ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 55 **И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ** **Выпуск 1**
2010

 БУЛИНСКАЯ Е. В.*

КАТАЛИТИЧЕСКОЕ ВЕТВЯЩЕЕСЯ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ ПО ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ[1)]

Исследуется на двумерной решетке критическое каталитическое ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем, в котором частицы могут производить потомство и гибнуть только в источнике ветвления, расположенном в начале координат. Установлено асимптотическое поведение по времени вероятности невырождения в нуле. Доказана условная предельная теорема для числа частиц в источнике ветвления, а также найдено предельное условное совместное распределение числа частиц в источнике и вне его.

Ключевые слова и фразы: критическое ветвящееся случайное блуждание, процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц, условные предельные теоремы, вероятность невырождения.

1. Введение. Модель критического каталитического ветвящегося случайного блуждания (КВСБ) по решетке $\mathbf{Z}$ была предложена В. А. Ватутиным, В. А. Топчием и Е. Б. Яровой [1], это исследование продолжилось в статье [2]. В случае произвольной размерности решетки $\mathbf{Z}^d$ в работе [3] рассматривалось надкритическое КВСБ и был выявлен экспоненциальный рост процесса. Для модели же критического КВСБ характерен «фазовый переход» по размерности решетки. Подтверждением этого служит тот факт, что асимптотическое поведение по времени вероятности невырождения имеет скорость убывания $t^{-1/4}$ (см. [1]) на решетке $\mathbf{Z}$ и соответственно $(\ln t)^{-1/2}$ на $\mathbf{Z}^2$ (см. [4]). Цель данной заметки состоит в дальнейшем изучении критического КВСБ по двумерной решетке. Нами установлено, что предельное условное совместное распределение числа частиц в источнике и вне его не зависит от размерности решетки для $d = 1$ и $d = 2$. Кроме того, для существования нетривиального предела по времени производящей функции числа частиц $\zeta(t)$ в источнике ветвления при условии $\zeta(t) > 0$, в отличие от случая $d = 1$ (см. [2]), при $d = 2$ не требуется нормировка случайной величины $\zeta(t)$ функцией, неограниченно возрастающей по времени. Окажется различным и асимптотическое поведение по времени вероятностей

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: bulinskaya@yandex.ru

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 7-01-00362а.

невырождения в источнике: при $d = 1$ указанная вероятность убывает как $t^{-1/2}(\ln t)^{-1}$ (см. [1]), а при $d = 2$ — как t^{-1}, что будет показано далее.

Опишем рассматриваемую модель. Пусть в момент времени $t = 0$ в начале координат находится одна частица. Время, которое частица проводит в нуле, имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, затем она может либо умереть с вероятностью α, произведя перед гибелью случайное число потомков, либо покинуть источник ветвления с вероятностью $1-\alpha$. Ветвление частиц определяется производящей функцией $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$. Считается, что производящая функция задает критический ветвящийся процесс в источнике ($f'(1) = 1$) и при этом $\sigma^2 = f''(1) < \infty$. Случайное блуждание вне нуля задается матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x,y))_{x\in\mathbf{Z}^2\setminus\{0\},\ y\in\mathbf{Z}^2}$ и предполагается: симметричным ($a(x,y) = a(y,x)$); однородным по пространству ($a(x,y) = a(0,y-x) = a(y-x)$); со стандартным условием на коэффициенты $\sum_{y\in\mathbf{Z}^2} a(y) = 0$, где $a(y) \geqslant 0$ при $y \neq 0$ и $a(0) < 0$; неприводимым; с конечной дисперсией скачков, т.е. $\sum_{y\in\mathbf{Z}^2} \|y\|^2 a(y) < \infty$. В нуле же интенсивность перехода в точку $y \neq 0$ имеет вид $a(0,y) = -(1-\alpha)a(y)a^{-1}(0)$. Новые частицы эволюционируют по такому же закону независимо друг от друга и от всей предыстории.

Обозначим $\zeta(t)$ число частиц в начале координат в момент времени t, $\mu(t)$ — число частиц вне нуля в момент времени t, и пусть $\eta(t) = \zeta(t)+\mu(t)$ есть общее число частиц в момент времени t. Нас будет интересовать вероятность $q(t) = \mathbf{P}(\zeta(t) > 0)$. Положим для $x \in [0,1]$, $t \geqslant 0$ и $s \in [0,1]$

$$h(x) = f(1-x)-1+x, \quad q(t,s) = 1-\mathbf{E}\, s^{\zeta(t)}, \quad \delta(s) = \int_0^{\infty} h(q(u,s))\, du. \tag{1}$$

Сформулируем основные результаты данной работы, доказательству которых будет посвящена остальная часть заметки.

Теорема 1. *При $t \to \infty$ выполнено соотношение*

$$q(t) \sim \frac{\gamma_2\, a(0)(1-\alpha\delta(0))}{(\alpha-1)\,t},$$

где γ_2 — положительная постоянная, вычисленная в [5, с. 31], *и $\alpha\delta(0) < 1$.*

Теорема 2. *Для каждого $s \in [0,1]$ имеет место равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(s^{\zeta(t)}\,|\,\zeta(t) > 0) = \frac{s-\alpha(\delta(0)-\delta(s))}{1-\alpha\delta(0)}.$$

Теорема 3. *Для всех $s_1, s_2 \in [0,1]$ верно следующее равенство*:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(s_1^{\zeta(t)} s_2^{\mu(t)}\,|\,\eta(t) > 0) = 1-\sqrt{1-s_2}.$$

Следствие 1. *При любом* $s \in [0,1]$ *справедливы формулы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(s^{\eta(t)}\,|\,\eta(t)>0) = 1-\sqrt{1-s}, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(s^{\mu(t)}\,|\,\eta(t)>0) = 1-\sqrt{1-s}.$$

2. Вспомогательные результаты. В рассматриваемой модели, как показано в [3], координаты бесконечномерного вектора $\check{p}(t,\cdot,y)$ переходных вероятностей $\check{p}(t,x,y)$, где $x,y \in \mathbf{Z}^2$, удовлетворяют обратным уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial \check{p}(t,\cdot,y)}{\partial t} = A_2 \check{p}(t,\cdot,y), \quad \check{p}(0,\cdot,y) = \delta_y(\cdot), \tag{2}$$

здесь матрица $A_2 = (I + ((\alpha-1)/a(0)-1)\delta_0\delta_0^T)A$ задает линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $l^2(\mathbf{Z}^2)$, I — тождественный оператор в этом пространстве, δ_0 — вектор-столбец такой, что $\delta_0(x)=0$ при $x\neq 0$ и $\delta_0(0)=1$, а T обозначает транспонирование.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\check{p}(t) \overset{\text{def}}{=} \check{p}(t,0,0)$.

Лемма 1. *Функция* $\check{p}(t)$ *монотонно убывает, и для нее справедливо соотношение*

$$\check{p}(t) \sim \frac{\gamma_2\, a(0)}{(\alpha-1)t}, \qquad t\to\infty,$$

где γ_2 *— положительная постоянная, вычисленная в* [5, с. 31].

Доказательство. Изящное доказательство требуемого свойства монотонности предложено автору Е. Б. Яровой. Оно основано на том факте, что оператор A_2 представим в виде DA, где $D = I + ((\alpha - 1)/a(0)-1)\delta_0\delta_0^T$ — линейный ограниченный оператор в $l^2(\mathbf{Z}^2)$, $D>0$ (т.е. оператор D неотрицательно определен и обратим), а $A \leqslant 0$. Тогда уравнение (2) сводится к задаче Коши

$$\frac{\partial z(t,\cdot,y)}{\partial t} = Bz(t,\cdot,y), \quad z(0,\cdot,y) = D^{1/2}\check{p}(0,\cdot,y),$$

для $z(t,\cdot,y) = D^{1/2}\check{p}(t,\cdot,y)$, где $B = D^{1/2}A\,D^{1/2} \leqslant 0$. Ясно, что скалярное произведение $\langle \partial_t z(t,\cdot,y), z(0,\cdot,y)\rangle = \langle Be^{Bt}z(0,\cdot,y), z(0,\cdot,y)\rangle$ неположительно при любом y. Легко показать, что отсюда следует монотонность функции $\check{p}(t) = \langle \check{p}(t,\cdot,0), \delta_0(\cdot)\rangle$.

В монографии [5] изучено асимптотическое поведение функции $p(t) \overset{\text{def}}{=} p(t,0,0)$, где $p(t,\cdot,y)$ — решение в банаховом пространстве $l^2(\mathbf{Z}^2)$ обыкновенного дифференциального уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial p(t,\cdot,y)}{\partial t} = Ap(t,\cdot,y), \quad p(0,\cdot,y) = \delta_y(\cdot). \tag{3}$$

Рассматривая уравнение (2) как неоднородное для уравнения (3) и применяя формулу вариации постоянной, получаем при $x = y = 0$

$$\check{p}(t) = p(t) + \left(1 - \frac{a(0)}{\alpha - 1}\right) \int_0^t p(t-u)\partial_u \check{p}(u)\, du. \tag{4}$$

Обозначим $\check{G}_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\check{p}(t)\,dt$ и $G_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t)\,dt$, $\lambda \geqslant 0$. В силу равенства $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\check{p}'(t)\,dt = \lambda \check{G}_\lambda - 1$, после применения преобразования Лапласа к каждой части (4) приходим к уравнению

$$\check{G}_\lambda = \frac{a(0)\,G_\lambda}{\alpha - 1 - \lambda(\alpha - 1 - a(0))G_\lambda}.$$

Продифференцировав каждую часть последнего равенства по переменной λ и воспользовавшись найденным в [5] соотношением $p(t) \sim \gamma_2\, t^{-1}$, $t \to \infty$, а также тауберовыми теоремами 2 и 4 из [6, гл. XIII, § 5], имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t\check{p}(t)\,dt \sim \frac{\gamma_2\, a(0)}{(\alpha - 1)\lambda}, \qquad \lambda \to 0+.$$

Доказательство второго утверждения леммы завершается применением следствия 43 из [7] к последнему соотношению.

Для функции $\chi(t)$ и нетрицательной, неубывающей функции $\omega(t)$, $t \geqslant 0$, положим при $\lambda \geqslant 0$

$$\hat{\chi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\chi(t)\,dt, \quad \check{\omega}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,d\omega(t).$$

Временно забудем, что случайное блуждание имеет точку катализа и рассмотрим обычное случайное блуждание по $\mathbf{Z}^2$, задаваемое матрицей переходных интенсивностей A_2. Пусть τ_0 — время, проведенное частицей в источнике до выхода из него, $G_0(t) = \mathbf{P}(\tau_0 \leqslant t) = 1 - e^{-(1-\alpha)t}$ и τ_2 — время, в течение которого частица блуждала вне источника ветвления после выхода из него до момента первого возвращения, $G_2(t) = \mathbf{P}(\tau_2 \leqslant t)$, $t \geqslant 0$.

Лемма 2. *При $t \to \infty$ справедливо соотношение*

$$1 - G_2(t) \sim \frac{1}{\gamma_2(-a(0))\ln t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что $\check{p}(t) = 1 - G_0(t) + \int_0^t \check{p}(t-u)\,d(G_0 * G_2)(u)$. Возьмем преобразование Лапласа от каждой части последнего равенства. Получим

$$\check{G}_\lambda = (\widehat{1 - G_0})(\lambda) + \check{G}_\lambda \check{G}_0(\lambda)\check{G}_2(\lambda). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\check{G}_0(\lambda) = \frac{1-\alpha}{\lambda + 1 - \alpha}, \quad (\widehat{1 - G_0})(\lambda) = \frac{1}{\lambda + 1 - \alpha}, \quad \check{G}_2(\lambda) = 1 - \lambda(\widehat{1 - G_2})(\lambda),$$

тогда в силу последних тождеств и соотношения (5) имеем

$$(\widehat{1-G_2})(\lambda)=\frac{1-\lambda\check{G}_\lambda}{(1-\alpha)\lambda\check{G}_\lambda}.$$

Воспользовавшись леммой 1 и тауберовой теоремой 2 из [6, гл. XIII, § 5], из предыдущего равенства находим

$$(\widehat{1-G_2})(\lambda)\sim\frac{1}{\gamma_2(-a(0))\lambda\ln\lambda^{-1}},\qquad \lambda\to 0+,$$

и в силу тауберовой теоремы 4 из [6, гл. XIII, § 5], получим утверждение леммы.

3. Частицы в источнике ветвления. При доказательстве сформулированных ранее теорем будем руководствоваться подходом, развитым в работах [1] и [2]. А именно, рассмотрим КВСБ как ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с двумя типами частиц. Частица первого типа имеет функцию распределения времени жизни $G_1(t)=\mathbf{P}(\tau_1\leqslant t)=1-e^{-t}$, $t\geqslant 0$; в момент гибели она дает потомков двух типов в соответствии с производящей функцией $f_1(s_1,s_2)=\alpha f(s_1)+(1-\alpha)s_2$. Функция распределения времени жизни частицы второго типа есть $G_2(t)=\mathbf{P}(\tau_2\leqslant t)$; перед гибелью частица дает потомков в соответствии с производящей функцией $f_2(s_1,s_2)=s_1$. Обозначим $Z_i(t)$ число частиц i-го типа в момент времени t. Ясно, что $\mathrm{Law}(Z_1(t),Z_2(t))=\mathrm{Law}(\zeta(t),\mu(t))$. Пусть $F_i(t;s_1,s_2)=\mathbf{E}\,s_1^{Z_1(t)}s_2^{Z_2(t)}$, $i=1,2$, $s_1,s_2\in[0,1]$, $t\geqslant 0$, — производящая функция числа частиц обоих типов в момент времени t при условии, что процесс начался в момент времени $t=0$ с одной частицы i-го типа. Тогда имеют место следующие интегральные уравнения ([8, гл. VIII, § 1, теорема 1]):

$$\begin{aligned}F_1(t;s_1,s_2)&=s_1(1-G_1(t))\\&\quad+\int_0^t\Big(\alpha f(F_1(t-u;s_1,s_2))+(1-\alpha)F_2(t-u;s_1,s_2)\Big)\,dG_1(u),\\F_2(t;s_1,s_2)&=s_2(1-G_2(t))+\int_0^t F_1(t-u;s_1,s_2)\,dG_2(u).\end{aligned}$$

Подставляя второе из этих уравнений в первое и вводя обозначение $F(t;s)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathbf{E}\,s^{\zeta(t)}=F_1(t;s,1)$, получим

$$\begin{aligned}F(t;s)&=s(1-G_1(t))+(1-\alpha)(1-G_2(\cdot))*G_1(t)\\&+\int_0^t\alpha f(F(t-u;s))\,dG_1(u)+\int_0^t(1-\alpha)F(t-u;s)\,d(G_1*G_2)(u).\end{aligned}\tag{6}$$

Положим $A(t)=\mathbf{E}\,\zeta(t)$. Дифференцируя (6) по s в точке $s=1$ слева и учитывая условие $f'(1)=1$, имеем

$$A(t)=1-G_1(t)+A*G_3(t),\tag{7}$$

где $G_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha G_1(t) + (1-\alpha)\, G_1 * G_2(t)$. Пусть $U(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} G_3^{*k}(t)$. Решая уравнение восстановления (7), находим

$$A(t) = (1 - G_1(\cdot)) * U(t). \tag{8}$$

Лемма 3. *Функции $A(t)$ и $\check{p}(t)$ совпадают для всех $t \geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем преобразование Лапласа от каждой части равенства (7). В силу определений функций $G_1(t)$, $G_3(t)$ с учетом соотношения (5), опуская стандартные вычисления, получим $\hat{A}(\lambda) = \check{G}_\lambda$, откуда следует утверждение леммы.

В силу (6) и определения функции $q(t,s)$ (см. (1)) приходим к интегральному уравнению

$$q(t,s) = (1-s)(1-G_1(t)) + \int_0^t q(t-u,s)\, dG_3(u) - \alpha \int_0^t h(q(t-u,s))\, dG_1(u).$$

Решая его и учитывая соотношение (7), а также применяя лемму 3, находим

$$q(t,s) = (1-s)\check{p}(t) - \alpha \int_0^t h(q(t-u,s))\check{p}(u)\, du. \tag{9}$$

Ясно, что $q(t,0) = \mathbf{P}(\zeta(t) > 0) = q(t)$. Из соотношения (9) и неотрицательности функций $h(x)$, $x \in [0,1]$, и $\check{p}(t)$, $t \geqslant 0$, следуют оценки сверху для функции $q(t,s)$:

$$q(t,s) \leqslant (1-s)\check{p}(t), \tag{10}$$

$$q(t,s) \leqslant \check{p}(t)\Big(1 - \alpha \int_0^t h(q(t-u,s))\, du\Big). \tag{11}$$

В силу последнего неравенства и неотрицательности функции $q(t,s)$ заключаем, что функция $\delta(s)$, определенная в (1), ограничена при всех $s \in [0,1]$.

Лемма 4. *При $t \to \infty$ верны соотношения*

$$\int_0^t h(q(t-u,s))\, \check{p}(u)\, du \sim \check{p}(t)\delta(s) \sim \frac{\gamma_2 a(0)\delta(s)}{(\alpha-1)\, t}. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $W(t,s)$ интеграл в левой части (12). Тогда

$$W(t,s) \int_0^t \check{p}(t-u)\, h(q(u,s))\, du = W_{1,\rho}(t,s) + W_{2,\rho}(t,s), \tag{13}$$

где $0 < \rho < 1$ — некоторое фиксированное число и

$$W_{1,\rho}(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\rho t} \check{p}(t-u) h(q(u,s))\, du, \quad W_{2,\rho}(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t(1-\rho)} h(q(t-u,s))\check{p}(u)\, du.$$

Исследуем асимптотическое поведение $W_{1,\rho}(t,s)$ при $t \to \infty$. В силу леммы 1 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\rho > 0$, что для всех достаточно больших t и $(1-\rho)t \leqslant u \leqslant t$ верны соотношения

$$\frac{(1-\varepsilon)\gamma_2 a(0)}{(\alpha-1)t} \leqslant \check{p}(u) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\gamma_2 a(0)}{(\alpha-1)t}.$$

Следовательно,

$$\frac{(1-\varepsilon)\gamma_2 a(0)}{(\alpha-1)t}\int_0^{\rho t} h(q(u,s))\,du \leqslant W_{1,\rho}(t,s) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\gamma_2 a(0)}{(\alpha-1)t}\int_0^{\rho t} h(q(u,s))\,du.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то при $t \to \infty$ имеем

$$W_{1,\rho}(t,s) \sim \frac{\gamma_2 a(0)}{(\alpha-1)t}\int_0^{\infty} h(q(u,s))\,du = \frac{\gamma_2 a(0)\delta(s)}{(\alpha-1)t}. \tag{14}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение $W_{2,\rho}(t,s)$. Покажем, что

$$W_{2,\rho}(t,s) = o(W_{1,\rho}(t,s)), \qquad t \to \infty. \tag{15}$$

Воспользовавшись неравенством $h(x) \leqslant f''(1)x^2$, справедливым при достаточно малых $x > 0$, а также оценкой (10) и леммой 1, для достаточно больших t имеем

$$W_{2,\rho}(t,s) \leqslant f''(1)\int_0^{t(1-\rho)} \check{p}(u)q^2(t-u,s)\,du \leqslant \frac{C}{\rho^2 t^2}\int_0^{t(1-\rho)} \check{p}(u)\,du \leqslant \frac{C'\ln t}{\rho^2 t^2},$$

откуда при $t \to \infty$ следует (15). Из соотношений (13), (14) и (15) вытекает утверждение леммы.

Лемма 5. *Справедливо следующее неравенство*:

$$\alpha\int_0^{\infty} h(q(u))\,du < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $B(t) = \mathbf{E}\,\zeta(t)(\zeta(t)-1)$. Дифференцируя (6) по s в точке $s=1$ слева и учитывая условие $f'(1)=1$, а также соотношение (8), получаем

$$\begin{aligned} B(t) &= \alpha\sigma^2 A^2 * G_1(t) + B * G_3(t) = \alpha\sigma^2 A^2 * G_1 * U(t) \\ &= \alpha\sigma^2\int_0^t A^2(t-u)\,d(G_1 * U)(u) = \alpha\sigma^2\int_0^t A^2(t-u)A(u)\,du. \end{aligned}$$

Пользуясь леммами 1 и 3, заключаем, что

$$B(t) \sim \frac{\gamma_2 a(0)\rho}{(\alpha-1)t}, \qquad t \to \infty, \tag{16}$$

здесь введено обозначение $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\sigma^2 \int_0^\infty \check{p}^2(t)\,dt$, $\rho > 0$.

Оценим $q(t)$ снизу. В силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца

$$(A(t))^2 = (\mathbf{E}\,\zeta(t))^2 = (\mathbf{E}\,\zeta(t)\,I(\zeta(t) \geqslant 1))^2 \leqslant \mathbf{E}\,\zeta(t)^2\,\mathbf{E}\,I(\zeta(t) \geqslant 1) = (A(t)+B(t))q(t).$$

Выражая из последнего соотношения $q(t)$, получаем

$$q(t) \geqslant \frac{A^2(t)}{A(t)+B(t)}. \tag{17}$$

Из неравенств (11), (17) и леммы 3 имеем

$$\frac{A(t)}{A(t)+B(t)} \leqslant 1 - \alpha \int_0^t h(q(u))\,du,$$

откуда в силу леммы 1 и соотношения (16) получаем

$$\alpha \int_0^\infty h(q(u))\,du \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{A(t)+B(t)} = \frac{\rho}{1+\rho} < 1.$$

Лемма 5 доказана.

Из соотношения (9) при $s = 0$, лемм 4 и 5 следует утверждение теоремы 1.

В силу интегрального уравнения (9), лемм 1 и 4 приходим к равенству

$$\frac{q(t,s)}{q(t)} = \frac{1 - s - \alpha\delta(s)}{1 - \alpha\delta(0)} + o(1), \qquad t \to \infty.$$

Доказательство теоремы 2 завершает следующее соотношение:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,(s^{\zeta(t)} \,|\, \zeta(t) > 0) = 1 - \lim_{t\to\infty} \frac{q(t,s)}{q(t)} = \frac{s - \alpha(\delta(0) - \delta(s))}{1 - \alpha\delta(0)}.$$

4. Совместное распределение $\zeta(t)$ и $\mu(t)$. В [1] показано, что полученный ветвящийся процесс Беллмана–Харриса является критическим и неразложимым. Там же проверены некоторые условия теоремы 1 статьи [9], что вместе с леммой 2 после стандартных вычислений позволяет применить указанную теорему и для критического КВСБ на двумерной решетке. Таким образом устанавливается теорема 3.

Автор выражает признательность своему научному руководителю Е. Б. Яровой за постановку задач и постоянное внимание, а также В. А. Ватутину за советы и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vatutin V. A.*, *Topchii V. A.*, *Yarovaya E. B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. — Theory Probab. Math. Statist., 2004, v. 69, p. 1–15.
2. *Topchii V. A.*, *Vatutin V. A.* Individuals at the origin in the critical catalytic branching random walk. — Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 2003, v. 6, p. 325–332.
3. *Яровая Е. Б.* Об исследовании ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. — Современные проблемы математики, механики и их приложений, т. 4. М.: Изд-во МГУ, 2009, с. 119–136.
4. *Захарьева Е. В.* О вероятностях выживания частиц на $\mathbf{Z}^2$ в одной из моделей критического ветвящегося случайного блуждания. — Труды Колмогоровских чтений (Ярославль, 19–22 мая 2008 г.), с. 218–229.
5. *Яровая Е. Б.* Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. М.: ЦПИ при мехмате МГУ, 2007, 104 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
7. *Ватутин В. А.* Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса. М.: МИАН, 2009, 112 с. (Лекционные курсы НОЦ, в. 12.)
8. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
9. *Ватутин В. А.* Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 503–514.

Исправленный вариант
26.X.2009