Российский национальный комитет по автоматическому управлению
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Каспийский институт морского и речного транспорта
Астраханский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Universitetet i Tromsø

Тезисы докладов международной конференции

Δ-ГЕОМЕТРИЯ

посвященной
80-летию со дня рождения М.Т. Калапсо
Астрахань, 1 – 9 мая 2014 г.

Abstracts of the International Conference

Δ-GEOMETRY

In honor of
Maria Teresa Calapso on his 80th birthday
Astrakhan, 1 — 9 May 2014

Москва – 2014

Тезисы докладов международной конференции

Δ-ГЕОМЕТРИЯ

под редакцией

А. Г. Кушнера и **В. В. Лычагина**

Тезисы содержат результаты исследований участников международной конференции в области геометрии, топологии, дифференциальных уравнений и управлении, посвященной 80-летию итальянского геометра, профессора Университета Мессины Марии Терезы Калапсо. Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов.

TEX-нический редактор Е.Н. Кушнер.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ПРИРОДНЫХ НЕФТЯНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ[1]

А.В. Ахметзянов

(ИПУ РАН, Москва, Россия)

E-mail address: awa@ipu.ru

И.А. Боронин

(ИПУ РАН, Москва, Россия)

E-mail address: anarsul123@yandex.ru

В масштабах нефтенасыщенного порового пространства Ω резервуаров нефтяных месторождений капиллярные силы, обычно, преобладают над гидродинамическими (вязкостными) и гидростатическими (гравитационными) силами, поэтому насыщенность смачивающей фазы (воды) σ является существенным параметром, вполне характеризует распределение фаз в микромасштабе. Предполагается, что движение каждой фазы (в занятых ими частях порового пространства) происходит независимо, т.е. движение фаз происходит в некоторых виртуальных пористых средах, своих для различных значений насыщенностей фаз. В этих условиях процесс трехмерной двухфазной фильтрации определяется с использованием обобщенного закона Дарси и уравнений неразрывности (сохранения массы) для каждой фазы:

$$\begin{array}{c} u_{\mathrm{w}} = -K\left(f_{\mathrm{w}}(\sigma)/\mu_{\mathrm{w}}\right) grad\, p, \\ u_{\mathrm{o}} = -K\left(f_{\mathrm{o}}(\sigma)/\mu_{\mathrm{o}}\right)/\mu_{\mathrm{o}}\, grad\, p, \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{c} \partial(m\sigma\rho_{\mathrm{w}})/\partial t = div\left(\rho_{\mathrm{w}} K (k_{\mathrm{w}}(\sigma)/\mu_{\mathrm{w}})\, grad\, p_{\mathrm{w}}\right), \\ \partial(m(1-\sigma)\rho_{\mathrm{o}})/\partial t = div\left(\rho_{\mathrm{o}} K (k_{\mathrm{o}}(\sigma)/\mu_{\mathrm{o}}) grad\, p_{\mathrm{o}}\right), \\ p_{\mathrm{K}}(\sigma) = p_{\mathrm{o}} - p_{\mathrm{w}},\ \sigma_{\mathrm{w}} = \sigma,\ \sigma_{\mathrm{o}} = 1-\sigma, \end{array} \tag{2}$$

где K — матрица абсолютных проницаемостей, $(x, y, z) \in R^3$ — пространственные координаты, t — время, σ — насыщенность порового пространства вытесняющей фазой (водой), $f_{\mathrm{w}}(\sigma), f_{\mathrm{o}}(\sigma)$ — относительные фазовые проницаемости воды и нефти, обращающиеся в нуль при $\sigma = \sigma_0 > 0,\ \sigma = \sigma^0 < 1$, соответственно, μ_1, μ_2 — вязкости (динамические) воды и нефти. Относительные фазовые проницаемости для каждой фазы монотонно возрастают от 0 до 1 с ростом их насыщенности, причем $f_{\mathrm{w}}(\sigma) \equiv 0, \forall\sigma \le \sigma_0$ (вытесняющая фаза неподвижна) и $f_{\mathrm{o}}(\sigma) \equiv 0, \forall\sigma \ge \sigma^0$ (неподвижна вытесняемая фаза).

1. В докладе рассматриваются модели фильтрации в предположении, что порода и флюиды несжимаемы $(\partial m/\partial t \cong 0, \partial\rho_{\mathrm{o}}/\partial p \cong 0, \partial\rho_{\mathrm{w}}/\partial p \cong 0)$, а гравитационными

[1]Работа осуществлена в рамках проекта РФФИ №12-08-01238-а – Оптимальное управление фронтами вытеснения нефти и газа активными реагентами с применением эволюционных моделей разработки месторождений углеводородов.

и/или капиллярными силами можно и/или нельзя пренебречь. В частности, при отсутствии гравитационных сил система уравнений (1) и (2) модели трехмерной двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил, когда $p_{\text{K}}(\sigma) \cong 0 \to p \cong p_{\text{o}} \cong p_{\text{w}}$ может быть представлена в виде

$$\begin{array}{c} \partial p/\partial t = div\left(K(k_{\text{o}}(\sigma)/\mu_{\text{o}} + k_{\text{w}}(\sigma)/\mu_{\text{w}})gradp\right), \\ m\partial\sigma/\partial t = div\left(K(k_{\text{w}}(\sigma)/\mu_{\text{w}})gradp\right); \end{array} \tag{3}$$

В трехмерном случае матрица K может обладать следующими вариантами заполнения [1]:

$$K = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a)\ k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k,\ k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{zx} = 0; \\ b)\ k_{xx} = k_{yy} = k_1, k_{zz} \neq 0,\ k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{zx} = 0; \\ c)\ k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz} \neq 0,\ k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{zx} = 0; \\ d)\ k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz} \neq 0,\ k_{xy} = k_{xz} = k_{yx} = k_{zx} = 0; \\ e)\ k_{xx} \neq k_{yy} \neq k_{zz} \neq 0,\ k_{xy} = k_{yx} \neq 0,\ k_{xz} = k_{zx} \neq 0. \end{cases} \tag{4}$$

В формулах (4):

a) изотропная пористая среда, т.е. проницаемости $k = k(\sigma)$ одинаковы по всем направлениям,

b) трансверсально-изотропная пористая среда (проницаемости одинаковы по горизонтали одинаковы, отличаются по вертикали и нет «перекрестного» горизонтального и вертикального взаимного влияния потоков),

c) ортотропно-анизотропная пористая среда (проницаемости по x, y, z различны и нет «перекрестного» взаимного влияния потоков, т.е. $k_{xy} = k_{yx} = k_{xz} = k_{zx} = 0$),

d) анизотропные пористые среды с перекрестным симметричными «перекрестными» связями потоков по горизонтали без перекрестного влияния по вертикали (проницаемости по x, y, z различны, $k_{xy} = k_{yx} \neq 0, k_{xz} = k_{zx} = 0$),

e) анизотропные пористые среды с горизонтальным и вертикальным симметричным «перекрестным» взаимным влиянием потоков, т.е. проницаемости по x, y, z различны, $k_{xy} = k_{yx} \neq 0, k_{xz} = k_{zx} \neq 0$.

Различные варианты обобщения модели фильтрации. Предполагается, что деформация породы и сжимаемости флюидов (нефти и воды) определяются соотношениями:

$$m(p) = m(p_0) + \beta_c(p - p_0), \rho_o(p) = \rho(p_0) + \beta_o(p - p_0), \rho_w(p) = \rho(p_0) + \beta_w(p - p_0),$$

где β_c, β_o и β_w — коэффициенты упругости скелета породы, нефти и воды, соответственно.

Вариант 1. Порода недеформируемая, $m(p) = m(p_0)$, вода несжимаемая, а нефть сжимаемая, т.е. $\rho_w(p) = \rho(p_0)$, а $\rho_o(p) = \rho(p_0) + \beta_o(p - p_0)$, $\beta_o = \rho_o(p_0)/\kappa_o$, где p_0 — номинальное давление, κ_o — модуль упругости нефти.

Вариант 2. Порода недеформируемая, вода и нефть сжимаемые, т.е. $\rho_o(p) = \rho(p_0) + \beta_o(p - p_0), \rho_w(p) = \rho(p_0) + \beta_w(p - p_0)$, где $\beta_w = \rho_w(p_0)/\kappa_w$, — коэффициент упругости воды.

Вариант 3. (общий случай).

Порода деформируемая, вода и нефть сжимаемые, т.е.

$m(p) = m(p_0) + \beta_c(p - p_0), \rho_o(p) = \rho(p_0) + \beta_o(p - p_0), \rho_w(p) = \rho(p_0) + \beta_w(p - p_0)$,

$\beta_c = m(p_0)/\kappa_w$ — коэффициент упругости скелета.

[1] Р.М. Тер-Саркисов, В.М. Максимов, К.С. Басниев, А.Н. Дмитриевский, Л.М. Сургучев. Геологическое и гидротермодинамическое моделирование месторождений нефти и газа // Серия «Соверменные нефтегазовые технологии» М.-Ижевск. 2012. 452 с.

ПОИСК СИММЕТРИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ В РЕЗЕРВУАРАХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ УГЛЕВОДОРОДОВ[2]

И.А. Боронин

(ИПУ РАН, Москва, Россия)

E-mail address: anarsul123@yandex.ru

А.А. Шевляков

(ИПУ РАН, Москва, Россия)

E-mail address: aash29@gmail.com

Уравнение

$$(b(u)u)_t = (a(u)u_x)_x, \tag{1}$$

с одной неизвестной u, зависящей от переменных t и x, описывает процесс фильтрации газа в пористых средах. Это уравнение является обобщением нелинейного уравнения теплопроводности, в числе прочего оно учитывает деформируемость пористой среды и сжимаемость флюидов. В качестве неизвестной функции обычно выступает давление. Представляет интерес поиск его симметрий, для чего можно воспользоваться известными методами [1, 2].

Поверхность, описываемая в пространстве джетов уравнением (1), обозначим F.

$$F = (b(u)u)_t - (a(u)u_x)_x.$$

Будем искать инфинитезимальные точечные симметрии вида

$$X = A(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + C(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Вычислим продолжение векторного поля X в пространство 2-джетов $X^{(2)}$. Условие, при котором X является инфинитезимальной симметрией F:

$$X^{(2)}F\big|_F = 0.$$

В качестве внутренней координаты выберем

$$u_{xx} = \frac{(b_u u + b)u_t - a_u u_x^2}{a}.$$

[2]Работа осуществлена в рамках проекта РФФИ №12-08-01238-а – Оптимальное управление фронтами вытеснения нефти и газа активными реагентами с применением эволюционных моделей разработки месторождений углеводородов.

Определяющие уравнения симметрий имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&B_{x,x}a^2+2\,a\,(b_u u+b)\,A_x-a\,(b_u u+b)\,B_t-\\
&-(-ab_{uu}u+(-2\,a+a_u u)\,b_u+a_u b)\,C=0,\\
&\tfrac{1}{a}(-Ca_{uu}a+2\,A_{x,u}a^2+C{a_u}^2-C_{uu}a^2-a_u aC_u)=0,\\
&B_x a=0,\\
&B_u a=0,\\
&B_{uu}a+a_u B_u=0,\\
&-C_{x,x}a+C_t\,(b_u u+b)=0,\\
&-a_u A_u+A_{uu}a=0,\\
&2B_{x,u}a+(2\,b+2\,b_u u)\,A_u+2\,a_u B_x=0,\\
&-2\,C_{x,u}a+A_{x,x}a+(-b_u u-b)\,A_t-2\,a_u C_x=0.
\end{aligned}
$$

Предположим, $a(u)\neq 0$ и $b_u u+b\neq 0$. Тогда $B=B(t)$, $A=A(x,t)$. С учетом этих упрощений количество определяющих уравнений сократится до четырех:

$$
\begin{aligned}
&-Ca_{uu}a+Ca_u^2-a_u aC_u-C_{uu}a^2=0,\\
&C(a(b_{uu}u+2b_u)-a_u(2b_u u+b))=a(2A_x-B_t)(b_u u+b),\\
&-C_{xx}a+C_t(b_u u+b)=0,\\
&-2C_{xu}a+A_{xx}a-2a_u C_x-A_t(b_u u+b)=0.
\end{aligned}
$$

Второе уравнение последней системы может быть решено относительно C:

$$
C=\frac{1}{a}(C_1(x,t)\hat{a}+C_2(x,t)),\quad \hat{a}=\int a(u)du.
$$

В третьем уравнении коэффициент при C имеет существенное значение. В случае, когда он не равен нулю, исследование показало наличие лишь тривиальных симметрий (сдвиг по x и t и масштабирование). Более интересен случай, когда

$$
a(b_{uu}u+2b_u)-a_u(2b_u u+b)=0.
$$

Это условие эквивалентно условию $a=K(bu)_u$, $K=\mathrm{const}$. Тогда из уравнений системы следует, что искомые коэффициенты векторного поля имеют вид

$$
\begin{gathered}
A=\alpha x+A_1,\\
B=2\alpha t+B_1,\\
C=\tfrac{1}{a}(C_1\hat{a}+C_2(x,t)),\\
(C_2(x,t))_t-K(C_2(x,t))_{xx}=0,
\end{gathered}
$$

где α, A_1, B_1, C_1, K — константы, функция $C_2(x,t)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности с коэффициентом K, $\hat{a}=\int a(u)du$, при выполнении следующих условий на функции a и b:

$$
a\neq 0,\quad (bu)_u\neq 0,\quad a=K(bu)_u.
$$

[1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. — М.: Факториал Пресс. 2005. 384 с.

[2] П. Олвер. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир. 1989. 639 с.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ[3]

А. А. Горинов

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,

Москва, Россия)

E-mail address: `antong@t-human.com`

Уравнение, описывающее процесс одномерной фильтрации в двухкомпонентных жидкостях имеет вид:

$$s_x s_{tx} - s_t s_{xx} - h(s) s_t s_x^2 = 0. \tag{1}$$

Например, оно возникает в процессах разработки нефтяных месторождений: в этих случаях $s = s(t, x)$ — водонасыщение в единице объема, x — пространственная координата, в направление которой происходит фильтрация, t — время, а функция $h(s)$ характеризует параметры среды.

В общем случае, алгебра Ли контактных симметрий порождает следующие векторные поля:

$$Y_1 = -t\frac{\partial}{\partial t} - x\frac{\partial}{\partial x} + s_t\frac{\partial}{\partial s_t} + s_x\frac{\partial}{\partial s_x}, \quad Y_2 = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = -\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Наличие сдвигов вдоль векторного поля $Y_4 = \frac{\partial}{\partial s}$ соответствует случаю, когда $h'(s) = 0$. Тогда производящая функция симметрий имеет вид:

$$(\alpha + x)s_x + (\beta + t)s_t + \gamma.$$

В остальных случаях ($h'(s) \neq 0$) параметр γ становится равным нулю и производящая функция симметрий принимает следующий вид:

$$(\alpha + x)s_x + (\beta + t)s_t. \tag{2}$$

Найдем автомодельные решения, отвечающие симметриям с этой производящей функцией. Такие решения имеют вид:

$$s(t, x) = F\left(\frac{\alpha + x}{\beta + t}\right) \tag{3}$$

В этом случае фактор-уравнение имеет вид:

$$F'^2(F'h(F)z - 1) = 0. \tag{4}$$

Здесь $F = F(z)$, где $z = \frac{\alpha+x}{\beta+t}$. Это уравнение интегрируется в квадратурах:

$$\int h(F)dF = \ln(Cz). \tag{5}$$

Соответствующие частные решения исходного уравнения имеют вид:

$$s(t, x) = ln\left(\frac{\alpha + x}{\beta + t}\right) + C \quad \text{для} \quad h(s) = \frac{\alpha + x}{\beta + t},$$

$$s(t, x) = \ln(csc\frac{\alpha + x}{\beta + t} - cot\frac{\alpha + x}{\beta + t}) + C \quad \text{для} \quad h(s) = sin\frac{\alpha + x}{\beta + t},$$

$$s(t, x) = -e^{-\frac{\alpha+x}{\beta+t}} + C \quad \text{для} \quad h(s) = e^{\frac{\alpha+x}{\beta+t}}.$$

[3]Работа поддержана грантом РФФИ №12-08-01238-а.

[1] А.А. Горинов. Построение многозначных решений систем Якоби в Maple // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия. Инварианты. Управление". Москва, 17-21 декабря 2012г. С. 33.

[2] А.А. Горинов. Многозначные решения двухмерного уравнения Эйлера в Maple // Тезисы международной конференции "Компьютерно-аналитические методы в теории управления и математической физике". Сочи, 3-10 мая 2013г. С. 7.

[3] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Its Appl., **101**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. xxii+496 P.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛАСТИЧНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

К.Р. Джукашев

(Тверской государственный университет, Тверь, Россия)

E-mail address: dzhukashev@gmail.com

Многомерная три-ткань называется эластичной или тканью E, если в любой ее координатной лупе выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. В [1] было доказано, что эластичные три-ткани образуют собственный подкласс средних тканей Бола и найдены уравнения двух шестимерных три-тканей E: E_1 и E_2. Тензорные соотношения эластичных тканей мы рассматривали в работе [2].

Ткани E_1 и E_2 имеют специфическое строение тензора кручения: определяемая им производная алгебра одномерна. Мы обобщаем класс эластичных тканей ранга 1 на многомерный случай. Оказалось, что и в многомерном случае естественным образом выделяются два класса. В данной работе мы рассматриваем класс E_1^r, структурные уравнения которого приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^1 &= \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} + a^1_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k,\\
d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\underset{2}{\omega}^1 &= \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega^1_{\hat{j}} - a^1_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k,\\
d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\omega^1_{\hat{j}} &= b^1_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}.
\end{aligned}$$

Эта система интегрируется и получаются уравнения ткани E_1^r в локальных координатах:

$$\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + e^{x^2}(y^1 - \lambda_{ab}x^a y^b),\\
z^a &= x^a + y^a.
\end{aligned}$$

Как видно из последних уравнений, координатная лупа ткани представляет собой расширение одномерной абелевой группы с помощью $r-1$-мерной абелевой группы. Согласно [3] (стр. 35), ткань E_1^r является полупрямым произведением двух параллелизуемых тканей.

[1] Шелехов, А.М.: Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$. Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5А550).

[2] Джукашев К.Р. О три-тканях с эластичными координатными лупами. Труды международного геометрического центра, т. 6 (2013), № 4, 52–80, Одесса, 2013

[3] Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения: Монография. – Тверь, Тверской государственный университет, 2010. – 308 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ ИЗ ОКРУЖНОСТЕЙ

А. А. Дуюнова

(Институт проблем управления РАН, Москва)

E-mail address: Duyunova_anna@mail.ru

Рассмотрим функцию от двух переменных $z = u(x, y)$, линиями уровня которой являются окружности. Функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}&(u_x^2+u_y^2)(u_{yyy}u_x^3-3u_yu_{xyy}u_x^2+3u_y^2u_{xxy}u_x-u_y^3u_{xxx})+\\&+3(u_y^2u_{xx}-2u_yu_{xy}u_x+u_{yy}u_x^2)(u_yu_{xx}u_x+u_y^2u_{xy}-u_{xy}u_x^2-u_yu_{yy}u_x)=0.\end{aligned}\tag{1}$$

В пространстве $\mathbf{J}^k$ k-джетов гладких функций на $\mathbb{R}^2$ с координатами $x, y, p, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{k0}, \dots, p_{0k}$ это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}&(p_{10}^2+p_{01}^2)(p_{03}p_{10}^3-3p_{01}p_{12}p_{10}^2+3p_{01}^2p_{21}p_{10}-p_{01}^3p_{30})+\\&+3(p_{01}^2p_{20}-2p_{01}p_{11}p_{10}+p_{02}p_{10}^2)(p_{01}p_{20}p_{10}+p_{01}^2p_{11}-p_{11}p_{10}^2-p_{01}p_{02}p_{1,0})=0.\end{aligned}\tag{2}$$

Уравнение (2) имеет следующую алгебру симметрий

$$\begin{aligned}&X_1=f_1(p)\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=f_2(p)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=f_3(p)\frac{\partial}{\partial p},\\&X_4=f_4(p)\,x\frac{\partial}{\partial x}+f_4(p)\,y\frac{\partial}{\partial y},\quad X_5=-f_5(p)\,y\frac{\partial}{\partial x}+f_5(p)\,x\frac{\partial}{\partial y},\\&X_6=f_6(p)\,xy\frac{\partial}{\partial x}+f_6(p)\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_7=-f_7(p)\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}+f_7(p)\,xy\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

где $f_1(p), \dots, f_7(p)$ — произвольные гладкие функции.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$(1+w^2)(w^2w_{yy}-2ww_{xy}+w_{xx})-(3ww_x-2w^2w_y+w_y)(w_x-ww_y)=0,$$

где $w(x, y) = \dfrac{u_x}{u_y}$, или в координатах пространства $\mathbf{J}^2$

$$(1+p^2)(p^2p_{02}-2pp_{11}+p_{20})-(3pp_{10}-2p^2p_{01}+p_{01})(p_{10}-pp_{01})=0.\tag{3}$$

Последнее уравнение имеет следующую алгебру Ли симметрий

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - (p^2+1)\frac{\partial}{\partial p},$$
$$X_5 = xy\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(y^2 - x^2\right)\frac{\partial}{\partial y} + x(p^2+1)\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_6 = -\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} - y(p^2+1)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Уравнение (3) имеет следующий инваринат второго порядка

$$I = \frac{p_{20}p^4 + 2\left(p_{11} - p_{10}^2\right)p^3 - 5p^2 p_{10}p_{01} + \left(3p_{10}^2 - p_{01}^2 + 2p_{11}\right)p - p_{20} + p_{10}p_{01}}{p\left(p^3 p_{11} - \left(p_{20} + 2p_{10}p_{01}\right)p^2 + \left(p_{11} + \frac{5}{2}p_{10}^2 - \frac{1}{2}p_{01}^2\right)p - p_{20} + p_{10}p_{01}\right)}.$$

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ СО МНОГИМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ[4]

А.Г. Кушнер
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
E-mail address: `kushner@physics.msu.ru`

В.В. Лычагин
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Университет Тромсе)
E-mail address: `valentin.lychagin@uit.no`

В докладе рассматривается проблема классификации гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы и произвольным числом управляющих параметров относительно псевдогруппы Ли преобразований обратной связи. Построены инвариантные мульти-дифференцирования и указан способ построения скалярных дифференциальных инвариантов.

Преобразования обратной связи часто используются в теории управления [4, 3]. Такие преобразования являются аналогами преобразований Ли в теории дифференциальных уравнений. Как правило, в теории управления рассматриваются преобразования обратной связи аффинных систем.

В работе [1] построены дифференциальные инварианты и инвариантные дифференцирования , названные инвариантами Петрова, для гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы и скалярным управляющим параметром относительно преобразований обратной связи. На множестве дифференциальных инвариантов введена структура пуассоновой алгебры. Пуассонова структура использована для классификации систем с управляющим параметром.

В данной работе вводится псевдогуппа Ли преобразования обратной связи для общих гамильтоновых систем с произвольным числом управляющих параметров.

Пусть $M = \mathbf{R}^{2n}$ — фазовое пространство и пусть

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$$

— симплектическая структура на нем. Пусть $B = M \times \mathbf{R}^m$ — расширенное фазовое пространство с координатами q, p, u и пусть

$$\pi : B \times \mathbf{R} \to B, \qquad \pi : (q,p,u,h) \mapsto (q,p,u)$$

[4]Поддержано грантами РФФИ №№11-01-93106-НЦНИЛ_а, 12-01-00886-а, 12-08-01238-а

— одномерное локально тривиальное расслоение над B.

Сечения $h = \mathcal{H}(q, p, u)$ этого расслоения могут рассматриваться как гамильтонианы систем

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \tag{1}$$

Пусть $J^k(\pi)$ — пространство k-джетов сечений расслоения π и пусть q, p, u, h, h_σ — локальные канонические координаты на этом пространстве. Здесь

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2n+m})$$

— мульти-индекс, $|\sigma| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_{2n+m} \leq k$.

В случае $n = 1$ и $m = 2$ определим функцию

$$h_{[u_1,u_2]} = h_{pu_1} h_{qu_2} - h_{pu_2} h_{qu_1}$$

Эта функция является относительным дифференциальным инвариантом. Однако тензорные поля

$$\frac{1}{h_{[u_1,u_2]}} \frac{d}{du_1} \wedge \frac{d}{du_2}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{du_1} \wedge \frac{d}{du_2} \wedge \frac{d}{dh_{u_1}} \wedge \frac{d}{dh_{u_2}},$$

$$h_{[u_1,u_2]} du_1 \wedge du_2, \tag{3}$$

$$du_1 \wedge du_2 \wedge dh_{u_1} \wedge dh_{u_2}$$

являются абсолютными инвариантами: их производные Ли вдоль любого симплектического векторного поля обратной связи равны нулю.

Заметим, что бивекторные поля (2) и $\frac{d}{dp} \wedge \frac{d}{dq}$ определяют некоммутирующие пуассоновы структуры. Их скобка Схоутена дает новые тензорные инварианты.

Аналоги этих тензорных полей существуют для произвольных значений n и m. Используя аппарат симплектической алгебры, развитый в [3], можно построить полный набор скалярных дифференциальных инвариантов гамильтоновых систем с управляющими параметрами.

[1] Kushner A., Lychagin V. Petrov Invariants for 1-D Control Hamiltonian Systems // Global and Stochastic Analysis. 2012. Vol. 2, No. 1. P. 241-264.

[2] Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром // Автоматика и телемеханика. 2013. №3. С. 83–102.

[3] Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2004. 464 С.

[4] Agrachev A., Zelenko I. On feedback classification of control-affine systems with one and two-dimensional inputs // arXiv:math/0502031. 2005. P. 1-26.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СРЕДНИХ ТРИ-ТКАНЕЙ БОЛА С КАНОНИЧЕСКОЙ ПОЧТИ РЕДУКТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ

Е. А. Оноприенко

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: katrinonoprienko@mail.ru

Рассматриваются средние три-ткани Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны, которые обозначаются нами $B_m^{\triangledown}$. Так как тензор кривизны ткани Бола является существенной частью тензора кривизны связности Черна [1], то тензор кривизны этой связности также является ковариантно постоянным. Будем говорить, что многообразие аффинной связности несет почти редуктивную структуру, если тензор кривизны этой связности является ковариантно постоянным. Таким образом, многообразие ткани $B_m^{\triangledown}$ является почти редуктивным пространством, для которого связность Черна является канонической почти редуктивной связностью. Известно [1], что на базе третьего слоения средней ткани Бола имеется симметрическая структура, определяемая сердцевиной этой ткани. Таким образом, с тканью $B_m^{\triangledown}$ связаны две структуры — симметрическая на базе третьего слоения ткани и почти редуктивная на многообразии ткани.

Пусть, как обычно ([1, стр.9]), слоения три-ткани $B_m^{\triangledown}$ на многообразии размерности $2r$ заданы уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0,$$

а структурные уравнения имеют вид [1, стр.16]:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \; \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \; \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \; \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{aligned}$$

здесь и далее $i, j, k = 1, 2, 3 \ldots r$. Верна

Теорема 1. *Тензоры кручения и кривизны ткани $B_m^{\triangledown}$ связаны следующими дифференциальными и конечными соотношениями:*

$$\nabla a_{jk}^i = -b_{[jk]\ell}^i \left(\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell \right), \nabla b_{jkl}^i = 0; \tag{1}$$

$$b_{j(kl)}^i = 0, \quad b_{[jk\ell]}^i = 2a_{[jk}^m a_{|m|\ell]}^i, \quad a_{jk}^p b_{p\ell m}^i = a_{pk}^i b_{j\ell m}^p - a_{pj}^i b_{k\ell m}^p,$$
$$b_{jkp}^i a_{\ell m}^p = 0, \quad b_{jkp}^i b_{lmq}^p = 0, \quad b_{prs}^i b_{jkl}^p = b_{pkl}^i b_{jrs}^p.$$

Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, ткани $B_m^{\triangledown}$ существуют с произволом N постоянных, где N — число независимых пфаффовых уравнений (1) — определяется из приведенной системы конечных соотношений.

Таким образом, классификация тканей $B_m^{\triangledown}$ сводится к анализу этих соотношений, то есть к классификации соответствующих алгебр Бола.

[1] Акивис М.А., Шелехов А.М. Многомерные три-ткани и их приложения. Тверь: Твер. гос. ун-т., 2010.

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С УПРАВЛЯЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.Ю. Солодов

(Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

электронная почта: mishka88bit@gmail.com

Для стационарного уравнения Шредингера

$$y'' = W(x,u)y \tag{1}$$

с потенциалом W, зависящим от скалярного управляющего параметра u, рассмотрим задачу классификации относительно преобразований обратной связи

$$\varphi : (x,u,y) \longmapsto (X(x,y), U(u), Y(x,y)) \tag{2}$$

Такие преобразования возникают в теории управления. При этом мы используем идею Софуса Ли перехода к инфинитезимальным преобразованиям: вместо преобразований (2) будем рассматривать однопараметрическое семейство преобразований

$$\varphi_s : (x,u,y) \longmapsto (X_s(x,y), U_s(u), Y_s(x,y)) \tag{3}$$

Пусть преобразования φ_s являются преобразованиями сдвига вдоль векторного поля

$$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial u} \tag{4}$$

Уравнение (1) определяет в пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R})$ с координатами $x, u, y_{00}, y_{01}, y_{10}, y_{11}, y_{20}, y_{02}, y_{21}, y_{12}, y_{22}$ поверхность $\mathcal{E}_w = \{y_{20} - W(x,u)y_{00} = 0\}$

Будем искать вид векторного поля (4), сдвиги вдоль которого сохраняют класс уравнения (1). Это равносильно тому, что

$$(\varphi_s^{(2)})^*(y_{20} - W(x,u)y_{00}) = \lambda_s(y_{20} - W_s(x,u)y_{00}), \tag{5}$$

где $\varphi_s^{(2)}$ — продолжение преобразования (3) в пространство 2-джетов, λ_s - однопараметрическое семейство функций на пространстве $J^2(\mathbb{R})$, $\lambda_0 = 1$, а W_s - однопараметрическое семейство функций на пространстве $\mathbb{R}^2$, такое, что $W_0 = W$.

Вычисляя производную по параметру s при $s = 0$ от обеих частей (5), получаем:

$$L_{X^{(2)}}(y_{20} - W(x,u)y_{00}) = \left.\frac{d\lambda_s}{ds}\right|_{s=0}(y_{20} - W_0(x,u)y_{00}) - \lambda_0 \left.\frac{dW_s}{ds}\right|_{s=0} y_{00}$$

Ограничивая последнее равенство на уравнении $\mathcal{E}_w$, получим линейную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для нахождения функций A, B, C. Решая ее, находим вид векторного поля (4):

$$X = r(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}r'(x)y_{00}\frac{\partial}{\partial y_{00}} + C_1 y_{00}\frac{\partial}{\partial y_{00}} + C(u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{6}$$

где $r = r(x)$ — произвольная функция, C_1 — произвольная постоянная и $C = C(u)$ - произвольная функция.

Преобразования, отвечающие векторному полю (6), порождают действие на потенциал W. Соответствующее векторное поле имеет вид:

$$Y = r(x)\frac{\partial}{\partial x} + \left(2r'(x)W - \frac{1}{2}r'''(x)\right)\frac{\partial}{\partial W} + C(u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{7}$$

Это поле можно рассматривать как векторное поле на пространстве 0-джетов сечений расслоения $\pi : (x, u, W) \longmapsto (x, u)$.

Продолжая поле Y в пространство 4-джетов $J^4(\pi)$, находим следующие два первых дифференциальных инварианта:

$$J1 = \frac{-2\,W_{0,1}W_{2,1}W_{0,2} + 2\,{W_{0,1}}^2W_{2,2} + 3\,{W_{1,1}}^2W_{0,2} - 3\,W_{1,1}W_{0,1}W_{1,2}}{\left(-W_{1,1}W_{0,2} + W_{0,1}W_{1,2}\right)^{4/3}}$$

$$J2 = \frac{-W_{0,1}W_{1,1}W_{0,3} + {W_{0,1}}^2W_{1,3} + 3\,W_{1,1}{W_{0,2}}^2 - 3\,W_{0,2}W_{0,1}W_{1,2}}{\left(-W_{1,1}W_{0,2} + W_{0,1}W_{1,2}\right)^{5/3}}$$

[1] A. G. Kushner, V. V. Lychagin. Petrov Invariants for 1-D Control Hamiltonian Systems. // Global and Stochastic Analysis. 2012. 2, 2. 241–264.

[2] A. G. Kushner, V. V. Lychagin. Petrov Invariants of Hamiltonian Systems with a Control Parameter// Automation and Remote Control, **74**(3), 385—400 (2013).

[3] D. S. Gritsenko, O. M. Kiriukhin. Differential Invariants of Control-Parameter-Dependent Quasi-Harmonic Oscillation Equations// Proceedings of International Workshop on "Methods in Control Theory", 34 p. (2012).

[4] D. S. Gritsenko, O. M. Kiriukhin. Classification of Oscillation Equations under Feedback Transformations// Proceedings of the XX International Scientific Conference for undergraduate and postgraduate students, and young scientists «Lomonosov», Moscow: MAKS Press (2013).

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЛОЕНИЙ ПРЯМЫХ

И.С. Стрельцова

(Астраханский государственный университет, Астрахань, Россия)

E-mail address: `strelzova_i@mail.ru`

Слоения прямых на плоскости можно рассматривать как линии уровня $f(x, y) = \text{const}$ решений дифференциального уравнения флекса

$$f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy} = 0.$$

Оно обладает следующим свойством (см. [1]): если $f(x, y)$ — решение этого уравнения, то функция $\phi(f(x, y))$ также является его решением для любой (гладкой) функции ϕ. То есть преобразование $f \to \phi(f)$ является симметрией этого уравнения (см. [2]). После факторизации уравнения флекса по этой симметрии мы получаем уравнение Эйлера.

Это наблюдение позволило найти дифференциальные инварианты слоений прямых в проективной геометриИ на плоскости.

[1] Goldberg V.V., Lychagin V.V. Geodesic Webs on a Two-Dimensional Manifold and Euler Equations // Acta Applicandae Mathematicae. 04/2012; 109(1):5-17. DOI:10.1007/s10440-009-9437-1.

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ТАЧИБАНЫ

С.Е. Степанов, И.И. Цыганок

(Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия)

E-mail address: s.e.stepanov@mail.ru, i.i.tsyganok@mail.ru

В докладе будет проведен сравнительный анализ спектральных свойств хорошо известного лапласиана Ходжа-де Рама [1, с. 334-344] и определенного нами эллиптического оператора Тачибаны [2, 3] на компактных римановых многообразиях со знакоопределенным оператором кривизны. В первой части доклада будут приведены необходимые нам сведения из римановой геометрии многообразия. Во второй части приведены сведения об операторах кривизны риманова многообразия, которые необходимы для получения основных результатов данной работы. В третьей части рассмотрен оператор Ходжа-де Рама на компактном римановом многообразии с положительно определенным ограниченным оператором кривизны и на компактном конформно плоском многообразии. Найдена "нижняя граница" для первого собственного значения оператора, а также с помощью числа Тачибаны [2] получена оценка его кратности. В четвертой части будут рассмотрены свойства оператора Тачибаны и его собственных значений на компактном римановом многообразии. Дана "нижняя граница" для первого собственного значения оператора и получена помощью числа Бетти оценка его кратности на компактном римановом многообразии с отрицательно определенным оператором кривизны и на компактном гиперболическом многообразии.

[1] Chavel I. Eigenvalues in Riemannian Geometry // Academic Press. INC, Orlando (1984).

[2] Степанов С. Е. Кривизна и числа Тачибаны // Математический сборник, **202**: 7 (2011), 135–146.

[3] Stepanov S.E., Mikes J. Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds // Differential Geometry and its Applications, **31**: 4 (2013), 486–495.

КЛАССИФИКАЦИЯ БИССЕКТОРОВ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В. Т. Фоменко

(ФГБОУ ВПО "ТГПИ имени А.П. Чехова")

E-mail address: vtfomenko@rambler.ru

Пусть на плоскости (π) заданы две окружности C_1 и C_2 радиусов r_1 и r_2 соответственно с центрами в точках F_1 и F_2. Будем считать, что $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, $|F_1F_2| = 2c$, $c \geq 0$, полагая, что окружность нулевого радиуса есть точка, а окружность бесконечного радиуса есть прямая, при этом центр такой окружности находится в бесконечности и константа c не определена. Множество точек плоскости (π), равноудаленных от окружностей C_1 и C_2, будем называть *биссектором* окружностей C_1, C_2 и обозначать через (γ). В настоящей работе дается полная классификация биссекторов окружностей C_1, C_2, заданных на плоскости (π). В частности, доказаны теоремы 1, 2, 3.

1. Для формулировки теоремы 1 введем следующее определение.

Определение 1. *Будем говорить, что окружность C_1* лежит внутри *окружности C_2, если все точки окружности C_1 принадлежат открытому кругу с границей C_2.*

Имеет место

Теорема 1. *Пусть $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$ и окружность C_1 лежит внутри окружности C_2. Тогда биссектор окружностей C_1, C_2 есть эллипс, фокусы которого совпадают с центрами F_1, F_2 окружностей C_1, C_2. Для всякого эллипса на плоскости (π) можно указать однопараметрическое семейство окружностей C_1^r, C_2^r, для которых данный эллипс является биссектором для любого значения параметра r, при этом фокусы эллипса являются центрами окружностей C_1^r, C_2^r.*

Заметим, что в силу теоремы 1 можно дать следующее определение эллипса: *эллипсом* называется множество точек плоскости, равноудаленных от окружностей C_1, C_2 при условии, что окружность C_1 лежит внутри окружности C_2.

2. Для формулировки теоремы 2 введем следующее

Определение 2. *Будем говорить, что окружность C_1* лежит вне *окружности C_2, если все точки окружности C_1 не принадлежат замкнутому кругу с границей C_2.*

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$ и окружность C_1 лежит вне окружности C_2. Тогда биссектор окружностей C_1, C_2 есть связная компонента гиперболы, фокусы которой совпадают с центрами F_1, F_2 окружностей C_1, C_2. Для всякой связной компоненты гиперболы на плоскости (π) можно указать однопараметрическое семейство окружностей C_1^r, C_2^r, для которых данная компонента гиперболы является биссектором для любого значения параметра r, при этом фокусы гиперболы являются центрами окружностей C_1^r, C_2^r.*

Заметим, что в силу теоремы 2 можно дать следующее определение: *связной компонентой гиперболы* называется множество точек плоскости, равноудаленных от окружностей C_1 и C_2, при условии, что окружность C_1 лежит вне окружности C_2 и её радиус отличен от радиуса окружности C_2.

3. Рассмотрим случай, когда одна из окружностей $C_i, i = 1, 2$ вырождается в прямую. Имеет место

Теорема 3. *Пусть* $0 \le r_1 < r_2 = \infty$ *и пересечение* C_1 *и* C_2 *пусто, т.е.* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. *Тогда биссектор окружности* C_1 *и прямой* C_2 *есть парабола с фокусом в центре окружности* C_1. *Для всякой параболы существует однопараметрическое семейство окружностей* C_1^r *и прямых* C_2^r *для которых данная парабола является биссектором, при этом фокус параболы является центром окружностей* C_1^r *для любого значения параметра* r.

В силу теоремы 3 можно дать следующее определение параболы: парабола есть множество точек плоскости, равноудаленных от заданных окружности C_1 и прямой C_2, не пересекающихся между собой.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОЙ ПСЕВДОГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В.В. Шурыгин (мл.)

(Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия)

E-mail address: `vadimjr@yandex.ru, 1Vadim.Shurygin@kpfu.ru`

Уравнением Абеля называется уравнение вида

$$y' = a_3(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x).$$

На классе таких уравнений действует псевдогруппа G точечных преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad y \mapsto g(x) \cdot y + h(x).$$

В работах Лиувилля [1] и Аппелля [2] вычислены дифференциальные инварианты этого действия и решена задача эквивалентности двух таких уравнений относительно действия псевдогруппы G.

Обобщенным уравнением Абеля называется уравнение вида

$$y' = a_k(x)y^k + a_{k-1}(x)y^{k-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x).$$

Мы рассматриваем вопрос об эквивалентности таких уравнений относительно действия псевдогруппы G при $k = 4$ и $k = 5$.

Теорема 1. *При* $k = 4$ *алгебра дифференциальных инвариантов обобщенного уравнения Абеля порождена двумя инвариантами первого порядка и одним инвариантным дифференцированием. При* $k = 5$ *алгебра дифференциальных инвариантов порождена одним инвариантом нулевого порядка, двумя инвариантами первого порядка и одним инвариантным дифференцированием.*

Мы также формулируем теорему эквивалентности таких уравнений относительно действия псевдогруппы G.

[1] R. Liouville. Sur une équation différentielle du premier ordre // Acta Mathematica, **26** (1902) 55–78.

[2] P. Appell. Sur les invariants de quelques équations différentielles // Journal de Mathématique **5** (1998) 361–423.

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF QUASI-HARMONIC OSCILLATION EQUATIONS WITH RESPECT TO FEEDBACK TRANSFORMATIONS[5]

D. Gritsenko

(Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: gricenko@physics.msu.ru

O. Kiriukhin

(University of Chicago Booth School of Business, Chicago, Illinois, USA)

E-mail address: kiriukhin@uchicago.edu

The classification problem for a control-parameter-dependent second-order differential equations is considered. The algebra of the differential invariants with respect to Lie pseudo-group of feedback transformations is calculated. The equivalence problem for a control-parameter-dependent quasi-harmonic oscillation equation is solved. Some canonical forms of this equation are constructed.

Consider the problems of equivalence and classification for the differential equation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y,u) = 0, \tag{1}$$

with respect to the feedback transformations [1]:

$$\varphi : (x, y, u) \longmapsto (X(x, y), Y(x, y), U(u)), \tag{2}$$

where the function $f(y, u)$ is smooth. Here u is a scalar control parameter. We will call an equation of form (1) *control-parameter-dependent quasi-harmonic oscillator equation* (QHOE).

Definition 1. *Operator*

$$\nabla = M\frac{d}{dy} + N\frac{d}{du} \tag{3}$$

is called G-invariant differentiation if it commutes with every element of any prolongation of Lie algebra $\mathcal{G}$, where M and N are the functions on the jet space.

Theorem 1. *Differential operators*

$$\nabla_1 = \frac{z}{z_y}\frac{d}{dy}, \tag{4}$$

$$\nabla_2 = \frac{z}{z_u}\frac{d}{du} \tag{5}$$

are G-invariant differentiations.

---

[5] Работа частично поддержана грантом РФФИ №12-08-01238-а.

Theorem 2. *Functions*

$$J_{21} = \frac{z_{yy}z}{z_y^2}, \quad J_{22} = \frac{z_{yu}z}{z_y z_u}$$

form a complete set of the basic second-order differential invariants, i.e.any other second-order differential invariants are the functions of J_{21} *and* J_{22}.

Theorem 3. *Quasi-harmonic oscillation equation differential invariants algebra is generated by second-order differential invariants* J_{21}, J_{22} *and invariant differentiations* ∇_1 *and* ∇_2. *This algebra separates regular orbits.*

Let us call an equation $\mathcal{E}_f$ *regular*, if

$$dJ_{21}(f) \wedge dJ_{22}(f) \neq 0.$$

Here $J(f)$ — is the value of the differential invariant J on the function $f = f(y, u)$.

Theorem 4. *Suppose that the functions* f *and* g *are real-analytical. Two regular equations* $\mathcal{E}_f$ *and* $\mathcal{E}_g$ *are locally* G*-equivalent if and only if the functions* Φ_{if} *and* Φ_{ig} *identically equal* $(i = 1, 2, 3)$ *and 3-jets of the functions* f *and* g *belong to the same connection component.*

[1] A. G. Kushner, V. V. Lychagin. Petrov Invariants for 1-D Control Hamiltonian Systems // Global and Stochastic Analysis. 2012. 2, 2. 241–264.

ON APPLICATIONS OF LOBACHEVSKY, CONFORMAL AND PROJECTIVE GEOMETRIES TO NEUROGEOMETRY AND IMAGE REGOGNITION

V. Lychagin

(Institute of Control Sciences of RAS, Russia & Tromsø University, Norway)

E-mail address: valentin.lychagin@uit.no

N. Konovenko

(Odessa National Academy of Food Technologies, Ukraine)

E-mail address: konovenko@ukr.net

In this talk we outline various applications of the above mentioned geometries to the neurogeometry and image recognition.

The first part of the talk shall be devoted to identification of different kind of geometrical objects (such as functions, differential forms, foliations, variational problems etc.), defined on a simply connected domain in a plane, with respect of Lie pseudogroup of conformal transformations. The action and differential invariants of the following Lie groups: $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{SL}_2(\mathbb{C})$ and, especially in neurogeometry, the Lie group $\boldsymbol{SO}(3,1)$ play the more important role in the problem.

We investigate regular and singular orbits of actions of these groups in the jet spaces. To separate regular orbits we find the corresponding differential algebras. We made also first steps to study singularities of the actions and find normal forms of them.

At the end of the talk we shall shortly discuss the problem of reconstructions of the damaged structures. To this end, using the structure of differential invariants algebras, we give a complete description of the invariant variational problems.

MAIN METRIC INVARIANTS OF FINITE METRIC SPACES

E. Sosov

(Kazan Federal University, Kazan, Russia)

E-mail address: dobryi7@mail.ru

Let us consider a set $\mathbb{K}$ of finite metric spaces to have the same power $N > 1$. We call a function $F : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ *a main metric invariant*, if the following conditions are satisfied.

(i) $F(X) = F(Y)$ for any isometric metric spaces X, $Y \in \mathbb{K}$.

(ii) $F(X) \subset \{\rho(x, y) : x, y \in X, \ x \neq y\}$,

for any metric space $(X, \rho) \in \mathbb{K}$.

(iii) $|F(X) - F(Y)| \leq 2d_s(X, Y) = \min\{\operatorname{dis} f : f : X \to Y - \text{bijection}\}$,

where $\operatorname{dis} f = \max\{|\rho(x, y) - d(f(x), f(y))| : x, y \in X\}$, for any metric spaces (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$.

We will give the known examples of main metric invariants of a finite metric space $(X, \rho) \in \mathbb{K}$.

1. Diameter of a space X: $D(X) = \max\{\rho(x, y) : x, y \in X\}$ [1], [2].
2. K-radii $(1 \leq K \leq N - 1)$ of a space $(X, \rho) \in \mathbb{K}$:

$$R_K(X) = \min\{\beta(X, S) : S \subset X, 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq K\}, \tag{1}$$

where $\beta(X, S) = \max\{\rho(x, S) : x \in X\}$, $\operatorname{card}(S)$ is a power of the set S ([1], where notation $R_{KX}(X) = R_K(X)$ was used).

Let $2 \leq K < N$. Define the following functions from the set $\mathbb{K}$.

$$D_K(X) = \min\{D(S) : S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\};$$

$\operatorname{mar}_{\mathrm{LK}}(X) = \max\{R_L(S) : S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}$ $(1 \leq L \leq K - 1)$;

$$\operatorname{mir}_{\mathrm{LK}}(X) = \min\{R_L(S) : S \subset X, \ \operatorname{card}(S) = K\}, \quad (1 \leq L \leq K - 1).$$

It is easy to see that for $N > 2$ for any $X \in \mathbb{K}$ we have the equalities

$$D(X) = \operatorname{mar}_{12}(X), \qquad D_2(X) = \operatorname{mir}_{(\mathrm{L}-2)(\mathrm{L}-1)}(X) = R_{N-1}(X),$$

where L is a natural number, $2 < L \leq N$.

Theorem 1. *Let* $2 \leq K < N$. *Then functions* D_K, $\operatorname{mar}_{\mathrm{LK}}$, $\operatorname{mir}_{\mathrm{LK}}$ $(1 \leq L \leq K - 1)$ *are main metric invariants.*

The main metric invariants can be used for classification of the finite metric spaces and their recognition [1].

[1] Sosov E. N. Relative N-radius of a bounded subset of a metric space // Uch. Zap. Kazan. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, (2011) No. 4, 28-36 .

[2] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics, vol.33. A.M.S., Providence, RI, (2001).

CONNECTIONS IN THE CATEGORY OF SECOND ORDER TANGENT BUNDLES

V. V. Shurygin

(Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia)

E-mail address: `Vadim.Shurygin@kpfu.ru`

L. A. Vashurina

(Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russia)

E-mail address: `liliyavashurina@gmail.com`

Second order tangent bundles T^2M_n can be viewed as objects of the category $\mathcal{T}^2\mathcal{M}$ whose morphisms are $\mathbf{D}^2$-smooth mappings $T^2M_n \to T^2M'_m$, where $\mathbf{D}^2$ is the algebra of truncated polynomials of degree two in one variable. This gives rise to the extended structure group $\widetilde{G}^2_n$ of T^2M_n and the corresponding extended second order frame bundle $\widetilde{P}^2M_n$ associated to T^2M_n. [1].

The horizontal distribution on T^2M_n corresponding to a connection Γ in $\widetilde{P}^2M_n$ is called an *extended connection* in T^2M_n. In terms of local coordinates $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\}$ on T^2M_n, an extended connection in T^2M_n is given by equations of the form

$$d\dot{x}^i + (\Gamma^i_{j\alpha}\dot{x}^\alpha + \dot{\Gamma}^i_j)dx^j = 0, \quad d\ddot{x}^i + (\Gamma^i_{j\alpha}\ddot{x}^\alpha + \Gamma^i_{j\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + \dot{\Gamma}^i_{j\alpha}\dot{x}^\alpha + \ddot{\Gamma}^i_j)dx^j = 0. \qquad (1)$$

Proposition 1. (i) *The functions $\Gamma^i_{j\alpha}$ and $\Gamma^i_{j\alpha\beta}$ in* (1) *are the connection coefficients of a connection in the second order frame bundle P^2M_n.*

(ii) *The functions $\dot{\Gamma}^i_j$, $\ddot{\Gamma}^i_j$, and $\dot{\Gamma}^i_{j\alpha}$ in* (1) *define a section $s(\Gamma)$ of a fiber bundle E^2M_n associated to P^2M_n with the following transition functions:*

$$\dot{z}^i_j = x^i_{i'}x^{j'}_i\dot{z}^{i'}_{j'}, \quad \ddot{z}^i_j = x^i_{i'}x^{j'}_i\ddot{z}^{i'}_{j'}, \quad \dot{z}^i_{j\alpha} = x^i_{i'}x^{j'}_j x^{\alpha'}_\alpha\dot{z}^{i'}_{j'\alpha'} + x^i_{i'k'}x^{k'}_\alpha x^{j'}_j\dot{z}^{i'}_{j'},$$

where $x^i_{i'} = \partial f^i/\partial x^{i'}$, $x^i_{i'k'} = \partial^2 f^i/\partial x^{i'}\partial x^{k'}$ for the change of coordinates $x^i = f^i(x^{i'})$ on the overlapping of two coordinate domains on M_n.

Proposition 2. *Let there be given a section $s : M_n \to E^2M_n$ of the fiber bundle E^2M_n with equations $\dot{z}^i_j = \dot{s}^i_j(x^k)$, $\ddot{z}^i_j = \ddot{s}^i_j(x^k)$, $\dot{z}^i_{j\alpha} = \dot{s}^i_{j\alpha}(x^k)$ and a section $\sigma : M_n \to T^2M_n$ with equations $\dot{x}^i = \dot{\sigma}^i(x^k)$, $\ddot{x}^i = \ddot{\sigma}^i(x^k)$. Then the functions $\dot{\sigma}^i$, $\ddot{\sigma}^i$, $\dot{s}^i_j$, $\ddot{s}^i_j + \dot{s}^k_j\partial_k\dot{\sigma}^i$, $\dot{s}^i_{j\alpha}$ are the components of a morphism $\varphi(s,\sigma) : TM_n \to V(T^2M_n \times_{TM_n} J^1TM_n)$ of vector bundles.*

A $\mathbf{D}^2$-smooth diffeomorphism $F : T^2M_n \to T^2M'_n$ maps an extended connection Γ in T^2M_n into an extended connection Γ' in $T^2M'_n$. Two extended connections Γ_1 and Γ_2 in T^2M_n are called *equivalent* if one of them is the image of the other under a $\mathbf{D}^2$-smooth diffeomorphism $F : T^2M_n \to T^2M_n$ over the identity map of T^2M_n to itself. Each such a diffeomorphism F is uniquely determined by a section $\sigma = \sigma_F : M_n \to T^2M_n$. A section σ induces a section $\widetilde{\sigma} : M_n \to T^2M_n \times_{TM_n} J^1TM_n$.

Theorem 1. *Let Γ_1 and Γ_2 be two extended second order connections in T^2M_n which determine the same second order connection. Then Γ_1 and Γ_2 are equivalent if and only if there exists a section $\sigma : M \to T^2M$ such that*

$$\nabla_1\widetilde{\sigma} = \varphi(s(\Gamma_2), \sigma),$$

where ∇_1 denotes the covariant derivative with respect to Γ_1.

[1] V.V. Shurygin and L.A. Vashurina. Extended connections in second order tangent bundles // Int. Conf. "Geometry. Control. Economics." Astrakhan, 15–26 August, 2011. Abstracts. p.47.

DIFFERENTIAL INVARIANTS OF WDVV EQUATION

S. Tychkov

(Institue of Control Sciences RAS, Moscow, Russia)

E-mail address: sergey.lab06@yandex.ru

We consider two-dimensional associativity equation (a.k.a. WDVV-equation) arising in topological field theory [1]. It is an equation on one function $u(x, y)$ has the form

$$u_{yyy} + u_{xxx}u_{xyy} - u_{xxy}^2 = 0. \tag{1}$$

We consider jet space $\mathbf{J}^k(2, 1)$ with coordinates $x, y, p, p_{10}, p_{01}, \dots, p_{k0}, \dots, p_{0k}$ such that

$$p([u]^0_{(x,y)}) = u(x, y), \quad p_{ij}([u]^k_{(x,y)}) = \left.\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j}\right|_{(x,y)}, \quad 0 < i + j \le k.$$

We rewrite equation (1) in coordinates of space $\mathbf{J}^3(2, 1)$

$$\mathcal{E} : p_{03} + p_{30}p_{12} - p_{21}^2 = 0. \tag{2}$$

Equation $\mathcal{E}$ defines manifold in jet space $\mathbf{J}^3(2, 1)$. We also denote this manifold with $\mathcal{E}$.

Equation (2) admits Lie algebra $\mathfrak{g}$ of symmetries generated by the following vector fields

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial p},\\
&X_4 = x\frac{\partial}{\partial p}, X_5 = y\frac{\partial}{\partial p}, X_6 = xy\frac{\partial}{\partial p},\\
&X_7 = y\frac{\partial}{\partial y} - p\frac{\partial}{\partial p}, X_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + 4p\frac{\partial}{\partial p}, X_9 = x^2\frac{\partial}{\partial p},\\
&X_{10} = y^2\frac{\partial}{\partial p}, X_{11} = 2y\frac{\partial}{\partial x} + x^3\frac{\partial}{\partial p}, X_{12} = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + (2py + \frac{x^4}{8})\frac{\partial}{\partial p}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Algebra $\mathfrak{g}$ is not solvable.

Differential invariant I of order k of equation (1) satisfy the following system of PDEs

$$\mathcal{L}_{X_i^{(k)}} I\Big|_{\mathcal{E}^{(k-3)}} = 0, \quad i = 1, \dots, 12, \tag{4}$$

where I is function on jet space $\mathbf{J}^k(2, 1)$, $X_i^{(k)} \in \mathfrak{g}^{(k)}$—prolongation of algebra $\mathfrak{g}$ to k-jet space, and $\mathcal{E}^{(k-3)}$ is $(k-3)$-th prolongation of equation $\mathcal{E}$.

Dimension of differential k-order invariants algebra is equal to

$$\dim \mathbf{J}^k(2, 1) - \dim \mathfrak{g} - \operatorname{codim} \mathcal{E}^{(k-3)} = 3k - 10, \quad k > 3. \tag{5}$$

Hence there are no invariants of order less than 4.

We find differential invariants of order 5 of the equation (1) by solving system (4) provided $k = 5$. According to formula (5) we get five invariants.

Invariants we found have the form

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2{u_{3,0}}^3 + 18 u_{2,1} u_{3,0} + 27 u_{1,2}}{\left({u_{3,0}}^2 + 6\, u_{2,1}\right)^{3/2}},\\
I_2 &= \frac{2{u_{3,0}}^2 u_{4,0} + 6 u_{2,1} u_{4,0} + 6 u_{3,0} u_{3,1} + 9\, u_{2,2}}{\sqrt{{u_{3,0}}^2 + 6 u_{2,1}}\,\left(9 u_{3,0} u_{4,0} + 27 u_{3,1}\right)},\\
I_3 &= \frac{u_{5,0}\left({u_{3,0}}^2 + 6\, u_{2,1}\right)^{3/2}}{\left(u_{3,0} u_{4,0} + 3\, u_{3,1}\right)^2},\\
I_4 &= \frac{\left(u_{3,0} u_{5,0} + {u_{4,0}}^2 + 3\, u_{4,1}\right)\left({u_{3,0}}^2 + 6\, u_{2,1}\right)}{\left(u_{3,0} u_{4,0} + 3\, u_{3,1}\right)^2},\\
I_5 &= \frac{\left({u_{3,0}}^2 u_{5,0} + \left(4\, {u_{4,0}}^2 + 6\, u_{4,1}\right) u_{3,0} + 12\, u_{3,1} u_{4,0} + 9\, u_{3,2}\right)\sqrt{{u_{3,0}}^2 + 6\, u_{2,1}}}{\left(u_{3,0} u_{4,0} + 3\, u_{3,1}\right)^2}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

[1] Edward Witten. Topological Quantum Field Theory // Commun. Math. Phys. 117, 353-386 (1988).

GEOMETRIC STRUCTURES ON SOLUTIONS OF THE EINSTEIN-MAXWELL EQUATION

V. Yumaguzhin

(Program Systems Institute of RAS, Pereslavl'-Zalesskiy, Russia)

E-mail address: `yuma@diffiety.botik.ru`

This talk is based on joint work with Valentin Lychagin.

We show that a pair of orthogonal 2-dimensional distributions are defined in the natural way on every solution of the Einstein-Maxwell equation. We find some explicit solutions so that their orthogonal distributions are integrable and one of scalar invariants of the Faraday tensor is nonzero constant.

[1] J. Liouville, Sur l'equation aux differences partielles $d^2 \log \lambda / du\, dv \pm \lambda/(aa^2) = 0$// J. Math. Pure Apple., 18, (1853) 71.

[2] С.П. Новиков, И. А. Тайманов, Современные геометрические структуры и поля.– М.:МЦНМО, 2005, – 584 с.

[3] G. Y. Rainich, Electrodynamics in the general relativity theory// Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 106-136.

Содержание

Тезисы докладов международной конференции

Δ-ГЕОМЕТРИЯ

Сочи, 1 – 9 мая 2014 г.

под редакцией А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина

TEX-нический редактор Е.Н. Кушнер.

Тираж 50 экз.
Усл. печ. л. 1,6