно, что

1. $v_{etl}^c(A) = \mathbf{T} \Leftrightarrow A \in \tau$ и $\sim A \notin \tau$;

$$2. v_{etl}^c(A) = \mathbf{B} \Leftrightarrow A \in \tau \text{ и } \sim A \in \tau;$$

$$3. v_{etl}^c(A) = \mathbf{N} \Leftrightarrow A \notin \tau \text{ и } \sim A \notin \tau;$$

$$4. v_{etl}^c(A) = \mathbf{F} \Leftrightarrow A \notin \tau \text{ и } \sim A \in \tau;$$

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по числу логических связок в формуле. Базисный случай, когда формула A является пропозициональной переменной, справедлив в силу определения 2.17. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше s , где s – число связок в рассматриваемой формуле.

Пусть $A := \sim B$.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$. Используя а6. $\sim\sim B \vdash_1 B$ и определение теории, получаем $\sim\sim B \notin \tau$.

(1). $\Leftarrow$. Пусть $\sim\sim B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$. Используя а5. $B \vdash_1 \sim\sim B$ и определение теории, получаем $B \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{T}$.

(2). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$. Используя а5. $B \vdash_1 \sim\sim B$ и определение теории, получаем $\sim\sim B \in \tau$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть $\sim\sim B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$. Используя а6. $\sim\sim B \vdash_1 B$ и определение теории, получаем $B \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{B}$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \notin \tau$. Используя а6. $\sim\sim B \vdash_1 B$ и определение теории, получаем $\sim\sim B \notin \tau$.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $\sim B \notin \tau$ и $\sim\sim B \notin \tau$. Используя а5. $B \vdash_1 \sim\sim B$ и определение теории, получаем $B \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{N}$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 имеем $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$. Используя а5. $B \vdash_1 \sim \sim B$ и определение теории, получаем $\sim \sim B \in \tau$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть $\sim B \notin \tau$ и $\sim \sim B \in \tau$. Используя а6. $\sim \sim B \vdash_1 B$ и определение теории, получаем $B \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(\sim B) = \mathbf{F}$.

Пусть $A := B \wedge C$.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \in \tau$. Из того, что $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению теории получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$. Используя а8. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \notin \tau$.

(1). $\Leftarrow$. Пусть $B \wedge C \in \tau$ и $\sim(B \wedge C) \notin \tau$. Из того, что $B \wedge C \in \tau$ по определению теории получаем $B \in \tau$ и $C \in \tau$. Из того, что $\sim(B \wedge C) \notin \tau$, используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$. Отсюда по определению простой теории получаем $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{T}$.

(2). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{B}$. Разбор случаев.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \in \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует,

что $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \in \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim (B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \in \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim (B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть $B \wedge C \in \tau$ и $\sim(B \wedge C) \in \tau$. Из того, что $B \wedge C \in \tau$ по определению теории получаем $B \in \tau$ и $C \in \tau$. Из того, что $\sim(B \wedge C) \in \tau$, используя $a8$. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Разбор случаев.

Пусть $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Имеем $B \in \tau$ и $C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{B}$.

Пусть $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$. Имеем $B \in \tau$ и $C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{B}$.

Пусть $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Имеем $B \in \tau$ и $C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{B}$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{N}$. Разбор случаев.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$. Используя $a8$. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \notin \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \in \tau$ и $C \notin \tau$ по определению

теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$. Используя $a8$. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \notin \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$. Используя $a8$. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \notin \tau$.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $B \wedge C \notin \tau$ и $\sim(B \wedge C) \notin \tau$. Из того, что $\sim(B \wedge C) \notin \tau$, используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \notin \tau$, откуда следует $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Разбор случаев.

Пусть $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$. Имеем $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{N}$.

Пусть $B \in \tau$ и $C \notin \tau$. Имеем $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{N}$.

Пусть $B \notin \tau$ и $C \in \tau$. Имеем $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{N}$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$. Разбор случаев.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$. Разбор случаев.

(a). Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем

$\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(b). Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(c). Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(d). Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Разбор случаев.

(a). Пусть $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $C \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$, а также $B \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$. Из того, что $C \notin \tau$ и $B \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(b). Пусть $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $C \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$, а также $B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$. Из того, что $C \notin \tau$ и $B \in \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ и $\sim B \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя $a9$. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем

$\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(с). Пусть $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $C \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$, а также $B \notin \tau$ и $\sim B \notin \tau$. Из того, что $C \notin \tau$ и $B \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ и $\sim B \notin \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(d). Пусть $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $C \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$, а также $B \notin \tau$ и $\sim B \in \tau$. Из того, что $C \notin \tau$ и $B \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$ и $\sim B \in \tau$ по определению простой теории получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \in \tau$ и $\sim B \in \tau$, а также $C \notin \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Из того, что $C \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim B \in \tau$, используя а3. $\sim B \vdash_1 \sim B \vee \sim C$, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

Пусть $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $B \notin \tau$ и $\sim B \notin \tau$, а также $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Из того, что $B \notin \tau$ по определению теории получаем $B \wedge C \notin \tau$. Из того, что $\sim C \in \tau$, используя а4. $\sim C \vdash_1 \sim B \vee \sim C$, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Используя а9. $\sim B \vee \sim C \vdash_1 \sim(B \wedge C)$ и определение теории, получаем $\sim(B \wedge C) \in \tau$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть $B \wedge C \notin \tau$ и $\sim(B \wedge C) \in \tau$. Разбор случаев.

Пусть $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim(B \wedge C) \in \tau$. Используя а8. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Разбор случаев.

(a). Пусть $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(b). Пусть $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному

допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(с). Пусть $B \notin \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

Пусть $B \in \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim(B \wedge C) \in \tau$. Используя а8. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Разбор случаев.

(а). Пусть $B \in \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(b). Пусть $B \in \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{B}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(с). Пусть $B \in \tau$ и $C \notin \tau$, а также $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{T}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

Пусть $B \notin \tau$ и $C \in \tau$, а также $\sim(B \wedge C) \in \tau$. Используя а8. $\sim(B \wedge C) \vdash_1 \sim B \vee \sim C$ и определение теории, получаем $\sim B \vee \sim C \in \tau$. Разбор случаев.

(а). Пусть $B \notin \tau$ и $C \in \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(b). Пусть $B \notin \tau$ и $C \in \tau$, а также $\sim B \in \tau$ и $\sim C \notin \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{F}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 получаем $v_{etl}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}$.

(с). Пусть $B \notin \tau$ и $C \in \tau$, а также $\sim B \notin \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда по индуктивному допущению следует, что $v_{etl}^c(B) = \mathbf{N}$ и $v_{etl}^c(C) = \mathbf{B}$. Тогда по определению 2.1 получаем

$$v_{eti}^c(B \wedge C) = \mathbf{F}.$$

Поскольку дизъюнкция выражима через конъюнкцию и отрицание, доказательство случая, когда $A := B \vee C$, опускается. $\square$

Докажем аналог леммы Линденбаума.

Лемма 2.19. *Если $A \not\vdash_2 B$, то существует множество формул τ такое, что (1) $A \in \tau$, $\sim A \notin \tau$ и $B \notin \tau$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_1$.*

Доказательство. Наша задача — описать процедуру конструирования максимальной теории.

Перечислим все формулы рассматриваемого языка: $A_0, A_1, A_2, \dots$. Пусть $A = A_0$. Строим последовательность множеств формул, начиная с $\tau_0 = \{C \mid A \vdash_1 C\}$. Заметим, что $A \in \tau_0$ и $\sim A \notin \tau_0$, в противном случае из $A \wedge \sim A$ мы бы получили формулу B , в силу «взрывоопасности» отношения $\vdash_2$. Кроме того, этот же факт очевиден и без привлечения эксплозивности $\vdash_2$. В самом деле, понятно, что $A \not\vdash_1 \sim A$, следовательно $\sim A \notin \tau_0$. Точно так же по (r4) получаем $A \not\vdash_1 B$, а значит, $B \notin \tau_0$. Опишем процедуру построения последующих множеств:

1. Если $\tau_n \cup \{C_{n+1}\} \vdash_1 \sim A \vee B$, то $\tau_{n+1} = \tau_n$;
2. Если $\tau_n \cup \{C_{n+1}\} \not\vdash_1 \sim A \vee B$, то $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{C_{n+1}\}$.

Важно, что помимо самих формул C_n -ых, мы добавляем все их следствия. Результирующее множество τ получается через объединение всех τ_n -ых. Из условий построения ясно, что $A \in \tau$, $\sim A \notin \tau$, $B \notin \tau$ и $\sim A \vee B \notin \tau$. Покажем, что τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_1$, то есть:

- (а). Если $C \in \tau$ и $C \vdash_1 D$, то $D \in \tau$.
- (б). Если $C \in \tau$ и $D \in \tau$, то $C \wedge D \in \tau$.

(в). Если $C \vee D \in \tau$, то $C \in \tau$ или $D \in \tau$.

- Доказательство утверждения (а) непосредственно следует из условий построения множества τ . Таким образом, τ замкнута относительно $\vdash_1$.
- Докажем (б). Пусть $C \in \tau$ и $D \in \tau$, но $C \wedge D \notin \tau$. Из условий построения τ ясно, что существует такая формула $E \in \tau$, что $E \vdash_1 C$ и $E \vdash_1 D$, но отсюда, используя $r3$, получаем $E \vdash_1 C \wedge D$. В силу (а) из последнего получаем, что $C \wedge D \in \tau$. Противоречие. Следовательно, если $C \in \tau$, $D \in \tau$, то $C \wedge D \in \tau$.
- Докажем (в). Пусть $C \vee D \in \tau$, но $C \notin \tau$ и $D \notin \tau$. Из условий построения τ получаем, что существует такая конъюнкция формул из τ , скажем E , что $E \wedge C \vdash_1 \sim A \vee B$ и $E \wedge D \vdash_1 \sim A \vee B$.

Пусть $E \wedge C \vdash_1 \sim A \vee B$ и $E \wedge D \vdash_1 \sim A \vee B$. Используя $r3$ и $a7$, получаем $E \wedge (C \vee D) \vdash_1 \sim A \vee B$. Отсюда по замыканию τ относительно $\vdash_1$, получаем $\sim A \vee B \in \tau$. Противоречие. Следовательно, если $C \vee D \in \tau$, то $C \in \tau$ или $D \in \tau$.

□

Перейдем к доказательству теоремы о полноте.

Теорема 2.20. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \models_{\text{etl}} B \Rightarrow A \vdash_2 B.$$

Доказательство. Допустим, что $A \not\vdash_2 B$. Тогда по лемме 2.19 существует такое множество формул τ , что (1) $A \in \tau$, $\sim A \notin \tau$ и $B \notin \tau$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_1$. Отсюда по лемме 2.18 получаем, что $v_{\text{etl}}^c(A) = \mathbf{T}$, и $v_{\text{etl}}^c(A) \neq \mathbf{T}$. Согласно определению 2.2 это означает, что $A \not\models_{\text{etl}} B$. □

Следствие 2.21. *Ввиду теоремы 2.20 и теоремы 2.15 мы получаем результат о том, что система $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\text{etl}}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{etl}} B \Leftrightarrow A \vdash_2 B.$$

2.4 Семантика логики NFL

В предыдущих параграфах мы рассмотрели отношение следования, сформулированное в терминах сохранности истинности-и-не-ложности от посылки к заключению на базисе четырехзначной матрицы Белнапа. Был предложен вариант аксиоматизации этого отношения и получен результат об адекватности.

Крайне интересной проблемой является рассмотрение двойственного отношения следования, которое можно определить как сохранность ложности-и-не-истинности от заключения к посылке.

Рассмотрим определенный ранее пропозициональный язык $\mathcal{L}$. Для интерпретации формул данного языка будем использовать следующую матрицу:

$$\mathcal{M}_{nfl}^1 = \langle \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}, \{\mathbf{F}\}, \{f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\sim}\} \rangle$$

Определим функцию оценки как отображение $v : \text{Prop} \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}$. Значения логических связок определяются соответствующими функциями, основываясь на нижеследующем определении.

Определение 2.22. *Условия истинности для логических связок языка $\mathcal{L}$.*

$\wedge$	T	B	N	F	$\vee$	T	B	N	F	$\sim$	
T	T	B	N	F	T	T	T	T	T	F	T
B	B	B	F	F	B	T	B	T	B	B	B
N	N	F	N	F	N	T	T	N	N	N	N
F	F	F	F	F	F	T	B	N	F	T	F

Соответствующее отношение следования можно определить через сохранность выделенного¹⁶ значения от заключения к посылке, что является формальной экспликацией идеи об обратной сохранности ложности-и-не-истинности.

Определение 2.23. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{nf1}} B \Leftrightarrow \forall v (v(B) = \mathbf{F} \Rightarrow v(A) = \mathbf{F}).$$

Заметим, что существует другой способ определения этого же следования. Получить его можно за счет рассмотрения матрицы Белнапа с альтернативным множеством выделенных значений.

$$\mathcal{M}_{nfl}^2 = \langle \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{F}\}, \{\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}\}, \{f_\wedge, f_\vee, f_\sim\} \rangle$$

Сохранив все приведенные выше семантические определения, мы можем рассмотреть следующее отношение следования.

Определение 2.24. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{nf2}} B \Leftrightarrow \forall v ((v(A) = \mathbf{T} \text{ или } v(A) = \mathbf{B} \text{ или } v(A) = \mathbf{N}) \Rightarrow (v(B) = \mathbf{T} \text{ или } v(B) = \mathbf{B} \text{ или } v(B) = \mathbf{N})).$$

Прежде чем прояснить смысл, в котором $\models_{\text{nf1}}$ и $\models_{\text{nf2}}$ двойственны по отношению к $\models_{\text{etl}}$, укажем на еще один любопытный аспект исследуемых отношений. В параграфе 1.3 нами было введено понятие сильного дуализма между истинностью и ложностью в контексте

¹⁶Обычно для этих целей принято вводить понятие *анти-выделенного* значения (см., например [93]). Однако в нашем контексте это различие имеет, скорее, эстетический, чем прагматический характер.

семантики обобщенных истинностных значений. Частными случаями этого подхода, как отмечалось, можно считать семантику двухкомпонентной истины Зайцева-Григорьева-Шрамко и восьмизначную семантику Белнапа, однако в данный момент сильный дуализм интересует нас в максимально абстрактном смысле. Носители в матрицах $\mathcal{M}_{nfl}^1$ и $\mathcal{M}_{nfl}^2$ состоят из значений, которые можно абстрактно представить как результат прямого произведения двух независимых множеств значений $\{T_1, F_1\}$ и $\{T_2, F_2\}$. Таким образом, получаем следующую структуру:

$$\{\langle T_1, T_2 \rangle, \langle T_1, F_2 \rangle, \langle F_1, T_2 \rangle, \langle F_1, F_2 \rangle\}$$

В данном контексте отношение $\models_{nfl}$ может быть интерпретировано как сохраняющее истинность, но только в более широком смысле, а именно – как T_1 -или- T_2 -сохраняющее следование. Аналогичным образом можно интерпретировать и рассмотренное ранее отношение $\models_{etl}$ – как T_1 -и- T_2 -сохраняющее. А для соответствующей интерпретации отношения $\models_{fde}$ есть две опции: оно может рассматриваться или как T_1 -сохраняющее, или как T_2 -сохраняющее¹⁷.

Вернемся к более привычной семантике. Итак, обозначим через $\models_x$ следование из Определения 2.23 и через $\models_y$ следование из Определения 2.24. Совершенно очевидно, что эти отношения эквивалентны.

Утверждение 2.25. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_x B \Leftrightarrow A \models_y B.$$

Доказательство. Требуется доказать два утверждения: (1) $A \models_x B \Rightarrow A \models_y B$ и (2) $A \models_y B \Rightarrow A \models_x B$. Рассмотрим одно из них. Докажем (1). Методом от противного. Допустим, что $A \models_x B$, но $A \not\models_y B$. Из того, что $A \not\models_y B$, по определению 2.23, получаем, что существует такая оценка v , что $v(B) = \mathbf{F}$ и $v(A) \neq \mathbf{F}$. Из того, что $v(B) = \mathbf{F}$, используя определение функции оценки, получаем, что $v(B) \neq \mathbf{T}$ и $v(B) \neq \mathbf{B}$ и $v(B) \neq \mathbf{N}$. Отсюда, используя определение

¹⁷Заметим, что данный подход проявляет еще два интересных отношения: T_1 -и-не- T_2 -сохраняющее следование, а также T_2 -и-не- T_1 -сохраняющее. По классу валидных утверждений о следовании эти отношения не совпадают ни с одним из исследуемых в настоящей работе.

2.24, получаем, что $v(A) \neq \mathbf{T}$ и $v(A) \neq \mathbf{B}$ и $v(A) \neq \mathbf{N}$, что приводит нас к противоречию. Аналогичным образом доказывается (2). $\square$

Далее мы будем использовать единое обозначение $\models_{\text{nff}}$ для $\models_x$ и $\models_y$.

В начале данного параграфа мы упомянули, что $\models_{\text{nff}}$ двойственно $\models_{\text{etl}}$. В чем же заключается эта двойственность?

Прежде всего, $\models_{\text{nff}}$ можно классифицировать как паранепротиворечивое, но не параконное, в отличие от $\models_{\text{etl}}$, которое является параконным, но не паранепротиворечивым. Легко проверить, используя определения 2.23 или 2.24, что $B \models_{\text{nff}} A \vee \sim A$ и $A \wedge \sim A \not\models_{\text{nff}} B$. Кроме того, мы помним, что относительно следования $\models_{\text{etl}}$ правило непрямого исключения дизъюнкции не является корректным. В случае же с отношением $\models_{\text{nff}}$ дела обстоят симметричным образом – некорректным оказывается правило введения конъюнкции. Действительно, рассмотрим следующий контрпример: $p \models_{\text{nff}} q \vee \sim q$, $p \models_{\text{nff}} r \vee \sim r$, но $p \not\models_{\text{nff}} (q \vee \sim q) \vee (r \vee \sim r)$, при $v(p) = \mathbf{T}$, $v(q) = \mathbf{B}$ и $v(r) = \mathbf{N}$. Таким образом, семантические свойства $\models_{\text{nff}}$ полностью дуальны свойствам $\models_{\text{etl}}$.

Отношение $\models_x$ впервые исследуется в 2011 году, в работе Ж. Маркоса [66], где для этого отношения предлагается аналитико-табличная формализация. Но как мы уже упоминали в предыдущих параграфах, в 2003 году на матрицу Белнапа с тремя выделенными значениями обращает своё внимание А. Аврон [33]. В сущности, $\models_x$ и $\models_y$ до последнего времени оставались практически неисследованными.

2.5 Подходы к формализации логики NFL

Пробел в исследовании $\models_{\text{nff}}$ был восполнен в работе Я. В. Шрамко, Д. В. Зайцева и А. А. Беликова [87], где предложена адекватная формализация отношения $\models_{\text{nff}}$ в виде своеобразного гибрида исчислений гильбертовского и генценовского типов (обозначим её $\mathbf{HG}_{\text{nff}}$). В этой же работе логика, детерминированная отношением $\models_{\text{nff}}$, получила название «Non-False Logic» (**NFL**). Отличительной особенностью этой формулировки является то, что в ней сле-

дование формулируется как отношение между формулой и множеством формул (FMLA-SET), то есть:

Определение 2.26. Для всяких $\Gamma \cup \{A, B\} \subseteq Form$ верно, что

$$A \models_{\text{nf3}} \Gamma \Leftrightarrow \forall v((\forall B \in \Gamma: v(B) = \mathbf{F}) \Rightarrow v(A) = \mathbf{F}).$$

Определение 2.27. Обозначим через $\mathbf{HG}_{\text{nf}}$ исчисление, определяемое следующим множеством аксиомных схем и правил, где $\{\Gamma, \Delta\} \cup \{\varphi, \psi, \chi\} \subseteq Form$:

- $a1. \varphi \vdash_{\text{nf}} \varphi \vee \psi; \quad a1. \psi \vdash_{\text{nf}} \varphi \vee \psi; \quad a3. \varphi \vee \psi \vdash_{\text{nf}} \varphi, \psi; \quad a4. \varphi \wedge \psi \vdash_{\text{nf}} \varphi;$
- $a5. \varphi \wedge \psi \vdash_{\text{nf}} \psi \wedge \varphi; \quad a6. \varphi \vdash_{\text{nf}} \varphi \wedge \varphi; \quad a7. (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash_{\text{nf}} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi);$
- $a8. \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \vdash_{\text{nf}} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi); \quad a9. (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash_{\text{nf}} \varphi \wedge (\psi \vee \chi);$
- $a10. \varphi \wedge \psi \vdash_{\text{nf}} \sim\sim\psi \wedge \varphi; \quad a11. \sim\sim\psi \wedge \varphi \vdash_{\text{nf}} \varphi \wedge \psi;$
- $a12. \sim(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \vdash_{\text{nf}} (\sim\psi \wedge \sim\varphi) \wedge \chi; \quad a13. (\sim\psi \wedge \sim\varphi) \wedge \chi \vdash_{\text{nf}} \sim(\varphi \vee \psi) \wedge \chi;$
- $a14. \sim(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \vdash_{\text{nf}} (\sim\psi \vee \sim\varphi) \wedge \chi; \quad a15. (\sim\psi \vee \sim\varphi) \wedge \chi \vdash_{\text{nf}} \sim(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi;$
- $a16. \psi \vdash_{\text{nf}} \sim\varphi \vee (\varphi \wedge \psi);$
- $r1. \varphi \vdash_{\text{nf}} \Gamma; \psi \vdash_{\text{nf}} \varphi, \Delta / \psi \vdash_{\text{nf}} \Gamma, \Delta; \quad r2. \varphi \vdash_{\text{nf}} \Gamma / \varphi \vdash_{\text{nf}} \psi, \Gamma;$
- $r3. \varphi \vdash_{\text{nf}} \psi, \psi, \Gamma / \varphi \vdash_{\text{nf}} \psi, \Gamma; \quad r4. \varphi \vdash_{\text{nf}} \psi, \chi, \Gamma / \varphi \vdash_{\text{nf}} \chi, \psi, \Gamma.$

Доказана следующая теорема [87, Theorem 5. 3].

Теорема 2.28. Для всяких $\Gamma \cup \{A\} \subseteq Form$ верно, что

$$A \models_{\text{nf3}} \Gamma \Leftrightarrow A \vdash_{\text{nf}} \Gamma.$$

Ниже предлагается аксиоматизация логики **NFL** в виде системы бинарных выводимостей.

2.6 Формализация логики NFL в виде системы бинарных выводимостей

При построении аксиоматизации отношения $\vdash_{\text{нф}}$ мы руководствуемся абсолютно той же методологией, что и в случае с системой $\mathbf{L}_{\text{etl}}$, только теперь сложности возникают не с исключением дизъюнкции, а с введением конъюнкции. Поэтому аксиоматизацию для $\vdash_{\text{нф}}$ тоже можно в известном смысле охарактеризовать как двойственную.

Система $\mathbf{L}_{\text{нф}}$ представляет из себя упорядоченную тройку $(\mathcal{L}, \vdash_1, \vdash_2)$, где $\mathcal{L}$ — определенный ранее пропозициональный язык, а $\vdash_1$ и $\vdash_2$ — бинарные рефлексивные отношения, характеризующиеся следующими аксиомами и правилами, соответственно.

$$\begin{aligned}
 & a1. A \wedge B \vdash_1 A; \quad a2. A \wedge B \vdash_1 B; \quad a3. A \vdash_1 A \vee B; \\
 & a4. B \vdash_1 A \vee B; \quad a5. A \vdash_1 \sim \sim A; \quad a6. \sim \sim A \vdash_1 A; \\
 & a7. A \wedge (B \vee C) \vdash_1 (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8. \sim (A \wedge B) \vdash_1 \sim A \vee \sim B; \\
 & a9. \sim A \vee \sim B \vdash_1 \sim (A \wedge B); \quad a10. \sim (A \vee B) \vdash_1 \sim A \wedge \sim B; \\
 & a11. \sim A \wedge \sim B \vdash_1 \sim (A \vee B); \quad a12. B \vdash_2 A \vee (\sim A \wedge B); \\
 & r1. A \vdash_1 B; B \vdash_1 C / A \vdash_1 C; \quad r2. A \vdash_2 B; B \vdash_2 C / A \vdash_2 C; \\
 & r3. A \vdash_1 B; A \vdash_1 C / A \vdash_1 B \wedge C; \quad r4. A \vdash_2 C; B \vdash_2 C / A \vee B \vdash_2 C; \\
 & r5. A \vdash_1 C; B \vdash_1 C / A \vee B \vdash_1 C; \\
 & r6. A \vdash_1 B / A \vdash_2 B.
 \end{aligned}$$

Определение 2.29. Выводом в системе $\mathbf{L}_{\text{нф}}$ называем непустую последовательность утверждений о выводимости $A_1 \vdash_i B_1, \dots, A_n \vdash_i B_m$, ($i \in \{1, 2\}$), каждое из которых либо является частным случаем аксиомной схемы из $\mathbf{L}_{\text{нф}}$, либо получено из предыдущих по одному из правил вывода системы $\mathbf{L}_{\text{нф}}$.

Утверждение $A \vdash_2 B$ называем теоремой исчисления $\mathbf{L}_{\text{nf}}$, если существует вывод в $\mathbf{L}_{\text{nf}}$, в котором последним утверждением является $A \vdash_2 B$; такой вывод называется выводом утверждения $A \vdash_2 B$.

Результат о том, что данная система адекватно формализует отношение $\models_{\text{nf}}$, может быть получен путем полной дуализации всех соответствующих доказательств для системы $\mathbf{L}_{\text{etl}}$.

Стандартным образом доказывается теорема о семантической непротиворечивости.

Теорема 2.30. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \vdash_{\text{nf}} B \Rightarrow A \models_{\text{nf}} B.$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.15. □

Для доказательства теоремы о полноте используется абсолютно тот же метод построения канонических моделей в терминах теорий с той же самой особенностью, которая заключается в замыкании данных теорий относительно $\vdash_1$.

Используется аналогичное определение канонической оценки:

Определение 2.31. *Для всякой простой теории τ и всякой $p_i \in \text{Prop}$ определим каноническую оценку v_{nfl}^c :*

$$1. v_{\text{nfl}}^c(p_i) = \mathbf{T} \Leftrightarrow p_i \in \tau \text{ и } \sim p_i \notin \tau;$$

$$2. v_{\text{nfl}}^c(p_i) = \mathbf{B} \Leftrightarrow p_i \in \tau \text{ и } \sim p_i \in \tau;$$

$$3. v_{\text{nfl}}^c(p_i) = \mathbf{N} \Leftrightarrow p_i \notin \tau \text{ и } \sim p_i \notin \tau;$$

$$4. v_{\text{nfl}}^c(p_i) = \mathbf{F} \Leftrightarrow p_i \notin \tau \text{ и } \sim p_i \in \tau;$$

и доказывается соответствующая лемма:

Лемма 2.32. *Пусть v_{nfl}^c – каноническая оценка, определенная выше. Тогда для всякой $A \in \text{Form}$ верно, что*

$$1. v_{nfl}^c(A) = \mathbf{T} \Leftrightarrow A \in \tau \text{ и } \sim A \notin \tau;$$

$$2. v_{nfl}^c(A) = \mathbf{B} \Leftrightarrow A \in \tau \text{ и } \sim A \in \tau;$$

$$3. v_{nfl}^c(A) = \mathbf{N} \Leftrightarrow A \notin \tau \text{ и } \sim A \notin \tau;$$

$$4. v_{nfl}^c(A) = \mathbf{F} \Leftrightarrow A \notin \tau \text{ и } \sim A \in \tau;$$

Доказательство. Аналогично лемме 2.18. □

Аналог леммы Линденбаума выглядит следующим образом.

Лемма 2.33. *Если $A \not\vdash_2 B$, то существует множество формул τ такое, что (1) $B \notin \tau$, $\sim B \in \tau$ и $A \in \tau$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_1$.*

Доказательство. Аналогично лемме 2.19. □

Используя эти леммы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.34. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{nfl}} B \Rightarrow A \vdash_2 B.$$

Доказательство. Допустим, что $A \not\vdash_2 B$. Тогда, по лемме 2.33, существует такое множество формул τ , что (1) $B \notin \tau$, $\sim B \in \tau$ и $A \in \tau$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_1$. Отсюда, по лемме 2.18, получаем, что $v_{nfl}^c(B) = \mathbf{F}$, и $v_{nfl}^c(A) \neq \mathbf{F}$. Согласно определению 2.23, это означает, что $A \not\models_{\text{nfl}} B$. □

Следствие 2.35. *Ввиду теоремы 2.34 и теоремы 2.30 мы получаем результат о том, что система $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\text{nfl}}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{nfl}} B \Leftrightarrow A \vdash_2 B.$$

2.7 Семейство логик первого уровня

В работе «Partiality and its Dual» [44] М. Данн описывает множество синтаксических расширений системы **FDE**, среди которых первоуровневые фрагменты сильной логики Клини **K₃**, логики Приста **LP**, логики «R-Mingle» **RM_{fde}** и классической логики **TV**. Эти расширения определяются через присоединение к списку аксиомных схем **FDE** тех или иных комбинаций хорошо известных постулатов:

$$\begin{aligned} A \wedge \sim A \vdash B & \quad (\text{Ab}); \\ B \vdash A \vee \sim A & \quad (\text{Tr}); \\ A \wedge \sim A \vdash B \vee \sim B & \quad (\text{Sf}). \end{aligned}$$

В более конкретной форме множество этих расширений можно представить следующим образом:

1. **FDE** + $(A \wedge \sim A \vdash B \vee \sim B) = \mathbf{RM}_{fde}$;
2. **FDE** + $(A \wedge \sim A \vdash B) = \mathbf{K}_3$;
3. **FDE** + $(B \vdash A \vee \sim A) = \mathbf{LP}$;
4. **FDE** + $(A \wedge \sim A \vdash B) + (B \vdash A \vee \sim A) = \mathbf{TV}$.

Данное семейство логик образует пятиэлементную решетку, представленную при помощи диаграммы Хассе на рисунке 6. Системы на этой решетке упорядочены отношением включения по классу теорем снизу-вверх.

Заметим, что те же самые системы можно получить, если использовать в качестве добавляемых аксиом не (Ab), (Tr) и (Sf), а следующие аксиомы:

$$\begin{aligned} \sim A \wedge (A \vee B) \vdash B & \quad (\text{DS}); \\ B \vdash \sim A \vee (A \wedge B) & \quad (\text{DDS}); \\ \sim A \wedge (A \vee B) \vdash \sim B \vee (B \wedge A) & \quad (\text{MDS}). \end{aligned}$$

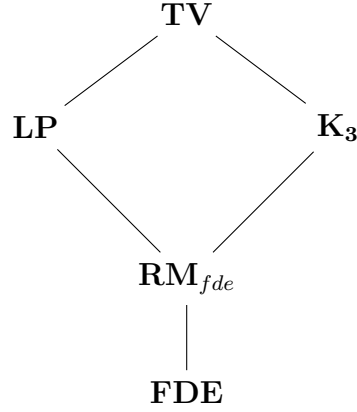


Рис. 6: «Kite»/«Воздушный змей»

Легко показать, что эти аксиомы позволяют получить те же самые расширения. Тогда множество этих расширений может быть описано следующим образом:

1. $\mathbf{FDE} + (\sim A \wedge (A \vee B) \vdash \sim B \vee (B \wedge A)) = \mathbf{RM}_{fde}$;
2. $\mathbf{FDE} + (\sim A \wedge (A \vee B) \vdash B) = \mathbf{K}_3$;
3. $\mathbf{FDE} + (B \vdash \sim A \vee (A \wedge B)) = \mathbf{LP}$;
4. $\mathbf{FDE} + (\sim A \wedge (A \vee B) \vdash B) + (B \vdash \sim A \vee (A \wedge B)) = \mathbf{TV}$.

Возникает естественный вопрос о том, какое положение среди этих расширений занимают логики, исследованные нами в предыдущих главах? Для того чтобы ответить на этот вопрос, приведем общий список аксиомных схем и правил вывода, которые требуется добавлять к базисной системе $\mathbf{FDE}$.

$$(\text{DS}). \sim A \wedge (A \vee B) \vdash B \quad (\text{DDS}). B \vdash \sim A \vee (A \wedge B)$$

$$(\text{MDS}). \sim A \wedge (A \vee B) \vdash \sim B \vee (B \wedge A)$$

$$(R_t). A \vdash_1 B; B \vdash_1 C / A \vdash_1 C \quad (R_\wedge). A \vdash_1 B; A \vdash_1 C / A \vdash_1 B \wedge C$$

$$(R_\vee). A \vdash_1 C; B \vdash_1 C / A \vee B \vdash_1 C \quad (R_\star). A \vdash_1 B / A \vdash_2 B.$$

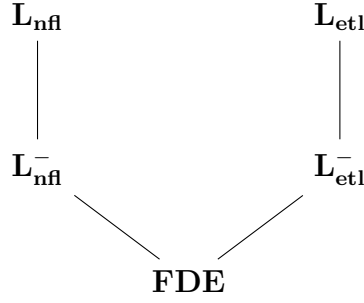


Рис. 7: «Рогатка»

Напомним, что система **FDE** представляет из себя упорядоченную пару $(\mathcal{L}, \vdash)$, где $\mathcal{L}$ – используемый нами пропозициональный язык, а отношение выводимости $\vdash$ замкнуто относительно соответствующих аксиомных схем и правил вывода. Для получения искомых расширений мы будем расширять её за счет добавления еще одного отношения выводимости, которое замкнуто относительно тех или иных комбинаций аксиомных схем и правил, приведенных выше. Теперь семейство логик первого уровня может быть дополнено новыми логиками следующим образом. (Запись $\{\vdash_2 \mid A_i, R_i, \dots\}$ означает «отношение выводимости, характеризуемое аксиомными схемами и правилами $A_i, R_i, \dots$ »).

1. $\mathbf{FDE} \cup \{\vdash_2 \mid \text{DS}, R_t, R_\wedge, R_\star\} = \mathbf{L}_{\text{etl}};$
2. $\mathbf{FDE} \cup \{\vdash_2 \mid \text{DDS}, R_t, R_\vee, R_\star\} = \mathbf{L}_{\text{nfl}};$
3. $\mathbf{FDE} \cup \{\vdash_2 \mid \text{Ab}, R_t, R_\wedge, R_\star\} = \mathbf{L}_{\text{etl}}^-;$
4. $\mathbf{FDE} \cup \{\vdash_2 \mid \text{Tr}, R_t, R_\vee, R_\star\} = \mathbf{L}_{\text{nfl}}^-;$

Взаимоотношения новых расширений с системой **FDE** могут быть представлены на соответствующей решетке на рисунке 7.

Обратим внимание, что помимо ранее исследованных логик, мы получили две новые: $\mathbf{L}_{\text{nfl}}^-$ и $\mathbf{L}_{\text{etl}}^-$. Эти системы дедуктивно «слабее», чем $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{etl}}$, соответственно.

Ранее мы рассматривали пример вывода теоремы (Ab) в системе $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ (см. пример 2.13), однако если мы заменим в $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ аксиому (Ds) на (Ab), то (DS) уже не будет теоремой

данного исчисления. Примечательно, что в работе «An infinity of super-Belnap logics» [85] У. Ривиеччио тоже указывает на данную логику, только в контексте систем $\mathbf{PR}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{BL}$. Там же можно ознакомиться с доказательством того факта, что обсуждаемые системы не являются дедуктивно эквивалентными [85, стр. 329]. Система $\mathbf{L}_{\text{нп}}$, в свою очередь, ведет себя двойственным образом. В ней при замене (DDS) на (Tr) первое также не является теоремой исчисления.

Исследование этих расширений является совсем новой областью, которая только-только начинает активно развиваться в работах некоторых зарубежных авторов (см. [85], [27]).

3 Семантика Е. К. Войшвилло для логик с обобщенными истинностными значениями

3.1 Общая характеристика семантики обобщенных описаний состояний

Ранее мы отмечали (см. параграф 1.3), что к классу «логик обобщенных истинностных значений» можно отнести известные расширения первоуровневой релевантной логики, а именно – **LP** и **K₃**. В настоящей главе предлагается реализация некоторых идей Е. К. Войшвилло, чьи интересы также лежали в области этих логик. Нами будут построены адекватные семантики полуобобщенных описаний состояний для **LP** и **K₃**.

Семантика обобщенных описаний состояний была предложена Е. К. Войшвилло в связи с проблемой экспликации понятия релевантного следования. Главной методологической предпосылкой в решении данной проблемы можно считать стремление Евгения Казимировича эксплицировать следование как связь между высказываниями по включению *семантической информации*, которая понималась им как подлинное *логическое содержание* высказываний. Таким образом, данный подход в прямом смысле раскрывает термин «релевантного следования», в отличие от альтернативных подходов, например, WGS-критерия, которые, по мнению Е. К. Войшвилло, «идут по линии тех или иных ограничений классического отношения $A \models B...$ » [5].

Семантическая информация высказывания A содержится в определениях логических констант, входящих в это высказывание. Однако, как замечает Е. К. Войшвилло, в условия истинности для формул классической логики включаются дополнительные предпосылки онтологического характера, а именно о непротиворечивости и непустоте тех возможных миров, к которым относятся данные высказывания. В силу этих предпосылок мы не можем ухватить чистое логическое содержание высказываний, поскольку оно ограничено этими предпосылками, что влечет появление высказываний, не несущих никакой информации о возможном положении дел: $A \wedge \sim A$ и $A \vee \sim A$. Исходя из этой идеи, Войшвилло предлагает определять

следование через включение семантической информации заключения в семантическую информацию посылки. Если множество ситуаций, в которых истинно высказывание A , обозначить как $\mathcal{M}_A$, и множество всех возможных ситуаций обозначить как $\mathcal{M}$, то семантической информацией высказывания A является пара $\langle \mathcal{M}_A, \mathcal{M} \rangle$. Другими словами, семантической информацией высказывания A является множество ситуаций, при которых оно истинно, относительно множества всех возможных ситуаций. В качестве этих «возможных ситуаций» Е. К. Войшвилло рассматривает описания состояний. Допустив тот факт, что $\mathcal{M}$ может быть бесконечным, становясь при этом универсальным для всех высказываний языка, мы можем записывать семантическую информацию произвольного высказывания A через $\mathcal{M}_A$. Тогда утверждение о наличии отношения следования трактуется как утверждение о том, что семантическая информация B составляет часть семантической информации A , символически:

$$A \models B \Leftrightarrow \mathcal{M}_A \subseteq \mathcal{M}_B$$

Нетрудно убедиться в том, что при такой трактовке информации, высказывания вида $A \wedge \sim A$ и $A \vee \sim A$ действительно либо не содержат информации вообще (в первом случае), либо содержат сразу всю возможную информацию (второй случай). Именно эти парадоксальные случаи и являются следствиями тех онтологических предпосылок, на которых мы сконцентрируемся в дальнейшем. И именно от них необходимо отказаться при построении семантики Войшвилло для преодоления парадоксов классического следования.

Е. Д. Смирнова в работе [20] предлагает обобщающий подход к построению семантик для интенциональных логик. Там же рассматривается возможность расширения области применимости семантики Е. К. Войшвилло на некоторый класс логик, а именно: логика Хао Вана (обозначим её **HW**), логика, двойственная логике Хао Вана (обозначим её **DHW**) и первоуровневый фрагмент логики Лукасевича. Заметим, что эта же идея высказывалась и самим Евгением Казимировичем в [5].

3.2 Семантика полубообщенных описаний состояний для логики Клини и логики Приста

Под описанием состояний будем понимать такое (возможно, бесконечное) множество $\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n\} \subseteq \text{Literals}$, где каждый $\tilde{p}_i$ является *литералом*. Множество всех описаний состояний обозначим через *States*.

Классическим описанием состояний будем называть такое описание состояний α , которое удовлетворяет следующим условиям:

- I. $\forall p_i \in \text{Prop} \ (p_i \in \alpha \text{ или } \sim p_i \in \alpha)$;
- II. $\forall p_i \in \text{Prop} \ \neg(p_i \in \alpha \text{ и } \sim p_i \in \alpha)$.

Обобщенным описанием состояний будем называть такое описание состояний α , которое не удовлетворяет условиям (I) и (II), то есть может быть пустым и противоречивым.

Полубообщенными описаниями состояний будем называть $\top$ -обобщенные описания состояний и $\perp$ -обобщенные описания состояний. В первых соблюдается условие (II), но не соблюдается условие (I); в последних же соблюдается условие (I), но не соблюдается условие (II).

Идея использования обобщенных описаний состояний для определения отношения следования между формулами первого уровня впервые появляется в работе [4]¹⁸. Фактически, предлагаемое отношение следования аксиоматизируется рассмотренной в параграфе 1.2 системой **FDE**

Воспроизведем семантику обобщенных описаний состояний для **FDE**. Записи $t \in v_\alpha(A)$ и $f \in v_\alpha(A)$ обозначают «формула A истинна в описании состояний α » и «формула A ложна в описании состояний α », соответственно.

¹⁸Заметим, что известны более ранние выступления и публикации Е. К. Войшвилло, посвященные обобщенным описаниям состояний, см. [3]

Определение 3.1 (Условия истинности для логики **FDE**). Определим функцию $v: States \times Prop \rightarrow \{\emptyset, \{t\}, \{f\}, \{t, f\}\}$. Будем использовать запись v_α для сокращения $v(\alpha, p_i)$, где $\alpha \in States$, $p_i \in Prop$.

$$\begin{aligned} t \in v_\alpha(p_i) &\Leftrightarrow p_i \in \alpha; \\ f \in v_\alpha(p_i) &\Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha. \end{aligned}$$

Данная функция может быть распространена на множество всех формул нашего языка следующим образом:

$$\begin{aligned} t \in v_\alpha(A \wedge B) &\Leftrightarrow t \in v_\alpha(A) \text{ и } t \in v_\alpha(B); \\ t \in v_\alpha(A \vee B) &\Leftrightarrow t \in v_\alpha(A) \text{ или } t \in v_\alpha(B); \\ t \in v_\alpha(\sim A) &\Leftrightarrow f \in v_\alpha(A); \\ f \in v_\alpha(A \wedge B) &\Leftrightarrow f \in v_\alpha(A) \text{ или } f \in v_\alpha(B); \\ f \in v_\alpha(A \vee B) &\Leftrightarrow f \in v_\alpha(A) \text{ и } f \in v_\alpha(B); \\ f \in v_\alpha(\sim A) &\Leftrightarrow t \in v_\alpha(A). \end{aligned}$$

Определение 3.2. Для всяких $A, B \in Form$ верно, что

$$A \models_{\text{fde}} B \Leftrightarrow \forall v_\alpha (t \in v_\alpha(A) \Rightarrow t \in v_\alpha(B)).$$

Условия истинности из определения 3.1 предполагают использование обобщенных описаний состояний.

Доказательство адекватности данной семантики системе **FDE** см. [5].

Условия истинности для логик **K₃** и **LP** идентичны тем, что представлены в определении 3.1. Единственная модификация заключается в наложении некоторых ограничений на множество описаний состояний в зависимости от того, с какой логикой мы работаем. Если в определении 3.1 используются $\top$ -обобщенные описания состояний, то перед нами условия

истинности для $\mathbf{K}_3$. Если же используются $\perp$ -обобщенные описания состояний, то перед нами условия истинности для $\mathbf{LP}$. Ну а если мы ограничимся классическими описаниями состояний, то получим условия истинности для классической логики.

Для удобства восприятия последующих доказательств введем соответствующую нотацию. Пусть запись $|A|_\alpha = t$ является сокращением для $(t \in v_\alpha(A) \text{ и } f \notin v_\alpha(A))$, а запись $|A|_\alpha = f$ – для $(t \notin v_\alpha(A) \text{ и } f \in v_\alpha(A))$. Принятые обозначения позволяют сформулировать условия истинности для наших логик в виде следующей леммы.

Лемма 3.3. *Пусть v_α есть функция оценки, определенная выше. Тогда для всякой оценки v_α , для всякой $A \in Form$ верно:*

$$\begin{aligned} |\sim A|_\alpha = t &\Leftrightarrow |A|_\alpha = f; \\ |\sim A|_\alpha = f &\Leftrightarrow |A|_\alpha = t; \\ |A \wedge B|_\alpha = t &\Leftrightarrow |A|_\alpha = t \text{ и } |B|_\alpha = t; \\ |A \wedge B|_\alpha = f &\Leftrightarrow |A|_\alpha = f \text{ или } |B|_\alpha = f; \\ |A \vee B|_\alpha = t &\Leftrightarrow |A|_\alpha = t \text{ или } |B|_\alpha = t; \\ |A \vee B|_\alpha = f &\Leftrightarrow |A|_\alpha = f \text{ и } |B|_\alpha = f. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство опускается. □

Определим отношения следования.

Определение 3.4. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{K}_3} B \Leftrightarrow \forall v_\alpha (|A|_\alpha = t \Rightarrow |B|_\alpha = t).$$

Определение 3.5. *Для всяких $A, B \in Form$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{LP}} B \Leftrightarrow \forall v_\alpha (|B|_\alpha = f \Rightarrow |A|_\alpha = f).$$

Семантики, основанные на определениях 3.3, 3.4 и 3.5, будем называть *семантиками Войшвилло в слабом смысле*.

3.3 Аксиоматизация

Логической системой $\mathbf{K}_3$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{K}_3})$, где $\mathcal{L}$ - используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{K}_3}$ - бинарное отношение, определяемое следующими аксиомными схемами и правилами:

$$a1. A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A; \quad a2. A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B; \quad a3. A \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B;$$

$$a4. B \vdash_{\mathbf{K}_3} A \vee B; \quad a5. A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim\sim A; \quad a6. \sim\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A;$$

$$a7. A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{K}_3} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8. \sim(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \vee \sim B;$$

$$a9. \sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim(A \wedge B); \quad a10. \sim(A \vee B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \wedge \sim B;$$

$$a11. \sim A \wedge \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim(A \vee B); \quad a12. A \wedge \sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;$$

$$r1. A \vdash_{\mathbf{K}_3} B; B \vdash_{\mathbf{K}_3} C / A \vdash_{\mathbf{K}_3} C;$$

$$r2. A \vdash_{\mathbf{K}_3} B; A \vdash_{\mathbf{K}_3} C / A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge C;$$

$$r3. A \vdash_{\mathbf{K}_3} C; B \vdash_{\mathbf{K}_3} C; / A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} C.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3.6. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \Leftrightarrow A \vdash_{\mathbf{HW}} B.$$

Доказательство. Возьмем формулировку **HW** из [20, стр. 180]. Утверждение теоремы можно разбить на два утверждения:

$$(a). A \vdash_{\mathbf{HW}} B \Rightarrow A \vdash_{\mathbf{K}_3} B;$$

$$(b). A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \Rightarrow A \vdash_{\mathbf{HW}} B.$$

Чтобы доказать утверждение (а), достаточно предъявить доказательства в системе $\mathbf{K}_3$ двух теорем, а именно: $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \wedge A$ и $A \vee B \vdash_{\mathbf{K}_3} B \vee A$. Первая получается последовательным применением $a2$, $a1$ и правила $r2$, вторая получается с использованием $a4$, $a3$ и $r3$. Для доказательства (б) требуется предъявить доказательства в системе $\mathbf{HW}$ других двух теорем: $B \vdash_{\mathbf{HW}} A \vee B$ и $A \wedge B \vdash_{\mathbf{HW}} B$. Первая получается последовательным применением $A1$, $A2$ и $R3$, вторая получается с использованием $A4$, $A3$ и $R3$. $\square$

Определение 3.7. Для всякой $p_i \in Prop$, и для всякой простой теории β в логике L определим каноническую оценку $|\cdot|_\beta^c$:

1. $|p_i|_\beta^c = t \Leftrightarrow p_i \in \beta$ и $\sim p_i \notin \beta$;
2. $|p_i|_\beta^c = f \Leftrightarrow p_i \notin \beta$ и $\sim p_i \in \beta$.

Лемма 3.8. Пусть $|\cdot|_\beta^c$ – каноническая оценка для логики $\mathbf{K}_3$. Тогда для всяких $A \in Form$, верно, что:

1. $|A|_\beta^c = t \Leftrightarrow A \in \beta$ и $\sim A \notin \beta$;
2. $|A|_\beta^c = f \Leftrightarrow A \notin \beta$ и $\sim A \in \beta$.

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по числу логических связок в формуле. Базисный случай, когда формула A является пропозициональной переменной, справедлив в силу определения 3.7. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше s , где s – число связок в рассматриваемой формуле.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $|\sim A|_\beta^c = t$. Тогда по определению 3.3 получаем $|A|_\beta^c = f$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $\sim A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя $a6$. $\sim\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $\sim\sim A \notin \beta$.

(1). $\Leftarrow$. Пусть $\sim A \in \beta$ и $\sim\sim A \notin \beta$. Из того, что $\sim\sim A \notin \beta$, с использованием $a5$. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim\sim A$ и определения простой теории, получаем $A \notin \beta$. По индуктивному допущению получаем $|A|_\beta^c = f$. Отсюда по определению 3.3 получаем $|\sim A|_\beta^c = t$.

(2). $\Rightarrow$. Пусть $|\sim A|_\beta^c = f$. Тогда по определению 3.3 получаем $|A|_\beta^c = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и $\sim A \notin \beta$. Используя а5. $A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim \sim A$ и определение простой теории, получаем $\sim \sim A \in \beta$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть $\sim \sim A \in \beta$ и $\sim A \notin \beta$. Используя а6. $\sim \sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \in \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|_\beta^c = t$. Отсюда по определению 3.3 получаем $|\sim A|_\beta^c = f$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|_\beta^c = t$. Тогда по определению 3.3 получаем $|A|_\beta^c = t$ и $|B|_\beta^c = t$. Отсюда по индуктивному допущению получаем $A \in \beta$ и $\sim A \notin \beta$, а также $B \in \beta$ и $\sim B \notin \beta$. Из этого по определению простой теории получаем что $A \wedge B \in \beta$. Из того, что $\sim A \notin \beta$ и $\sim B \notin \beta$ получаем $\sim A \vee \sim B \notin \beta$. Используя а8. $\sim(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \vee \sim B$ и определение простой теории, получаем $\sim(A \wedge B) \notin \beta$.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $A \wedge B \in \beta$ и $\sim(A \wedge B) \notin \beta$. Из того, что $A \wedge B \in \beta$, по определению простой теории получаем $A \in \beta$ и $B \in \beta$. Из того, что $\sim(A \wedge B) \notin \beta$, с использованием а9. $\sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim(A \wedge B)$ и определения простой теории получаем $\sim A \vee \sim B \notin \beta$. Значит, $\sim A \notin \beta$ и $\sim B \notin \beta$. Таким образом, по индуктивному допущению получаем $|A|_\beta^c = t$ и $|B|_\beta^c = t$, откуда по определению 3.3 следует $|A \wedge B|_\beta^c = t$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $|A \wedge B|_\beta^c = f$. Тогда по определению 3.3 получаем $|A|_\beta^c = f$ или $|B|_\beta^c = f$. Разбор случаев.

Пусть $|A|_\beta^c = f$. Тогда по индуктивному допущению получаем $\sim A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя а3. $\sim A \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \vee \sim B$, а9. $\sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim(A \wedge B)$, правило r1 и определение простой теории, получаем $\sim(A \wedge B) \in \beta$. А из того, что $A \notin \beta$, с использованием а1. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определения простой теории получаем $A \wedge B \notin \beta$.

Пусть $|B|_\beta^c = f$. Аналогично предыдущему случаю, мы получаем желаемые $\sim(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть $\sim(A \wedge B) \in \beta$ и $A \wedge B \notin \beta$. Используя а8. $\sim(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{K}_3} \sim A \vee \sim B$ и определение простой теории, получаем $\sim A \vee \sim B \in \beta$, а следовательно $\sim A \in \beta$ или $\sim B \in \beta$.

Также по определению простой теории имеем $A \notin \beta$ или $B \notin \beta$. Разбор случаев.

Пусть $\sim A \in \beta$ и $A \notin \beta$. Тогда по индуктивному допущению получаем $|A|_\beta^c = f$. Отсюда по определению 3.3 получаем $|A \wedge B|_\beta^c = f$.

Пусть $\sim A \in \beta$ и $B \notin \beta$. Используя *a2*. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что $A \notin \beta$ и $\sim A \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|A|_\beta^c = f$. Отсюда по определению 3.3 получаем $|A \wedge B|_\beta^c = f$.

Пусть $\sim B \in \beta$ и $A \notin \beta$. Используя *a1*. $A \wedge B \vdash_{\mathbf{K}_3} A$ и определение простой теории, получаем $A \wedge B \notin \beta$, а значит $A \notin \beta$ и $B \notin \beta$. Из того, что $B \notin \beta$ и $\sim B \in \beta$ по индуктивному допущению получаем $|B|_\beta^c = f$. Отсюда по определению 3.3 получаем $|A \wedge B|_\beta^c = f$.

Пусть $\sim B \in \beta$ и $B \notin \beta$. Аналогично первому случаю в этом пункте, мы получаем желаемое $|A \wedge B|_\beta^c = f$.

Доказательство случая, когда формула A имеет вид $B \vee C$, проводится двойственным образом по отношению к случаям, когда $A = B \wedge C$. $\square$

Лемма 3.9. *Если $A \not\vdash_{\mathbf{K}_3} B$, то существует такое множество формул τ , что (1) $A \in \tau$ и $\sim A \notin \tau$, и $B \notin \tau$, и (2) τ есть непротиворечивая простая теория, замкнутая относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$.*

Доказательство. Перечислим все формулы рассматриваемого языка $A_0, A_1, A_2, \dots$. Строим последовательность теорий, начиная с $\tau_0 = \{C \mid A \vdash_{\mathbf{K}_3} C\}$. Последующие теории строятся так:

1. если $\tau_n + A_{n+1} \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n$;
2. если $\tau_n + A_{n+1} \not\vdash_{\mathbf{K}_3} B$, тогда $\tau_{n+1} = \tau_n \cup \{A_{n+1}\}$.

Результирующая максимальная теория τ получается через объединение всех τ_n -ых. Факт того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, следует из условий её построения, поскольку каждая τ_n -ая замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$.

Факт о том, что $B \notin \tau$, также следует из условий построения τ , поскольку в противном случае мы бы получили, что $A \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, а это противоречит условию Леммы.

Допустим, что τ является противоречивой теорией. Тогда существует такая формула C , что $C \in \tau$ и $\sim C \in \tau$. Отсюда, в силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, используя $a12$, получаем, $C \wedge \sim C \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. В силу того, что τ замкнута относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, получаем, что $B \in \tau$. Противоречие, поскольку ранее мы установили, что $B \notin \tau$.

Остается показать, что τ обладает свойством простоты. Предположим, что $D \vee E \in \tau$, но $D \notin \tau$ и $E \notin \tau$. Принимая во внимание условия построения τ_n -ых, мы можем заключить, что $\tau + D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $\tau + E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Следовательно, существует такая формула $C_1 \in \tau$, что $C_1 \wedge D \vdash_{\mathbf{K}_3} B$ и $C_1 \wedge E \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Применяя правило $r3$ получаем, что $(C_1 \wedge D) \vee (C_1 \wedge E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$, далее, с использованием $a7$ и правила $r1$, мы получим $C_1 \wedge (D \vee E) \vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Отсюда, в силу того, что τ является теорией замкнутой относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$, мы получаем $B \in \tau$, что противоречит исходному допущению. $\square$

Теорема 3.10. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{K}_3} B \Rightarrow A \vdash_{\mathbf{K}_3} B.$$

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим $A \not\vdash_{\mathbf{K}_3} B$. Тогда по лемме 3.9 получаем, что существует такое множество формул τ , что (1) $A \in \tau$ и $\sim A \notin \tau$, и $B \notin \tau$, и (2) τ есть непротиворечивая простая теория, замкнутая относительно $\vdash_{\mathbf{K}_3}$. По лемме 3.8 получаем, что $|A|_\tau = t$ и $|B|_\tau \neq t$. Отсюда, используя определение 3.4, получаем, что $A \not\models_{\mathbf{K}_3} B$. $\square$

Теорема 3.11. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \vdash_{\mathbf{K}_3} B \Rightarrow A \models_{\mathbf{K}_3} B.$$

Доказательство. Доказательство семантической непротиворечивости сводится к рутинной проверке того факта, что все аксиомы $\mathbf{K}_3$ являются валидными утверждениями о следовании, и правила вывода сохраняют это отношение. Доказательство опускается. $\square$

Следствие 3.12. Ввиду теоремы 3.10 и теоремы 3.11 мы получаем результат о том, что система $\mathbf{K}_3$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\mathbf{K}_3}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\mathbf{K}_3} B \Leftrightarrow A \vdash_{\mathbf{K}_3} B.$$

Перейдем к доказательству адекватности для системы $\mathbf{LP}$.

Логической системой $\mathbf{LP}$ назовем пару $(\mathcal{L}, \vdash_{\mathbf{LP}})$, где $\mathcal{L}$ - используемый нами язык, а $\vdash_{\mathbf{LP}}$ - бинарное отношение, определяемое следующими аксиомными схемами и правилами:

$$a1. A \wedge B \vdash_{\mathbf{LP}} A; \quad a2. A \wedge B \vdash_{\mathbf{LP}} B; \quad a3. A \vdash_{\mathbf{LP}} A \vee B;$$

$$a4. B \vdash_{\mathbf{LP}} A \vee B; \quad a5. A \vdash_{\mathbf{LP}} \sim\sim A; \quad a6. \sim\sim A \vdash_{\mathbf{LP}} A;$$

$$a7. A \wedge (B \vee C) \vdash_{\mathbf{LP}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \quad a8. \sim(A \wedge B) \vdash_{\mathbf{LP}} \sim A \vee \sim B;$$

$$a9. \sim A \vee \sim B \vdash_{\mathbf{LP}} \sim(A \wedge B); \quad a10. \sim(A \vee B) \vdash_{\mathbf{LP}} \sim A \wedge \sim B;$$

$$a11. \sim A \wedge \sim B \vdash_{\mathbf{LP}} \sim(A \vee B); \quad a12. B \vdash_{\mathbf{LP}} A \vee \sim A;$$

$$r1. A \vdash_{\mathbf{LP}} B; B \vdash_{\mathbf{LP}} C / A \vdash_{\mathbf{LP}} C;$$

$$r2. A \vdash_{\mathbf{LP}} B; A \vdash_{\mathbf{LP}} C / A \vdash_{\mathbf{LP}} B \wedge C;$$

$$r3. A \vdash_{\mathbf{LP}} C; B \vdash_{\mathbf{LP}} C; / A \vee B \vdash_{\mathbf{LP}} C.$$

Утверждение 3.13. Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \vdash_{\mathbf{LP}} B \Leftrightarrow A \vdash_{\mathbf{DHW}} B.$$

Доказательство. Аналогично утверждению 3.6. □

Лемма 3.14. Пусть $|\cdot|_\beta^c$ - каноническая оценка для логики $\mathbf{LP}$. Тогда для всяких $A \in \text{Form}$, верно, что:

$$1. |A|_{\beta}^c = t \Leftrightarrow A \in \beta \text{ и } \sim A \notin \beta;$$

$$2. |A|_{\beta}^c = f \Leftrightarrow A \notin \beta \text{ и } \sim A \in \beta.$$

Доказательство. Аналогично лемме 3.8. □

Лемма 3.15. *Если $A \not\vdash_{\mathbf{LP}} B$, то существует такое множество формул τ , что (1) $B \notin \alpha$ и $\sim B \in \alpha$, и $A \in \alpha$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_{\mathbf{LP}}$.*

Доказательство. Аналогично лемме 3.9 □

Теорема 3.16. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{LP}} B \Rightarrow A \vdash_{\mathbf{LP}} B.$$

Доказательство. Будем рассуждать по контрапозиции. Допустим $A \not\vdash_{\mathbf{LP}} B$. Тогда по лемме 3.15 получаем, что существует такое множество формул τ , что (1) $B \notin \alpha$ и $\sim B \in \alpha$, и $A \in \alpha$, и (2) τ является простой теорией, замкнутой относительно $\vdash_{\mathbf{LP}}$. По лемме 3.14 получаем, что $|B|_{\tau} = f$ и $|A|_{\tau} \neq f$. Отсюда, используя определение 3.5, получаем, что $A \not\models_{\mathbf{LP}} B$. □

Теорема 3.17. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \vdash_{\mathbf{LP}} B \Rightarrow A \models_{\mathbf{LP}} B.$$

Доказательство. Аналогично теореме 3.11. □

Следствие 3.18. *Ввиду теоремы 3.16 и теоремы 3.17 мы получаем результат о том, что система $\mathbf{LP}$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\mathbf{LP}}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\mathbf{LP}} B \Leftrightarrow A \vdash_{\mathbf{LP}} B.$$

3.4 Семантика обобщенных описаний состояний для ETL и NFL

Естественным продолжением нашего исследования будет построение семантики обобщенных описаний состояний для уже исследованных в предыдущей главе логик **ETL** и **NFL**. Для достижения большей ясности переформулируем некоторые обозначения в нескольких ключевых определениях, необходимых нам при построении указанных семантик.

Для обеих логик – **ETL** и **NFL** – используются одни и те же условия истинности, которые, фактически, совпадают с условиями из определения 3.1. Для удобства восприятия последующих доказательств воспроизведем его еще раз с изменением нотации.

Определение 3.19. *Определим функцию $\sigma: States \times Prop \rightarrow \{\emptyset, \{t\}, \{f\}, \{t, f\}\}$. Будем использовать запись σ_α для сокращения $\sigma(\alpha, p_i)$, где $\alpha \in States$, $p_i \in Prop$.*

$$\begin{aligned} t \in \sigma_\alpha(p_i) &\Leftrightarrow p_i \in \alpha; \\ f \in \sigma_\alpha(p_i) &\Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha. \end{aligned}$$

Данная функция может быть распространена на множество всех формул нашего языка следующим образом:

$$\begin{aligned} t \in \sigma_\alpha(A \wedge B) &\Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } t \in \sigma_\alpha(B); \\ t \in \sigma_\alpha(A \vee B) &\Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(A) \text{ или } t \in \sigma_\alpha(B); \\ t \in \sigma_\alpha(\sim A) &\Leftrightarrow f \in \sigma_\alpha(A); \\ f \in \sigma_\alpha(A \wedge B) &\Leftrightarrow f \in \sigma_\alpha(A) \text{ или } f \in \sigma_\alpha(B); \\ f \in \sigma_\alpha(A \vee B) &\Leftrightarrow f \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \in \sigma_\alpha(B); \\ f \in \sigma_\alpha(\sim A) &\Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(A). \end{aligned}$$

В рамках данной семантики можно сформулировать отношения следования, формализующие логики **ETL** и **NFL**. Для того, чтобы отличать эти отношения от тех, которые

сформулированы в определениях 2.2 и 2.23, мы будем записывать соответствующие индексы строчными буквами.

Определение 3.20. Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\text{ETL}} B \Leftrightarrow \forall \sigma_\alpha ((t \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(A)) \Rightarrow (t \in \sigma_\alpha(B) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(B))).$$

Определение 3.21. Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\text{NFL}} B \Leftrightarrow \forall \sigma_\alpha ((f \in \sigma_\alpha(B) \text{ и } t \notin \sigma_\alpha(B)) \Rightarrow (f \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } t \notin \sigma_\alpha(A))).$$

Для доказательства того, что каждая из этих семантик адекватна соответствующей системе ($\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$), достаточно доказать эквивалентность только что определенных отношений следования тем, что сформулированы в определениях 2.2 и 2.23. Для начала необходимо сформулировать некоторое соответствие между двумя оценками на уровне приписывания значений пропозициональным переменным.

Определение 3.22. Пусть $p \in \text{Prop}$, v есть оценка в четырехзначной семантике для логик **ETL** и **NFL**, пусть σ есть оценка из определения 3.19, тогда

1. $v(p) = \mathbf{T} \Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(p) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(p);$
2. $v(p) = \mathbf{B} \Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(p) \text{ и } f \in \sigma_\alpha(p);$
3. $v(p) = \mathbf{N} \Leftrightarrow t \notin \sigma_\alpha(p) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(p);$
4. $v(p) = \mathbf{F} \Leftrightarrow t \notin \sigma_\alpha(p) \text{ и } f \in \sigma_\alpha(p).$

Расширим это определение на множество всех формул нашего языка.

Лемма 3.23. Пусть v есть оценка в четырехзначной семантике для логик **ETL** и **NFL**.

Пусть σ есть оценка из определения 3.19. Тогда для всякой $A \in \text{Form}$ верно, что

1. $v(A) = \mathbf{T} \Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(A);$
2. $v(A) = \mathbf{B} \Leftrightarrow t \in \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \in \sigma_\alpha(A);$

$$3. v(A) = \mathbf{N} \Leftrightarrow t \notin \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \notin \sigma_\alpha(A);$$

$$4. v(A) = \mathbf{F} \Leftrightarrow t \notin \sigma_\alpha(A) \text{ и } f \in \sigma_\alpha(A).$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по числу логических связок в формуле. Базисный случай, когда формула A является пропозициональной переменной, справедлив в силу определения 3.22. Индуктивное допущение: пусть утверждение леммы справедливо для формул с числом связок меньше s , где s – число связок в рассматриваемой формуле. В силу простоты доказательства рассмотрим лишь несколько случаев.

Пусть $A := \sim B$.

(1). $\Rightarrow$. Пусть $v(\sim B) = \mathbf{T}$. Тогда по определению 2.1 (2.22) получаем $v(B) = \mathbf{F}$. По индуктивному допущению получаем $t \notin \sigma_\alpha(B)$ и $f \in \sigma_\alpha(B)$. Используя определение 3.19, получаем $f \notin \sigma_\alpha(\sim B)$ и $t \in \sigma_\alpha(\sim B)$.

(2). $\Leftarrow$. Пусть $t \in \sigma_\alpha(\sim B)$ и $f \in \sigma_\alpha(\sim B)$. Тогда по определению 3.19 получаем $f \in \sigma_\alpha(B)$ и $t \in \sigma_\alpha(B)$. По индуктивному допущению получаем $v(B) = \mathbf{F}$. Используя определение 2.1 (2.22), получаем $v(\sim B) = \mathbf{T}$.

Пусть $A := (B \wedge C)$.

(3). $\Rightarrow$. Пусть $v(B \wedge C) = \mathbf{N}$. Тогда по определению 2.1 (2.22) получаем три случая:

$$(a). v(B) = \mathbf{N} \text{ и } v(C) = \mathbf{N};$$

$$(b). v(B) = \mathbf{T} \text{ и } v(C) = \mathbf{N};$$

$$(c). v(B) = \mathbf{N} \text{ и } v(C) = \mathbf{T};$$

Рассмотрим случай (a). Пусть $v(B) = \mathbf{N}$ и $v(C) = \mathbf{N}$. По индуктивному допущению получаем $t \notin \sigma_\alpha(B)$, $f \notin \sigma_\alpha(B)$, $t \notin \sigma_\alpha(C)$ и $f \notin \sigma_\alpha(C)$. Используя определение 3.19, получаем $t \notin \sigma_\alpha(B \wedge C)$ и $f \notin \sigma_\alpha(B \wedge C)$.

Случаи (b) и (c) доказываются аналогично.

(3). $\Leftarrow$. Пусть $t \notin \sigma_\alpha(B \wedge C)$ и $f \notin \sigma_\alpha(B \wedge C)$. По определению 3.19 получаем $t \notin \sigma_\alpha(B)$ или $t \notin \sigma_\alpha(C)$, и $f \notin \sigma_\alpha(B)$ или $f \notin \sigma_\alpha(C)$. Будем рассуждать разбором случаев.

Пусть $t \notin \sigma_\alpha(B)$ и $f \notin \sigma_\alpha(B)$. По индуктивному допущению получаем $v(B) = \mathbf{N}$. Обратим внимание на определение 2.1 (2.22). Ясно, что одной лишь информации об $v(B) = \mathbf{N}$ недостаточно для обоснования $v(B \wedge C) = \mathbf{N}$. Нужно рассмотреть два дополнительных случая. Пусть $v(C) = \mathbf{F}$. Тогда по индуктивному допущению получаем, что $t \notin \sigma_\alpha(C)$ и $f \in \sigma_\alpha(C)$. Но из последнего по определению 3.19 следует, что $f \in \sigma_\alpha(B \wedge C)$. Однако это противоречит нашему условию, значит $v(C) \neq \mathbf{F}$. Пусть $v(C) = \mathbf{B}$. Тогда по индуктивному допущению получаем, что $t \in \sigma_\alpha(C)$ и $f \in \sigma_\alpha(C)$. Но из последнего по определению 3.19 следует, что $f \in \sigma_\alpha(B \wedge C)$. Снова получаем противоречие, значит $v(C) \neq \mathbf{B}$. Из определения 2.1 (2.22) ясно, что $v(C) = \mathbf{N}$ или $v(C) = \mathbf{T}$, а это в обоих случаях позволяет получить $v(B \wedge C) = \mathbf{N}$.

Пусть $t \notin \sigma_\alpha(B)$ и $f \notin \sigma_\alpha(C)$. Допустим, что $f \in \sigma_\alpha(B)$. Тогда по определению 3.19 получаем $f \in \sigma_\alpha(B \wedge C)$, что противоречит нашему условию. Значит $f \notin \sigma_\alpha(B)$. Тогда по индуктивному допущению получаем, что $v(B) = \mathbf{N}$. Допустим, что $t \in \sigma_\alpha(C)$. Тогда по индуктивному допущению получаем, что $v(C) = \mathbf{T}$. Из $v(B) = \mathbf{N}$ и $v(C) = \mathbf{T}$ по определению 2.1 (2.22) получаем $v(B \wedge C) = \mathbf{N}$. Допустим, что $t \notin \sigma_\alpha(C)$. Тогда по индуктивному допущению получаем, что $v(C) = \mathbf{N}$. Из $v(B) = \mathbf{N}$ и $v(C) = \mathbf{N}$ по определению 2.1 (2.22) получаем $v(B \wedge C) = \mathbf{N}$.

Оставшиеся два случая доказываются аналогично двум предыдущим.

Пусть $A := (B \vee C)$.

(4). $\Rightarrow$. Пусть $v(B \vee C) = \mathbf{F}$. Тогда по определению 2.1 (2.22) получаем $v(B) = \mathbf{F}$ и $v(C) = \mathbf{F}$. По индуктивному допущению получаем $t \notin \sigma_\alpha(B)$, $f \in \sigma_\alpha(B)$, $t \notin \sigma_\alpha(C)$ и $f \in \sigma_\alpha(C)$. По определению 3.19 получаем, что $f \in \sigma_\alpha(B \vee C)$ и $t \notin \sigma_\alpha(B \vee C)$.

(4). $\Leftarrow$. Пусть $f \in \sigma_\alpha(B \vee C)$ и $t \notin \sigma_\alpha(B \vee C)$. По определению 3.19 получаем, что $f \in \sigma_\alpha(B)$, $f \in \sigma_\alpha(C)$, $t \notin \sigma_\alpha(B)$ и $t \notin \sigma_\alpha(C)$. По индуктивному допущению получаем $v(B) = \mathbf{F}$

и $v(C) = \mathbf{F}$. По определению 2.1 (2.22) получаем $v(B \vee C) = \mathbf{F}$.

□

Докажем две теоремы.

Теорема 3.24. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{NFL}} B \Leftrightarrow A \models_{\text{nfl}} B.$$

Доказательство. Необходимо доказать два утверждения.

1. $A \models_{\text{NFL}} B \Rightarrow A \models_{\text{nfl}} B$;
2. $A \models_{\text{nfl}} B \Rightarrow A \models_{\text{NFL}} B$.

Докажем (1). Пусть $A \not\models_{\text{nfl}} B$. По определению 2.23 получаем, что существует такая оценка v , что $v(B) = \mathbf{F}$, но $v(A) \neq \mathbf{F}$. По лемме 3.23 получаем, что $t \notin \sigma_\alpha(B)$, $f \in \sigma_\alpha(B)$, а также $t \in \sigma_\alpha(A)$ или $f \notin \sigma_\alpha(A)$. По определению 3.21 получаем, что $A \not\models_{\text{NFL}} B$.

Докажем (2). Пусть $A \not\models_{\text{NFL}} B$. По определению 3.21 получаем, что существует такая оценка σ_α , что $t \notin \sigma_\alpha(B)$, $f \in \sigma_\alpha(B)$, а также $t \in \sigma_\alpha(A)$ или $f \notin \sigma_\alpha(A)$. По лемме 3.23 получаем, что $v(B) = \mathbf{F}$, но $v(A) \neq \mathbf{F}$. По определению 2.23 получаем, что $A \not\models_{\text{nfl}} B$. □

Теорема 3.25. *Для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что*

$$A \models_{\text{ETL}} B \Leftrightarrow A \models_{\text{etl}} B.$$

Доказательство. Необходимо доказать два утверждения.

1. $A \models_{\text{ETL}} B \Rightarrow A \models_{\text{etl}} B$;
2. $A \models_{\text{etl}} B \Rightarrow A \models_{\text{ETL}} B$.

Докажем (1). Пусть $A \not\models_{\text{etl}} B$. По определению 2.2 получаем, что существует такая оценка v , что $v(A) = \mathbf{T}$, но $v(B) \neq \mathbf{T}$. По лемме 3.23 получаем, что $t \in \sigma_\alpha(A)$, $f \notin \sigma_\alpha(A)$, а также $f \in \sigma_\alpha(B)$ или $t \notin \sigma_\alpha(B)$. По определению 3.20 получаем, что $A \not\models_{\text{ETL}} B$.

Докажем (2). Пусть $A \not\models_{\text{ETL}} B$. По определению 3.20 получаем, что существует такая оценка σ_α , что $t \in \sigma_\alpha(A)$, $f \notin \sigma_\alpha(A)$, а также $f \in \sigma_\alpha(B)$ или $t \notin \sigma_\alpha(B)$. По лемме 3.23 получаем, что $v(A) = \mathbf{T}$, но $v(B) \neq \mathbf{T}$. По определению 2.2 получаем, что $A \not\models_{\text{etl}} B$. $\square$

Используя теоремы 3.25, 3.24 и следствия 2.21, 2.35, получаем ещё два важных следствия.

Следствие 3.26. Система $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\text{ETL}}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\text{ETL}} B \Leftrightarrow A \vdash_2 B.$$

Следствие 3.27. Система $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ адекватно аксиоматизирует отношение $\models_{\text{NFL}}$, то есть для всяких $A, B \in \text{Form}$ верно, что

$$A \models_{\text{NFL}} B \Leftrightarrow A \vdash_2 B.$$

Заключение

Для подведения итогов нашего исследования вернемся к его отправной точке. В параграфе 1.3 мы сделали акцент на особом статусе $\models_{fde}$ в контексте всевозможных вариантов обобщенных истинностных значений. Среди исследований в этой области очень популярен алгебраический подход, суть которого сводится к рассмотрению различных алгебраических структур типа решёток и использованию соответствующих отношений порядка для определения отношения логического следования. При рассмотрении первого шага обобщения классических значений мы получаем множество значений **4**, которое детерминирует бирешетку $FOUR_2$. Определенные на $FOUR_2$ отношения порядка являются удобным инструментом для определения отношения следования, которое, фактически, есть отношение $\models_{fde}$. Переходя на следующий шаг обобщения, мы получаем множество **16**, которое в свою очередь позволяет рассмотреть трирешетку $SIXTEEN_3$. Будучи более богатой структурой по отношению к $FOUR_2$, трирешетка $SIXTEEN_3$ позволяет рассматривать определенные на ней порядки как с использованием импликативных пропозициональных языков, так и различных фрагментов, ассоциированных непосредственно с каким-то конкретным отношением порядка. В последних случаях мы опять же естественным образом получаем $\models_{fde}$. В более сложных случаях, когда мы рассматриваем комплекты связок, ассоциированных с разными порядками, результирующая логика так или иначе представляет из себя более богатую версию системы **FDE**. Даже в ситуациях с нестандартными базисами обобщения, например, когда процедуре обобщения подвергается множество **3**, мы опять-таки получаем как систему **FDE**, так и различные её расширения. Все это свидетельствует о специальной роли логики Данна-Белнапа и убеждает многих исследователей в её вездесущем характере. Так Я. В. Шрамко и Х. Ванзинг, а вслед за ними Д. В. Зайцев и О. М. Григорьев выдвигают амбициозный лозунг: «First-Degree Entailment Everywhere!»¹⁹, что можно перевести на русский как: «первоуровневая релевант-

¹⁹см. [108, 94]

ная логика повсюду!».

В этом возгласе заметна изрядная доля позитивного настроения, что вполне оправдано. С момента своего возникновения логика **FDE** зарекомендовала себя с хорошей стороны. Круг её положительных качеств не ограничивается лишь тем, что она относится к числу релевантных, а значит – нетерпима к известным парадоксам следования. В последние десятилетия интерес к релевантной логике заметно спадает и позволяет констатировать, что проект релевантизации логического следования и импликации, о светлом будущем которого грезили многие исследователи, оказался безуспешным. Однако он не оказался безуспешным для логики в целом! Среди тех релевантных систем, кто, образно выражаясь, «остался на плаву», гордо возвышается **FDE** (см. [10]). Помимо упомянутой релевантности, **FDE** в принципе является достаточно изящной логикой, которая отвечает многим интуитивным представлениям о логическом выводе, о смысле и условиях истинности логических связок; она характеризуется очень естественными и удобными дедуктивными постулатами, которые таким же естественным образом могут быть переведены в алгебраический контекст. Наконец, она имеет серьезную философски мотивированную семантику, несмотря на то, что последняя часто подвергается обоснованной критике [67, 41, 102]. Но не это ли является неотъемлемой частью научного дискурса?

В настоящем исследовании мы свернули с алгебраического пути и рассмотрели возможности альтернативных отношений следования в контексте семантики обобщенных истинностных значений, ориентируясь лишь на теоретико-модельную методологию. Отношение следования, в своем классическом, восходящем к А. Тарскому, толковании замкнуто на понятии истинности или, более точно, на понятии «истинности в модели». В отличие от семантики классической логики, четырехзначная семантика Данна-Белнапа позволяет работать с моделями, где понятие истинности учитывается в более широком аспекте. Отсюда, отношение следования, традиционно рассматриваемое как сохраняющее истинность от посылок к заключению, является не единственным, отвечающим нашим возможным, а главное – естествен-

ным, требованиям к сохранности истинности вообще. Если следование сохраняет истинность в четырехзначной семантике Данна-Белнапа, то мы получаем логику **FDE**. Но стоит ужесточить требования и определить следование через сохранность не только лишь истинности, но и не-ложности, и мы получаем логику, уже не обладающую теми прекрасными качествами, о которых мы говорили выше; мы получаем странную логику **ETL**, которая мало того, что теряет свойство релевантности, но еще и демонстрирует новые неприглядные свойства в виде отсутствия контрапозиции и исключения дизъюнкции, что влечет существенные проблемы при формализации этой логики.

Можно руководствоваться и двойственной методологией и определять следование без использования понятия истинности, а с использованием понятия ложности. При этом сохранность ложности предполагается в обратную сторону, то есть от заключения к посылке. В рамках четырехзначной семантики Данна-Белнапа такая сохранность ложности вновь порождает логику **FDE**. Но и при этом подходе ужесточение требований, выражающихся в обратной сохранности ложности-и-не-истинности, приводит к возникновению еще одной странной логики – **NFL**. Последнюю также нельзя классифицировать как релевантную и как удовлетворяющую привычным свойствам логических связок. Эта логика, как мы часто упоминали в ходе работы, является двойственной по отношению к **ETL**, поскольку в ней вместо исключения дизъюнкции некорректным оказывается принцип введения конъюнкции и следование импозивно, а не эксплозивно.

Нами были предложены адекватные формализации логик **ETL** и **NFL** в виде систем бинарных выводимостей $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$. Ключевой особенностью нашего подхода является введение двух отношений выводимости в рамках одной системы, где одно из них подчинено другому при помощи соответствующего правила вывода. Эти правила вывода позволяют зафиксировать фундаментальное отношение между рассматриваемыми следованиями:

$$\models_{\text{fde}} \subseteq \models_{\text{nfl}}; \quad \models_{\text{fde}} \subseteq \models_{\text{etl}}.$$

Таким образом, исчисления $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nfl}}$ можно рассматривать как своеобразную надстройку

над системой **FDE**. Отсюда в качестве канонических моделей, используемых при доказательстве теорем о семантической полноте, мы, фактически, можем использовать подклассы простых теорий, которые используются для полноты **FDE**: в случае с **ETL** нам требуются непротиворечивые простые теории, а в случае с **NFL** полные простые теории.

Полученные логики позволяют взглянуть на обобщенные истинностные значения с новых сторон. Они дают возможность подступиться к феноменам паранепротиворечивости (**NFL**), параполноты (**ETL**) по-отдельности, сохраняя в первозданном виде семантику Данна-Белнапа, ведь **FDE** не дает такой опции, поскольку она является одновременно как паранепротиворечивой, так и параполной. Среди родственных логик подобная роль отводится **LP** (паранепротиворечивая и не параполная) и **K₃** (параполная, и не паранепротиворечивая). Таким образом, мы получаем новый класс четырехзначных логик для независимого анализа паранепротиворечивости и параполноты.

Кроме того, в работе предложено решение проблемы, связанной с доказательством адекватности информационной семантики Е. К. Войшвилло некоторым исчислениям, которые аксиоматизируют логики **K₃** и **LP**. Мы показали, что введение так называемых полубообщённых описаний состояний позволяет сформулировать соответствующие отношения следования. Для получения логики Клини нам необходимо определить следование через прямую сохранность истинности-и-не-ложности, учитывая при этом, что описания состояний должны обязательно быть непротиворечивыми, но при этом, сохраняя для них возможность быть как полными, так и неполными. В случае с логикой Приста нужно определить следование через обратную сохранность ложности-и-не-истинности, используя при этом обязательно полные, но возможно противоречивые описания состояний. В работе доказаны соответствующие теоремы об адекватности.

Завершающая часть работы была посвящена построению адекватных информационных семантик для логик **ETL** и **NFL**. Было показано, что соответствующие этим логикам отношения следования можно естественным образом определить с использованием обобщён-

ных описаний состояний. Нами были доказаны соответствующие теоремы об эквивалентности отношений следования, сформулированных в терминах семантики обобщённых описаний состояний и тех, что были определены в четырехзначной семантике Данна-Белнапа. На основании этого был получен результат о том, что отношения следования, определённые в рамках информационной семантики, адекватно аксиоматизируются системами $\mathbf{L}_{\text{etl}}$ и $\mathbf{L}_{\text{nff}}$, соответственно.

Список литературы

- [1] Бочаров, В. А., Маркин, В. И. Введение в логику. — Форум, 2008. — 560 с.
- [2] Ванзинг Х., Шрамко Я. В. Логика компьютерных сетей // Логические исследования. — 2005. — № 12. — С. 119–145.
- [3] Войшвилло Е. К. Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Материалы II Советско-финского colloquium по логике. — Москва, 1979. — С. 46–55.
- [4] Войшвилло Е. К. Логическое следование и семантика обобщенных описаний состояний // Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам методологии науки. — Издательство «Наука», 1984. — С. 183–191.
- [5] Войшвилло Е. К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. — МГУ, 1988. — 140 с.
- [6] Девяткин Л. Ю. Четыре следования, три порядка, две матрицы, одна бирешетка // Логические исследования. — 2012. — Т. 18. — С. 127–131.
- [7] Зайцев Д. В., Григорьев О. М. Две истины - одна логика // Логические исследования. — 2011. — № 17. — С. 121–139.
- [8] Зайцев Д. В. Логика, рассуждение, информация // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития / Под ред. Зайцев Д. В. — М.: ИД «ФОРУМ», 2018. — С. 111–127.
- [9] Зайцев Д. В. Обобщенная релевантная логика и модели рассуждений. — М.: Креативная экономика, 2010. — 312 с.

- [10] Зайцев Д. В., Теория релевантного следования I: Аксиоматика // Логические исследования. — 1998. — Т. 5. — С. 119–128.
- [11] Зайцев Д. В., Шрамко Я. В. Логическое следование и выделенные значения // Логические исследования. — 2004. — Т. 11. — С. 127–138.
- [12] Карпенко А. С. Развитие многозначной логики. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 448 с.
- [13] Карпенко А. С. Решётки четырехзначных модальных логик // Логические исследования. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 122–137.
- [14] Карпенко А. С., Чагров А. В. Модальная пропозициональная логика истины **Tr** и ее полнота // Логические исследования. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 13–31.
- [15] Логинов Е. В. Прагматизм и аналитическая философия: основные этапы взаимодействия : дис. ... канд. наук / Логинов Е. В. ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. — 2017. — 303 с.
- [16] Орлов И. Е. Исчисление совместности предложений // Математический сборник. — 1928. — Т. 35, № 3-4. — С. 263–286.
- [17] Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / Под ред. Плюсниной А. П., Донченко В. В. Математическая логика и основания математики. — М.: Наука, 1972. — 592 с.
- [18] Скорняков Л. А. Элементы теории структур / Под ред. Фофановой Т. С. — М.: «Наука», 1970. — 148 с.
- [19] Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления. — Москва : М.: «Наука», 1972. — 272 с.
- [20] Смирнова Е. Д. Логика и философия. Научная философия. — М.: РОССПЭН, 1996. — 304 с.

- [21] Такеути Г. Теория доказательств. — Москва : Издательство «Мир», 1978. — 410 с.
- [22] Фреге Г. Логика и логическая семантика / Под ред. Кузичевой З. А. — М.: Аспект Пресс, 2000. — С. 326–342.
- [23] Шрамко Я. В. Истина и ложь: что такое истинностные значения и для чего они нужны // Логос. — 2009. — № 2. — С. 96–121.
- [24] Шрамко Я. В. Логика научного исследования // Логика и В. Е. К. / Под ред. Маркин, В. И., Зайцев, Д. В., Ильин, А. А. — М.: Современные тетради, 2003. — С. 237–249.
- [25] Шрамко Я. В. Логический способ бытия истины // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития / Под ред. Д. В. Зайцев. — М.: ИД «ФОРУМ», 2018. — С. 96–110.
- [26] Ackermann W. Begründung Einer Strengen Implikation // The Journal of Symbolic Logic. — 1956. — Vol. 21, no. 2. — P. 113–128.
- [27] Albuquerque H., Přenosił A., Rivieccio, U. An Algebraic View of Super-Belnap Logics // Studia Logica. — 2017. — Vol. 105, no. 6. — P. 1051–1086.
- [28] Anderson A. R., Belnap N. D. Tautological Entailments // Philosophical Studies. — 1962. — Vol. 13, no. 1-2. — P. 9–24.
- [29] Anderson A. R., Belnap N. D. The Pure Calculus of Entailment // Journal of Symbolic Logic. — 1962. — P. 19–52.
- [30] Anderson A. R., Belnap N. D. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. I. — Princeton University Press, 1975. — 543 p.
- [31] Anderson A. R., Belnap N. D. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, Vol. II. — Princeton University Press, 1992. — 749 p.

- [32] Armstrong D. M. Truth and Truthmakers. — Cambridge University Press, 2004. — 158 p.
- [33] Avron A. Classical Gentzen-Type Methods in Propositional Many-Valued Logics // Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic. — Springer, 2003. — P. 117–155.
- [34] Belnap N. D. Tautological Entailments (abstract) // Journal of Symbolic Logic. — 1959. — Vol. 24. — P. 316.
- [35] Belnap N. D. A Useful Four-Valued Logic // Modern Uses of Multiple-Valued Logic / Ed. by J. M. Dunn, G. Epstein. — D. Reidel, 1977. — P. 8–37.
- [36] Belnap N. D. How a Computer Should Think // Contemporary Aspects of Philosophy / Ed. by G. Ryle. — Oriel Press, 1977. — P. 30–55.
- [37] Belnap N. D. Nuel Belnap on Indeterminism and Free Action / Ed. by Müller T. — Outstanding contributions to logic edition. — Springer, 2014. — Vol. 2. — P. 377–409.
- [38] Buss S. R. Handbook of Proof Theory / Ed. by Buss S. R. — Elsevier Science B. V., 1998. — Vol. 137. — P. 1–78.
- [39] Davey B. A., Priestley H. A. Introduction to Lattices and Order. — Second edition. — Cambridge University Press, 2002. — 298 p.
- [40] De M., Omori H. There is More to Negation than Modality // Journal of Philosophical Logic. — 2018. — Vol. 47, no. 2. — P. 281–299.
- [41] Dubois D. On Ignorance and Contradiction Considered as Truth-Values // Logic Journal of IGPL. — 2008. — Vol. 16, no. 2. — P. 195–216.
- [42] Dunn J. M. The Algebra of Intensional Logics : Ph.D. thesis / Dunn J. M. ; University of Pittsburgh. — 1966. — 177 p.

- [43] Dunn J. M. Intuitive Semantics for First-Degree Entailments and "Coupled Trees" // *Philosophical Studies*. — 1976. — Vol. 29, no. 3. — P. 149–168.
- [44] Dunn J. M. Partiality and its Dual // *Studia Logica*. — 2000. — Vol. 66, no. 1. — P. 5–40.
- [45] Dunn J. M., Hardegree G. M. *Algebraic Methods in Philosophical Logic* / Ed. by Dov Gabbay, Angus Macintyre, Dana Scott. — Oxford University Press, 2001. — Vol. 41 of *Oxford Logic Guides*. — 470 p.
- [46] Font J. M. Belnap's Four-Valued Logic and De Morgan Lattices // *Logic Journal of IGPL*. — 1997. — Vol. 5, no. 3. — P. 1–29.
- [47] Font J. M., Moussavi M. Note on a Six-Valued Extension of Three-Valued Logic // *Journal of Applied Non-Classical Logic*. — 1993. — Vol. 3, no. 2. — P. 173–187.
- [48] Font J. M., Verdú V. Algebraic Logic for Some Non-Protoalgebraizable Logics // *Algebraic Logic*. — 1991. — Vol. 54. — P. 183–188.
- [49] Font J. M., Verdú V. Abstract Characterization of a Four-Valued Logic // *Multiple-Valued Logic, 1988., Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Multiple-Valued Logic* / IEEE. — 1988. — P. 389–396.
- [50] Font J. M., Verdú V. Completeness Theorems for a Four-Valued Logic Related to De Morgan Lattices. — Universitat de Barcelona. Facultat de Matemàtiques, 1989.
- [51] Ginsberg M. L. Multi-Valued Logics // *AAAI*. — Vol. 86. — 1986. — P. 243–249.
- [52] Ginsberg M. L. Multivalued logics: A Uniform Approach to Reasoning in Artificial Intelligence // *Computational Intelligence*. — 1988. — Vol. 4, no. 3. — P. 265–316.
- [53] Grigoriev O. M. Semantic Analysis of Classical Seminegations // *Девятые Смирновские чтения: материалы Международной научной конференции*. — Т. 17. — 2015. — С. 58.

- [54] Grigoriev O. M. Two Formalisms for a Logic of Generalized Truth Values // Bulletin of Symbolic Logic. — 2015. — Vol. 21, no. 01. — P. 71–72.
- [55] Kamide N. A Cut-Free System for 16-Valued Reasoning // Bulletin of the Section of Logic. — 2005. — Vol. 34, no. 4. — P. 213–226.
- [56] Kamide N. Embedding-Based Methods for Trilattice Logic // Multiple-Valued Logic (ISMVL), 2013 IEEE 43rd International Symposium on Multi-Valued Logic. — 2013. — P. 237–242.
- [57] Kamide N. On Natural Eight-Valued Reasoning // Multiple-Valued Logic (ISMVL), 2013 IEEE 43rd International Symposium on Multiple-Valued Logic. — 2013. — P. 231–236.
- [58] Kamide N. An Eight-Valued Paraconsistent Logic // Reports on Mathematical Logic. — 2014. — Vol. 49. — P. 3–21.
- [59] Kamide N., Shramko Ya. Embedding From Multilattice Logic Into Classical Logic and Vice Versa // Journal of Logic and Computation. — 2016. — Vol. 27, no. 5. — P. 1549–1575.
- [60] Kamide N., Wansing H. Sequent Calculi for Some Trilattice Logics // The Review of Symbolic Logic. — 2009. — Vol. 2, no. 2. — P. 374–395.
- [61] Kooi B., Tamminga A. Completeness via Correspondence for Extensions of the Logic of Paradox // The Review of Symbolic Logic. — 2012. — Vol. 5, no. 4. — P. 720–730.
- [62] Kubyshkina E., Zaitsev D. V. Rational Agency from a Truth-Functional Perspective // Logic and Logical Philosophy. — 2016. — Vol. 25, no. 4. — P. 499–520.
- [63] Lewis C. I. A Survey of Symbolic Logic. — University of California Press, 1918. — 430 p.
- [64] Lukasiewicz J. Two-Valued Logic // Jan Lukasiewicz Selected works / Ed. by Borkowski L. — North-Holland Publishing Company, 1970. — Studies in Logic and The Foundations of Mathematics. — P. 89–109.

- [65] MacBride F. Truthmakers // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by Edward N. Zalta. — Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016.
- [66] Marcos J. The Value of the Two Values // Logic without Frontiers: Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the occasion of his 60th birthday / Ed. by J.-Y. Béziau, M. E Coniglio. — College Publications, 2011. — Vol. 17 of Tribute series. — P. 277–294.
- [67] Meyer R.K. Why I Am Not a Relevantist. — Australian National University, 1978. — 155 p.
- [68] Muskens R., Wintein S. Analytic Tableaux for all of *SIXTEEN*3 // Journal of Philosophical Logic. — 2015. — Vol. 44, no. 5. — P. 473–487.
- [69] Odintsov S. P. On Axiomatizing Shramko-Wansing’s Logic // Studia Logica. — 2009. — Vol. 91, no. 3. — P. 407–428.
- [70] Odintsov S. P., Speranski S. O. The Lattice of Belnapian Modal Logics: Special Extensions and Counterparts // Logic and Logical Philosophy. — 2016. — Vol. 25, no. 1. — P. 3–33.
- [71] Odintsov S. P., Wansing H. Modal Logics with Belnapian Truth Values // Journal of Applied Non-Classical Logics. — 2010. — Vol. 20, no. 3. — P. 279–301.
- [72] Omori H., Sano K. Generalizing Functional Completeness in Belnap-Dunn Logic // Studia Logica. — 2015. — Vol. 103, no. 5. — P. 883–917.
- [73] Petrukhin Ya. I. Correspondence Analysis for First Degree Entailment // Логические исследования. — 2016. — Т. 22, № 1. — С. 108–124.
- [74] Petrukhin Ya. I. Correspondence Analysis for Logic of Rational Agent // Челябинский физико-математический журнал. — 2017. — Т. 2, № 3. — С. 329–337.
- [75] Petrukhin Ya. I. Natural Deduction for Fitting’s Four-Valued Generalizations of Kleene’s Logic // Logica Universalis. — 2017. — Vol. 11, no. 4. — P. 525–532.

- [76] Petrukhin Ya. I. Natural Deduction for Three-Valued Regular Logics // Logic and Logical Philosophy. — 2017. — Vol. 26, no. 2. — P. 197–206.
- [77] Petrukhin Ya. I. Natural Deduction for Four-Valued both Regular and Monotonic Logics // Logic and Logical Philosophy. — 2018. — Vol. 22, no. 1. — P. 53–66.
- [78] Petrukhin Ya. I., Shangin V. O. Automated Correspondence Analysis for the Binary Extensions of the Logic of Paradox // The Review of Symbolic Logic. — 2017. — Vol. 10, no. 4. — P. 756–781.
- [79] Pietz A., Rievieccio U. Nothing but the Truth // Journal of Philosophical Logic. — 2013. — Vol. 42, no. 1. — P. 125–135.
- [80] Priest G. Hyper-Contradictions // Logique et Analyse. — 1984. — Vol. 27, no. 107. — P. 237–243.
- [81] Pynko A. P. Characterizing Belnap’s logic via De Morgan’s Laws // Mathematical Logic Quarterly. — 1995. — Vol. 41, no. 4. — P. 442–454.
- [82] Restall G. Truthmakers, Entailment and Necessity // Australasian Journal of Philosophy. — 1996. — Vol. 74, no. 2. — P. 331–340.
- [83] Restall G. Modelling Truthmaker // Logique et Analyse. — 2000. — Vol. 43, no. 169–170. — P. 211–230.
- [84] Rievieccio U. Paraconsistent Modal Logics // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — 2011. — Vol. 278. — P. 173–186.
- [85] Rievieccio U. An Infinity of Super-Belnap Logics // Journal of Applied Non-Classical Logics. — 2012. — Vol. 22, no. 4. — P. 319–335.
- [86] Sano K., Omori H. An Expansion of First-Order Belnap-Dunn Logic // Logic Journal of IGPL. — 2014. — Vol. 22, no. 3. — P. 458–481.

- [87] Shramko, Y., Zaitsev, D., Belikov A. First-Degree Entailment and its Relatives // *Studia Logica*. — 2017. — Vol. 105, no. 6. — P. 1291–1317.
- [88] Shramko Ya. The Logical Way of Being True: Truth Values and the Ontological Foundation of Logic // *Logic and Logical Philosophy*. — 2014. — Vol. 23, no. 2. — P. 119–131.
- [89] Shramko Ya. Truth, Falsehood, Information and Beyond: the American Plan Generalized // *J. Michael Dunn on Information Based Logics*. — Springer, 2016. — P. 191–212.
- [90] Shramko Ya., Dunn J. M., Takenaka T. The Trilattice of Constructive Truth Values // *Journal of Logic and Computation*. — 2001. — Vol. 11, no. 6. — P. 761–788.
- [91] Shramko Ya., Wansing H. Some Useful 16-Valued Logics: How a Computer Network Should Think // *Journal of Philosophical Logic*. — 2005. — Vol. 34, no. 2. — P. 121–153.
- [92] Shramko Ya., Wansing H. Hyper-Contradictions, Generalized Truth Values and Logics of Truth and Falsehood // *Journal of Logic, Language and Information*. — 2006. — Vol. 15, no. 4. — P. 403–424.
- [93] Shramko Ya., Wansing H. Entailment Relations And/As Truth Values // *Bulletin of the Section of Logic*. — 2007. — Vol. 36, no. 3/4. — P. 131–143.
- [94] Shramko Ya., Wansing H. Truth and Falsehood: An Inquiry into Generalized Logical Values. — Springer Science & Business Media, 2011. — Vol. 36. — 246 p.
- [95] Takano M. Gentzenization of Trilattice Logics // *Studia Logica*. — 2016. — Vol. 104, no. 5. — P. 917–929.
- [96] Tamminga A. Correspondence Analysis for Strong Three-Valued Logic // *Логические исследования*. — 2014. — Т. 20. — С. 255–268.
- [97] Tamminga A. M., Tanaka K. A Natural Deduction System for First Degree Entailment // *Notre Dame Journal of Formal Logic*. — 1999. — Vol. 40, no. 2. — P. 258–272.

- [98] Vaidya A. The Epistemology of Modality // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / Ed. by Zalta E. N. — Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017.
- [99] Vojshvillo E. A Theory of Logical Relevance // Logique et Analyse. — 1996. — Vol. 39, no. 155/156. — P. 207–228.
- [100] Wansing H. The Power of Belnap: Sequent Systems for *SIXTEEN*₃ // Journal of Philosophical Logic. — 2010. — Vol. 39, no. 4. — P. 369–393.
- [101] Wansing H. A Non-Inferentialist, Anti-Realistic Conception of Logical Truth and Falsity // Topoi. — 2012. — Vol. 31, no. 1. — P. 93–100.
- [102] Wansing H., Belnap N. D. Generalized Truth Values: A Reply to Dubois // Logic Journal of IGPL. — 2010. — Vol. 18, no. 6. — P. 921–935.
- [103] Wansing H., Kamide N. Intuitionistic Trilattice Logics // Journal of Logic and Computation. — 2010. — Vol. 20, no. 6. — P. 1201–1229.
- [104] Wintein S., Muskens R. From Bi-Facial Truth to Bi-Facial Proofs // Studia Logica. — 2015. — Vol. 103, no. 3. — P. 545–558.
- [105] Wójcicki R. Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations / Ed. by Jaakko Hintikka. — Springer Netherlands, 1988. — Vol. 199 of Synthese Library. — 473 p.
- [106] Zaitsev D. A Few More Useful 8-Valued Logics for Reasoning with Tetralattice *EIGHT*₄ // Studia Logica. — 2009. — Vol. 92, no. 2. — P. 265–280.
- [107] Zaitsev D. Logics of Generalized Classical Truth Values // The Logica Yearbook 2014, P. Arazim and Peliš, M. (eds.). — The Logica Yearbook. — London: College Publications London, 2015. — P. 331–341.
- [108] Zaitsev D., Grigoriev O. Relevant Generalization Starts Here (and here = 2) // Logic and Logical Philosophy. — 2010. — Vol. 19, no. 4. — P. 329–340.

- [109] Zaitsev D., Shramko Ya. Bi-Facial Truth: A Case for Generalized Truth Values // *Studia Logica*. — 2013. — Vol. 101, no. 6. — P. 1299–1318.