

УДК 517.938.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ БИФУРКАЦИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БИЛЛИАРДНЫМИ КНИЖКАМИ

Харчева И. С.

Московский государственный университет им. М.В.

Ломоносова

irina_harcheva@mail.ru

Опишем стандартную постановку бильярдной задачи в некоторой области. Дана замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая на плоскости. При этом все углы в точках излома равны $\pi/2$ и кривая не предполагается связной. Материальная точка движется внутри компактной области Ω , ограниченной этой кривой, и отражается на границе по естественному закону - угол падения равен углу отражения, а в точках излома границы движение продолжается по непрерывности. Эта система описывается на кокасательном расслоении к области Ω (точка этого расслоения задаётся как координаты этой материальной точки в области и касательный вектор в точке к области). Такая система обладает естественным интегралом – модулем вектора скорости V . Иногда такая система имеет еще один интеграл. Примером является бильярд в области Ω , ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Оказывается, в таком бильярде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл, независимый с предыдущим - параметр квадрики Λ . Это означает, что динамическая система бильярда в такой области будет интегрируема по Лиувиллю. Ее интегрируемость была показана в работе [1] В.В. Козлова, Д.В. Трещёва.

Расширим постановку бильярдной задачи. Пусть дано n областей $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ с кусочно-гладкой границей. Пусть граница этих областей содержит одну и ту же выпуклую кривую l как часть границы. Припишем к этой дуге перестановку σ из n элементов. Тогда можно определить сложное бильярдное движение в объединении областей $\cup_{i=1}^n \Omega_i$ следующим образом: материальная точка отражается от границ $\Omega_i \setminus l$ по обычному закону и переходит с одной области на другую по перестановке σ , когда достигает кривой l . Такие

бильярды будем называть *бильiardными книжками*. В частном случае, когда $n = 2$ такие бильярды были полностью классифицированы в работе [2] В.В. Фокичевой. Классификации в общем случае на нынешний момент нет.

При классификации бильярдов использовался инструмент, описанный в книге [3] - инварианты Фоменко-Цишанга. В классификации [2] В.В. Фокичевой было обнаружено, что в бильярдах встречается большой набор меченых молекул. В связи с этим А.Т. Фоменко предложил следующую гипотезу:

Гипотеза. (А.Т. Фоменко) *Бильiardными книжками можно моделировать:*

Гипотеза А. все 3-атомы;

Гипотеза В. все грубые молекулы (инварианты Фоменко);

Гипотеза С. все меченые молекулы (инварианты Фоменко-Цишанга).

Оказалось, что гипотеза А верна.

Теорема. (Ведюшкина-Харчева) *Гипотеза Фоменко А верна, а именно, для любого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится бильiardная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Лиувилля прообразы окрестности особого значения интеграла Λ , отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

Литература

1. Генетическое введение в динамику систем с ударами / В. В. Козлов, Д.В. Трещёв - Изд-во МГУ, М., 1991.
2. Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик / Фокичева В. В. // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.
3. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко - том 1. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999

Харчева Ирина Сергеевна, студентка кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва.