

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Назарова Елизавета Николаевна

**Признаки негауссовского распределения функции
эллиптичности в ультрарелятивистских столкновениях
тяжелых ионов**

Специальность 01.04.16 -
«физика атомного ядра и элементарных частиц»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф.
Коротких Владимир Леонидович

Москва — 2018

Содержание

1. Введение	4
1.1. Актуальность и степень разработанности темы	4
1.1.1. Релятивистские столкновения тяжелых ионов	4
1.1.2. Анизотропный поток	5
1.1.3. Геометрия начальной системы	7
1.1.4. Флуктуации анизотропного потока	11
1.2. Цели и основные положения работы	16
1.3. Структура диссертации	18
2. Экспериментальная установка	19
2.1. Большой Адронный Коллайдер	19
2.2. Строение детектора CMS	21
2.3. Отбор данных	24
2.4. Строение детектора ATLAS	25
3. Гидродинамическое моделирование	27
3.1. Основные идеи гидродинамического моделирования	27
3.2. Генератор событий HYDJET++	28
4. Метод анализа	33
4.1. Измерения эллиптического потока	33
4.2. Размытие наблюдаемого распределения	35
4.3. Определение функции отклика	36
4.3.1. Подход, основанный на модели	38
4.3.2. Подход, основанный на данных	38
4.4. Итеративная развертка D'Agostini	39
4.5. Исследование начального состояния	41
4.6. Систематические погрешности	44
5. Результаты	48
5.1. Результаты анализа в рамках модели HYDJET++	48
5.2. Результаты анализа данных в рамках эксперимента CMS	53
6. Обсуждение	62
6.1. Развитие метода пособытийного анализа с применением процедуры развертки	62
6.2. Стандартный метод анализа многочастичных кумулянтов	64
6.3. Теоретическое исследование асимметрии в рамках пособытийной вязкой гидродинамики	66
6.4. Новые физические задачи, осуществимые в рамках пособытийного анализа потока	67
7. Заключение	69
Список сокращений и условных обозначений	71

Список литературы	73
А. Список иллюстративного материала	79
В. Релятивистская кинематика	85
С. Модели начального состояния	89

1. Введение

1.1. Актуальность и степень разработанности темы

1.1.1. Релятивистские столкновения тяжелых ионов

На протяжении десятилетий столкновения тяжелых ионов изучаются на Релятивистском Коллайдере Тяжелых Ионов (RHIC) в комплексе BNL и Большом Адронном Коллайдере (LHC) в CERN. Такие соударения, происходящие при чрезвычайно высокой энергии, создают горячее и плотное состояние вещества, состоящее из сильно взаимодействующих кварков и глюонов, — кварк-глюонную плазму (КГП) [1]. Характеристика свойств и происхождения образованной материи КГП представляет особый интерес для фундаментальных исследований физики элементарных частиц, поскольку считается, что она существовала в первые мгновения возникновения Вселенной и ее свойства могут пролить свет на такие эффекты, как барионная асимметрия [2]. В то же время, КГП тесно связана с понятием “начального состояния” системы, образованной при столкновениях тяжелых ионов.

Рисунок 1.1 наглядно показывает этапы эволюции нецентрального столкновения тяжелых ионов с некоторым прицельным параметром $\vec{b}$ [3]. В первой стадии образуется область перекрытия ядер, в которой происходят начальные взаимодействия нуклонов, приводящие к возникновению условий, достаточных для образования КГП (плотность энергии $\epsilon > 0.5$ ГэВ/фм³ для энергий LHC). Уже в ранних измерениях на RHIC было обнаружено, что КГП успешно описывается гидродинамическими моделями (подробнее см. главу 3), имея при этом поведение, близкое к идеальной жидкости. Отличие от случая идеальной гидродинамики определяется отношением сдвиговой вязкости к плотности энтропии η/s , оценка которого для образованной в экспериментах КГП была найдена близкой соответствующему нижнему пределу для квантовой жидкости: $\eta/s = 1/4\pi$ [4]. В процессе последующей эволюции образованное вещество начинает расширяться и охлаждаться, пока не будут достигнуты условия, достаточные для адронизации. На данном этапе гидродинамическое описание вещества перестает быть достаточным и необходим переход к макроскопическому описанию эволюции. Затем следуют стадии химического и кинетического замораживания, в которых частицы перестают иметь неупругие и упругие столкновения, соответственно. “Конечное состояние”, представляющее собой распределения и корреляции треков частиц, является единственной стадией на Рисунке 1.1, которую можно физически наблюдать (с помощью детекторов частиц). Коллективные свойства КГП могут быть изучены через “мягкую физику”: распределения поперечного импульса p_T и анизотропного коллективного потока частиц в конечном состоянии. Помимо этого, ожидается, что в начальной геометрии образованной системы присутствуют флуктуации (см. раздел 1.1.3), которые должны отражаться в соответствующих “пособытийных” флуктуациях анизотропного потока. Измерения таких динамических флуктуаций конечного состояния позволяет оценить особенности геометрии начального состояния и транспортных свойств КГП.

Регистрируемое конечное состояние описывается рядом кинематических переменных, подробное описание которых вынесено в приложение В. Такие переменные включают в себя множественность частиц в событии M , псевдобыстроту η , центральность столкнове-

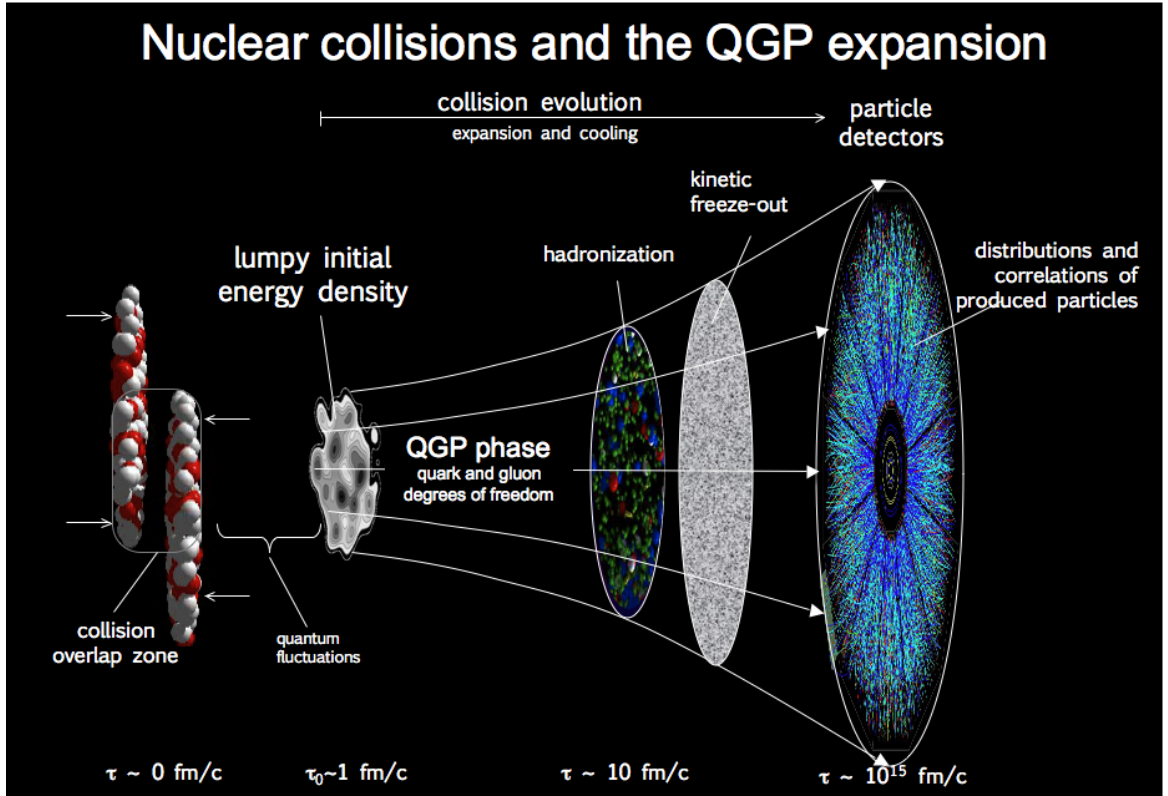


Рисунок 1.1.: Стадии эволюции нецентрального столкновения тяжелых ионов [3].

ния s , поперечный импульс частиц p_T , азимутальный угол частиц φ , энергию в системе центра масс на пару нуклонов $\sqrt{s_{NN}}$ и др. Все приведенные параметры измеряемы и называются “наблюдаемыми”, также как и величины, экспериментально вычисляемые через них. Основной наблюдаемой, указывающей на коллективное поведение КГП и представляющей центр исследования данной диссертации, является анизотропный поток частиц в конечном состоянии.

1.1.2. Анизотропный поток

На Рисунке 1.2 схематически представлена картина формирования области перекрытия нецентрального столкновения двух симметричных ядер (напр. ионов свинца PbPb). Для приведенного на рисунке соударения средней центральности образованная область перекрытия в первом приближении может быть описана эллипсоидом (“миндалевидной” формой). Поскольку эллипсоид (“капля жидкости” в гидродинамическом описании) стремится принять сферическую форму, давление в направлении малой оси будет больше, чем в направлении большой оси эллипсоида. За счет градиентов давления пространственная асимметрия эллипсоида переходит в анизотропию поперечной плоскости импульсного пространства, — образуется так называемый анизотропный коллективный поток.

Анизотропия частиц в импульсном пространстве описывается разложением Фурье азимутального распределения частиц по углу φ вдоль направления пучка [5]:

$$\frac{dN}{d\varphi} \propto 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n(\varphi - \Psi_n)) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n,x} \cos n\varphi + v_{n,y} \sin n\varphi), \quad (1.1)$$

где используется понятие потокового вектора $\vec{v}_n = (v_{n,x}, v_{n,y})$, а Ψ_n обозначает угол плоскости события, который определяется направлением максимального потока соответствующего

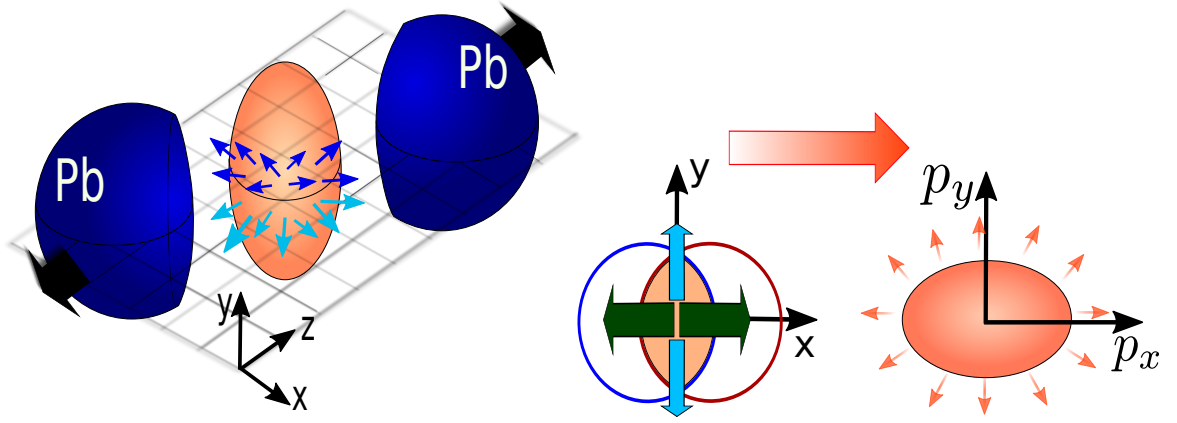


Рисунок 1.2.: Формирование области перекрытия, переход от пространственной асимметрии начальной геометрии системы в импульсную анизотропию конечного состояния (создание анизотропного потока).

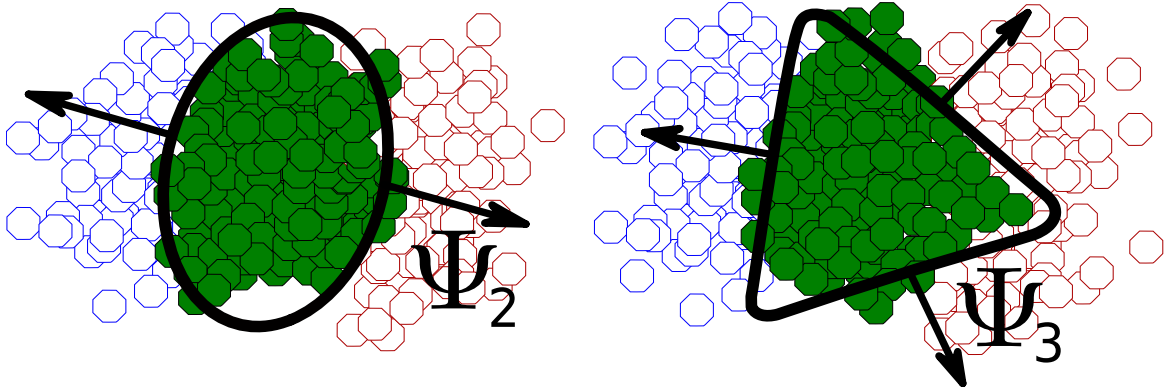


Рисунок 1.3.: Формы области перекрытия с выделенным вкладом в эллиптический и триангулярный поток, а также направления максимального потока соответствующего порядка. Полными (зелеными) кружками обозначены нуклоны-участники, пустыми (синими и красными) — нуклоны-спектаторы сталкивающихся ионов.

щего порядка. Коэффициенты Фурье v_n , представляющие в таком определении величину потокового вектора $\vec{v}_n$, называют гармониками анизотропного потока n -го порядка.

В реальном столкновении тяжелых ионов область перекрытия имеет более сложную форму, нежели представленный на Рисунке 1.2 эллипсоид. Форма области перекрытия зависит от пространственного распределения нуклонов в начальной системе и отражается в импульсной анизотропии, задавая направление потока определенного порядка и определяя величину соответствующей гармоники. Поскольку в нецентральной столкновении эллипсоид лучше всего описывает образованную область, гармоника эллиптического потока v_2 доминирует. Тем не менее, в экспериментах RHIC и LHC были измерены значения гармоник потока $v_n > 0$ для $n \leq 6$. На Рисунке 1.3 представлен пример конфигурации области перекрытия с выделенным вкладом в эллиптический и триангулярный поток, а также направлениями соответствующих углов события. В принципе, сгусток кварк-глюонной материи может не точно совпадать с областью участвующих нуклонов, но должен сохранять его форму.

Многочисленные методы анализа были разработаны, чтобы оценить средние значения гармоник потока. В числе таких методов многочастичные корреляции частиц для определения кумулянтов [6], метод плоскости события (Event Plane или “EP”) [7], подход LYZ

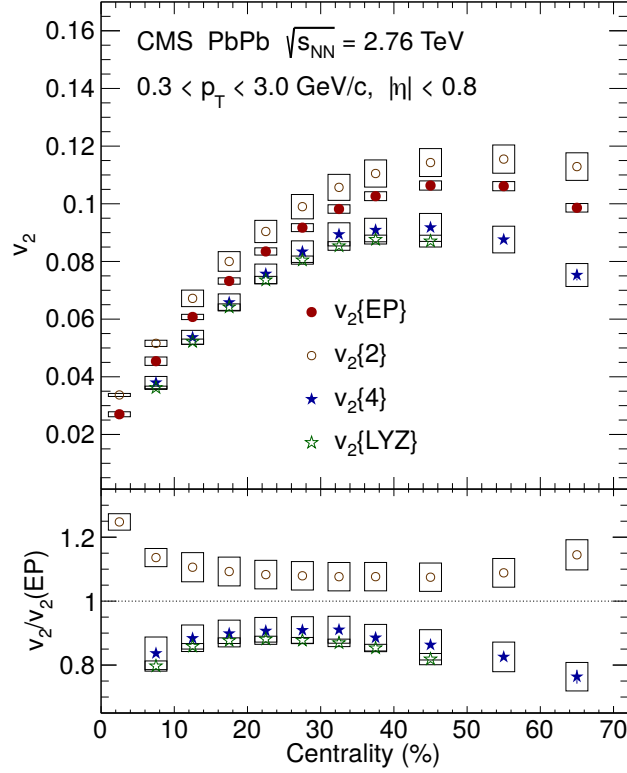


Рисунок 1.4.: Гармоники эллиптического потока, вычисленные различными методами экспериментального анализа данных с помощью детектора CMS [11].

(Lee-Yang zeroes) [8, 9]. Следует отметить, что в этих методах проводится усреднение как по числу частиц в событии, так и по всем событиям. Помимо этого, перечисленные методы анализа имеют различную чувствительность к непотоковым эффектам [10] и поэтому дают разные результаты одних и тех же наблюдаемых, как показано на Рисунке 1.4 для значений гармоник эллиптического потока v_2 . Несмотря на различные предположения используемых методов, вычисляемое посредством усреднения по событиям значение гармоник потока зависит от “средней” геометрии начального состояния (хоть и в некотором приближении). Однако, следует помнить, что такие значения могут не совпадать с реальными $\langle v_n \rangle$ пособытийного распределения $p(v_n)$.

1.1.3. Геометрия начальной системы

Поскольку каждая из гармоник потока v_n разложения 1.1 ассоциирована с соответствующей компонентой формы начального состояния, детальный анализ коэффициентов v_n может дать информацию о геометрии начальной системы, а также транспортных свойствах КГП. Форма конфигурации начального состояния, образуемого в столкновениях тяжелых ионов, характеризуется набором векторов эксцентриситета $\vec{\varepsilon}_n$ [12]:

$$\varepsilon_n e^{in\Psi_n^*} = - \frac{\int dx dy r^n e^{in\varphi} e(x, y)}{\int dx dy r^n e(x, y)}, \quad (1.2)$$

где в качестве весовой функции может использоваться плотность энергии материи ($e(x, y)$) или плотность энтропии ($s(x, y)$). Угол Ψ_n^* обозначает фазу соответствующего вектора эксцентриситета n -го порядка $\vec{\varepsilon}_n = (\varepsilon_n \cos n\Psi_n^*, \varepsilon_n \sin n\Psi_n^*)$ и называется углом плоскости нуклонов-участников (Participant Plane или PP). Различия в определении плоскостей реакции, события и нуклонов-участников представлено на Рисунке 1.5, при этом плоскость реакции определяется прицельным параметром системы и направлением пучка.

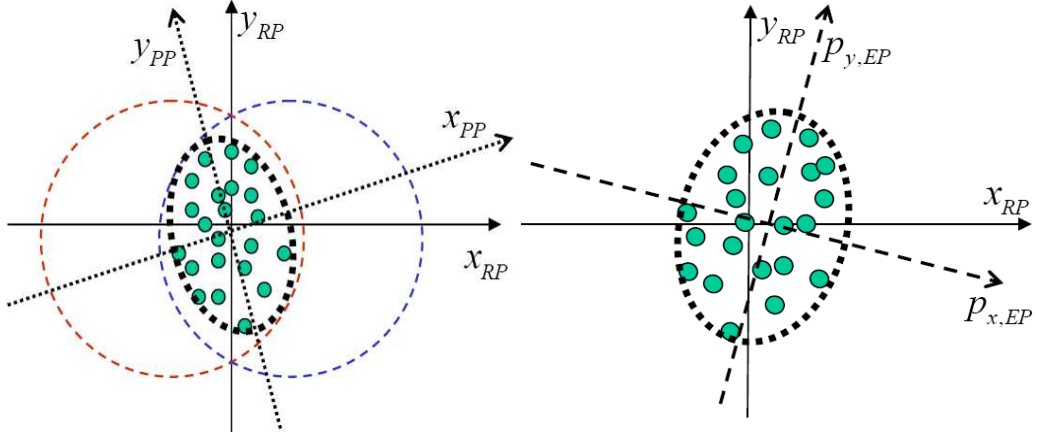


Рисунок 1.5.: Определение плоскостей реакции (RP), события (EP) и нуклонов-участников (PP) [13].

Поскольку в нецентральных столкновениях доминирует вклад от эллиптического потока, то наибольший интерес представляет 2-ой порядок эксцентриситета, называемый “эллиптичностью”:

$$\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{part} = |\varepsilon_2 e^{i2\Psi_2^*}| = \frac{\sqrt{\langle y^2 - x^2 \rangle^2 + 4\langle xy \rangle^2}}{\langle y^2 + x^2 \rangle}, \quad (1.3)$$

где $\langle \dots \rangle = \int dx dy (\dots) e(x, y)$ представляет собой “среднее в событии”, — усреднение по позициям нуклонов в событии. Необходимо отметить, что формула 1.3 определяет т.н. эксцентриситет участников, который отличается от стандартного эксцентриситета, определяемого относительно плоскости реакции как $\varepsilon_{RP} = \frac{\langle y^2 - x^2 \rangle}{\langle y^2 + x^2 \rangle}$. Рисунок 1.6 показывает средние значения ε_2 , ε_3 , ε_4 и ε_5 в зависимости от прицельного параметра [12]. Представленные расчеты сделаны по формуле 1.2 с использованием различных весовых функций, а также двух моделей начального состояния: MC-Glauber и MC-KLN. Основные идеи этих моделей вынесены в приложение С. Использование плотности энергии (e) или плотности энтропии (s) в качестве весовой функции не выявило заметных отличий. Деформированные распределения Гаусса из модели MC-KLN (с использованием плотности энергии материи $e(r, \varphi) = e_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2\rho^2}[1 + \varepsilon_n \cos(n\varphi)]\right)$) показаны как контуры для наглядного представления формы начальной системы.

Последующие расчеты гидродинамического моделирования позволяют получить значения гармоник потока v_n . Корреляция между соответствующим средним значением гармоники $\langle v_n \rangle$ и значением эксцентриситета ε_n показана для эллиптического и триангулярного потока на Рисунке 1.7. С хорошей точностью наблюдается пропорциональность рассматриваемых величин, за исключением периферических столкновений: $\langle v_n \rangle = k_n \varepsilon_n$ для $n = 2, 3$. Коэффициент пропорциональности k_n , также называемый коэффициентом отклика, зависит от свойств образованного вещества [14] (уравнения состояния, начальной плотности и вязкости), поэтому данный эффект может использоваться для определения транспортных свойств КГП. Стоит отметить, что наличие существенной вязкости среды может ослабить линейный отклик между начальным эксцентриситетом и гармоникой потока [15]. В таком случае, необходимо учитывать нелинейные компоненты, например кубический фактор отклика: $\langle v_n \rangle = k_n \varepsilon_n + k'_n \varepsilon_n^3$.

Флуктуации позиций участвующих нуклонов приводят к пособытийным флуктуациям геометрии начальной системы, отражающимся в распределении функции вероятности $p(\varepsilon_n)$ для событий определенного значения прицельного параметра [16]. Все наблюдения

1. Введение

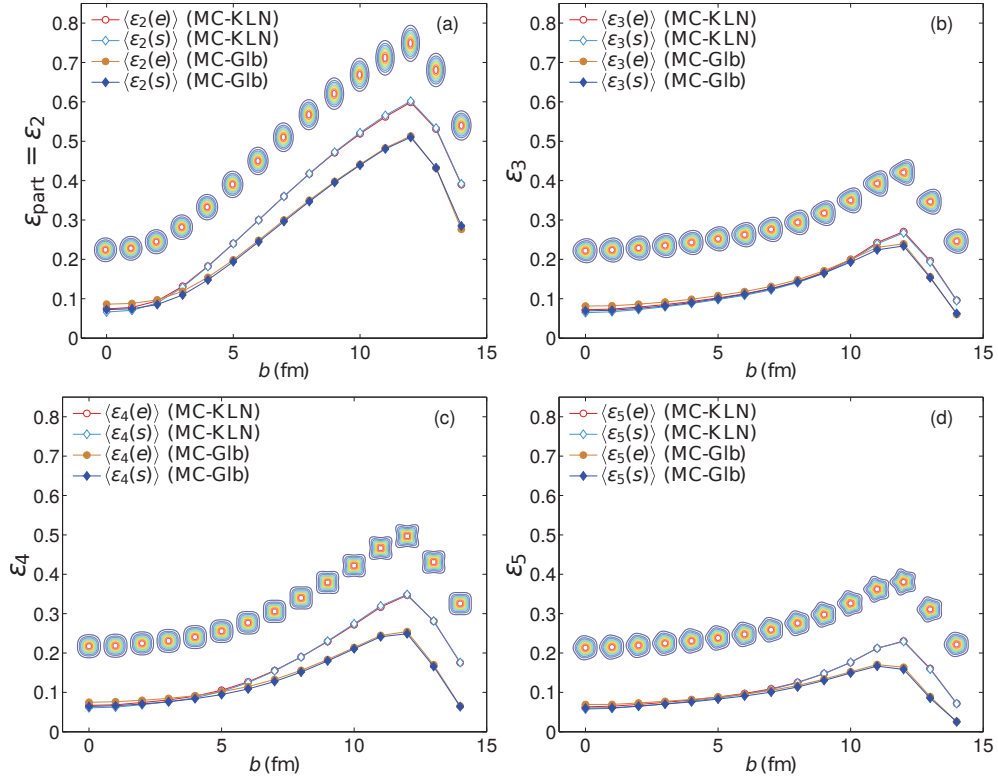


Рисунок 1.6.: Зависимость среднего значения эксцентриситета от прицельного параметра (по ур. 1.2), вычисленного с использованием различных весовых функций, а также двух моделей начального состояния: MC-Glauber и MC-KLN [12]. В качестве контуров использованы распределения деформированного Гаусса из модели MC-KLN.

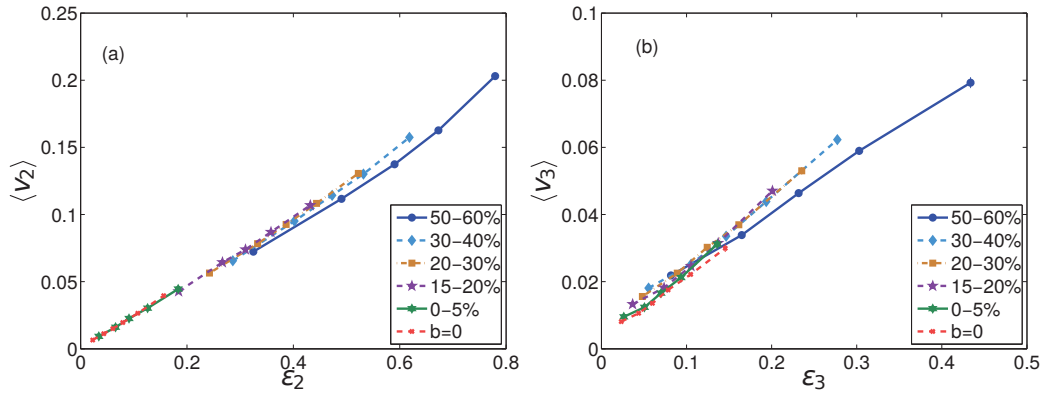


Рисунок 1.7.: Корреляция между $\langle v_n \rangle$ и ϵ_n для эллиптического и триангулярного потока в различных интервалах центральности [12].

1. Введение

до 2014 года указывали, что распределение векторов эксцентриситета $p(\vec{\varepsilon}_n)$ описывается двумерной функцией Гаусса:

$$p(\vec{\varepsilon}_n) = \frac{1}{2\pi\delta_{\varepsilon_n}^2} \exp \left[-(\vec{\varepsilon}_n - \vec{\varepsilon}_n^{RP}) / (2\delta_{\varepsilon_n}^2) \right] \quad (1.4)$$

$$\vec{\varepsilon}_n = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y\} = \left\{ \left\langle \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \right\rangle, \left\langle \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2} \right\rangle \right\},$$

где усреднение производится по позициям частиц в событии и $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, $\sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$, $\sigma_{xy}^2 = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$. Такое предположение обычно рассматривается как гауссовская модель описания начального состояния. Проинтегрировав ур. 1.4 по углу ϕ между ε_x и ε_y , можно получить соответствующую форму распределения функции вероятности эксцентриситета $p(\varepsilon_n)$:

$$p(\varepsilon_n | \varepsilon_0, \delta) = \frac{\varepsilon_n}{\delta^2} \exp \left[-\frac{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_0^2}{2\delta} \right] I_0 \left(\frac{\varepsilon_n \varepsilon_0}{\delta^2} \right). \quad (1.5)$$

Здесь параметр ε_0 соответствует среднему значению эксцентриситета в плоскости реакции, а δ характеризует ширину распределения (величину флуктуаций).

В модели Гаусса кумулянты [6] высоких порядков эксцентриситета $\varepsilon_n\{m\}$ вырождаются: $\varepsilon_n\{4\} = \varepsilon_n\{6\} = \varepsilon_n\{8\}$. Этот эффект в свою очередь должен отражаться в экспериментально полученных значениях кумулянтов анизотропного потока [17]. Более того, в модели Гаусса ожидается, что кумулянты потока $v_n\{m\}$ не только нечувствительны к непотоковым эффектам, но и к флуктуациям начальной геометрии системы: $v_n\{4\} = v_n\{6\} = v_n\{8\} = v_{RP}$. Экспериментальные результаты [18–20] показывают, что выполняется приблизительное равенство кумулянтов потока высоких порядков: $v_n\{4\} \approx v_n\{6\} \approx v_n\{8\}$, но наблюдаются отклонения в периферической области столкновений.

Различия в величинах кумулянтов высокого порядка эллиптического потока могут быть объяснены асимметрией распределения эллиптичности [17], характеризующейся отрицательным коэффициентом асимметрии γ_1 . На Рисунке 1.8 слева показана полученная с помощью гидродинамического моделирования в работе [17] асимметрия в проекциях компонент потока (v_x, v_y) и эллиптичности $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$, домноженных с коэффициентом отклика $k = 0.21$, для интервала центральности 50 – 55%. Наблюдается заметная асимметрия в распределении по x -компоненте, которая приводит к отличию от 1 отношения кумулянтов потока $v_2\{6\}/v_2\{4\}$, как показано на правой части Рисунка 1.8. Обозначения “initial” и “hydro” соответствуют значению отношения кумулянтов эллиптичности $\varepsilon_2\{6\}/\varepsilon_2\{4\}$ и потока $v_2\{6\}/v_2\{4\}$, полученных в таком гидродинамическом расчете. Результаты хорошо описывают полученное в экспериментальных данных ATLAS отношение. Данный эффект характеризуется нормированным коэффициентом асимметрии γ_1 , который представляет собой третий момент распределения функции вероятности эллиптичности $p(\varepsilon_2)$, и соответствующего распределения потока $p(v_2)$: $\gamma_1 \equiv \frac{s_1}{\sigma_x^3}$ [17]. Здесь $s_1 = \langle (v_x - \bar{v}_2)^3 \rangle$ - третий момент распределения по компоненте $v_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\varphi) \cos(2\varphi) d\varphi$, а $\bar{v}_2 \equiv \langle v_x \rangle (< \langle v_2 \rangle = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2})$. Напомним, что k -ый момент распределения функции вероятности $p(v_n)$ определяется как: $\langle v_n^k \rangle \equiv \int v_n^k p(v_n) dv_n$.

Поскольку такой эффект асимметрии распределения эллиптичности невозможен в гауссовской модели (по определению она дает значение коэффициента асимметрии $\gamma_1 = 0$), была предложена новая параметризация [21], называемая эллиптик-степенной (“Elliptic Power”), и представляющая собой обобщение известных параметризаций начального эксцентриситета системы. Ее главным преимуществом перед моделью Гаусса является тот

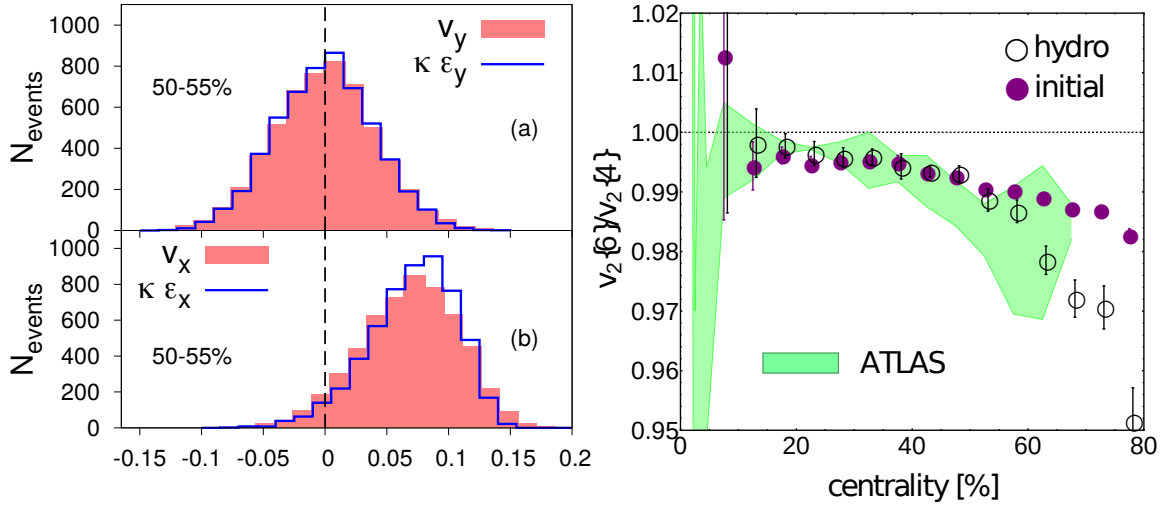


Рисунок 1.8.: (Слева) Асимметрия проекций компонент потока (v_x, v_y) и эллиптичности (ϵ_x, ϵ_y) , домноженных с коэффициентом отклика $k = 0.21$ [17]. (Справа) Отношение кумулянтов потока $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ в данных ATLAS (зеленым) и модельном расчете (пустые точки), и эллиптичности $\epsilon_2\{6\}/\epsilon_2\{4\}$ (цветные точки).

факт, что естественным образом учитывается геометрическое ограничение на эксцентриситет системы: $\epsilon_n \leq 1$. Двумерное распределение эллиптик-степенной параметризации имеет вид:

$$p(\epsilon_x, \epsilon_y) = \frac{\alpha}{\pi} \left(1 - \epsilon_0^2\right)^{\alpha+1/2} \frac{(1 - \epsilon_x^2 - \epsilon_y^2)^{\alpha-1}}{(1 - \epsilon_0 \epsilon_x)^{2\alpha+1}}, \quad (1.6)$$

тогда как одномерное распределение функции эллиптичности определяется через ур. 1.6 (аналогично тому, как это было сделано в случае выражения 1.5) формулой:

$$p(\epsilon_n) = \frac{2\alpha\epsilon_n}{\pi} \left(1 - \epsilon_0^2\right)^{\alpha+1/2} \int_0^\pi \frac{(1 - \epsilon_n^2)^{\alpha-1} d\varphi}{(1 - \epsilon_0 \epsilon_n \cos \varphi)^{2\alpha+1}} \quad (1.7)$$

Здесь параметр α характеризует величину (“силу”) флуктуаций и относится к числу точечных источников, определяющих профиль энергии, как $\alpha \approx (N - 1)/2$. Параметр ϵ_0 определяет среднее значение эксцентриситета в плоскости реакции столкновений тяжелых ионов. Рисунок 1.9 показывает, что введенная таким образом параметризация успешно описывает известные модели начального состояния, в которых также присутствует асимметрия распределения эллиптичности. Эллиптик-степенная параметризация характеризует параметры распределения эллиптичности, а также позволяет получить “расщепление” кумулянтов эксцентриситета: $\epsilon_n\{2\} > \epsilon_n\{4\} > \epsilon_n\{6\} > \epsilon_n\{8\}$. Помимо этого, обобщенность данной параметризации выражается в том, что она переходит в степенную функцию при $\epsilon_0 = 0$, в гауссовскую функцию при достижении предела $\alpha \gg 1$, и в функцию Бессель-Гаусса при $\alpha \gg 1$ и $\epsilon_0 \ll 1$. Определенная таким образом, эллиптик-степенная параметризация позволяет вычислить параметры эллиптичности без использования конкретной модели начального состояния.

1.1.4. Флуктуации анизотропного потока

Как было упомянуто в разделе 1.1.3, начальная геометрия системы флуктуирует, что выражается через флуктуации позиций участвующих нуклонов [16] и соответствующие по-событийные распределения эксцентриситета. Такие флуктуации должны в свою очередь

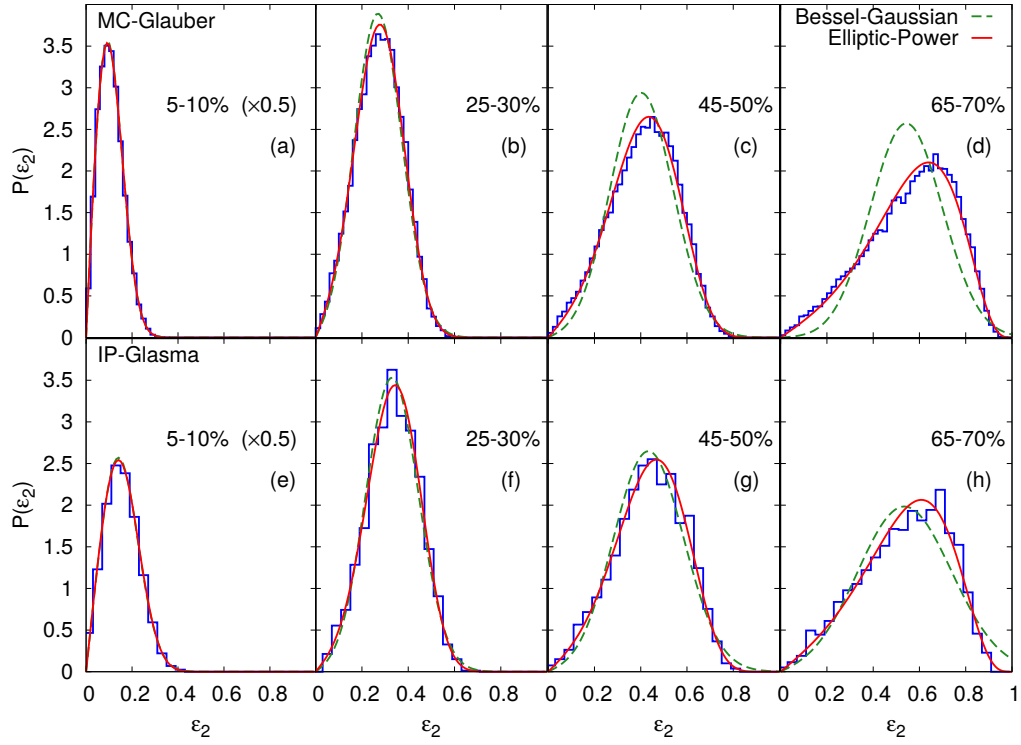


Рисунок 1.9.: Распределения эллиптичности $p(\varepsilon_2)$ в моделях начального состояния MC-Glauber и IP-Glasma, фитированные функцией Бессель-Гаусса и эллиптик-степенной параметризацией [21], представленные для различных интервалов центральности.

проявляться в соответствующих “пособытийных” флуктуациях анизотропного потока (“от события к событию”), что будет выражено пособытийным распределением функции вероятности потока $p(v_n)$, полученном для классов событий схожей центральности столкновения. Следуя этому представлению, в 2003 году была также предложена новая наблюдаемая: дисперсия σ_{v_n} , характеризующая флуктуации потока и определяемая из моментов распределения $p(v_n)$ как $\sigma_{v_n}^2 = \langle v_n^2 \rangle - \langle v_n \rangle^2$ [22]. Тем не менее, до недавнего времени не существовало метода экспериментального анализа, позволяющего измерить наблюдаемые $p(v_n)$ и σ_{v_n} . Это связано с тем, что для корректного измерения динамических флуктуаций необходимо убрать из распределения $p(v_n)$ вклад, связанный со статистическими и непотоковыми эффектами, включающими в себя: конечную множественность частиц в событии, распады резонансов, струи, корреляции Бозе-Эйнштейна и др. Попытки использования существующих методов анализа для оценки флуктуаций потока, а также ограничения, которые необходимо учитывать при вычислении таких оценок, рассмотрены в обзорах [15, 23]. Одним из таких измерений является оценка относительных флуктуаций потока, определяемая как $\sigma_{v_n}/\langle v_n \rangle$, на основе следующей формулы:

$$\frac{\sigma_{v_n}}{\langle v_n \rangle} \approx \left[\frac{(v_n\{\Psi_n\})^2 - (v_n\{4\})^2}{(v_n\{\Psi_n\})^2 + (v_n\{4\})^2} \right]^{1/2}, \quad (1.8)$$

где $v_n\{\Psi_n\}$ обозначает измеренное значение гармоники потока по методу плоскости события, $v_n\{4\}$ - кумулянты четвертого порядка, вычисленные с помощью техники много-частичных корреляций. Следует отметить, что равенство в ур. 1.8 справедливо только при незначительных непотоковых корреляциях и малых потоковых флуктуациях. Рисунок 1.10 показывает оценку относительных флуктуаций $\sigma_{v_n}/\langle v_n \rangle$, вычисленную по формуле 1.8 в эксперименте ALICE [24] для гармоники v_2 в зависимости от p_T и центральности.

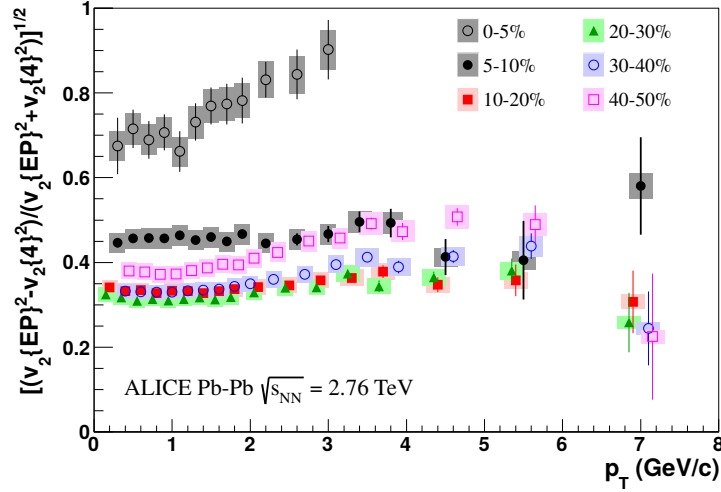


Рисунок 1.10.: Оценка относительных флуктуаций дифференциального потока $v_2(p_T)$ по формуле 1.8 в эксперименте ALICE [24], в зависимости от поперечного импульса p_T и центральности столкновения.

Как видно из рисунка, оценка относительных флуктуаций по формуле 1.8 для дифференциального потока $v_2(p_T)$ найдена практически постоянной в зависимости от поперечного импульса, но наблюдается сильная зависимость от центральности столкновения.

В 2013 году коллаборация ATLAS предложила использовать для пособытийного анализа анизотропного потока метод, основанный на процедуре развертки (обратной свертки) [25], позволяющий измерить в экспериментальных данных распределения функции вероятности потока $p(v_n)$, содержащие только динамические флуктуации потока (англ.: метод Event-by-event Unfolding или “EbyE Unfolding”). Данный подход основан на применении процедуры итеративной байесовской развертки методом D’Agostini [26], численно реализованной в пакете RooUnfold [27]. Распределения, полученные коллаборацией для анизотропного потока v_2 , v_3 , v_4 в зависимости от центральности столкновения, представлены на Рисунке 1.11. Этот метод в свою очередь позволяет по определению вычислить такие характеристики распределений потока, как среднее значение $\langle v_n \rangle$, дисперсия σ_{v_n} , определяющая флуктуации потока, кумулянты $v_n\{m\}$, вычисляемые через моменты распределения функции вероятности, а также коэффициент асимметрии γ_1 , определяемый третьим моментом распределения функции вероятности. Полученные распределения флуктуаций потока и их характеристики могут быть использованы для оценки геометрии начального состояния, в особенности распределений эллиптичности. Левая часть Рисунка 1.12 показывает сравнение величины относительных флуктуаций эллиптического и триангулярного потока, полученных в рамках такого пособытийного анализа коллаборацией ATLAS [25], с оценкой по формуле 1.8, сделанной в эксперименте CMS стандартными методами анализа усредненных по событиям значений гармоник потока [28]. Наблюдаются заметные отличия между двумя методами, что свидетельствует о необходимости корректного учета непотоковых корреляций и потоковых флуктуаций в формуле 1.8, или в стандартных методах вычисления потока через плоскость события и многочастичные корреляции. Особенно сильные различия присутствуют для относительных флуктуаций триангулярного потока. Правая часть рисунка иллюстрирует тесты различных оценок относительных флуктуаций, проведенные в пособытийном анализе ATLAS.

Рисунок 1.13 показывает сравнение значений гармоник потока v_2 и v_3 , полученных различными методами анализа [20] в зависимости от числа участвующих нуклонов N_{part} . Представленные измерения выполнены для столкновений ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ в диапазонах $0.5 < p_T < 20$ ГэВ и $|\eta| < 2.5$. На рисунке $v_n\{EP\}$ обозначает зна-

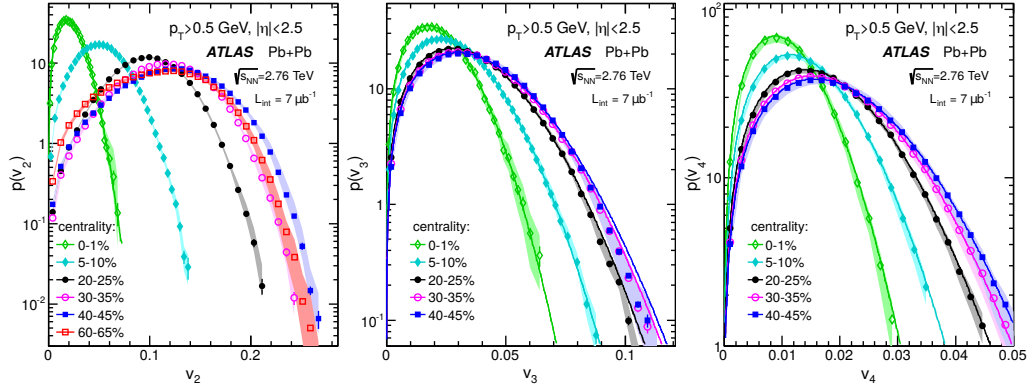


Рисунок 1.11.: Распределения функции вероятности $p(v_n)$ ($n=2,3,4$), вычисленные методом пособытийного анализа на основе процедуры развертки коллаборацией [ATLAS](#) для различных интервалов центральности столкновения [25].

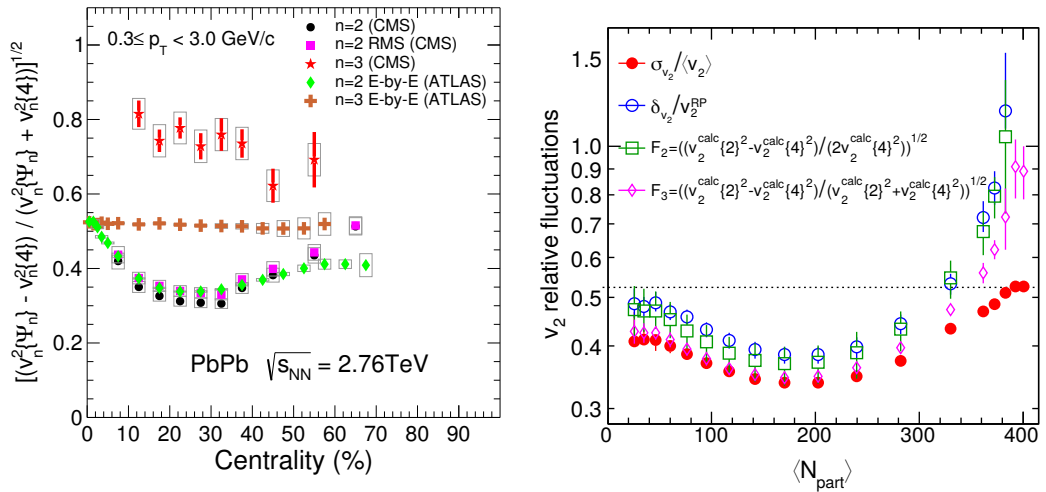


Рисунок 1.12.: Оценка относительных флуктуаций интегрального потока v_2 и v_3 по формуле 1.8 в эксперименте [CMS](#) в зависимости от центральности столкновения [28]. Относительные флуктуации в пособытийном анализе [ATLAS](#) [25].

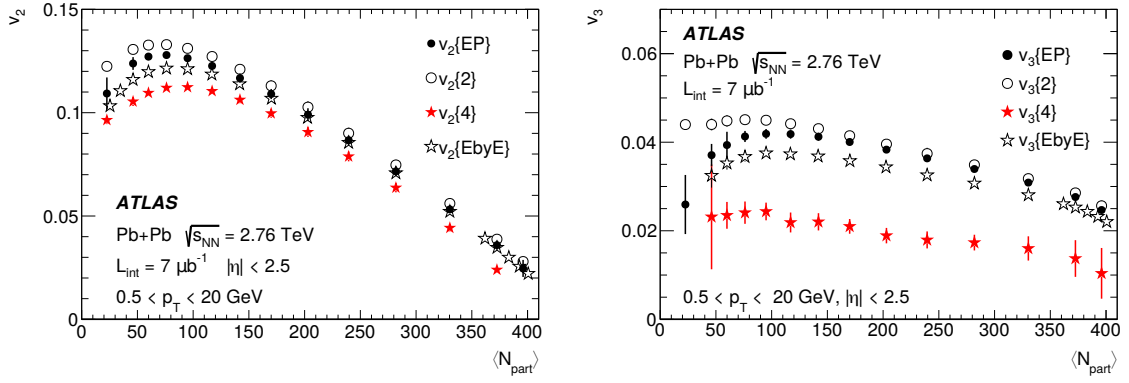


Рисунок 1.13.: Сравнение гармоник потока v_2 (слева) и v_3 (справа) в эксперименте ATLAS, полученных различными методами: $v_n\{\text{EP}\}$ - методом плоскости события, $v_n\{2\}$ и $v_n\{4\}$ - кумулянты, полученные методом многочастичных корреляций, $v_n\{\text{EbyE}\}$ - средние значения распределений $p(v_n)$, вычисленных методом пособытийного анализа на основе процедуры развертки [20].

чения гармоник потока, вычисленные по методу плоскости события, $v_n\{2\}$ и $v_n\{4\}$ представляют собой кумулянты, полученные методом многочастичных корреляций, $v_n\{\text{EbyE}\}$ - средние значения распределений $p(v_n)$, вычисленных методом пособытийного анализа на основе процедуры развертки. Наблюдается систематическая картина для всего исследуемого диапазона центральности: $v_n\{2\} \geq v_n\{\text{EP}\} \geq v_n\{\text{EbyE}\} > v_n\{4\}$. Такое поведение можно объяснить влиянием непотоковых корреляций, которые имеют различный эффект на приведенные измерения гармоник потока. Разница между $v_n\{2\}$, $v_n\{4\}$ и $v_n\{\text{EbyE}\}$ возникает естественным образом за счет потоковых флуктуаций, поскольку в первом приближении должно выполняться: $v_n\{2\}^2 \approx \langle v_n \rangle^2 + \sigma_{v_n}^2$, $v_n\{4\}^2 \approx \langle v_n \rangle^2 - \sigma_{v_n}^2$. Это приближение предполагает незначительный вклад непотоковых корреляций и потоковых флуктуаций, и также используется в формуле 1.8 для оценки относительных флуктуаций потока $\sigma_{v_n}/\langle v_n \rangle$. Таким образом, различия между измерениями относительных флуктуаций CMS по ур. 1.8 и пособытийным анализом ATLAS может быть объяснено нарушением используемого приближения в периферических столкновениях для эллиптического потока, и всем диапазоне центральности для треугольного потока.

К сожалению, новый метод пока не получил достаточного развития, — не существует экспериментальных результатов, полученных с помощью рассматриваемого пособытийного анализа на основе процедуры развертки, помимо результатов коллаборации ATLAS по распределениям анизотропного потока в столкновениях ионов свинца с энергией в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Это в первую очередь связано со спецификами процедуры развертки, сильно зависящей от статистики и регуляризации. В изначальном анализе коллаборацией ATLAS вопрос о регуляризации развертки был решен путем использования одного и того же числа итераций при вычислении распределений в разных интервалах центральности. Однако, такой подход не является корректным, поскольку величина “разброса” наблюдаемых распределений сильно зависит от центральности столкновения, что должно учитываться при выполнении процедуры развертки. Помимо этого, слишком большое число итераций может дать нефизические осцилляции в хвостах полученных распределений потока, а слишком малое не позволит достичь “истинного” распределения потока. Эти проблемы будут подробно рассмотрены в главе 4.

Что касается характеристик асимметрии распределений потока, они не были исследованы в изначальном анализе ATLAS. Тем не менее, авторы, предложившие обобщенную параметризацию распределения эллиптичности для описания асимметрии начальной геометрии системы, провели повторный анализ (переанализ) полученных распределений ATLAS

[29]. Ими было проведено фитирование эллиптик-степенной параметризацией и наглядно показана возможность изучения начального состояния через пособытийные распределения потока, а также представлены отличия от гауссовского распределения эллиптичности.

Метод пособытийного анализа анизотропного потока, основанный на процедуре развертки, используется в работах, описываемых в настоящей диссертации, как для анализа смоделированных спектров генератором событий **HYDJET++**, так и для анализа экспериментальных данных, полученных с помощью детектора **CMS**, и будет подробно рассмотрен в главе 4.

1.2. Цели и основные положения работы

Основными **целями и задачами** настоящей диссертационной работы являются:

- Реализовать и развить метод пособытийного анализа на основе построения развертки (обратной свертки), позволяющий вычислить динамические флуктуации анизотропного потока.
- Исследовать пособытийные флуктуации анизотропного потока в рамках двух-компонентной модели **HYDJET++** для столкновений тяжелых ионов с целью количественного описания результатов коллаборации **ATLAS** по распределениям потока $p(v_n)$ в столкновениях ионов свинца при энергии в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ.
- Внедрить рассматриваемый метод пособытийного анализа азимутальной анизотропии в программное обеспечение эксперимента **CMS** и провести исследование динамических флуктуаций потока в столкновениях ионов свинца при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ, используя экспериментальные данные, полученные с помощью детектора **CMS**.
- В рамках анализа экспериментальных данных **CMS** вычислить характеристики распределений потока.
- Измерить параметры эллиптичности начального состояния области перекрытия ядер свинца на основе распределений функций вероятности потока, а также провести сравнение с доступными теоретическими моделями.

Основные положения, выносимые на защиту, включают в себя:

- Развита метод пособытийного анализа на основе построения обратной свертки, позволяющий вычислить динамические флуктуации анизотропного потока. Используемый метод анализа дает уникальную возможность получить напрямую плотность вероятности потока $p(v_n)$ и ее характеристики: средние значения гармоник потока $\langle v_n \rangle$, дисперсии σ_{v_n} , кумулянты $v_n\{m\}$, коэффициент асимметрии γ_1 .
- В рамках двух-компонентной модели **HYDJET++** для столкновений тяжелых ионов проведено исследование флуктуаций гармоник эллиптического и треугольного потока v_2, v_3 при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Полученные распределения потока $p(v_n)$ использованы для количественного описания результатов коллаборации **ATLAS**.
- Предложена модификация генератора событий **HYDJET++**, позволяющая успешно описать экспериментальные данные по флуктуациям потока. Показана необходимость корректной оценки динамических флуктуаций потока, вычисляемых через смоделированные спектры.

- Выполнен событийный анализ азимутальной анизотропии в столкновениях ионов свинца при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ в эксперименте [CMS](#). Впервые получены независимые от модельных предположений распределения функции вероятности гармоник эллиптического потока при энергии 5.02 ТэВ, исключающие статистические и непотоковые флуктуации.
- Используя измеренные распределения плотности вероятности потока, вычислены кумулянты гармоник потока, а также отношения кумулянтов высших порядков $v_2\{m\}$, $m = 4, 6, 8$, с учетом систематических погрешностей измеренных величин. С максимальной на данный момент точностью (порядка 0.1%) экспериментально измерено “тонкое расщепление” $v_2\{8\}$ и $v_2\{6\}$.
- Получено отрицательное значение коэффициента асимметрии плотности вероятности эллиптичности γ_1^{exp} , растущее по модулю с переходом к более периферическим столкновениям.
- Измерены параметры эллиптичности начального состояния области перекрытия ядер свинца. Проведено сравнение с доступными теоретическими моделями. Установлено, что асимметрия в распределении эллиптического потока может быть объяснена геометрией начального состояния, в частности асимметрией распределения функции эллиптичности (другими словами, негауссовским распределением эллиптичности).

Научная новизна диссертационной работы отражена в положениях, выносимых на защиту, и включает в себя развитие метода событийного анализа на основе процедуры развертки, дающего уникальную возможность экспериментально получить наблюдаемые распределения функции вероятности потока $p(v_n)$, средние значения гармоник потока $\langle v_n \rangle$ и дисперсии σ_{v_n} . Используемый метод анализа является единственным на данный момент подходом, позволяющим напрямую вычислить динамические флуктуации анизотропного потока из экспериментальных данных. Предложен корректный метод регуляризации, позволяющий выбрать точное число итераций для сходимости метода.

Впервые был проведен событийный анализ смоделированных спектров процедурой развертки, выполненный в диссертационной работе в рамках двух-компонентной модели [HYDJET++](#) для столкновений тяжелых ионов. Полученные распределения эллиптического и триангулярного потока были использованы для количественного описания результатов коллаборации [ATLAS](#) по динамическим флуктуациям потока в столкновениях ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ. Была предложена и реализована модификация генератора событий [HYDJET++](#), позволяющая успешно описать экспериментальные данные по флуктуациям потока.

В рамках анализа экспериментальных данных [CMS](#) впервые получены независимые от модельных предположений распределения функции вероятности гармоник эллиптического потока при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ. Помимо этого, впервые проведено экспериментальное исследование характеристик распределений потока для проверки теоретических гипотез. Была достигнута максимальная на данный момент точность экспериментальных измерений тонкого расщепления кумулянтов высших порядков потока $v_2\{m\}$, $m = 4, 6, 8$ (порядка 0.1% для $v_2\{8\}/v_2\{6\}$). Был найден отрицательный коэффициент асимметрии γ_1^{exp} , растущий по модулю с переходом к более периферическим столкновениям. Таким образом, экспериментально получены указания на негауссовские распределения эллиптичности начальной системы, отражающиеся в асимметрии распределений эллиптического потока.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы как для оценки параметров начальной геометрии системы, так и

для учета их флуктуаций, при этом они не привязаны к конкретной модели начального состояния. Предложенная модернизация используемого метода событийного анализа позволяет получить более точные результаты. Описываемые в настоящей диссертации результаты могут внести дополнительные ограничения на теоретическое описание начального состояния [КТП](#). Кроме того, наглядно показана необходимость корректной оценки динамических флуктуаций потока, вычисляемых через смоделированные спектры.

Обоснованность и достоверность результатов диссертации обусловлена тем, что они получены с помощью апробированных методов современной экспериментальной и теоретической физики, применением различных методов перекрестной проверки, включающих в себя анализ на базе разнообразных моделей столкновений тяжелых ионов, а также подробную оценку систематических погрешностей в проведенном анализе экспериментальных данных. В дополнение к этому, обоснованность подтверждается сопоставлением результатов, полученных как в рамках [HYDJET++](#), так и в анализе экспериментальных данных [CMS](#), с теоретическими расчетами и результатами эксперимента [ATLAS](#).

Апробация результатов диссертационной работы осуществлена посредством представления результатов на международных конференциях, в числе которых “The IV International Conference on New Frontiers in Physics”(“ICNFP2015”) в 2015г. (Греция), “The XXV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions Quark Matter 2015”(“QM2015”) в 2015г. (Япония), “Frankfurt Institute of Advanced Studies (FIAS) Transport Meeting” в 2015г. (Германия), “32nd Winter Workshop on Nuclear Dynamics” в 2016г. (Франция), “The XX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists”(“AYSS-2016”) в 2016г. (Россия), Международная сессия-конференция Секции ядерной физики Отделения физических наук РАН “Физика фундаментальных взаимодействий” в 2016г. (Россия), “Ломоносовские чтения - 2016” в 2016г. (Россия), “19th International Seminar on High Energy Physics QUARKS-2016” в 2016г. (Россия), “Summer School on Symmetries, Fundamental Interactions and Cosmology” в 2016г. (Германия), “The Third Asia-Europe-Pacific School of High-Energy Physics”(“AEP-SHEP-2016”) в 2016г. (Китай), “International Mini-Workshop on Simulations of HIC for NICA energies” в 2017г. (Россия), Workshop “Nuclear, Particle physics and Cosmology” в 2017г. (Норвегия), “XII Workshop on Particle Correlations and Femtoscopy”(“WPCF-2017”) в 2017г. (Нидерланды), “17th International Conference on Strangeness in Quark Matter”(“SQM -2017”) в 2017г. (Нидерланды), “39th International Conference on High Energy Physics”(“ICHEP2018”) в 2018г. (Республика Корея). Материалы диссертации изложены в 9 публикациях [30–38], из которых 5 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI [30–34].

1.3. Структура диссертации

Диссертация состоит из семи глав, включающих в себя введение (1), описание экспериментальной установки (2), основные принципы гидродинамического моделирования и описание работы модели [HYDJET++](#) (3), подробное описание особенностей используемого в работе метода анализа (4), результаты исследований, проделанных в рамках модели [HYDJET++](#) и эксперимента [CMS](#) (5), обсуждение результатов и перспективы дальнейших исследований (6) и заключения (7). В дополнение к этому, работа включает в себя список сокращений и условных обозначений, список литературы и три приложения. Приложение А включает в себя список иллюстративного материала. Приложение В описывает переменные релятивистской кинематики, которые используются в основном тексте диссертации для описания симметричных столкновений тяжелых ионов. Приложение С посвящено моделям начального состояния, используемым в теоретических расчетах, приведенных для сравнения с полученными экспериментальными результатами диссертационной работы.

2. Экспериментальная установка

2.1. Большой Адронный Коллайдер

С начала своей работы 10 сентября 2008 года Большой адронный коллайдер (Large Hadron Collider (LHC)) [39] остается самым мощным ускорителем частиц при высоких энергиях в мире. Он был построен в CERN на глубине 175 метров под француско-швейцарской границей около Женевы и представляет собой кольцо длиной 27 километров, состоящее из тысяч сверхпроводящих магнитов, изгибающих и фокусирующих пучки частиц. Разнообразные исследования, проводимые на ускорительном комплексе БАК, затрагивают изучение трех различных энергезависимых систем столкновений: протон-протон (pp) при энергиях в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 900$ ГэВ, 2.36 ТэВ, 7 ТэВ, 8 ТэВ и 14 ТэВ, ионов свинца (PbPb) при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ, 5.02 ТэВ, и протон-свинца (pPb) при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ and 8.16 ТэВ. На текущий момент коллайдер достиг значения светимости (количества потенциальных столкновений в секунду на единицу поверхности) в 2 раза выше, чем величина $10^{34} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, — номинальной проектной светимости для упомянутых выше систем столкновений, — со значением более 100 фм^{-1} интегрированной светимости.

Следуя схематическому представлению ускорительной системы LHC комплекса CERN (англ. “LHC injection chain” - цепочка инжекции LHC), представленной на Рисунке 2.1, рассмотрим этапы ускорения ионов свинца (Pb-Pb) с итоговой энергией столкновения в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Вначале источник пучка ионов свинца, — кусок чистого свинца длиной 2 см и весом 500 мг, — нагревается до ~ 500 градусов Цельсия, чтобы испарить небольшое количество атомов. С помощью электрического тока удаляются несколько электронов из каждого атома, после чего созданные ионы направляются в линейный ускоритель Linac3, показанный внизу рисунка. При прохождении данного ускорителя ионы приобретают энергию 4.5 МэВ на нуклон, после чего из них удаляется еще некоторое количество электронов. Ионы свинца затем переходят в ускоритель LEIR, где они достигают энергии 72 МэВ на нуклон. Следующие этапы ускорения не отличаются от протонной цепочки, и начинаются с попадания пучка свинца в протонный синхротрон (Proton Synchrotron PS), который ускоряет ионы до 5.9 ГэВ и удаляет из них последние электроны. Следующий после него протонный суперсинхротрон (Super Proton Synchrotron SPS) ускоряет пучки до энергии 177 ГэВ на нуклон и наконец направляет их в главное кольцо LHC. Движущиеся по кольцу встречные пучки ионов свинца ускоряются до энергии 1.38 ТэВ и сталкиваются в четырех “точках взаимодействия”, соответствующих положениям четырех детекторов частиц на LHC: ATLAS, CMS, ALICE и LHCb (см. Рисунок 2.2). Пучки ионов движутся в коллайдере как сгустки (так называемые “банчи” - от англ. “bunches”), при этом расстояние между сгустками управляет скоростью столкновения ускорителя. В наилучших рабочих условиях интервал может достигать величины 25 нс.

На Рисунке 2.2 представлены подсистемы установки LHC, расположенные в каждом секторе (секторе) кольца. Помимо четырех детекторов частиц, они включают в себя систему сброса пучка (“Beam dumping system”), системы очищения (“Cleaning systems”) и систему аппаратуры и диагностики пучка (“Beam instrumentation”). Система сброса пучка предназначена для быстрого извлечения встречных пучков из каждого кольца коллайдера с минимальными потерями. При этом частицы перемещаются во внешние блоки сброса, которые расположены в конце вакуумной линии длиной 700 м. Для удобства линии сброса на

2. Экспериментальная установка

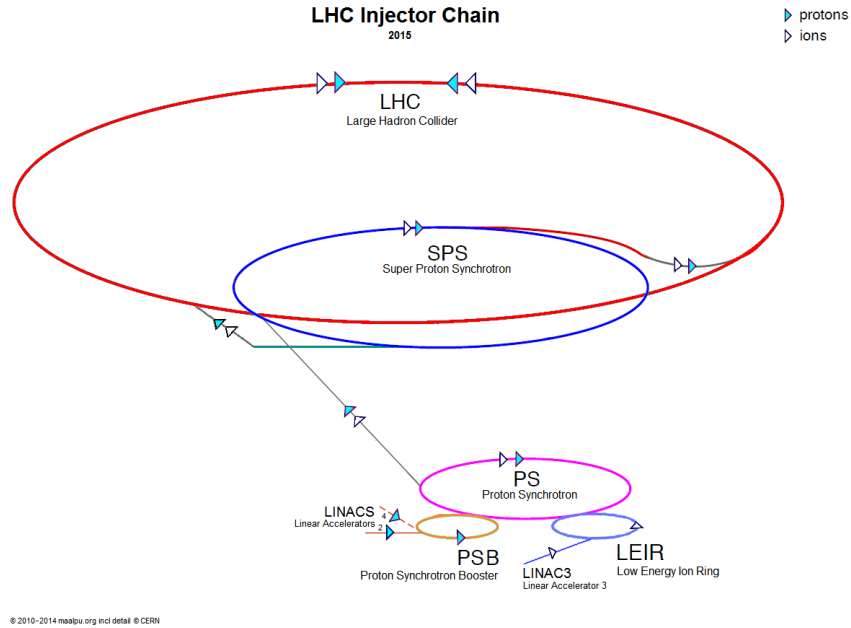


Рисунок 2.1.: Схематическое представление ускорительной системы **LHC**¹ (“Цепочка инжекции **LHC**”). Показан процесс ускорения протонов и ионов. Детали приведены в тексте.

¹ Рисунок взят из www.maalpu.org/lhc/

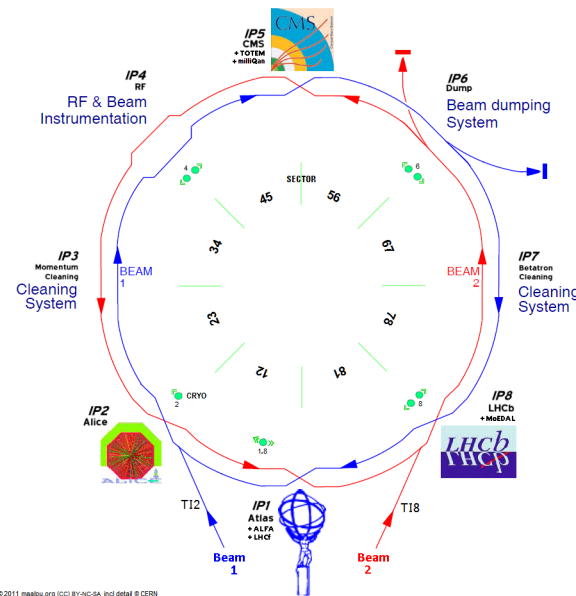


Рисунок 2.2.: Схема основного кольца **LHC** с выделением подсистем, присутствующих в каждом октанте¹. Показано прохождение встречных пучков адронов через систему коллайдера, с указанием четырех точек столкновения, в которых расположены детекторы частиц. Детали приведены в тексте.

¹ Рисунок взят из www.maalpu.org/lhc/

схеме 2.2 показаны изогнутыми, тогда как на самом деле они прямые, с небольшим сдвигом в сторону от основного кольца. Поскольку даже крошечная часть интенсивного пучка частиц может “погасить” сверхпроводящие магниты LHC или повредить компоненты ускорителя, в установке присутствуют две системы очищения пучка. Они предназначены для безопасного и эффективного избавления от неизбежных потерь при работе ускорителя. Задачей системы диагностики является измерение свойств пучка и получение информации о его поведении. Такие диагностические системы необходимы в течение рабочего периода ускорителя. Полную информацию о структуре и дизайне коллайдера LHC можно найти в [39], а также в недавних обзорах предстоящих обновлений экспериментальной установки.

Значительная часть работы, обсуждаемой в настоящей диссертации, посвящена экспериментальному анализу данных по столкновениям ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ, зарегистрированных с помощью детектора частиц CMS во время ядро-ядерного сеанса коллайдера в 2015 году. В связи с этим, последующие разделы будут охватывать подробный обзор экспериментальной установки CMS и его спецификации для анализа данных. Помимо этого, большая часть диссертации касается сравнения полученных экспериментальных и модельных результатов с аналогичными событийными измерениями, проделанными коллаборацией ATLAS для столкновений свинца при $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Поэтому конец настоящей главы затронет специфику детектора ATLAS и отметит особенности кинематических областей измерения, использованных в отборе данных по сравнению с проведенным в диссертации анализом.

2.2. Строение детектора CMS

Компактный мюонный соленоид (Compact Muon Solenoid (CMS)) — один из четырех детекторов, расположенных в точках столкновения кольца LHC. Длинной 21 м и диаметром 15 м, детектор CMS оправдывает свою “компактность”, если учесть все материалы, использованные для его постройки. Изначально детектор был создан для точной регистрации мюонов, как видно из его названия, однако он дает возможность изучать и другие физические явления: например, связанные со Стандартной моделью, квантовой хромодинамикой (QCD), КГП или поисками новой физики. Построенный вокруг огромного магнита-соленоида, детектор имеет цилиндрическую форму “лука” с несколькими концентрическими слоями, как показано на Рисунке 2.3. Соленоид образован цилиндрической катушкой из сверхпроводящих волокон и создает магнитное поле величиной 3.8 Т, что в 100000 раз превышает магнитное поле Земли. Поле удерживается стальным “обратным ярмом”, которое формирует основную часть (12500 тонн) 14000 тонного детектора. Размер магнита позволяет расположить трекер и калориметры внутри его катушки, что в свою очередь делает детектор настолько компактным.

Необычная особенность детектора CMS заключается в том, что вместо того, чтобы построить его на месте, как было сделано с другими гигантскими детекторами LHC, он был собран из 15 отдельных частей, предварительно опущенных под землю.

Эксперимент CMS использует глобальную систему координат, ориентированную таким образом, что ось x указывает в центр кольца LHC, ось y направлена вертикально вверх, а ось z - в направлении пучка. Радиальная координата r , также как и азимутальный угол φ от оси x измеряются в плоскости xy . Псевдобыстрота η определена через полярный угол θ в плоскости rz как $\eta = -\ln \tan(\theta/2)$. Помимо этого, поперечная компонента импульса, обозначаемая p_T , вместе с массой частицы m определяют поперечную энергию E_T , измеряемую калориметрами: $E_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$. Подробную информацию о технических аспектах детектора CMS и его системе координат можно найти в [40], тогда как определения и фундаментальные соотношения между переменными релятивистской кинематики собраны в приложении В.

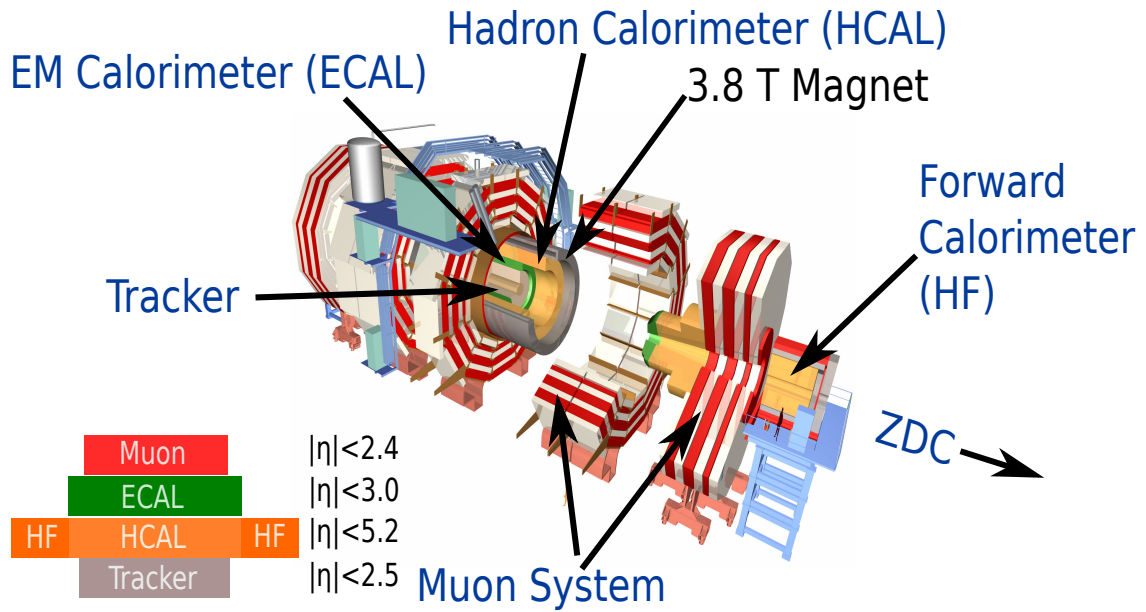


Рисунок 2.3.: 3D-макет детектора CMS¹. Выделены внутренние системы детектора: трекер, адронный и электромагнитный калориметры, магнит-соленоид, передний калориметр и мюонные камеры. Детали приведены в тексте.

¹ Рисунок взят из <http://cms.desy.de/e53612/e155175/e155179/>

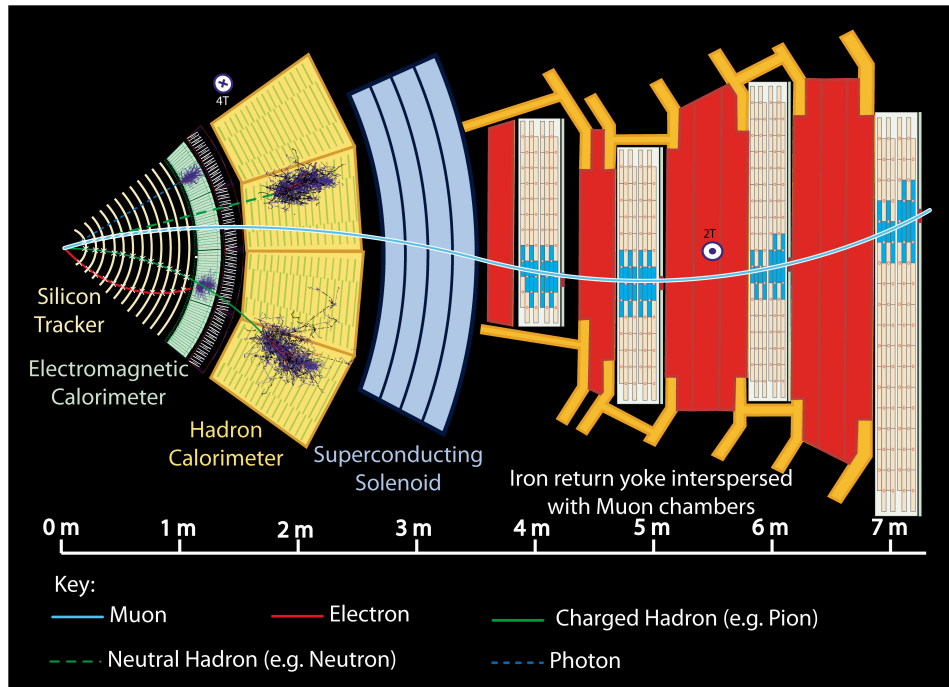


Рисунок 2.4.: Внутренние компоненты детектора CMS в поперечном сечении¹. Расстояние от центра детектора показано в метрах. Треки частиц, регистрируемых в каждой из внутренних систем детектора, показаны различными цветами.

¹ Рисунок взят из <https://cms.cern/news/how-cms-detects-particles>

Рисунок 2.4 показывает компоненты детектора CMS, представленные как “кусоч” (“slice”) в поперечном сечении. На рисунке отражено, как различные частицы регистрируются при прохождении детектора. Каждая из представленных внутренних систем имеет свои особенности:

- **Внутренняя трековая система**, или **Трекер** (Inner Tracking System, Tracker) состоит из 1440 кремниевых пиксельных и 15 148 кремниевых “полосковых” (strip) модулей, которые используются для высокоточного измерения траекторий заряженных частиц в интервале псевдобыстроты $|\eta| < 2.5$. Эта система регистрирует траектории частиц с трековым разрешением $\sim 1.5\%$ в p_T и $25 - 90$ ($45 - 150$) $\mu\text{м}$ в поперечном (продольном) прицельном параметре [41].
- **Электромагнитный калориметр** (Electromagnetic calorimeter, ECAL) состоит из кристаллов вольфрамата свинца ($PbWO_4$), — очень плотного материала, которые излучают свет (сцинтиллируют) при прохождении через них электронов и фотонов. Цилиндрический баррель (barrel) ECAL состоит из 61,200 кристаллов, сформированных в 36 так называемых “супермодулей”. Плоские “торцевые модули” (endcaps) закрывают баррель с обоих концов и содержат около 15 000 кристаллов. Данная система покрывает диапазон псевдобыстроты $|\eta| < 3.0$.
- **Адронный калориметр** (Hadron calorimeter, HCAL) сконструирован для регистрации частиц, состоящих из кварков и глюонов (напр., протоны и нейтроны), с покрытием диапазона псевдобыстроты $|\eta| < 3.0$. HCAL разделен на несколько частей: баррели (HB и HO), торцевые модули (HE) и передние калориметры (HF). 36 “клиньев” барреля образуют последний слой детектора внутри магнита, тогда как дополнительные слои и внешний баррель HO расположены снаружи катушки для гарантии того, что нет потерь энергии, связанных с вытеканием из задней части HB. Также 36 “клиньев” заглушки измеряют энергию частиц, появляющихся с концов соленоида. Передние адронные калориметры HF расширяют диапазон псевдобыстроты до $3.0 \leq |\eta| \leq 5.2$.
- **Сверхпроводящий соленоид** представляет собой магнит, измеряющий траектории частиц высоких энергий. Благодаря сильному магнитному полю (3.8 Т) он позволяет проводить высокоточные измерения импульсов частиц в трековой и мюонной системах.
- **Мюонная система** состоит из четырех слоев мюонных камер, чередующихся с железным “возвратным ярмом”, и позволяет регистрировать мюоны с высокой точностью. Разрешение импульса мюонов на порядок выше для мюонной системы по сравнению с трекером, если $p_T < 200$ ГэВ/с (низкие p_T). В то же время, при высоких p_T импульсное разрешение трекера становится ограниченным. Поэтому, объединяя “удары” (hits) в кремниевом трекаре с несколькими ударами в мюонных камерах, можно добиться наилучшего разрешения импульса для мюонов.
- Детектор **CASTOR** расширяет диапазон покрытия псевдобыстроты до $-6.6 < \eta < -5.2$, где находится большая часть потока энергии от неупругих соударений. Он состоит из электромагнитных и адронных частей, которые измеряют черенковское излучение, испускаемое при прохождении частицы через детектор.
- Калориметр **ZDC** расположен в самой передней части — ± 140 м от точки столкновения и покрывает значения псевдобыстроты $8.5 < \eta < \infty$. Он был сконструирован прежде всего для регистрации прямых фотонов и нейтронов в столкновениях

тяжелых ионов, а также протон-протонных столкновениях низкой светимости (до $10^{33} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$).

В рамках обсуждаемого в данной диссертации пособытийного анализа, важны только две подсистемы детектора CMS: передний калориметр HF и кремниевый трекер. Детектор HF используется для триггера MB событий (minimum-bias events) во время сбора данных, а также измерения полного неупругого сечения для определения центральности. Трекер используется для измерения траекторий заряженных частиц, азимутальные углы которых имеют решающее значение для данного анализа. Подробная информация о том, как эти две подсистемы участвуют в отборе данных, будет приведена в следующем разделе.

Несмотря на то, что другие подсистемы не используются в данной диссертационной работе, они могут быть использованы в будущих пособытийных исследованиях. Например, все упомянутые калориметры (в особенности CASTOR и ZDC) могут использоваться для оценки эллиптичности события в рамках инженерного анализа формы события (Event-shape engineering, ESE). Эти два выделенных калориметра обеспечивают большой зазор по псевдобыстроте от кремниевого трекера, что важно как для корреляции потока с эллиптичностью события, так и для пособытийного вычисления кумулянтов, поскольку такой подход подавляет непотоковые эффекты. С другой стороны, калориметры ECAL и HCAL необходимы для пособытийного анализа распределений потока идентифицированных частиц. Наконец, использование мюонных систем может позволить измерить поток состояний тяжелых ароматов (напр., кваркония через лептонный канал распада).

2.3. Отбор данных

Анализ данных, обсуждаемый в настоящей диссертации, основан на данных эксперимента CMS, собранных во время сеанса 2015 года по столкновениям ионов свинца (PbPb) на LHC, с полной интегральной светимостью $\approx 404 \mu\text{бн}^{-1}$. Было необходимо ≈ 100 миллионов MB событий для триггера совпадающих сигналов в обоих концах детектора CMS, используя HF калориметры. MB триггер также должен был совпадать с наличием обеих сталкивающихся пучков в точке столкновения, что может быть измерено с помощью так называемой “системы отсчета времени” (pick-up timing system) CMS. Эти два условия подавляют события из-за шума, такие как космические лучи, дважды-регистрирующие триггеры и фон пучка. Дальнейший отбор событий производится в оффлайн-режиме и требует, по крайней мере, трех ударов в обоих детекторах HF с энергией ≥ 3 ГэВ в каждом кластере, что убирает электромагнитные взаимодействия. Кроме того, события должны иметь восстановленную первичную вершину с по меньшей мере двумя треками, расположенными в пределах 15 см от изначальной точки столкновения вдоль оси пучка. Помимо этого, вершины были отфильтрованы в зависимости от их кластерной совместимости с помощью сканирования оси z вокруг восстановленной вершины и определения того, какое количество пиксельных кластеров совместимо с ее положением. Эти критерии подавляют “загрязнение” событий (pileup contamination).

Выбор трека выполняется посредством их разделения на две категории: пиксельные и общие треки, каждая из которых имеет свои критерии отбора (см. Таблицы 2.1, 2.2). Вначале, для того, чтобы отделить пиксельные треки от общих, они должны иметь $p_T < 2.4$ ГэВ/с и быть восстановлены используя 3 – 6 ударов. Все треки, которые не соответствуют этим требованиям, относятся к общему типу. Другие специфики отбора треков включают в себя продольное разделение (d_z/σ_{d_z}), прицельный параметр (d_0/σ_{d_0}), относительную ошибку для поперечного импульса p_T (σ_{p_T}/p_T) и число ударов вдоль траектории частицы N_{hits} . Кроме того, для уменьшения числа неверно определенных (ошибочных) треков, проверяется величина χ^2 , деленная на общее число степеней свободы и общее чис-

2. Экспериментальная установка

Критерий отбора трека	Величина
$p_T < 2.4$ and $N_{hits} = 3 - 6$	True
High purity	True
$ d_z/\sigma_{d_z} $	< 8
$\chi^2/dof/N_{layers}$	< 12

Таблица 2.1.: Критерии отбора пиксельных треков анализа [CMS](#).

Критерий отбора трека	Величина
High purity	True
$ d_z/\sigma_{d_z} $	< 3.0
$ d_0/\sigma_{d_0} $	< 3.0
σ_{p_T}/p_T	< 0.1
N_{hits}	> 11
$\chi^2/dof/N_{layers}$	< 0.15
$p_T > 2.4$ and algoBit = 4 – 7	True

Таблица 2.2.: Критерии отбора общих треков анализа [CMS](#).

ло слоев с ударами вдоль траектории трека. Также применяется алгоритм реконструкции высокой чистоты [CMS](#) (high-purity reconstruction algorithm) [42].

Рисунок 2.5 показывает распределение поперечной энергии E_T , измеренное с помощью HF калориметров, которое определяет выбор центральности столкновения для образца данных [CMS](#). Полученное распределение E_T разделяется на 200 бинов, каждый из которых соответствует 0.5% полного неупругого сечения. Следует отметить, что наиболее заметными источниками неопределенностей при измерении поперечного сечения являются эффективность отбора событий и электромагнитное взаимодействие, которые дают $\approx 1\%$ от полной систематической погрешности.

Подробная оценка систематических погрешностей измерения от различных источников в проведенном событийном анализе экспериментальных данных [CMS](#) будет рассмотрен в разделе 4.6.

2.4. Строение детектора ATLAS

Обзор особенностей структуры детектора [ATLAS](#) можно найти в [43], тогда как в данном разделе я уделю внимание ключевым аспектам, связанным с событийным анализом данных, проделанным коллаборацией [ATLAS](#) в [25]. Для этого анализа исследовались столкновения ионов свинца при энергии в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ, при этом были использованы две подсистемы детектора: внутренний детектор (Inner Detector или ID) и передний калориметр (Forward Calorimeter или FCal). Находясь в аксиальном поле величиной в 2 Т сверхпроводящего магнита, внутренний детектор ID измеряет траектории заряженных частиц в диапазоне псевдобыстроты $|\eta| < 2.5$ и полном азимутальном диапазоне. Когда заряженная частица проходит через ID, она как правило пересекает три модуля кремниевого пиксельного детектора, затем четыре двусторонних кремниевых полосковых модуля полупроводникового трека (semiconductor tracker или SCT), и переходный радиационный трекер, состоящий из “соломенных” трубок (последний этап касается только частиц с $|\eta| < 2.0$). FCal калориметр состоит из симметричных модулей при положительной и отрицательной псевдобыстроте, покрывающих $3.1 < |\eta| < 4.9$. Каждый из этих модулей в свою очередь состоит из вольфрамовых или медных амортизаторов, имеющих

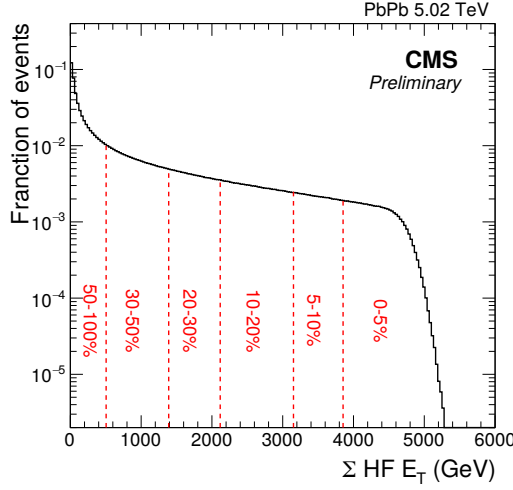


Рисунок 2.5.: Распределение поперечной энергии, измеренное калориметрами HF для набора [MB](#) событий в столкновениях ионов свинца 2015 года детектором [CMS](#). Границы между долями полного неупругого сечения показаны вертикальными линиями¹.

¹ Рисунок взят из CERN-THESIS-2017-094

жидкий аргон в качестве активной среды. В анализе [25] данный калориметр использовался для измерения центральности столкновения через полную поперечную энергию ΣE_T аналогично тому, как это осуществляется в эксперименте [CMS](#).

В рассматриваемом анализе, используемом в настоящей диссертационной работе для сравнения полученных экспериментальных результатов [CMS](#) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ и модельных результатов [HYDJET++](#) при энергии 2.76 ТэВ, были вычислены пособытийные распределения гармоник потока v_n через восстановленные в ID треки частиц с $p_T > 0.5$ ГэВ/с и $|\eta| < 2.5$. Требования отбора для треков заключались в наличии хотя бы 9 ударов в кремниевых детекторах, при этом не должно отсутствовать ударов в пиксельном детекторе, а также не должно быть больше одного отсутствующего удара в SCT. Помимо этого, трек должен был находиться на расстоянии не более 1 мм от первичной вершины как в поперечном, так и в продольном направлении. Результаты данного анализа [ATLAS](#), используемые в настоящей диссертационной работе для сравнения, включают в себя распределения $p(v_n)$ для различных центральностей столкновения при $0.5 < p_T < 1.0$ ГэВ и $|\eta| < 2.5$. Различия энергии столкновения, также как и кинематических диапазонов, может привести к отличиям измеренных в анализе [ATLAS](#) и [CMS](#) распределений флуктуаций потока.

3. Гидродинамическое моделирование

3.1. Основные идеи гидродинамического моделирования

Гидродинамическое описание [12, 14, 44] релятивистских столкновений тяжелых ионов основано на предположении о том, что частицы изначального столкновения перерассеиваются достаточно часто для достижения термального равновесия, в котором частицы ведут себя как жидкость, а не как облако свободных частиц. Если такое состояние достигается, в конечном состоянии должны наблюдаться коллективные эффекты. Таким образом, экспериментальные наблюдения коллективных признаков в конечных распределениях и корреляциях частиц указывают на успех гидродинамики в описании эволюции образованного состояния вещества. Однако, при упоминании об успехах гидродинамики, необходимо иметь ввиду, что она имеет ряд нерешенных вопросов и зачастую гидродинамическое моделирование основано на некорректных предположениях.

Как упоминалось во введении 1, гидродинамика описывает этапы после формирования “фаербола” до адронизации, т.е. процесс расширения и охлаждения КГП (см. Рисунок 1.1). После достижения адронизации гидродинамическое описание “ломается” и необходимо использовать макроскопическое описание. В принципе, гидродинамика может быть применима вплоть до $\tau_{sc}^{-1} \approx \theta$, где $\tau_{sc}^{-1} \sim \sigma n \propto T^3$ - скорость рассеяния, а $\theta = \partial_\mu u^\mu$ - скорость расширения, поскольку для кинетического равновесия требуется $\tau_{sc}^{-1} \gg \theta$. Обычно используется приближение, что это происходит на гиперповерхности постоянной температуры замораживания Σ_{fo} . В гидродинамическом описании, состояние системы полностью описывается тензором энергии-импульса ($T^{\mu\nu}$) и 4-током (четырёхтоком) сохраняющихся зарядов N^μ , при этом локальное сохранение энергии, импульса и зарядов обеспечивает уравнения движения релятивистской гидродинамики:

$$\partial_\mu N_i^\mu(x) = 0 = \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) . \quad (3.1)$$

Следует отметить, что формула 3.1 имеет $4+n$ уравнений, но $10+4n$ независимых неизвестных переменных, поэтому для решения необходимо предоставить $6 + 3n$ дополнительных уравнений, или же убрать $6 + 3n$ неизвестных.

Уравнения движения гидродинамики представляют собой уравнения с частными производными. В связи с этим они не могут быть решены без указания граничных условий задачи. При изучении физики тяжелых ионов, такими граничными условиями являются: начальное состояние (в начале гидродинамической эволюции) и критерий замораживания (или критерий “переключения”), отвечающий за переключение к описанию частиц, выпускаемые в конце динамической эволюции жидкости в каскадную модель.

Природа создает пособытийно (от события к событию) столкновения тяжелых ионов, и гидродинамические силы генерируют в каждом таком событии компоненту v_n анизотропного потока, которая имеет причинно-следственную связь с конкретной величиной начального эксцентриситета ε_n в этом событии. Тем не менее, теоретики часто не вычисляют гидродинамическую эволюцию фаербола пособытийно, а используют некоторое

приближение, состоящее из создания из суперпозиции многих флуктуирующих начальных условий один гладкий профиль начального распределение $\bar{e}(x, y)$, которое затем эволюционирует гидродинамически как “одионый выстрел”, — извлекая “среднее” значение потока $\bar{v}_n$, соответствующее среднему эксцентриситету нуклонов-участников $\bar{\epsilon}_{part}$ [12]. Очевидно, что при такой генерации не будет флуктуаций потока, т.к. $\bar{v}_n$ является детерминированным следствием $\bar{\epsilon}_{part}$. Следует отметить, что такие средние значения отличаются от средних значений пособытийных распределений $\langle v_n \rangle$ и $\langle \epsilon_n \rangle$, определенных в главе 1. Несомненно, такой подход к генерации событий недостаточен для описания флуктуаций потока и начального состояния, в связи с чем получило развитие пособытийное гидродинамическое моделирование. С другой стороны, подход гидродинамического описания фаербола развился в “мульти-жидкостную” гидродинамику. Идея такого подхода заключается в представлении неравновесного столкновения двух ядер как набора равновесных “жидкостей”, взаимодействующих между собой.

Гидродинамика успешно описывает “мягкую” часть физики столкновений тяжелых ионов. Однако, было отмечено, что “жесткие” процессы рождения частиц могут играть значительную роль, даже модифицировать объемные свойства создаваемого в ультрарелятивистских столкновениях вещества [45]. Таким образом, получили развитие многочисленные гибридные модели [46—51]. Все такие подходы имеют принципиально схожую структуру:

- неравновесное начальное состояние
- гидродинамическая эволюция (или, альтернативно, транспортное вычисление)
- замораживание посредством адронного каскада

При этом первая и последняя стадии фиксируются, что позволяет исследовать уравнение состояния и эффекты вязкой гидродинамики.

3.2. Генератор событий HYDJET++

HYDJET++ [52] является продолжением модели HYDJET [53], и представляет собой двухкомпонентную модель для описания столкновений тяжелых ионов. Эти компоненты отвечают за моделирование “мягкой” и “жесткой” части. Мягкая компонента основана на принципах гидродинамики, в то время как жесткая генерируется за счет многочастичной фрагментации внутри вещества.

Мягкая компонента представляет собой термальное адронное состояние, сгенерированное на гиперповерхностях химического и термального замораживания, полученных с помощью параметризации релятивистской гидродинамикой с заданными условиями замораживания. Это осуществляется с помощью быстрого генератора FAST MC [54, 55], при этом множественности адронов вычисляются с помощью приближения эффективного термального объема и распределения Пуассона вокруг среднего значения множественности, которое предполагается пропорциональным числу участвующих нуклонов при определенной величине прицельного параметра для столкновений двух тяжелых ионов A+A. Алгоритм моделирования мягкой части можно представить следующими пунктами:

- Генерация 4-импульса адронов в системе покоя жидкостного элемента в соответствии с равновесной функцией распределения.
- Генерация пространственной позиции и локальной 4-скорости жидкостного элемента в соответствии с фазовым пространством и характером движения жидкости.
- Стандартная процедура фон Неймана отклонения/принятия, позволяющая объяснить разницу между истинными и генерируемыми вероятностями.

3. Гидродинамическое моделирование

- Увеличение (“boost”) 4-импульса адронов в системе центра масс события.
- Учет двух- и трехчастичных распадов резонансов с коэффициентами ветвления, взятыми из таблицы распада частиц SHARE [56].

Анизотропия в модели [HYDJET++](#) создается с помощью двух параметров:

- $\epsilon(b)$ — параметр пространственной анизотропии — представляет собой эллиптическую модуляцию конечной гиперповерхности замораживания при заданном прицельном параметре b .
- $\delta(b)$ — параметр импульсной анизотропии — отвечает за модуляцию профиля скорости потока.

Соотношение между данными параметрами выражается в следующей форме:

$$\delta = \frac{\sqrt{1 + 4B(\epsilon + B)} - 1}{2B}, \quad B = C(1 - \epsilon^2)\epsilon, \\ \epsilon = k\epsilon_0, \quad \epsilon_0 = b/2R_A. \quad (3.2)$$

При этом измененный радиус гиперповерхности замораживания в азимутальной плоскости учитывает также триангулярную деформацию, характеризующуюся параметром $\epsilon_3(b)$:

$$R(b, \phi) = R_{ell}(b, \phi)[1 + \epsilon_3(b) \cos[3(\phi - \Psi_3)]] , \quad (3.3)$$

где ϵ_0 обозначает начальную эллиптичность, R_A - ядерный радиус, R_{ell} - изначальный поперечный радиус фаербола, который воспроизводит эллиптическую деформацию. Рисунок 3.1 показывает пример генерации пространственной анизотропии при выборе параметров $\epsilon(b) = 0.2$, $\epsilon_3(b) = 0$ (слева) и $\epsilon(b) = 0.2$, $\epsilon_3(b) = 0.2$ (справа), что воспроизводит соответствующую генерацию эллиптического потока v_2 или эллиптического и триангулярного потоков — $v_2 + v_3$. В обоих случаях были выбраны параметры $R_f = 5$ фм, $\Psi_2^{RP} = 0$, $\Psi_3^{RP} = 0$.

Жесткая компонента генератора событий [HYDJET++](#) основана на модели PYQUEN [53] и может быть описана следующей последовательностью:

- Генерация начального спектра партонов в рамках модели PYTHIA [58] и создание вершин при заданном прицельном параметре.
- Моделирования траектории перерассеяния партонов, вместе с радиационными и столкновительными потерями энергии.
- Конечная адронизация в соответствии с моделью Лунда для жестких партонов и испускаемых в веществе глюонов.

Программный код генератора событий [HYDJET++](#) написан на объектно-ориентированном языке C++ в рамках пакета ROOT [59]. Рисунок 3.2 иллюстрирует схематическую последовательность генерации событий в модели [HYDJET++](#). Модель включает в себя продольные, радиальные, эллиптические эффекты, а также адронные резонансные распады. Поскольку жесткая и мягкая компоненты модели представляют собой отдельные программы, генерацию возможно проводить в трех вариантах: создавать только потоковые эффекты, только непотоковые эффекты, или же проводить полную генерацию — поток + непотоковые эффекты. Модель позволяет изучать многочастичное образование в широком диапазоне энергий для таких экспериментов по столкновениям тяжелых ионов, как FAIR,

3. Гидродинамическое моделирование

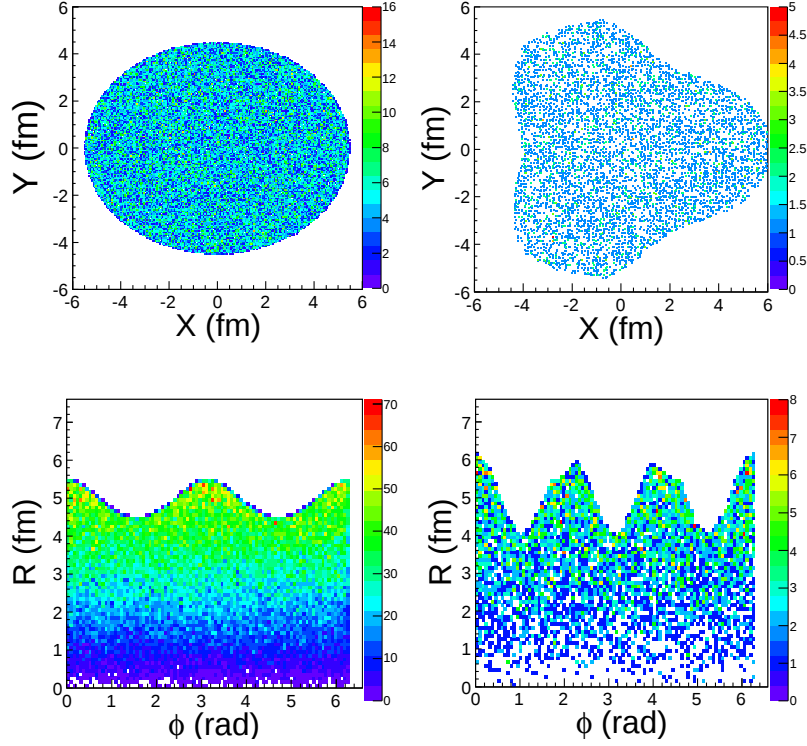


Рисунок 3.1.: Генерация пространственной анизотропии в модели [HYDJET++](#) [57]. В левой части рисунка моделирование проведено для v_2 ($\epsilon_3(b) = 0$), на правой для $-v_2 + v_3$ ($\epsilon_3(b) = 0.2$). В обоих случаях были выбраны параметры $R_f = 5$ фм, $\epsilon(b) = 0.2$, $\Psi_2^{RP} = 0$, $\Psi_3^{RP} = 0$.

NICA, RHIC и LHC. Данный генератор событий описывает соударения вплоть до центральности столкновения 40 – 45%, что нередко встречается в полу-феноменологических моделях.

Модель [HYDJET++](#) успешно описывает экспериментальные наблюдаемые, полученные в анализе данных при энергиях LHC [60]. Рисунок 3.3 показывает смоделированные в модели [HYDJET++](#) результаты, полученные с использованием только мягкой компоненты (точечная кривая), только жесткой компоненты (пунктирная кривая), и полный результат мягкой+жесткой части (сплошной кривой). Левый и центральный рисунок иллюстрирует нормированную на среднее число взаимодействующих нуклонов множественность заряженных частиц при средней быстрой $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от центральности и псевдобыстроты, соответственно. Зависимость от псевдобыстроты $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle(\eta)$ приведена для двух интервалов центральности, характеризующих самые центральные столкновения (0 – 5%) и самые периферические столкновения (50 – 55%). Правый рисунок представляет спектр заряженных частиц по поперечному импульсу для самых центральных столкновений. Точки на каждом из рисунков обозначают данные [ALICE](#) (пустые) и [CMS](#) (полные). Результаты модели [HYDJET++](#) для столкновений ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ по дифференциальному эллиптическому потоку $v_2(p_T)$ представлены на Рисунке 3.4 для трех интервалов центральности. Точки обозначают данные [CMS](#). Как видно из представленных результатов, такое объединение мягкой и жесткой компоненты дает удовлетворительное описание наблюдаемых в эксперименте результатов.

Помимо этого, рисунок 3.5 показывает корреляцию между средними значениями гармоник эллиптического и триангулярного потока (v_2 и v_3), полученную для заряженных адронов с $0.5 < p_T < 2$ ГэВ/с и $|\eta| < 2.5$ в 5%-центральных столкновениях ионов свинца при энергии в системе центра масс $s_{NN} = 2.76$ ГэВ. Полные точки

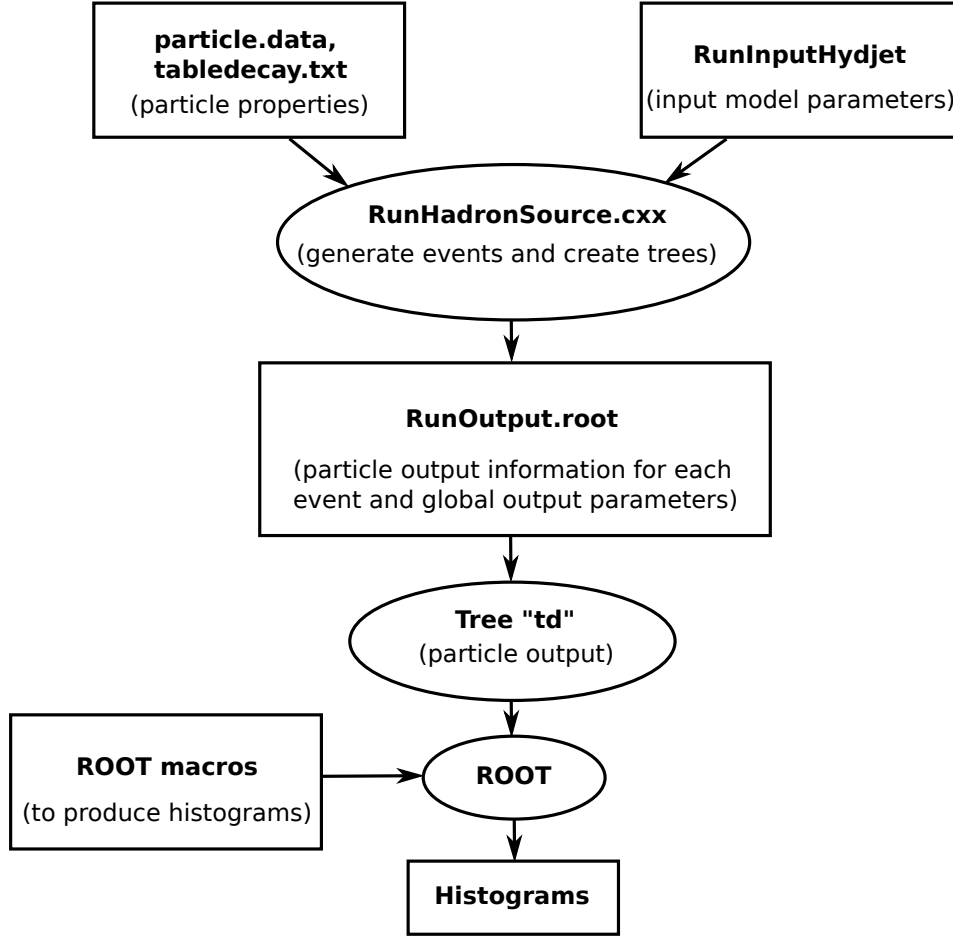


Рисунок 3.2.: Схематическая последовательность генерации событий в модели [HYDJET++](#).

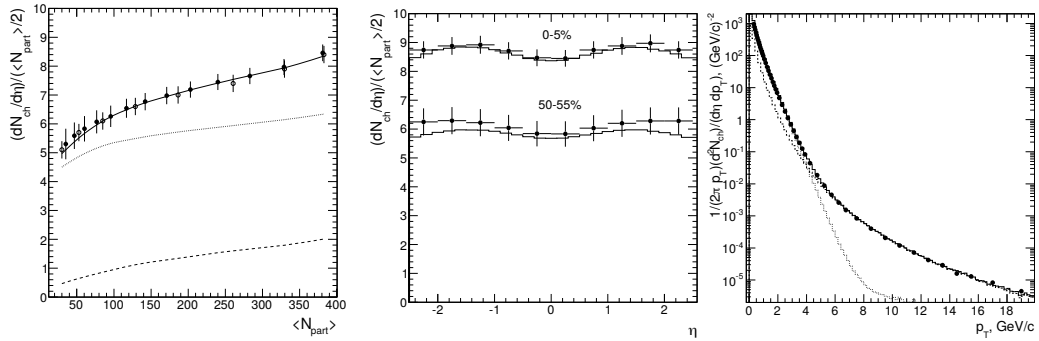


Рисунок 3.3.: Результаты модели [HYDJET++](#) для столкновений ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ [60]. Слева: нормированная множественность заряженных частиц при средней быстрой $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от среднего числа взаимодействующих нуклонов (центральности столкновения). Центр: $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от псевдобыстроты для двух интервалов центральности. Справа: спектр заряженных частиц по поперечному импульсу. Точки обозначают данные [ALICE](#) и [CMS](#). Результаты мягкой компоненты показаны точечной кривой, жесткой компоненты - пунктирной кривой, полный результат - сплошной кривой.

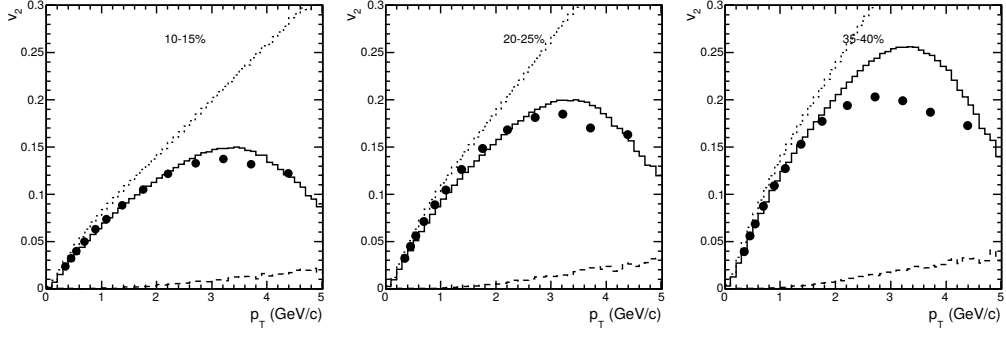


Рисунок 3.4.: Результаты модели [HYDJET++](#) для столкновений ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ по дифференциальному эллиптическому потоку $v_2(p_T)$ в трех интервалах центральности [60]. Точки обозначают данные [CMS](#). Результаты мягкой компоненты показаны точечной кривой, жесткой компоненты - пунктирной кривой, полный результат - сплошной кривой.

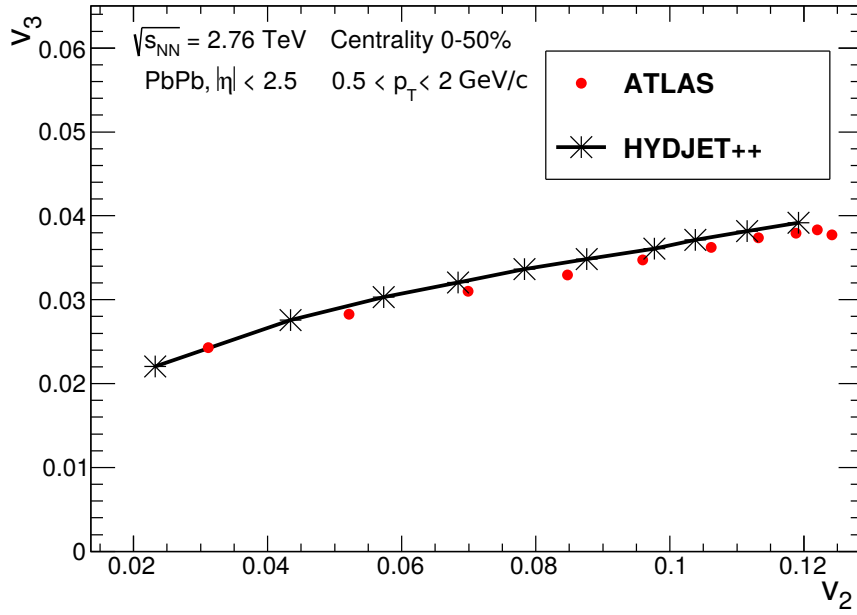


Рисунок 3.5.: Корреляция между эллиптическими и триангулярными гармониками потока в модели [HYDJET++](#) [30], в сравнении с данными эксперимента [ATLAS](#).

обозначают данные [ATLAS](#) из работы [61], тогда как звездочки представляют события, смоделированные в [HYDJET++](#). Линия приведена для удобства.

Таким образом, рисунки 3.3, 3.4, 3.5 представляют примеры успешного описания двухкомпонентной моделью [HYDJET++](#) экспериментальных результатов столкновений ионов свинца при энергии [LHC](#). Однако, все вычисления были проведены для усредненных по событиям наблюдаемым. Тем не менее, представляется интересным проверить, возможно ли в рамках модели [HYDJET++](#) описать пособытийные распределения потока. Результаты данной задачи получены в настоящей диссертационной работе и описаны в главе 5.

4. Метод анализа

4.1. Измерения эллиптического потока

Чтобы оценить коэффициенты v_n из уравнения 1.1 в каждом событии, в настоящей диссертационной работе использовался одночастичный метод. Несомненно, для расчета гармоник анизотропного потока v_n возможно использовать и другие методы. Тем не менее, как было показано коллаборацией [ATLAS](#) в работе [25], пособытийный анализ с применением обратной свертки (развертки) не зависит от метода, используемого для вычисления коэффициентов потока, как может быть видно из рис. 4.1. Данный рисунок представляет “наблюдаемое” и “конечное” распределение функции вероятности потока $p(v_n^{obs})$ и $p(v_n)$ ($n=2,3,4$) для интервала центральности 20–25%, при этом значения гармоник были вычислены с помощью одночастичного метода (точки) или метода двухчастичных корреляций (квадраты), обозначенных как “single” и “2PC” (two-particle correlation), соответственно. Термин “конечное” обозначает распределение, полученное после применения процедуры развертки пособытийных распределений потока, которая будет подробно рассмотрена в последующих секциях. Тем не менее, следует отметить, что рис. 4.1 дает сильное указание на то, что метод пособытийного анализа с помощью применения обратной свертки позволяет вычислить реальное (“истинное”) распределение потока $p(v_n)$.

Следуя одночастичному методу расчета гармоник потока, измеренный потоковый вектор $\vec{v}_n^{raw}$ может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{n,x}^{raw} &= |\vec{v}_n^{raw}| \cos \Psi_n^{raw} = \langle \cos n\varphi \rangle , \\ v_{n,y}^{raw} &= |\vec{v}_n^{raw}| \sin \Psi_n^{raw} = \langle \sin n\varphi \rangle , \\ v_n^{raw} &\equiv |\vec{v}_n^{raw}| = \sqrt{(v_{n,x}^{raw})^2 + (v_{n,y}^{raw})^2} . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение во всем частицам в событии (другими словами, в заданной области фазового пространства), тогда как Ψ_n^{raw} представляет собой угол плоскости события, задающий главное направление потока и определяемый по формуле $\Psi_n^{raw} = \frac{1}{n} \tan^{-1} \left[\frac{\sum_i \sin n\varphi_i}{\sum_i \cos n\varphi_i} \right]$, где угол φ_i — азимутальный угол i -ой частицы в заданном событии.

Следует отметить, что в правой части ур. 4.1 не присутствует Ψ_n^{raw} . Это означает, что данный метод анализа не требует информации о плоскости события (и, соответственно, плоскости реакции), а значит все вычисление производится на основе азимутальных углов частиц.

Полученные значения гармоник потока из ур. 4.1 v_n^{raw} затем используются для построения “наблюдаемого” распределения функции вероятности потока $p(v_n^{obs})$. В случае гидродинамического моделирования (т.н. “идеального” детектора) этот шаг тривиален, поскольку не присутствуют внешние эффекты, влияющие на измерение, и $\vec{v}_n^{raw} = \vec{v}_n^{obs}$. С другой стороны, при проведении анализа экспериментальных данных с использованием детектора необходимо корректно учесть влияние неравномерного аксептанса и эффективности экспериментальной установки. Прежде всего, компоненты вектора $\vec{v}_n^{raw}$ взвешиваются с их обратными трековыми эффективностями:

4. Метод анализа

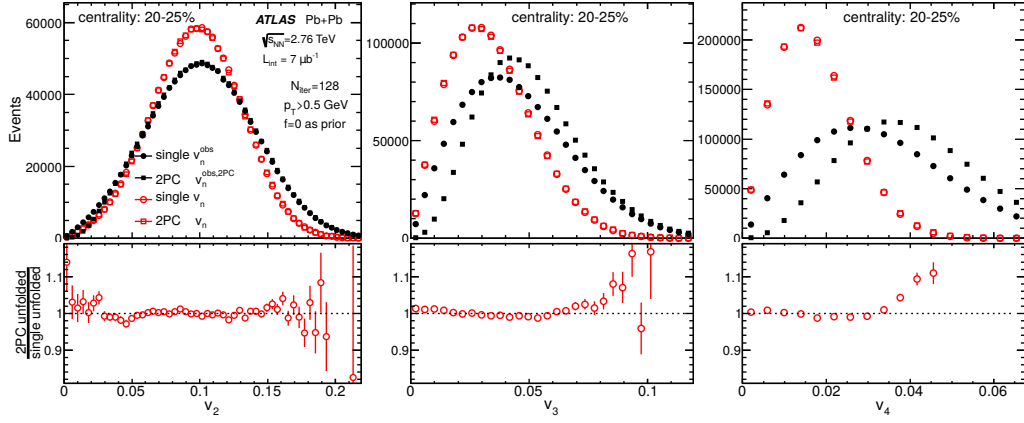


Рисунок 4.1.: Наблюдаемые (сплошные символы) и конечные (пустые символы) распределения $p(v_n)$, для которых значения гармоник потока были получены одночастичным методом (точки) или методом двухчастичных корреляций (квадраты), представленные для интервала центральности 20 – 25% для v_2 (слева), v_3 (центр) и v_4 (справа) [25]. Отношения результатов двухчастичного к одночастичному методу показаны в нижнем ряду.

$$\begin{aligned} v_{n,x}^{raw} &= \frac{\sum_i w_i \cos n\varphi_i}{\sum_i w_i}, \\ v_{n,y}^{raw} &= \frac{\sum_i w_i \sin n\varphi_i}{\sum_i w_i}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $w_i = 1/\epsilon_i(p_T, \eta)$, а $\epsilon_i(p_T, \eta)$ представляет собой абсолютную трековую эффективность, обозначающую долю заряженных частиц, которые могут быть ассоциированы (“привязаны”) с восстановленным треком. Дальнейшее подавление эффектов неравномерности детектора осуществляется посредством стандартной процедуры центрирования [7]. В событийном анализе направление вектора прицельного параметра должно быть случайным, поэтому общее распределение потоковых векторов будет изотропным с центром в нуле. В соответствии с этим, техника центрирования вычисляет среднее по всем событиям значение потокового вектора $\vec{v}_n^{det}$, которое затем вычитается из “сырого” потокового вектора $\vec{v}_n^{raw}$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_n^{det} &= \frac{\sum_i^{N_{ev}} \vec{v}_{n,i}^{raw}}{N_{ev}}, \\ \vec{v}_n^{obs} &= \vec{v}_n^{raw} - \vec{v}_n^{det}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где N_{ev} — число событий для рассматриваемого интервала центральности. Такая процедура центрирования в значительной степени корректирует эффекты, связанные с “дырками” в аксептансе детектора. Рассматриваемые в настоящей диссертации объединенные геометрический аксептанс и эффективность измерений при анализе данных с использованием детектора CMS превышают 60% для значений поперечного импульса $p_T \approx 1.0 \text{ GeV}/c$ и псевдобыстроты $|\eta| < 1.0$. При $p_T < 1 \text{ GeV}/c$ значения эффективности и аксептанса заметно падают, достигая значения $\sim 40\%$ для треков частиц с $p_T \approx 0.3 \text{ GeV}/c$.

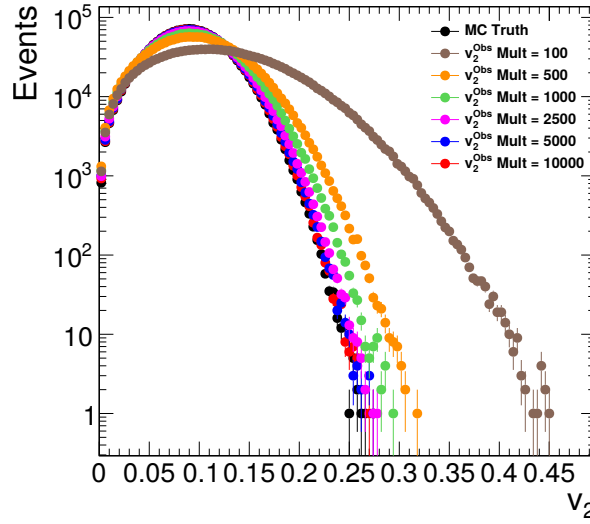


Рисунок 4.2.: Распределение плотности вероятности в Монте-Карло (МС) тесте, показывающее влияние конечной множественности частиц на наблюдаемое распределение $p(v_n^{obs})$. Статистические флуктуации уширяют распределение по сравнению с истинным $p(v_n)$, а также сдвигают среднее значение $\langle v_n \rangle$ к большему значению. Данный “разброс” увеличивается с уменьшением множественности.

4.2. Размытие наблюдаемого распределения

Измерение “истинного” пособытийного распределения эллиптического потока $p(v_n)$, отражающее динамические флуктуации, заключается в двух проблемах. Во-первых, каждое рассматриваемое событие имеет конечное число частиц, что порождает т.н. статистические флуктуации, “разбрасывающие” (“размывающие”) наблюдаемое распределение потока $p(\vec{v}_n^{obs})$ вокруг истинного распределения $p(\vec{v}_n)$. Математически такой эффект можно выразить как свертку истинного распределения с некоторой функцией отклика $p(\vec{v}_n^{obs}|\vec{v}_n)$:

$$p(\vec{v}_n^{obs}|\vec{v}_n) * p(\vec{v}_n) = p(\vec{v}_n^{obs}) \quad (4.4)$$

Таким образом, функция отклика $p(v_n^{obs}|v_n)$ представляет собой условную вероятность получить наблюдаемый вектор $\vec{v}_n^{obs}$ при истинном потоковом векторе $\vec{v}_n$. Поскольку ожидается, что статистические флуктуации имеют доминирующий вклад в наблюдаемое распределение $p(v_n^{obs})$, необходимо сделать оценку этого эффекта. Рисунок 4.2 демонстрирует тест, сделанный с помощью стандартного метода Монте-Карло, где были вычислены наблюдаемые распределения при различном числе частиц. Вначале генерировалось истинное распределение $p(v_n)$, обозначенное как “MC Truth” на рисунке, которое затем “размывается” за счет выбранных значений множественности. Как видно из рисунка, сильнее всего данный эффект выражен при меньших значениях числа частиц, и проявляется в заметном расширении распределений. Помимо этого, средние значения $\langle v_n \rangle$ сдвигаются в сторону больших величин, нежели среднее значение истинного распределения. Полученные в данном тесте распределения сходятся к истинному, когда множественность становится > 5000 , что ожидаемо в приближении к пределу бесконечной множественности частиц. В анализе данных, сделанным с помощью детектора CMS, описанный в разделе 2.3 отбор событий дает диапазон множественности от 100 до 2500.

Для того, чтобы убрать эффекты “разброса”, связанные с конечным числом частиц, возможно применить процедуру развертки, также известную как деконволюция (англ.: deconvolution, unfolding). Развертка представляет собой метод, осуществляющий обратную

свертку формулы 4.4 путем вычисления функции отклика $p(v_n^{obs}|v_n)$ и применения обратной ей матрицы к наблюдаемому распределению. Техника развертки широко используется в физике высоких энергий, ее адаптации включают в себя подход SVD [62], регуляризацию Тихонова [63] и байесовскую итеративную развертку D’Agostini [26, 64]. Последний из этих подходов был использован коллаборацией ATLAS [25] для пособытийного анализа с помощью процедуры обратной свертки флуктуаций анизотропного потока в столкновениях ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Следует отметить, что это первый и единственный раз, когда данный тип анализа потока был успешно осуществлен, до работ, обсуждаемых в настоящей диссертации. Метод анализа, рассматриваемый в данной диссертации, основан на модифицированной технике итеративной развертки D’Agostini со введенной регуляризацией, и использован для получения истинных распределений потока $p(v_n)$ как в рамках модели HYDJET++ при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ, так и в анализе экспериментальных данных детектора CMS при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. Подробное описание процедуры развертки будет дано в последующих разделах.

С другой стороны, в экспериментальных данных присутствуют непотоковые корреляции, которые также могут внести дополнительное расширение наблюдаемых распределений. Такие эффекты могут включать в себя распады резонансов, струи и др. Ожидается, что рассматриваемый метод развертки убирает эти эффекты вместе со статистическими флуктуациями, т.к. они входят как в распределение $p(\vec{v}_n^{obs})$, так и в функцию отклика $p(\vec{v}_n^{obs}|\vec{v}_n)$. Это утверждение подтверждается согласованностью между двумя методами, показанными на Рисунке 4.1, поскольку оба метода имеют различную чувствительность к непотоковым эффектам. Помимо этого, коллаборация ATLAS провела тщательное исследование с промежутком по псевдобыстроте (“ η -гар” тест) [25], которое используется для уменьшения непотоковых эффектов. Различные тесты, проведенные для установки согласованности используемого метода анализа в работах, рассматриваемых в данной диссертации, выведены в отдельный раздел (6). Тем не менее, непотоковые эффекты должны иметь лишь незначительный вклад по сравнению со статистическими флуктуациями в изучаемых диапазонах псевдобыстроты и поперечного импульса в анализе экспериментальных данных CMS ($|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 1.0$).

4.3. Определение функции отклика

Прежде чем провести процедуру развертки наблюдаемого распределения, необходимо рассчитать функцию отклика. Последовательность построения функции отклика представлена на Рисунке 4.3. Сначала “полное” наблюдаемое распределение $p(v_n^{obs})$ разделяется на два подсобытия, симметричных относительно нулевого значения псевдобыстроты: $\eta < 0$ и $\eta > 0$. Вычитая из подсобытия A подсобытие B, можно получить распределение разностей потоковых векторов подсобытий (2SE или 2-subevent разницу) $p(\vec{v}_n^{obs,a} - \vec{v}_n^{obs,b})$. Поскольку анализ проводится для симметричной системы столкновений ионов свинца, сигнал потока в таком распределении исчезает, что оставляет лишь эффекты, связанные со статистическими флуктуациями и непотоковыми корреляциями. Полученная таким образом функция распределения используется затем для вычисления функции отклика либо с помощью основанного на данных подхода, либо модельно-зависимого подхода, описанных в соответствующих подразделах 4.3.2 и 4.3.1.

Полезно также изучить форму 2SE-разницы потоковых векторов, взяв ее проекции на x и y . Рисунок 4.4 иллюстрирует такие проекции вместе с их фитированием функцией Гаусса и распределением Стьюдента, также известным как t-распределение. Слева на рисунке представлены соответствующие двумерные распределения, приведенные для самых центральных (0 – 5%) и самых периферических (55 – 60%) столкновений, исследованных в анализе данных CMS. Как видно из Рисунка 4.4, проекции хорошо описываются функ-

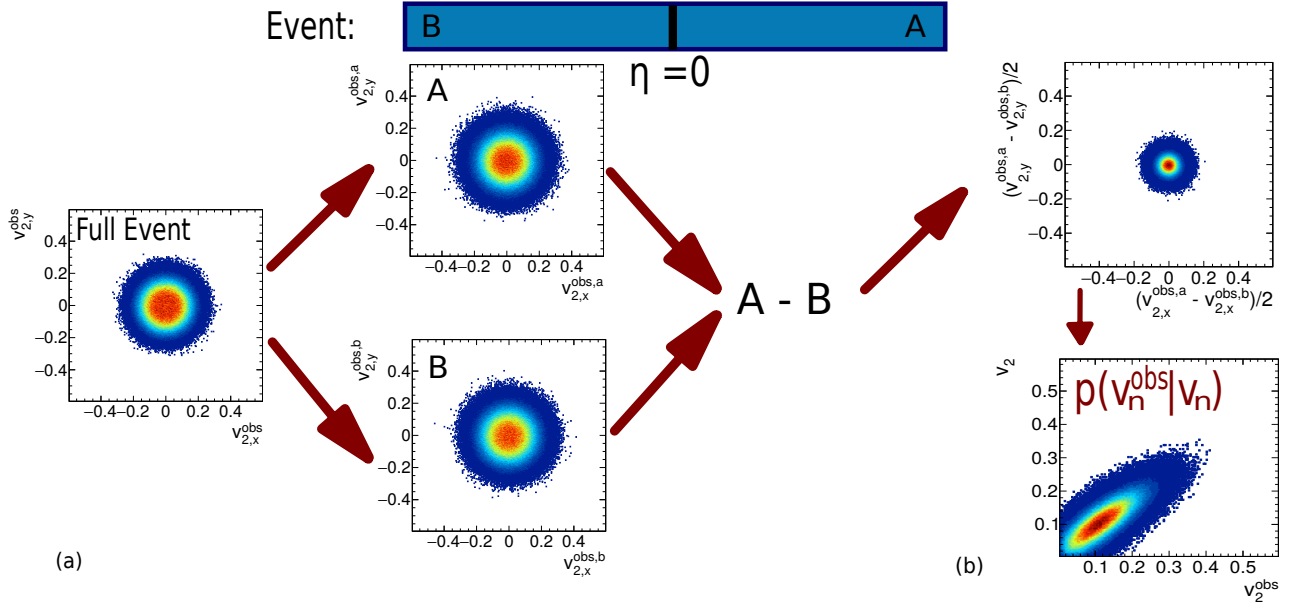


Рисунок 4.3.: Слева направо: разделение полного события распределения потокового вектора на два подсобытия, симметричных относительно $\eta = 0$; вычитание подсобытия B из подсобытия A ; преобразование распределения разницы подсобытий в функцию отклика.

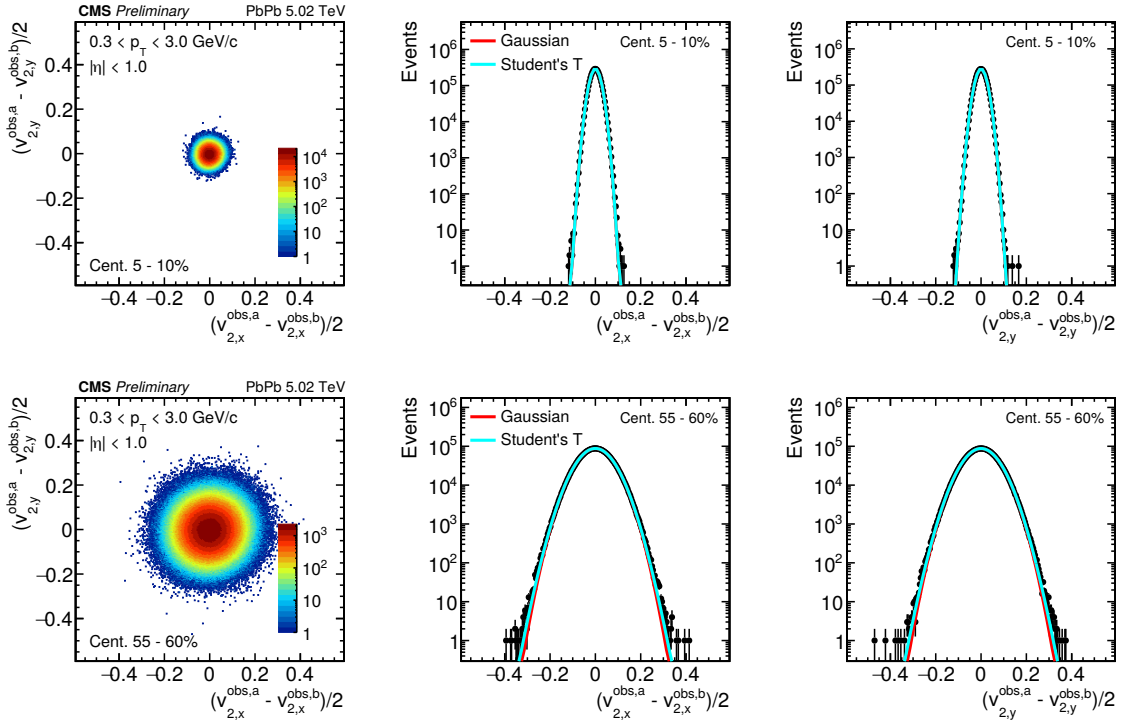


Рисунок 4.4.: Распределение разницы потоковых векторов подсобытий и его проекции на x и y , фитированные функцией Гаусса и распределением Стьюдента. Верхний ряд показывает функции в интервале центральностей 0–5%, нижний — для 55–60%.

цией Гаусса, за исключением проблемных хвостов наиболее периферических соударений. Это означает, что либо непотоковые эффекты незначительны и разброс возникает только за счет конечного числа частиц, либо число источников, отвечающих за вклад непотоковых эффектов, пропорционально множественности и они не коррелированы между двумя подсобытиями. Последнее предположение возможно в случае распадов резонансов, струй и корреляций Бозе-Эйнштейна. Дисперсии (стандартные отклонения) распределений проекций сильно зависят от количества частиц, использованных при расчете потоковых векторов подсобытия. Соответственно, дисперсия будет экспоненциально расти с уменьшающейся множественностью частиц.

Поскольку каждое из подсобытий имеет в два раза меньше треков, чем полное событие, эффекты разброса будут в них отличаться, что в свою очередь отразится в полученном распределении разницы подсобытий. Как известно из статистики и теории вероятности, для гауссовских переменных стандартное отклонение обратно пропорционально квадратному корню размера выборки. Кроме того, для распределения, полученного как разность между двумя гауссовскими переменными, дисперсия может быть выражена как $\sigma_{a-b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$. Таким образом, чтобы корректно учесть данный эффект размера выборки, необходимо преобразовать 2SE-разницу с коэффициентом 2: $p(\vec{v}_n^{obs,a} - \vec{v}_n^{obs,b}) \rightarrow p([\vec{v}_n^{obs,a} - \vec{v}_n^{obs,b}]/2)$. Преобразованное распределение разницы потоковых векторов описывает разброс, присутствующий в полном событии, и может быть использовано для построения функции отклика и соответствующей матрицы отклика одним из двух подходов.

4.3.1. Подход, основанный на модели

Данный подход строит функцию отклика, используя предположение, что распределение имеет определенную форму. Например, при анализе смоделированных спектров [HYDJET++](#), также как и в анализе данных коллаборацией [ATLAS](#) в [25], использовалась параметризация Бессель-Гаусса:

$$p(v_n^{obs}|v_n) \propto \frac{v_n^{obs}}{\delta^2} \exp\left(-\frac{(v_n^{obs})^2 + v_n^2}{2\delta^2}\right) I_0\left(\frac{v_n^{obs}v_n}{\delta^2}\right), \quad \delta = \delta_{2SE}/2, \quad (4.5)$$

где δ_{2SE} обозначает ширину одномерных распределений (проекций) разницы потоковых векторов подсобытий, как было показано на Рисунке 4.4. Альтернативно, можно использовать другую модель, например распределение Стюдента, также представленное на рисунке 4.4:

$$p(v_n^{obs}|v_n) \approx v_n^{obs} \oint \left[1 + \frac{(v_n^{obs})^2 + v_n^2 - 2v_n^{obs}v_n \cos \varphi}{\nu \delta^2}\right]^{-\frac{\nu-1}{2}} d\varphi, \quad (4.6)$$

или любую другую параметризацию. Идея использования функции Бессель-Гаусса имеет смысл, поскольку распределения проекций хорошо описываются функцией Гаусса. Однако, в экспериментальном анализе данных такой подход может быть не оправдан, поскольку невозможно заранее узнать, какую форму будет иметь функция отклика, как это может быть осуществлено в моделировании. В связи с этим корректнее использовать другой подход для построения функции отклика, — основанный на данных.

4.3.2. Подход, основанный на данных

Перепишем распределение разницы 2SE следующим образом:

$$p([\vec{v}_n^{obs,a} - \vec{v}_n^{obs,b}]/2) = p(\vec{s}) = p(\vec{v}_n^{obs} - \vec{v}_n), \quad (4.7)$$

где $\vec{s} = \vec{v}_n^{obs} - \vec{v}_n$ мы определим как “вектор разброса”, а соответствующее ему распределение $p(\vec{s})$ как “функцию разброса”. Используя $p(\vec{s})$ и некое предположение (“prior”) для $p(\vec{v}_n)$ распределения, можно построить функцию отклика. Для этого сначала выбирается случайный вектор $\vec{v}_n$ из распределения $p(\vec{v}_n)$ и случайный вектор $\vec{s}$ из функции разброса. Затем, строится новое наблюдаемое распределение из выбранных векторов: $\vec{v}_n^{obs,new} = \vec{v}_n + \vec{s}$, и заполняется матрица значениями v_n и $v_n^{obs,new}$. Важным моментом здесь является то, что при таком подходе не нужна правильная “догадка” о реальном распределении истинного потока $p(\vec{v}_n)$. В случае полного физического неведения разумно взять в качестве такого предположения равномерное распределение, и обновлять его при получении новой информации. В обсуждаемом анализе приемливо начать с измеренного наблюдаемого распределения векторов потока, особенно в центральных столкновениях, поскольку при большой множественности частиц разница между наблюдаемым и истинным распределением должна быть малой. Следует отметить, что такое построение матрицы отклика сильно зависит от статистики. В исследуемых столкновениях ионов свинца при энергиях 2.76 ТэВ и 5.02 ТэВ количество событий позволяет получить матрицу отклика с достаточно хорошей точностью. Однако, при переходе к столкновениям с меньшей энергией статистика может породить значительные погрешности.

4.4. Итеративная развертка D’Agostini

Метод итеративной развертки D’Agostini [26] широко используется в анализе экспериментальных данных. Обсуждаемый здесь пособытийный анализ анизотропного потока использует пакет RooUnfold [27] для пакета объектно-ориентированных программ ROOT [59], который численно реализует различные техники развертки. Целью такой процедуры является вычисление максимально правдоподобной оценки истинного пособытийного распределения потока посредством применения матрицы развертки, описывающей формулой:

$$M_{ij}^{iter} = \frac{A_{ji}c_i^{iter}}{\sum_{m,k} A_{mi}A_{jk}c_k^{iter}} ; \quad \hat{c}^{iter+1} = \widehat{M}^{iter}\hat{c} . \quad (4.8)$$

Здесь M_{ij}^{iter} представляет собой матрицу развертки при номере итерации $iter$, $A_{ji} = p(e_j|c_i)$ — матрица отклика между “причиной” $\hat{c}$ (в случае описываемого исследования оценки истинного распределения $p(v_n)$) и “эффекта” $\hat{e}$ (наблюдаемого распределения $p(v_n^{obs})$). При экспериментальном анализе данных работают с бинами, которые также могут быть представлены в качестве векторов и матриц. Таким образом, правая часть ур. 4.8 принимает вид:

$$\hat{p}(v_{n,i}^{iter+1}) = \sum_j \widehat{M}_{ij}^{iter} \hat{p}(v_{n,j}^{obs}) . \quad (4.9)$$

В каждой итерации вычисляется новая матрица развертки, основанная на оцененном $\hat{c}^{iter}$, и затем она используется для обновления оценки истинного распределения $\hat{c}^{iter+1}$. Нулевая итерация матрицы $\widehat{M}^0$ может быть вычислена с помощью матрицы отклика и предварительной оценки нулевой итерации $p(v_n)$. В общем случае, любое распределение можно выбрать в качестве такой оценки, однако распределение, близкое к истинному, приведет к более быстрой сходимости процедуры развертки.

На Рисунке 4.5 приведен пример пособытийного анализа с помощью техники развертки, сделанный на тестовой Монте-Карло модели. Как видно из рисунка, распределение сходится к истинному после определенного числа итераций. К сожалению, в экспериментальном анализе невозможно точно определить, когда необходимо остановить процедуру

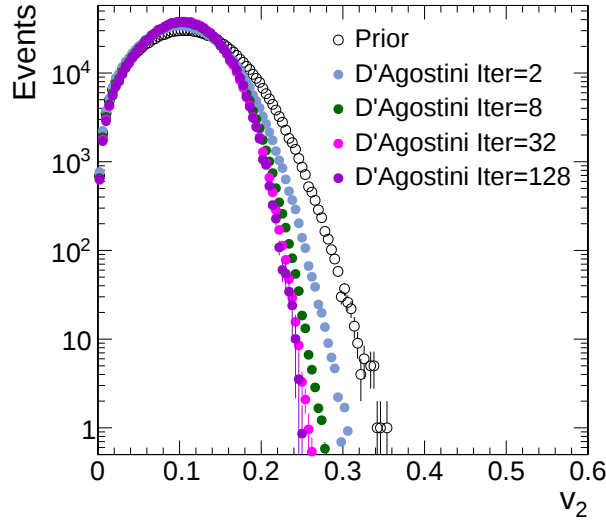


Рисунок 4.5.: Пример процедуры развертки, произведенной с различным числом итераций. Оценки нулевой итерации истинного распределения показана пустыми черными точками и совпадает с наблюдаемым распределением.

развертки и выбрать “конечное” (или “восстановленное”) распределение. В особенности этот вопрос важен в случае сильного разброса, поскольку большое количество итераций порождает нефизические осцилляции в хвостах полученных конечных распределений. С другой стороны, слишком малое число итераций не даст корректной оценки истинного распределения $p(v_n)$. Для того, чтобы подавить такие эффекты, в обсуждаемом анализе эксперимента [CMS](#) был введен параметр регуляризации, или т.н. “ранней остановки”. Альтернативный способ, который может быть использован, заключается в подборе оценки нулевой итерации, которая наиболее точно отражает поведение истинного распределения $p(v_n)$. Предложенная регуляризация осуществляется следующим образом. Распределение, полученное при каждой итерации процедуры развертки, повторно сворачивается с обратной матрицей развертки, и затем такое “пересвернутое” (“refolded”) распределение сравнивается с наблюдаемым $p(v_n^{obs})$ посредством вычисления критерия хи-квадрат (χ^2/NDF). Такой χ^2/NDF тест в последствии используется как “критерий отсечения” (cut-off criteria) для отбора и показан на Рисунке 4.6 в зависимости от числа итераций. Однако, использованный в рассматриваемом экспериментальном анализе [CMS](#) выбор критерия отбора 4.6 произволен, и может привести к искажению результатов. В связи с этим влияние выбора данного коэффициента было учтено как систематическая погрешность, что будет подробнее объяснено в конце данной главы.

Иллюстрация всей информации, получаемой в процессе пособытийного анализа с использованием метода развертки, показана на Рисунке 4.7. Интервал центральности 40 – 45% выбран для примера события средней центральности, где эффекты разброса относительно невелики, но величина флуктуаций значительна. Рисунок А представляет матрицу отклика, полученную с помощью подхода, основанного на данных. Каждая точка обозначает ассоциированную пару значений v_2 и v_2^{obs} , полученных методом, описанным в предыдущем разделе. Рисунок В иллюстрирует конечное распределение (розовые точки), вычисленное через наблюдаемое распределение (черные точки) используя матрицу отклика из рисунка А. Цвет конечного распределения $p(v_2)$ также обозначает число итераций N_{iter} , использованное до того, как был достигнут критерий отбора $\chi^2/NDF \leq 1.2$. Для того, чтобы учесть корреляции между бинами измерений, вызванными процедурой развертки и недиагональной матрицей отклика, вычисляется корреляционная матрица

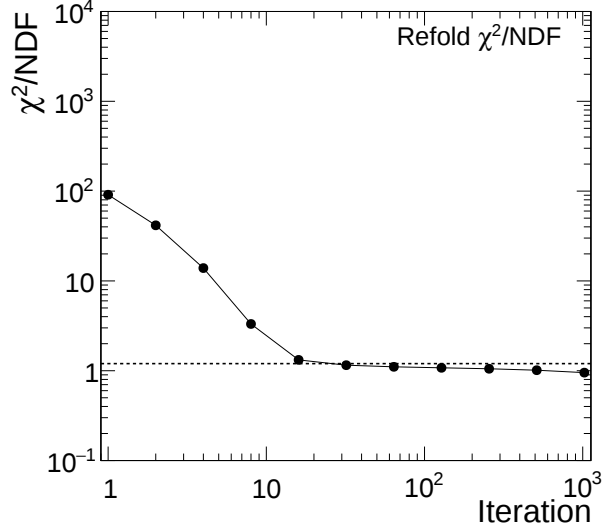


Рисунок 4.6.: χ^2/NDF тест регуляризации развертки, проводимый между “пересвернутым” и наблюдаемым распределением, в зависимости от числа итераций. Пунктиром показана “линия отсечения”.

R для конечного распределения через ковариационную матрицу C , встроенную в пакет RooUnfold для оценки распространения неопределенностей. Она показана на Рисунке С и вычисляется через преобразование [65]:

$$R = S^{-1}CS^{-1}, \quad (4.10)$$

где S — диагональная матрица, определяемая через диагональные элементы ковариационной матрицы C : $S_{ii} = \sqrt{C_{ii}}$. Каждый элемент корреляционной матрицы представляет собой коэффициент корреляции Пирсона (РСС — Pearson correlation coefficient) между бинами. В случае, когда коэффициент РСС близок к 0, два бина некоррелированы, тогда как если коэффициент близок к 1 бины сильно коррелируют. Рисунок D показывает χ^2/NDF тест между “пересвернутым” и наблюдаемым распределением в зависимости от числа итераций. Пунктирная линия обозначает “критерий отсечения” $\chi^2/NDF = 1.2$. Рисунок E представляет различными цветами “пересвернутые” распределения для выбранных значений числа итераций, при этом наблюдаемое распределение показано черными точками. В экспериментальном анализе, проделанном с помощью детектора CMS, результат также был обрезан после линии $\langle v_n \rangle + 4\sigma_{v_n}$, называемой “линией обрезания”. Такое решение позволило нам достичь дальнейшего подавления остаточных эффектов в хвостах конечных распределений.

4.5. Исследование начального состояния

Как упоминалось в главе 1, флуктуации эллиптического потока отражают отклик образованного в столкновении вещества к геометрии начальной системы, и поэтому могут предоставить понимание его фундаментальных свойств, а также дать ограничения на транспортные коэффициенты. В рамках рассматриваемого анализа это осуществляется с помощью восстановленного распределения потока $p(v_n)$.

Если эксцентриситеты начальной геометрии системы связаны с гармониками потока, восстановленное распределение $p(v_n)$ может быть использовано для оценки соответствующего ему распределения эксцентриситета $p(\varepsilon_n)$ и его характеристик. В рассматриваемом

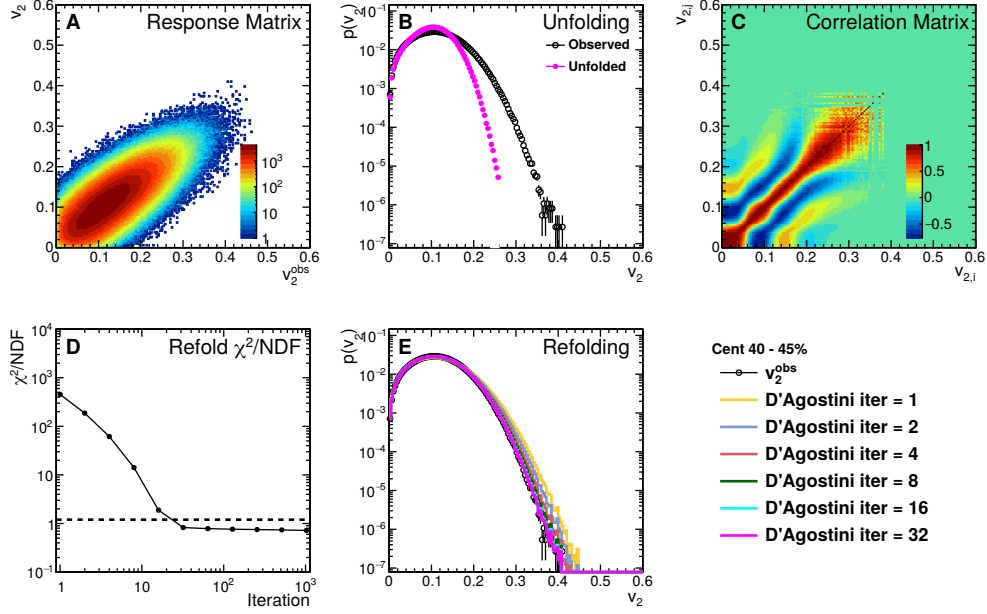


Рисунок 4.7.: Результаты процедуры развертки для событий в интервале центральности 40–45%. (A): Матрица отклика $p(\vec{v}_n^{obs}|\vec{v}_n)$. (B): Наблюдаемое (черные точки) и конечное (розовые точки) распределения $(p(v_n^{obs}), p(v_n))$. (C): Корреляционная матрица для конечного распределения. (D): χ^2/NDF между “пересвернутыми” и наблюдаемым распределениями. (E): Сравнение “пересвернутых” распределений с наблюдаемым.

исследовании мы использовали предположение о линейной пропорциональности между эксцентриситетом и гармоникой потока [29, 66–68]: $v_n = k_n \varepsilon_n$, в таком случае следующее выражение верно:

$$p(v_n) = \frac{d\varepsilon_n}{dv_n} p(\varepsilon_n)$$

$$p\left(\varepsilon_n = \frac{v_n}{k_n}\right) = k_n p(v_n) \quad (4.11)$$

Как было отмечено в главе 1, коэффициент отклика определяет транспортные свойства среды и может зависеть от таких свойств образованного вещества, как вязкость, начальная плотность и уравнения состояния. Следует иметь ввиду, что наличие существенной вязкости может нарушить линейную пропорциональность между гармониками потока и эксцентриситетом. В таком случае, необходимо учитывать нелинейные компоненты, например кубический фактор отклика: $\langle v_n \rangle = k_n \varepsilon_n + k'_n \varepsilon_n^3$. В главе 5 мы вернемся к этому вопросу при сравнении полученных значений коэффициента k_n в анализе данных CMS с теоретическими расчетами.

Уравнение 4.11 представляет уникальную возможность проверки параметризаций начального состояния. В том случае, если считается, что распределение функции вероятности эксцентриситета (например, эллиптичности) имеет определенную форму, — Бессель-Гаусса, эллиптик-степенную или какую-либо другую, — распределение потока может быть фитировано соответствующей функцией, пересчитанной через ур. 4.11. В настоящей диссертации наибольшее внимание уделяется эллиптик-степенной параметризации, определенной в разделе 1.1.3, поскольку предполагается, что она может дать корректную оценку начального состояния системы. В таком случае форма фитирующей функции для распределения потока, используя формулы 4.11 и 1.7, принимает вид:

$$p(v_n) = \frac{2\alpha v_n}{\pi k_n^2} (1 - \varepsilon_0^2)^{\alpha+1/2} \int_0^\pi \frac{(1 - (v_n/k_n)^2)^{\alpha-1} d\varphi}{(1 - \varepsilon_0(v_n/k_n) \cos \varphi)^{2\alpha+1}}, \quad (4.12)$$

где параметры α , ε_0 и k_n отражают свойства распределения эллиптичности и транспортный коэффициент между значениями эллиптичности и гармониками потока. Надежное извлечение зависимости от центральности этих переменных может обеспечить независимую оценку вязкости образующего в столкновении вещества, также как и параметров эллиптичности начальной геометрии системы.

Для функции Бессель-Гаусса эллиптичности (ур. 1.5) соответствующее распределение потока определяется в форме:

$$p(v_n) = \frac{v_n}{\delta_{v_n}^2} \exp \left[-\frac{\langle v_n \rangle^2 + \langle v_n^{\text{RP}} \rangle^2}{2\delta_{v_n}^2} \right] I_0 \left(\frac{v_n \langle v_n^{\text{RP}} \rangle}{\delta_{v_n}^2} \right). \quad (4.13)$$

Дополнительно изучить свойства начальной геометрии системы возможно через определение кумулянтов гармоник потока, что может быть сделано в рассматриваемом событийном анализе через моменты соответствующих восстановленных распределений $p(v_n)$ [13, 69]:

$$\begin{aligned} v_n \{2\}^2 &\equiv E(v_n^2), \\ v_n \{4\}^4 &\equiv -E(v_n^4) + 2E(v_n^2)^2, \\ v_n \{6\}^6 &\equiv (E(v_n^6) - 9E(v_n^4)E(v_n^2) + 12E(v_n^2)^3) / 4, \\ v_n \{8\}^8 &\equiv -(E(v_n^8) - 16E(v_n^6)E(v_n^2) - 18E(v_n^4)^2 \\ &\quad + 144E(v_n^4)E(v_n^2)^2 - 144E(v_n^2)^4) / 33, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $E(v_n^k) \equiv \int v_n^k p(v_n) dv_n$ определяет k -ый момент распределения функции вероятности $p(v_2)$.

Поскольку отношения кумулянтов потока должны следовать соответствующим отношениям кумулянтов эллиптичности [17], измерение этих наблюдаемых позволяет получить дальнейшую характеристику начальной геометрии. Из вычисленных кумулянтов потока можно также оценить значение коэффициента асимметрии по формуле [17]:

$$\gamma_1^{\text{exp}} = -6\sqrt{2}v_2 \{4\}^2 \frac{v_2 \{4\} - v_2 \{6\}}{(v_2 \{2\}^2 - v_2 \{4\}^2)^{3/2}}, \quad (4.15)$$

которая имеет хорошее согласие с теоретическим определением нормированного коэффициента асимметрии γ_1 , описанного в главе 1. Формула 4.15 получена в рамках формализма порождающих (генерирующих) функций (англ. “generating functions formalism”), где соответствующая порождающая функция для кумулянтов потока имеет вид:

$$\ln G(k) \equiv \ln \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \langle e^{\vec{k} \cdot \vec{v}_2} \rangle \right). \quad (4.16)$$

Здесь $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$ представляет собой двумерный вектор, а $\langle e^{\vec{k} \cdot \vec{v}_2} \rangle$ обозначает преобразование Фурье-Лапласа распределения $\vec{v}_2$. Кумулянт m -го порядка $v_2 \{m\}$ ($m = 2n$) в таком приближении задается m -ой компонентой разложения Тэйлора $\ln G(k)$ при $k = 0$. В первом приближении, если учесть только лидирующие компоненты разложения в $\sigma_y^2 - \sigma_x^2$,

s_1 и s_2 , мы получаем следующие выражения для кумулянтов потока:

$$v_2\{2\} = \sqrt{(\bar{v}_2)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2}, \quad (4.17)$$

$$v_2\{4\} \simeq \bar{v}_2 + \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{2\bar{v}_2} - \frac{s_1 + s_2}{(\bar{v}_2)^2}, \quad (4.18)$$

$$v_2\{6\} \simeq \bar{v}_2 + \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{2\bar{v}_2} - \frac{\frac{2}{3}s_1 + s_2}{(\bar{v}_2)^2}, \quad (4.19)$$

$$v_2\{8\} \simeq \bar{v}_2 + \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{2\bar{v}_2} - \frac{\frac{7}{11}s_1 + s_2}{(\bar{v}_2)^2}. \quad (4.20)$$

Соответственно, полученные уравнения (4.17-4.20) приводят к выражению 4.15 для коэффициента асимметрии.

4.6. Систематические погрешности

Основные источники систематических погрешностей, оцененные и учтенные в экспериментальном анализе данных с детектором CMS, можно разделить на несколько классов:

- позиция вершины (vertex position)
- “загрязнение” (pileup contamination)
- качество треков (track quality cuts)
- регуляризация процедуры развертки (unfolding regularization)
- неопределенность матрицы отклика (response matrix uncertainty)

Каждая из этих систематических погрешностей оценивалась отдельно как для бинов восстановленного распределения эллиптического потока $p(v_2)$, так и для наблюдаемых, вычисленных с помощью полученных распределений. Поскольку все изучаемые наблюдаемые (кумулянты, отношения кумулянтов, коэффициент асимметрии и параметры фита) измеряются из содержимого бинов конечного распределения $p(v_2)$, они коррелированы. Исследуя систематику этих величин отдельно, возможно подавить эффекты корреляций, что делает оценку систематических погрешностей более надежной.

Соответствующие вклады вышеупомянутых источников погрешностей представлены в таблице 4.1 для исследуемых интервалов центральности. Ниже будут описаны детали каждого из проведенных исследований.

Для того, чтобы оценить неопределенность, возникающую в связи с выбором позиции вершины z , выбранный по умолчанию диапазон вершин был разделен на два “окна” с $|z_{\text{vtx}}| < 3.0$ см и $3.0 < |z_{\text{vtx}}| < 15.0$ см (стандартный отбор событий описан в разделе 2.3). Результаты, полученные с каждой из этих выборок, сравнивались со стандартным отбором $|z_{\text{vtx}}| < 15.0$ см. Отклонения от стандартного сценария затем учитываются как систематические ошибки. Как видно из Таблицы 4.1, коэффициент асимметрии γ_1^{exp} является наименее устойчивой наблюдаемой в этом исследовании, достигая 100% погрешности в наиболее центральных столкновениях. Эта тенденция наблюдается во всех проведенных систематических тестах, что может быть объяснено сложной зависимостью от нескольких порядков кумулянтов гармоник потока (см. ур. 4.15). Чтобы изучить искажения измерений, связанные с формой распределения $p(v_n)$, восстановленные распределения из каждого диапазона вершин сначала отмасштабированы, чтобы иметь такое же среднее значение,

Источник:	Позиция вершины							
Наблюдаемая:	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	1.6	4.1	4.5	4.5	106.9	0.9	1.1	0.1
10–20%	0.7	1.2	1.3	1.3	58.7	0.2	0.2	< 0.1
20–30%	0.3	0.6	0.7	0.7	23.6	0.1	0.1	< 0.1
30–50%	0.4	0.4	0.4	0.4	10.4	0.1	0.1	< 0.1
50–60%	0.4	0.9	0.7	0.7	16.5	0.1	0.2	< 0.1
Источник:	“Загрязнение”							
Наблюдаемая:	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	0.1	0.3	0.1	0.1	27.9	0.2	0.3	< 0.1
10–20%	0.1	0.1	< 0.1	< 0.1	18.8	0.1	0.1	< 0.1
20–30%	0.1	< 0.1	< 0.1	< 0.1	9.4	< 0.1	< 0.1	< 0.1
30–50%	0.1	< 0.1	< 0.1	< 0.1	4.6	< 0.1	< 0.1	< 0.1
50–60%	0.1	< 0.1	0.1	0.1	3.1	< 0.1	< 0.1	< 0.1
Источник:	Качество треков							
Наблюдаемая:	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	1.2	2.1	2.1	2.1	20.3	0.2	0.2	< 0.1
10–20%	0.9	1.1	1.1	1.1	10.6	< 0.1	< 0.1	< 0.1
20–30%	0.6	0.7	0.6	0.6	2.5	< 0.1	< 0.1	< 0.1
30–50%	0.6	0.5	0.5	0.5	1.7	< 0.1	< 0.1	< 0.1
50–60%	0.6	0.4	0.4	0.4	3.9	< 0.1	< 0.1	< 0.1
Источник:	Регуляризация процедуры развертки							
Наблюдаемая:	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	< 0.1	0.1	< 0.1	< 0.1	5.3	0.1	0.2	< 0.1
10–20%	< 0.1	0.1	0.2	0.2	20.1	0.1	0.1	< 0.1
20–30%	< 0.1	< 0.1	< 0.1	< 0.1	1.8	< 0.1	< 0.1	< 0.1
30–50%	< 0.1	0.2	0.2	0.2	4.6	< 0.1	< 0.1	< 0.1
50–60%	0.1	1.4	1.4	1.4	17.4	0.2	0.2	< 0.1
Источник:	Неопределенность матрицы отклика							
Наблюдаемая:	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	0.2	1.7	2.4	2.5	81.8	0.6	0.6	< 0.1
10–20%	0.1	0.5	0.7	0.7	51.9	0.2	0.2	< 0.1
20–30%	0.1	0.3	0.3	0.3	21.7	0.1	0.1	< 0.1
30–50%	0.2	0.2	0.3	0.3	13.4	0.1	0.1	< 0.1
50–60%	0.7	1.5	1.2	1.1	26.2	0.2	0.2	< 0.1

Таблица 4.1.: Вклады каждого из источников систематических погрешностей в общую оценку, представленные как проценты.

как и соответствующие распределения стандартного отбора. Затем вычисляются корреляции между бинами относительно отбора по умолчанию и максимальное отклонение учитывается как погрешности формы распределения. Такой метод используется в каждом из систематических исследований для оценки влияния на форму $p(v_n)$.

Потенциальное искажение от событий “остаточного загрязнения” (residual pileup) проверяется путем изменения силы фильтра совместимости вершины с кластером (“vertex-cluster compatibility filter”), который обрезает нижний 1% слабо совместимых вершин. Для оценки систематической погрешности выбранного отбора, фильтр был перенастроен на обрезание 2% вершин. Отношение такой выборки к изначальному результату затем вычисляется для каждой наблюдаемой, и найдено незначительным для кумулянтов и их отношений. Измерение коэффициента асимметрии распределения $p(v_2)$ имеет лишь небольшие погрешности в этом тесте для большинства интервалов центральности, за исключением самых центральных событий, где они растут экспоненциально.

Исследование качества треков связано с искажениями, возникающими от “фальшивых” (fake), или неверно определенных, треков частиц. Чтобы оценить влияние таких эффектов, критерии отбора качества трека, описанные в разделе 2.3 и обобщенные в Таблицах 2.1 и 2.2, были изменены с целью либо понизить, либо повысить вероятность неправильно-

го определения трека. Таблица 4.2 показывает такие выборки, определенные как “свободный” (“loose”) и “плотный” (“tight”) отборы. Вычисленные отношения каждой из введенных выборок к стандартному отбору представляют систематические погрешности теста и найдены наиболее стабильными для отношений кумулянтов со значениями менее 0.1% для всех интервалов центральности.

Отбор пискельных треков	Свободный	Плотный
$ d_z/\sigma_{d_z} $	< 10.0	< 6.0
$\chi^2/dof/N_{layers}$	< 18.0	< 9.0
Отбор общих треков	Свободный	Плотный
$ d_z/\sigma_{d_z} $	< 5.0	< 2.0
$ d_0/\sigma_{d_0} $	< 5.0	< 2.0
σ_{p_T}/p_T	< 0.1	< 0.05

Таблица 4.2.: Отборы в исследовании систематики качества треков

Как было упомянуто в предыдущих разделах, критерий отсечения для регуляризации процедуры развертки может внести погрешности в измерения. Если развертка остановлена слишком рано, результат будет смещен в сторону первоначального выбора нулевой итерации истинного распределения. Если же число итераций слишком велико, восстановленное распределение будет содержать нефизические осцилляции. Для оценки систематической погрешности, связанной с регуляризацией, значение выбранного параметра отсечения χ^2/NDF варьируется от 1.0 до 2.0, и затем вычисляется отношение результатов таких выборок к стандартному отбору.

Неопределенность, связанная с вычислением матрицы отклика, оценивается путем использования двух методов, описанных в предыдущих разделах: подхода, основанного на модели, и подхода, основанного на данных. Последний из них является стандартным в описываемом анализе экспериментальных данных. Тем не менее, разброс хорошо описывается гауссовской функцией, поэтому ожидается, что оба метода должны дать аналогичные результаты. Отклонения между двумя подходами затем учитываются как систематическая погрешность.

Следует отметить, что вследствие конечного числа событий, используемого для построения матрицы отклика, должна присутствовать неопределенность в отдельных матричных элементах. Оценка распространения неопределенностей, предложенная в первоначальной работе D’Agostini [26], недооценивает данную погрешность, поскольку реализация не учитывает тот факт, что каждая новая оценка истинного распределения начинает зависеть от матрицы отклика после первой итерации. Однако, пакет RooUnfold включает в себя корректную оценку распространения неопределенностей матрицы отклика следуя методу, предложенному в работе [27]. Такие погрешности формы добавляются к полученным оценкам формы распределений в предыдущих систематических исследованиях, чтобы получить полноценную оценку неопределенности восстановленных распределений потока. Тем не менее, следует отметить, что эти погрешности не влияют на моменты распределений $p(v_2)$ и наблюдаемые, вычисленные с помощью этих моментов.

Для учета погрешности, связанной с трековой эффективностью, была добавлена дополнительная систематическая погрешность в размере 0.5% на значения кумулянтов гармоник потока. Полная систематическая погрешность, вычисленная путем суммирования вклада от каждого источника в квадратуре, приведена в Таблице 4.3 для всех исследованных наблюдаемых и для каждого изучаемого интервала центральности. Был изучен ряд других возможных источников потенциального систематического искажения результатов, но они были найдены незначительными.

Наблюдаемая:	Полная систематическая погрешность							
	$v_2\{2\}$	$v_2\{4\}$	$v_2\{6\}$	$v_2\{8\}$	γ_1^{exp}	$v_2\{6\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{4\}$	$v_2\{8\}/v_2\{6\}$
0–10%	2.1	4.6	5.0	5.0	112.5	1.0	1.2	0.1
10–20%	1.2	1.7	1.8	1.8	65.7	0.2	0.3	< 0.1
20–30%	0.8	1.0	1.1	1.1	25.7	0.1	0.1	< 0.1
30–50%	0.9	0.8	0.9	0.9	12.9	0.1	0.1	< 0.1
50–60%	0.9	1.8	1.8	1.8	24.8	0.2	0.3	0.1

Таблица 4.3.: Полная систематическая погрешность для исследуемого диапазона центральностей для каждой наблюдаемой, представленная как проценты.

5. Результаты

В первом разделе данной главы я рассмотрю основные результаты, полученные в процессе событийного анализа в рамках модели [HYDJET++](#), тогда как второй раздел будет посвящен результатам анализа экспериментальных данных, полученных с помощью детектора [CMS](#).

5.1. Результаты анализа в рамках модели [HYDJET++](#)

В данном исследовании [HYDJET++](#) был использован для генерации столкновений ионов свинца при энергии в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ в трех интервалах центральности: 5–10%, 20–25% and 35–40%. Рассматривались заряженные адроны с поперечным импульсом $p_T > 0.5$ ГэВ/с и псевдобыстротой $|\eta| < 2.5$, для возможности прямого сравнения с результатами анализа данных, сделанного коллаборацией [ATLAS](#) [25].

Следует отметить, что сгенерированные в модели событийные распределения потока нельзя напрямую сравнивать с соответствующими экспериментальными распределениями, полученными при анализе данных методом, описанным в главе 4. Поскольку любая модель может иметь флуктуации в конечном состоянии, связанные со статистическими или непотоковыми эффектами, то подобные модельные результаты должны проходить через аналогичную процедуру развертки. Единственная разница заключается в том, что модели представляют собой “идеальный” детектор, т.е. эффекты, связанные с эффективностью и аксептансом детектора, не должны учитываться. Таким образом, следуя определению, введенному в разделе 4.1, имеем наблюдаемый потоковый вектор: $\vec{v}_n^{obs} \equiv \vec{v}_n^{raw}$. При этом следует отметить, что произвольная модель, генерирующая ансамбли частиц, будет иметь значительный вклад от статистических флуктуаций, связанных с конечным числом частиц.

В случае используемого генератора событий [HYDJET++](#) статистические флуктуации имеют доминирующую роль. На Рисунке 5.1 показаны событийные распределения эллиптического ($p(v_2)$, верхний ряд) и триангулярного ($p(v_3)$, нижний ряд) потока, полученные с помощью смоделированных событий в исследованных интервалах центральности. Наблюдаемые распределения $p(v_n^{obs})$ представлены синим пунктиром, тогда как распределения после проведения процедуры развертки $p(v_n)$ показаны черной гистограммой. Соответствующие экспериментальные распределения [ATLAS](#) из работы [25] обозначены красными точками. Видно, что расширение распределения функции вероятности присутствует в каждом интервале центральности рассмотренных событий [HYDJET++](#). Однако, стандартная версия генератора не дает приемлимого описания экспериментальных данных по флуктуациям: хотя средние значения $\langle v_n \rangle$ близки к соответствующим средним значениям из данных, дисперсия σ_{v_n} конечных распределений модели намного меньше, чем экспериментальная. Количественное сравнение средних значений, дисперсий и значения относительных флуктуаций $\sigma_{v_n}/\langle v_n \rangle$ приведено в таблицах 5.1, 5.2. В данных таблицах значения приведены без погрешностей, поскольку ошибки измерений меньше последней значимой цифры. Тем не менее, стоит отметить, что в стандартной версии модели присутствуют небольшие динамические флуктуации, появляющиеся за счет вклада радиального потока, хотя их недостаточно для удовлетворительного описания данных.

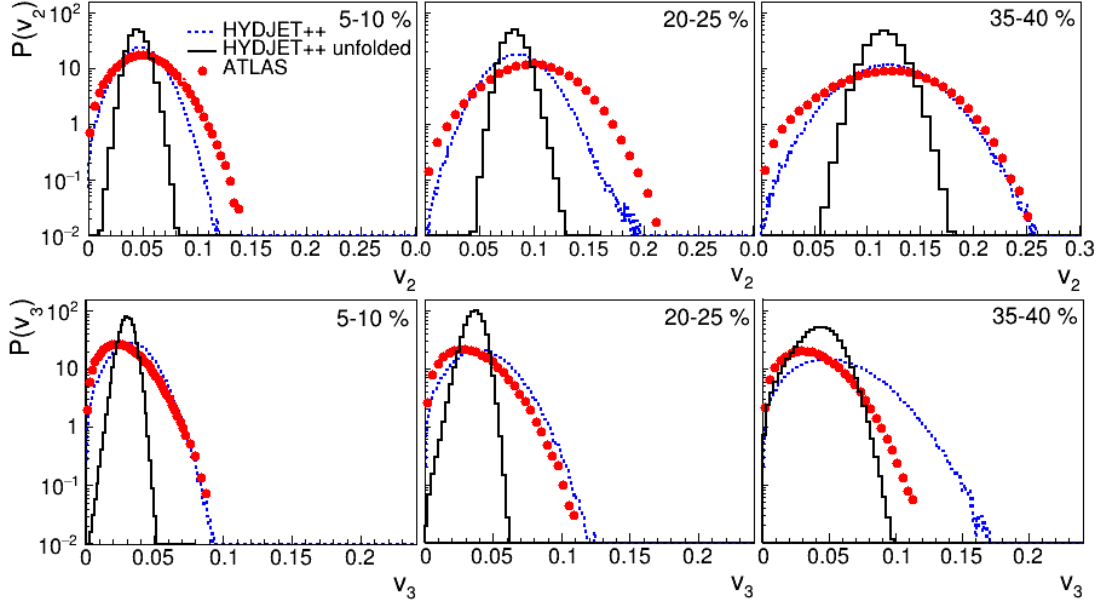


Рисунок 5.1.: Пособытийные распределения эллиптического $p(v_2)$ (верхний ряд) и триангулярного $p(v_3)$ (нижний ряд) потока в стандартной версии модели [HYDJET++](#) в интервалах центральности 5 – 10% (слева), 20 – 25% (центр) и 35 – 40% (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры, красные точки обозначают данные [ATLAS](#) из [25].

Результат, показанный на Рисунке 5.1, указывает на то, что для описания экспериментальных результатов по флуктуациям потока необходимо ввести некоторую модификацию модели [HYDJET++](#). Такая модификация была осуществлена посредством введения Гауссовского распределения по параметрам пространственной анизотропии ϵ и ϵ_3 (определение данных параметров рассмотрено в разделе 3.2). Поскольку значения стандартных параметров $\epsilon(b)$ и $\epsilon_3(b)$ фиксированы при заданном прицельном параметре b , они были взяты как средние значения распределения, тогда как ширины распределений $p(\epsilon)$, $p(\epsilon_3)$ были выбраны пропорциональными их “стандартным” значениям:

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon^{old}, \quad \langle \epsilon_3 \rangle = \epsilon_3^{old} \quad (5.1)$$

$$\sigma_\epsilon = C_\epsilon \epsilon^{old}, \quad \sigma_{\epsilon_3} = C_{\epsilon_3} \epsilon_3^{old} \quad (5.2)$$

Таким образом, введены два дополнительных параметра C_ϵ и C_{ϵ_3} , представляющие собой относительные флуктуации. Эти параметры были установлены, чтобы описать соответствующие пособытийные распределения $p(v_2)$ и $p(v_3)$, для одного интервала центральности, и остаются постоянными для всех остальных центральностей ($\sigma_\epsilon / \langle \epsilon \rangle = const$ независимо от b). Такая модификация оказалась достаточной, чтобы успешно включить динамические флуктуации потока в модели [HYDJET++](#), как видно из верхних рядов Рисунков 5.2 и 5.3. Хвост восстановленного распределения $p(v_2)$, полученного с новым набором “размытых” параметров модели для центральности 35 – 40%, немного шире, чем у наблюдаемого в эксперименте распределения. Это может быть объяснено двояко: либо введенные параметры должны иметь зависимость от центральности, либо необходимо использовать негауссовскую функцию для дополнительного “размытия”.

Коллаборация [ATLAS](#) представила результаты анализа вплоть до интервала центральности 60 – 65%, с указанием на то, что при переходе к более периферичным столкновениям, отклонения распределений от гауссовской функции становятся более заметными.

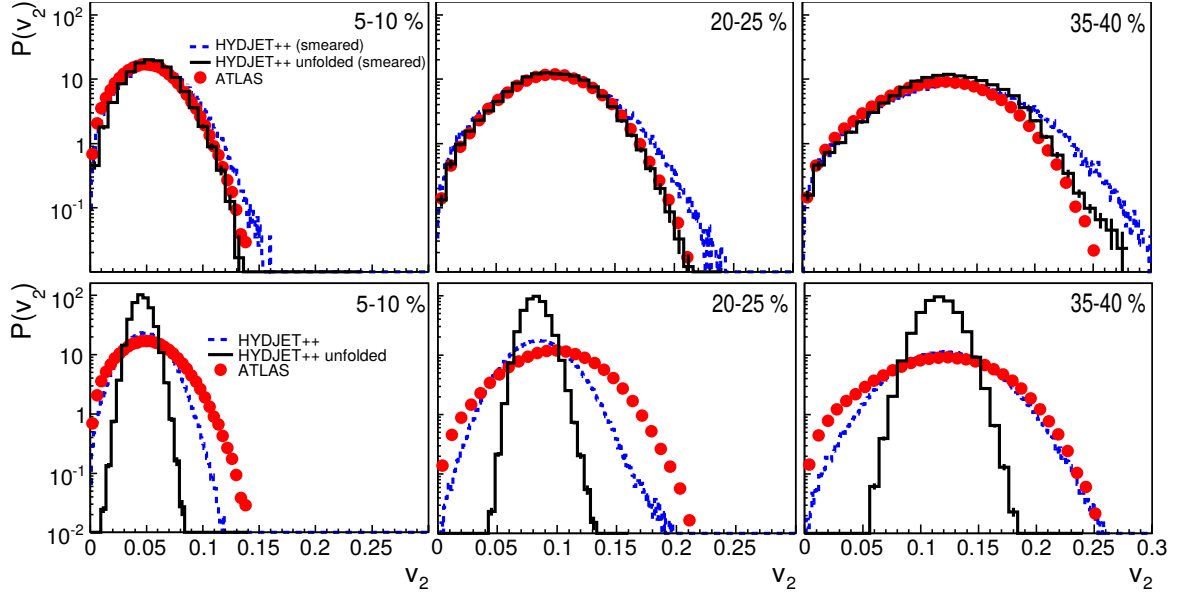


Рисунок 5.2.: Пособытийные распределения эллиптического $p(v_2)$ потока в модели [HYDJET++](#) в интервалах центральности 5 – 10% (слева), 20 – 25% (центр) и 35 – 40% (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры. Красные точки обозначают данные [ATLAS](#) из [25]. Нижний/верхний ряд показывает результаты стандартной/модифицированной версии [HYDJET++](#).

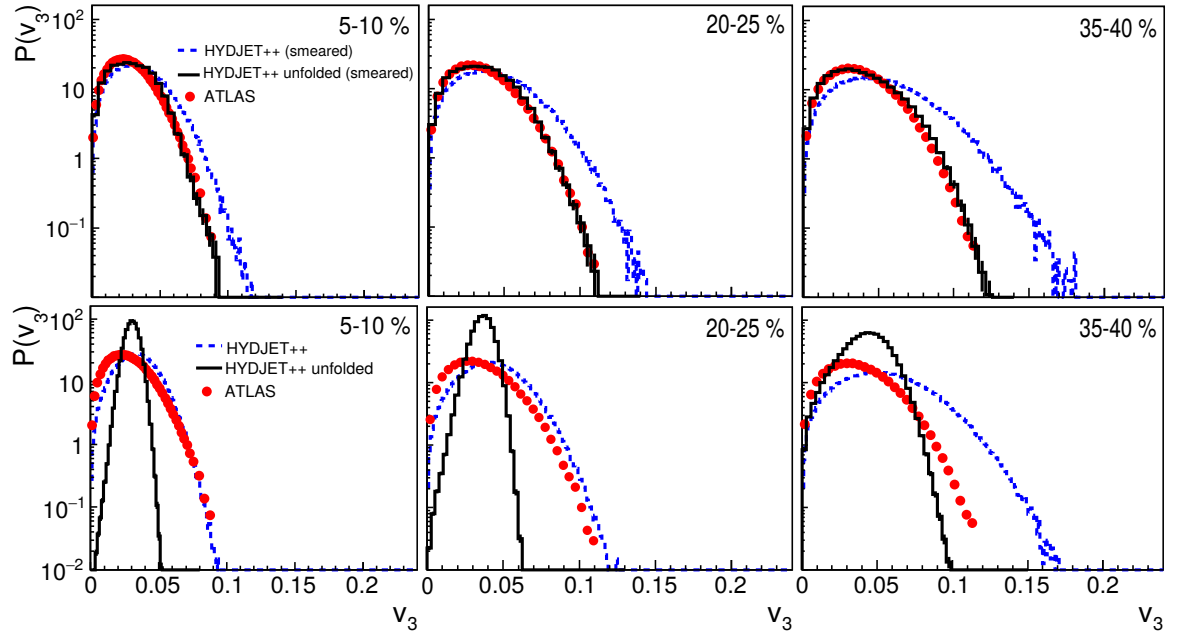


Рисунок 5.3.: Пособытийные распределения эллиптического $p(v_3)$ потока в модели [HYDJET++](#) в интервалах центральности 5 – 10% (слева), 20 – 25% (центр) и 35 – 40% (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры, красные точки обозначают данные [ATLAS](#) из [25]. Нижний/верхний ряд показывает результаты стандартной/модифицированной версии [HYDJET++](#).

5. Результаты

	Centrality	5 – 10%	20 – 25%	35 – 40%
ATLAS	$\langle v_2 \rangle$	0.0522	0.0976	0.1186
	σ_{v_2}	0.0226	0.0330	0.0422
	$\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$	0.433	0.338	0.356
HYDJET++	$\langle v_2 \rangle$	0.0489	0.0853	0.1213
	σ_{v_2}	0.0170	0.0231	0.0353
	$\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$	0.347	0.271	0.291
HYDJET++ unfolded	$\langle v_2 \rangle$	0.0460	0.0823	0.1163
	σ_{v_2}	0.0081	0.0095	0.0147
	$\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$	0.176	0.116	0.126
HYDJET++ (smeared)	$\langle v_2 \rangle$	0.0580	0.0999	0.1309
	σ_{v_2}	0.0240	0.0371	0.0483
	$\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$	0.414	0.371	0.369
HYDJET++ unfolded (smeared)	$\langle v_2 \rangle$	0.0552	0.0971	0.1267
	σ_{v_2}	0.0199	0.0320	0.0408
	$\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$	0.361	0.330	0.322

Таблица 5.1.: Средние значения $\langle v_2 \rangle$, дисперсии σ_{v_2} и отношения $\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$ для распределений эллиптического потока [HYDJET++](#) модели и [ATLAS](#) данных [25] в интервалах центральности 5 – 10%, 20 – 25% и 35 – 40%.

Поскольку генератор [HYDJET++](#) работает достаточно надежно только до центральности 40 – 45%, необходима дальнейшая настройка параметров, чтобы сравниться с последним бином центральности в данных [ATLAS](#). Модификация, введенная в данном случае, касается двух параметров: $\epsilon = 0.14$ и $\delta = 0.25$, тогда как в стандартной версии они имели значения $\epsilon = 0.16$ и $\delta = 0.38$. Рисунок 5.4 показывает, что в этом случае модельные результаты [HYDJET++](#) дают хорошее описание наблюдаемых экспериментальных распределений. Функция Бессель-Гаусса (ур. 4.13) была использована для фитирования полученного конечного распределения, при этом видно, что она не может описать наблюдаемый смоделированный спектр. Это указывает на то, что присутствующие в модели внутренние флуктуации искажают начальные гауссовские функции параметров анизотропии.

Последнее исследование, проведенное в рамках генератора [HYDJET++](#), посвящено параметризации распределения эллиптического потока $p(v_2)$ с помощью эллиптик-степенной функции, что дает возможность оценить изначальные распределения эллиптичности $p(\epsilon_2)$ (см. Рисунок 5.5). Фитирование было выполнено в приближении линейного отклика ($v_2 \sim \epsilon_2$) для двух интервалов центральности: 20 – 25% и 35 – 40%. В случае рассматриваемой модели данное предположение линейности дает хорошее описание как для эллиптического, так и для треугольного потока. Помимо этого, сравнение полученных параметров фитирования с соответствующими параметрами, полученными в переанализе [29] данных [ATLAS](#) приведено в таблице 5.3.

Таким образом, введение в двух-компонентную модель [HYDJET++](#) внутренних динамических флуктуаций позволило количественно описать распределения плотности вероятности потока, полученные в экспериментальном анализе данных [ATLAS](#) столкновений ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ.

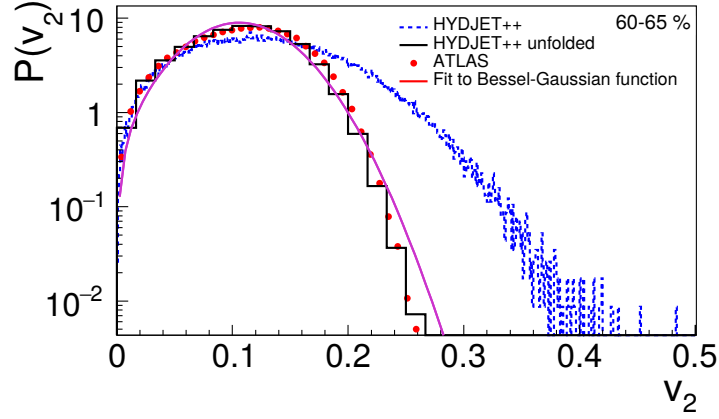


Рисунок 5.4.: Распределение эллиптического потока ($p(v_2)$) в интервале центральности 60–65%. Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные в [HYDJET++](#) спектры. Красные точки обозначают данные [ATLAS](#) из [25]. Фиолетовая кривая показывает фит конечного распределения с помощью функции Бессель-Гаусса (ур. 4.13).

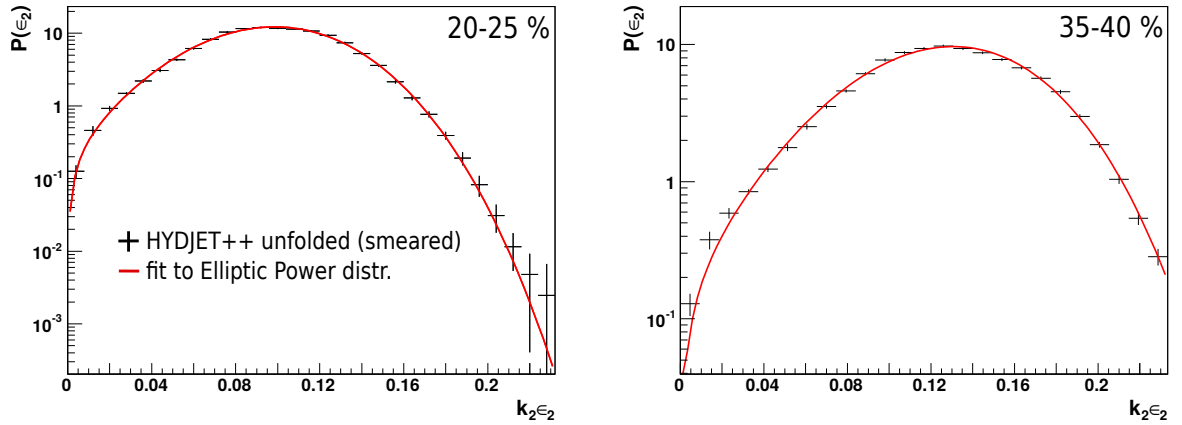


Рисунок 5.5.: Распределения эллиптического потока ($p(v_2)$) в модели [HYDJET++](#) (черные точки), фитированные эллиптик-степенной параметризацией согласно ур. 1.7 (красные кривые) для интервалов центральности 20–25% (слева) и 35–40% (справа).

5. Результаты

	Centrality	5 – 10%	20 – 25%	35 – 40%
ATLAS	$\langle v_3 \rangle$	0.0281	0.0344	0.0373
	σ_{v_3}	0.0147	0.0178	0.0192
	$\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$	0.522	0.518	0.513
HYDJET++	$\langle v_3 \rangle$	0.0341	0.0428	0.0555
	σ_{v_3}	0.0139	0.0185	0.0268
	$\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$	0.408	0.432	0.482
HYDJET++ unfolded	$\langle v_3 \rangle$	0.0304	0.0363	0.0425
	σ_{v_3}	0.0059	0.0067	0.0142
	$\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$	0.195	0.184	0.334
HYDJET++ (smeared)	$\langle v_3 \rangle$	0.0350	0.0438	0.0527
	σ_{v_3}	0.0178	0.0225	0.0276
	$\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$	0.509	0.514	0.524
HYDJET++ unfolded (smeared)	$\langle v_3 \rangle$	0.0297	0.0356	0.0387
	σ_{v_3}	0.0148	0.0180	0.0203
	$\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$	0.499	0.504	0.526

Таблица 5.2.: Средние значения $\langle v_3 \rangle$, дисперсии σ_{v_3} и отношения $\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$ для распределений триангулярного потока **HYDJET++** модели и **ATLAS** данных [25] в интервалах центральности 5 – 10%, 20 – 25% и 35 – 40%.

	Centrality	20 – 25%	35 – 40%
ATLAS (reanalysis in [29])	α	56 ± 6	24 ± 3
	ε_0	0.25 ± 0.02	0.31 ± 0.08
	k_2	0.40 ± 0.02	0.35 ± 0.01
HYDJET++ (smeared and unfolded)	α	48 ± 7	35 ± 3
	ε_0	0.25 ± 0.02	0.30 ± 0.01
	k_2	0.40 ± 0.02	0.36 ± 0.02

Таблица 5.3.: Параметры фитирования распределения $p(v_2)$ эллиптик-степенной параметризацией (ур. 1.7) для **HYDJET++** модели и переанализа [29] данных **ATLAS** [25].

5.2. Результаты анализа данных в рамках эксперимента CMS

Результаты исследования в рамках анализа экспериментальных данных детектора **CMS** были получены с помощью событийного анализа на основе процедуры развертки итеративным методом D’Agostini, с использованием нового способа регуляризации (см. главу 4). С помощью детектора **CMS** был проведен отбор данных, описанный в разделе 2.3. Исследовались события в 5%-центральных бинах диапазона центральности 0 – 60%, содержащие треки заряженных частиц с $0.3 < p_T < 3.0$ и $|\eta| < 1.0$, полученные в столкновениях ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ. На Рисунке 5.6 представлены полученные после процедуры развертки распределения эллиптического потока $p(v_2)$ (полные черные точки) и соответствующие наблюдаемые распределения $p(v_2^{obs})$ (пустые черные точки) для трех интервалов центральности: 15 – 20%, 30 – 35% и 55 – 60%, чтобы продемонстрировать уширение распределений за счет вклада статистических флуктуаций, увеличивающееся при переходе к более периферическим столкновениям. Линия “усечения” ($\langle v_n \rangle + 4\sigma_{v_n}$) показана синими стрелками. Фитирование, выполненное с использованием двух параметризаций

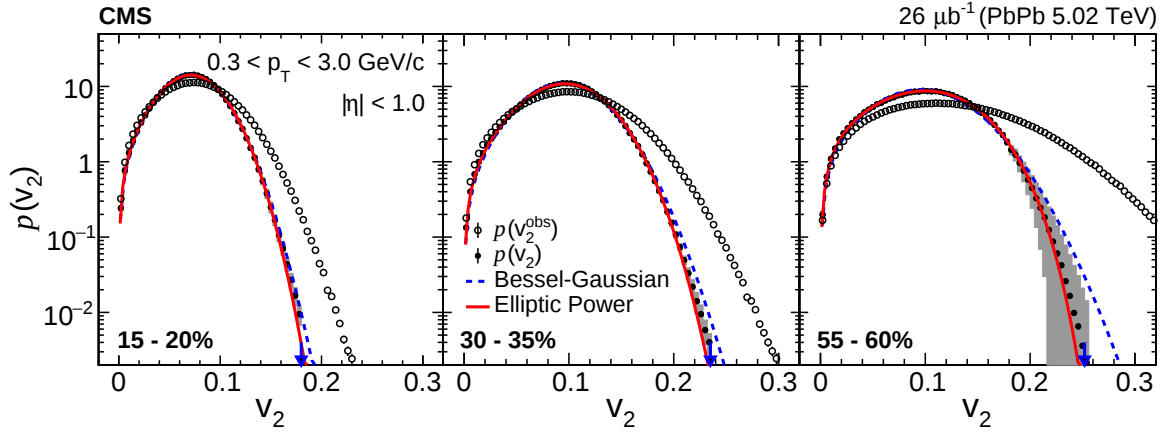


Рисунок 5.6.: Наблюдаемые $p(v_2^{obs})$ (пустые точки) и конечные $p(v_2)$ (полные точки) распределения эллиптического потока, полученные в экспериментальном анализе данных CMS столкновений ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ для трех интервалов центральности: 15–20%, 30–35% и 55–60%. Фитирование $p(v_2)$ с помощью эллиптик-степенной (ур. 4.12) и Бессель-Гаусса (ур. 4.13) параметризаций представлено красной и синей кривой, соответственно.

— эллиптик-степенной (красная кривая) и Бессель-Гаусса (синяя кривая), — также показано на Рисунке 5.7 для всего диапазона центральностей: 15–20%, 25–30%, 35–40%, 45–50%, 55–60%. Серые полосы на обоих рисунках представляют собой систематические и статистические погрешности конечных распределений $p(v_2)$. Верхний правый рисунок 5.7 иллюстрирует тест максимального соответствия χ^2/NDF для каждой из использованных параметризаций, в зависимости от центральности столкновения. Помимо этого, на каждой из картинок приведены значения параметров фитирования, представленные здесь как проценты (кроме параметра α).

Как видно из Рисунка 5.7, фит с помощью эллиптик-степенной параметризации успешно описывает экспериментально измеренные распределения во всем рассмотренном диапазоне центральностей, тогда как параметризация Бессель-Гауссовой функцией описывает данные хуже с увеличением значения центральности. Наблюдаемый эффект согласуется с присутствием негауссовских флуктуаций в начальной геометрии системы, поскольку эллиптик-степенная параметризация естественным образом включает в себя конечное значение коэффициента асимметрии распределения эллиптичности, тогда как в случае Бессель-Гауссовской функции коэффициент асимметрии равен нулю. Как было предварительно найдено L. Уан и его коллегами в работе [29], фитирование эллиптик-степенной функцией не удастся в наиболее центральных столкновениях, где распределения функции $p(v_2)$ становятся очень близки к форме Бессель-Гаусса, и достигается особый предел $\alpha \gg 1$, $\varepsilon_0 \ll 1$. Аналогичная ситуация наблюдалась в данном анализе, в связи с чем мы не приводим фитированные распределения для центральности $< 15\%$.

Зависимость от центральности полученных параметров фитирования k_2 , ε_0 и α эллиптик-степенной параметризации представлены на Рисунке 5.8 черными точками. Как и на предыдущих рисунках, серым отмечены статистические и систематические погрешности. Из рисунка видно, что коэффициент отклика k_2 и параметр ε_0 имеют достаточно слабую зависимость от центральности. Параметр α резко возрастает с переходом к самым центральным соударениям, как это и ожидается из определения функции. Показано сравнение экспериментально полученных результатов с параметрами, полученными в процессе гидродинамического моделирования в работе [29]. Данные теоретические предсказания были получены с использованием моделей начального состояния Glauber и IP-Glasma [70,

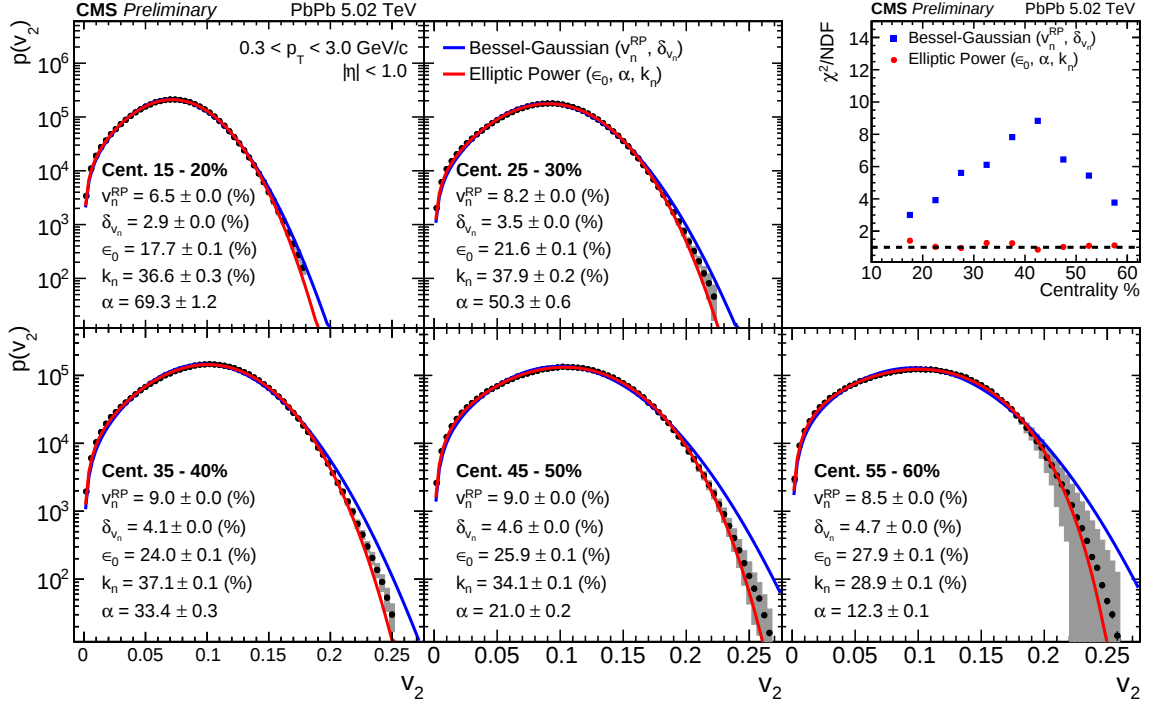


Рисунок 5.7.: Аналогично рисунку 5.6, но для всего диапазона центральностей. Верхняя правая картинка иллюстрирует тест максимального соответствия χ^2/NDF для каждой параметризации. Значения параметров фитирования для каждого интервала центральности представлены как проценты.

71] для оценки ϵ_0 и α , и значения вязкости $\eta/s = 0.19$ для вычисления коэффициента отклика k_2 . Данные теоретические расчеты позволяют качественно описать наблюдаемое в данных поведение параметров, однако экспериментально полученное значение ϵ_0 имеет слишком слабую зависимость от центральности, нежели в моделях, в то время как значение параметра α из данных завышено по сравнению с модельным вычислением. Эти отличия могут указывать на необходимость учета нелинейных компонент отклика, поскольку это изменит вид фитирующей функции и, в свою очередь, величину коэффициента отклика k_2 и параметров эллиптичности ϵ_0 и α . Значения полученных экспериментально параметров (с выделенными статистическими ошибками) также показаны в Таблице 5.4 и представляют собой первую экспериментальную оценку параметров эллиптичности начальной системы, не зависящую от моделей начального состояния. Рисунок 5.9 представляет сравнение полученных в настоящей работе параметров k_2 , ϵ_0 и α для столкновений ионов свинца при энергии 5.02 ТэВ, измеренных с помощью детектора CMS, с соответствующими параметрами, полученными в переанализе [29] данных ATLAS [25] по столкновениям PbPb при энергии 2.76 ТэВ. Следует отметить, что погрешности параметров в упомянутом переанализе были оценены приблизительно, используя доступные погрешности экспериментальных данных ATLAS для средних значений $\langle v_2 \rangle$, дисперсий σ_{v_2} и относительных флуктуаций $\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$. Несмотря на это, измеренные параметры для обеих энергий имеют схожее поведение.

Для сравнения потоковых флуктуаций при различных энергиях столкновения, Рисунок 5.10 иллюстрирует распределения $p(v_2)$ в интервале центральности 30–35%, полученные в эксперименте CMS для столкновений ионов свинца при энергии 5.02 ТэВ с $|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$ в интервале центральности 30–35%, и полученные в анализе ATLAS [25] при энергии 2.76 ТэВ и $|\eta| < 2.5$, $0.5 < p_T < 1.0$. Заметные отличия наблюдаются в особенности

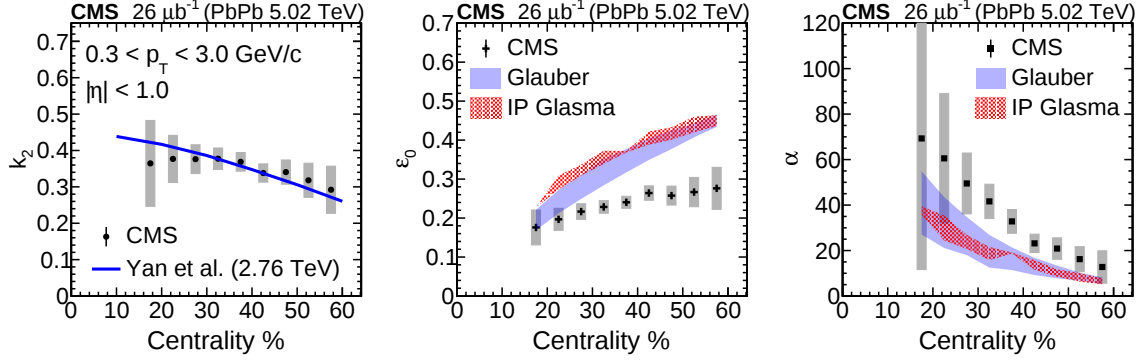


Рисунок 5.8.: Зависимость от центральности параметров фитирования эллиптической функцией конечных распределений $p(v_2)$, полученных в эксперименте CMS. Синяя сплошная кривая на левом рисунке показывает теоретическую оценку с $\eta/s = 0.19$ из [29]. На центральном и правом рисунке показаны вычисления с помощью моделей Glauber (синяя полоса) и IP-Glasma (красная полоса) из работы [29].

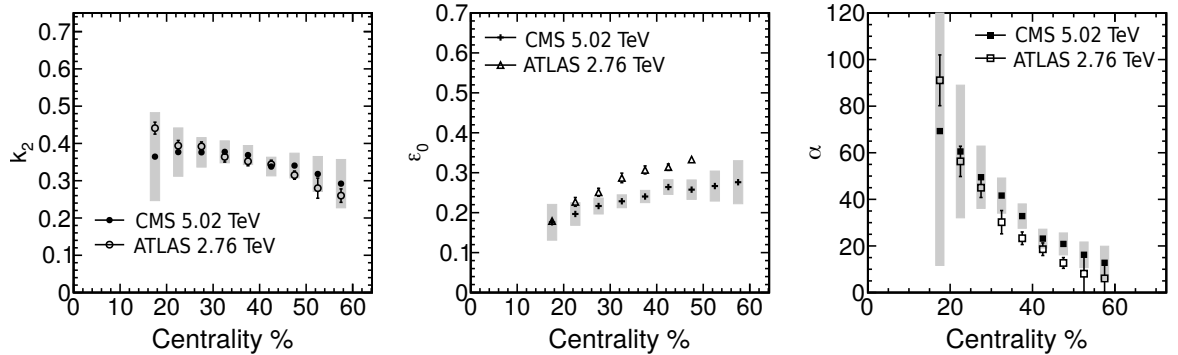


Рисунок 5.9.: Зависимость от центральности параметров фитирования эллиптической функцией конечных распределений $p(v_2)$. Черными полными символами представлены результаты эксперимента CMS, полученные в столкновениях PbPb при энергии 5.02 ТэВ, при этом серыми полосами обозначены систематические погрешности измерений. Пустые символы обозначают значения, полученные в переанализе [29] данных ATLAS [25] по столкновениям PbPb при энергии 2.76 ТэВ.

5. Результаты

Centrality	α	k_n	ε_0
15 – 20%	69.3 ± 1.2	0.3646 ± 0.0029	0.1759 ± 0.0014
20 – 25%	60.5 ± 0.9	0.3768 ± 0.0023	0.1967 ± 0.0012
25 – 30%	49.5 ± 0.6	0.3761 ± 0.0019	0.2166 ± 0.0011
30 – 35%	41.6 ± 0.4	0.3774 ± 0.0017	0.2285 ± 0.0010
35 – 40%	32.8 ± 0.3	0.3688 ± 0.0014	0.2404 ± 0.0009
40 – 45%	23.2 ± 0.2	0.3380 ± 0.0010	0.2641 ± 0.0007
45 – 50%	20.9 ± 0.2	0.3406 ± 0.0010	0.2576 ± 0.0007
50 – 55%	16.2 ± 0.1	0.3181 ± 0.0008	0.2666 ± 0.0006
55 – 60%	12.8 ± 0.1	0.2921 ± 0.0007	0.2762 ± 0.0005

Таблица 5.4.: Параметры фита эллиптик-степенной функцией (ур. 4.12) конечных распределений $p(v_2)$ анализа данных CMS для всех рассмотренных интервалов центральности. Приведены только статистические ошибки.

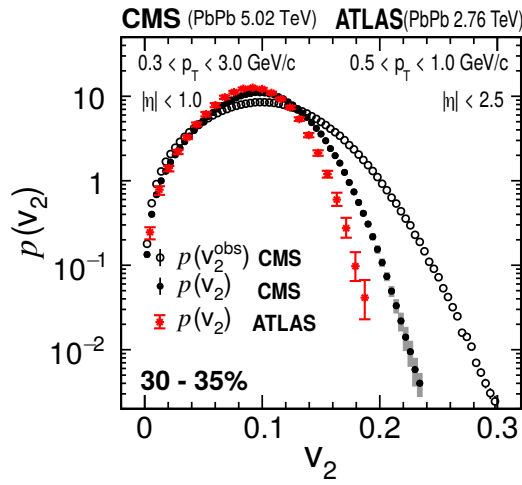


Рисунок 5.10.: Распределения $p(v_2)$, полученные в эксперименте CMS для столкновений ионов свинца при энергии 5.02 ТэВ с $|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$ в интервале центральности 30 – 35%. Наблюдаемые распределения показаны пустыми точками, конечные распределения - полными черными точками. Для сравнения представлены конечные распределения, полученные в анализе ATLAS [25] при энергии 2.76 ТэВ и $|\eta| < 2.5$, $0.5 < p_T < 1.0$.

в хвостах конечных распределений, что может указывать на зависимость флуктуаций потока от кинематических диапазонов энергии, поперечного импульса и псевдобыстроты. Для более точного вывода необходимо провести исследование в рамках одного и того же эксперимента для дифференциального потока $v_2(p_T, \eta)$ и разных энергий столкновения.

Кумулянты $v_2\{m\}$, вычисленные через моменты распределений функции вероятности $p(v_2)$ используя ур. 4.14, представлены на Рисунке 5.11. Как и на предыдущих рисунках раздела, серым отмечены статистические и систематические погрешности измерений. Наблюдения приблизительного равенства между кумулянтами высших порядков (например, [19, 20]) нельзя опровергнуть только из этого рисунка. Однако, измеренные отношения кумулянтов, представленные на Рисунке 5.12, однозначно показывают их “расщепление” в периферических бинах центральности. Полученное поведение кумулянтов ($v_2\{4\} > v_2\{6\} > v_2\{8\}$) дает дополнительное указание на негауссовские эффекты флуктуаций эллиптичности. Рассматриваемый анализ позволил впервые достичь максимальной точности (порядка 0.1%) в измерении отношения $v_2\{8\}/v_2\{6\}$. Теоретическое предска-

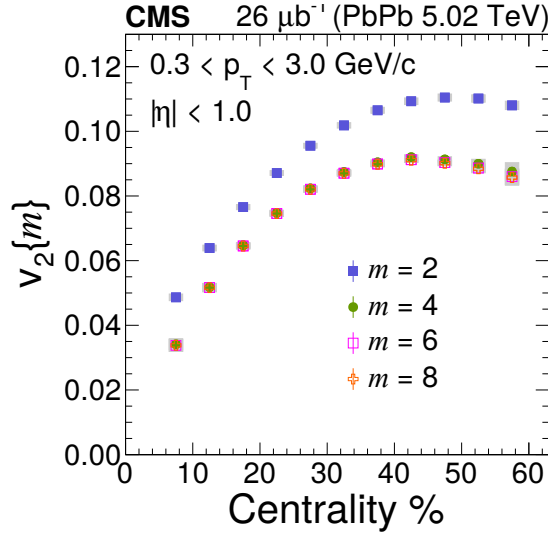


Рисунок 5.11.: Кумулянты $v_2\{m\}$ эллиптического потока, полученные из моментов распределений $p(v_2)$. Серые полосы отмечают статистические и систематические погрешности измерений.

ние из работы [17] для отношения $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ представлено цветной полосой. Данная оценка была получена для энергии 2.76 ТэВ используя пособытийное гидродинамическое моделирование с начальным состоянием по модели Glauber, со значением коэффициента отклика $k = 0.21$ и вязкости $\eta/s = 0.08$. Согласие между экспериментальным результатом при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ и теоретическими расчетами для $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ можно объяснить тем, что для отношений кумулянтов потока (также как и для значения коэффициента асимметрии) не ожидается значительных различий между этими энергиями. Это следует из предположения о зависимости отношений кумулянтов потока от соответствующих отношений кумулянтов эллиптичности [17], и того, что теория предсказывает незначительные изменения кумулянтов эксцентриситета начального состояния при переходе между этими энергиями [72]. Помимо этого, Рисунок 5.13 показывает сравнение результатов анализа CMS при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ с анализом данных ATLAS при 2.76 ТэВ, где рассматривались частицы с $0.5 < p_T < 20.0$ и $|\eta| < 2.5$. Несмотря на различия в кинематическом диапазоне исследованных спектров частиц, а также разные используемые методы анализа, наблюдается хорошее соответствие между двумя экспериментальными результатами.

Рисунок 5.14 представляет измеренное значение нормированного коэффициента асимметрии γ_1^{exp} , вычисленного по формуле 4.15. Гидродинамическая оценка из работы [17] показана цветной полосой и найдена в соответствии с экспериментально измеренным коэффициентом. Найденное отрицательное значение коэффициента асимметрии для центральных $> 20\%$ поддерживает теоретическое ожидание негауссовских эффектов в начальной системе, ведущих к появлению отрицательной асимметрии распределения эллиптичности.

Дополнительно получены оценки двумерного распределения эллиптик-степенной функции $p(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ (ур. 1.6), используя конечные распределения $p(v_2)$ анализа экспериментальных данных CMS в интервалах центральности 25–30% и 55–60%. Результаты показаны в верхнем ряду Рисунка 5.15, в то время как контурные проекции двумерного распределения представлены в нижних картинках. Из рисунка хорошо виден переход с изменением пространственной формы распределения от двумерного гауссовского к эллиптик-степенному. В то же время, заметно проявляется асимметрия при приближении ε_x к 1.

Таким образом, выполнен пособытийный анализ азимутальной анизотропии частиц в столкновениях ионов свинца при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ в эксперименте CMS. Впервые экспери-

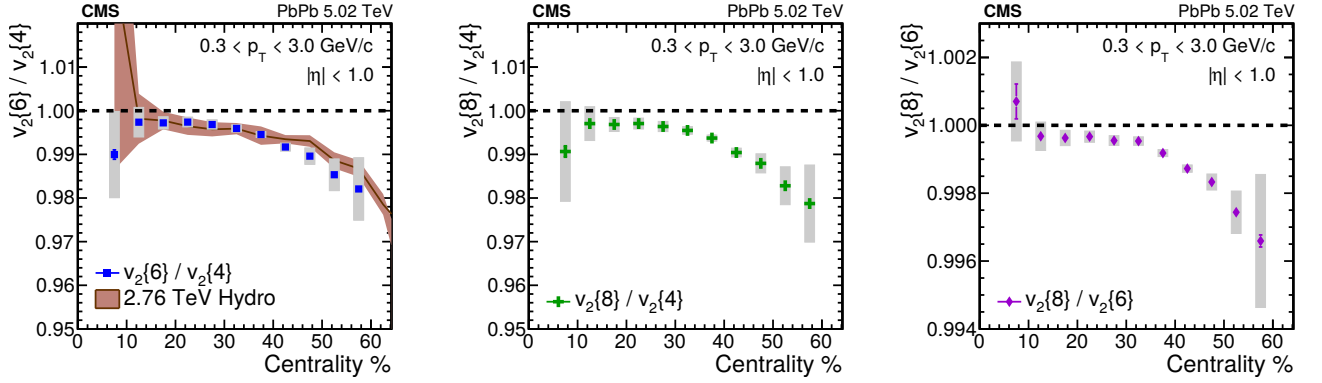


Рисунок 5.12.: Отношения кумулянтов высокого порядка эллиптического потока, полученных из моментов распределений $p(v_2)$. Серые полосы отмечают статистические и систематические погрешности измерений. Предсказание из гидродинамической модели для отношения $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ при энергии 2.76 TeV из [17] показано коричневой полосой.

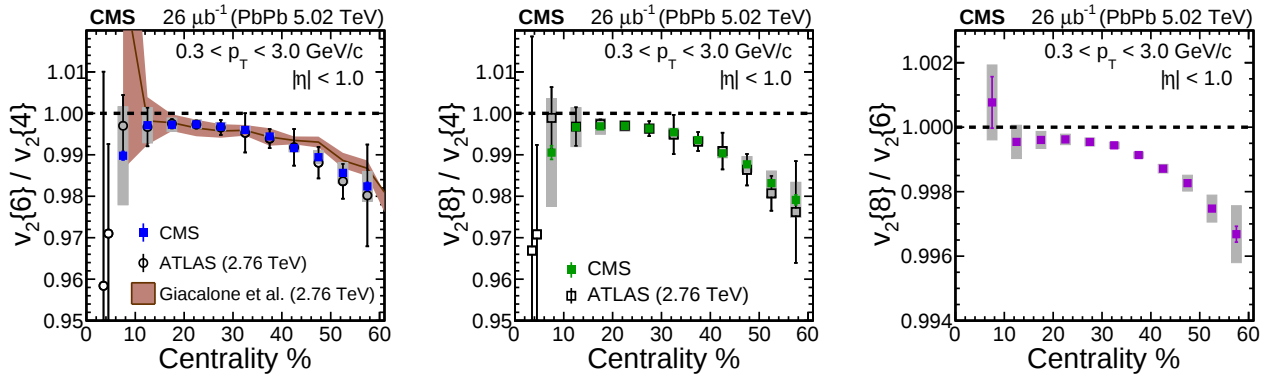


Рисунок 5.13.: Аналогично Рисунку 5.12. Отношения кумулянтов $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ и $v_2\{8\}/v_2\{4\}$, полученные коллаборацией ATLAS в столкновениях при энергии 2.76 TeV [20] представлены для сравнения с измеренными отношениями в эксперименте CMS при энергии 5.02 TeV. Погрешности измерений ATLAS представляют собой квадратичную сумму статистических и систематических погрешностей.

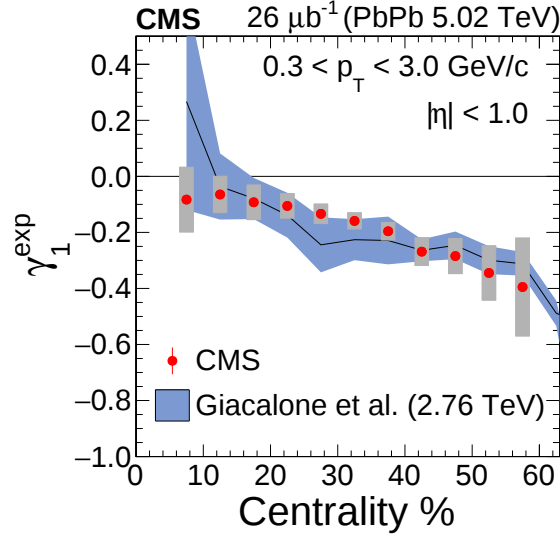


Рисунок 5.14.: Зависимость коэффициента асимметрии γ_1 , вычисленного через кумулянты эллиптического потока по формуле 4.15 в анализе экспериментальных данных CMS. Гидродинамическая оценка из работы [17] показана синей полосой. Систематические и статистические погрешности отмечены серым.

ментально измерены независимые от модельных предположений распределения функции вероятности гармоник потока $p(v_2)$ при энергии 5.02 ТэВ, исключая статистические и непотоковые флуктуации. Получены параметры эллиптичности начального состояния области перекрытия ядер свинца с предложенной обобщенной параметризацией функции распределения эллиптичности.

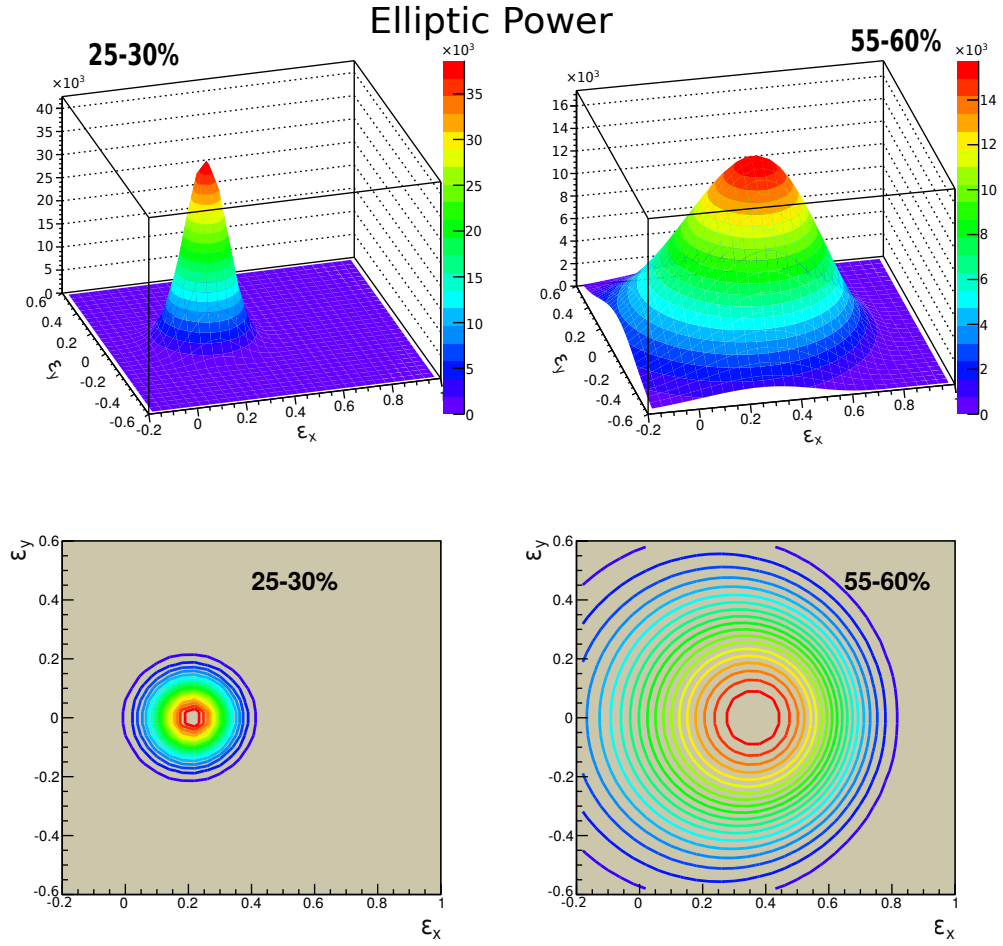


Рисунок 5.15.: Двумерное распределение $p(\epsilon_x, \epsilon_y)$ (ур. 1.6) эллиптик-степенной параметризации, полученное из конечные распределения $p(v_2)$ анализа экспериментальных данных [CMS](#) в интервалах центральности 25 – 30% и 55 – 60%. Нижние картинки представляют контурные проекции двумерных распределений.

6. Обсуждение

6.1. Развитие метода пособыйтийного анализа с применением процедуры развертки

Для полноценного изучения метода развертки были проведены многочисленные исследования, которые показали, что данная процедура эффективно убирает как статистические флуктуации, так и непотоковые корреляции. Наиболее наглядными тестами настоящей работы является анализ трех смоделированных спектров для одного и того интервала центральности: содержащих только поток, только непотоковые эффекты, и поток + непотоковые эффекты. Такое моделирование было сделано в рамках генераторов событий [HYDJET++](#) и [HIJING](#). Согласно описанию в разделе 3.2, для генератора событий [HYDJET++](#) такое разделение не составляет проблемы и осуществляется путем изменения одного параметра (подключения/отключения жесткой или мягкой компоненты). Модель [HIJING](#), с другой стороны, не включает в себя эффекты коллективного анизотропного потока (т.е. она является чисто непотоковой моделью). Поточковые эффекты можно добавить путем процедуры, называемой “Flow afterburner”, которая вводит дополнительную ротацию азимутального угла частиц для получения p_T -зависимого (а также зависящего от центральности) потока v_2 . Описанное исследование влияния поточковых и непоточковых эффектов на пособыйтийный анализ было проведено для двух энергий столкновения $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ, используя те же кинематические диапазоны по поперечному импульсу и псевдобыстроте, что были использованы в анализе экспериментальных данных [CMS](#): $|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$. Результаты показали, что процедура развертки эффективно убирает непотоковые эффекты в смоделированных спектрах частиц. В дополнение к этому, была протестирована чувствительность к непотоковым корреляциям метода многочастичных корреляций по вычислению кумулянтов в сравнении с рассматриваемым методом пособыйтийного анализа на основе развертки. Данный тест также был проведен с использованием вышеупомянутых генераторов событий и показал, что в обоих случаях наблюдаются отличия в значениях кумулянтов, вычисленных двумя различными методами, если в смоделированных спектрах присутствуют непотоковые эффекты. При этом результаты, получаемые при проведении анализа на “чистом потоке” не дает различий. Рисунок 6.1 показывает пример такого теста, сделанный в рамках модели [HYDJET++](#) для интервала центральности 35 – 40%. Слева показаны результаты, полученные с использованием полного смоделированного спектра (поток + непотоковые эффекты), тогда как правый рисунок представляет результаты вычислений кумулянтов из смоделированного спектра чистого потока. Нижние рисунки представляют отношение значений кумулянтов, полученных методом многочастичных корреляций к кумулянтам из пособыйтийного анализа. Аналогичный тест в рамках генератора событий [HIJING](#) показан на Рисунке 6.2. Левый рисунок представляет результаты полного смоделированного спектра (поток + непотоковые эффекты), средний обозначает только непотоковые эффекты, тогда как правый показывает результаты чистого потока. Результаты, полученные методом многочастичных корреляций (через Q-кумулянты) показаны красными точками. Синие точки обозначают результаты пособыйтийного анализа, а черным показано истинное значение, отвечающее вручную введенному распределению потока в модель [HIJING](#).

6. Обсуждение

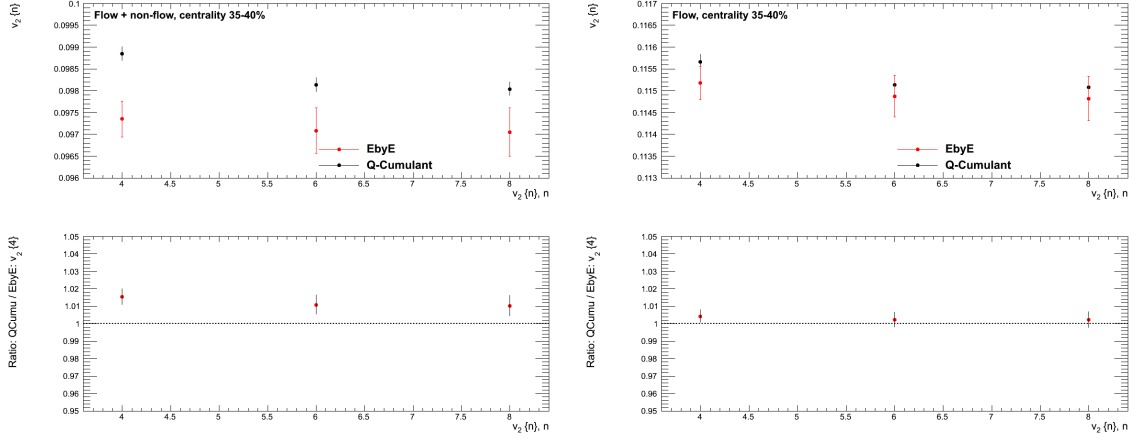


Рисунок 6.1.: Исследование, проведенное в рамках модели [HYDJET++](#) по чувствительности кумулянтов эллиптического потока $v_2\{n\}$, полученных методом подсобытийного анализа на основе развертки, и с помощью многочастичных корреляций по методу Q-кумулянтов, к непотоковым эффектам. Приведены результаты оценки для центральности 35 – 40%.

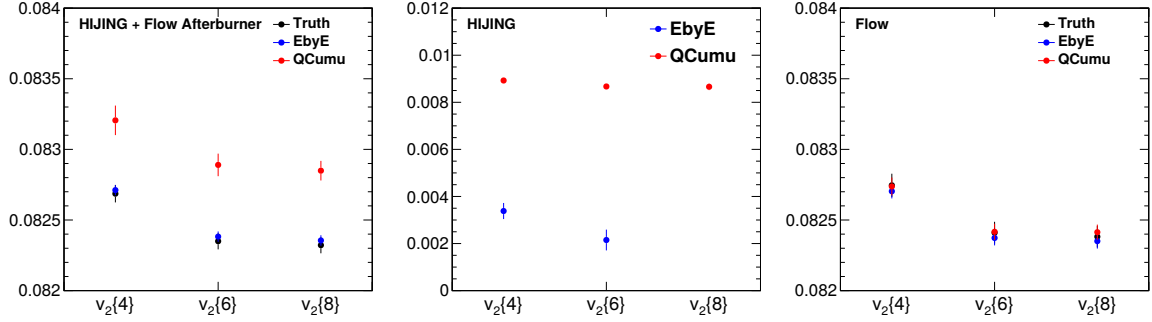


Рисунок 6.2.: Исследование, проведенное в рамках модели [HIJING](#) по чувствительности кумулянтов эллиптического потока $v_2\{n\}$, полученных методом подсобытийного анализа на основе развертки, и с помощью многочастичных корреляций по методу Q-кумулянтов, к непотоковым эффектам.

Как видно из рисунков 6.1 и 6.2, в случае чистого потока результаты обоих методов согласуются, тогда как для полного смоделированного спектра наблюдаются различия. В то же время, анализ с помощью генератора [HIJING](#) показывает, что подсобытийный анализ с применением процедуры развертки эффективно убирает непотоковые эффекты, и позволяет получить “истинное” значение. Необходимо отметить, что при анализе спектров, сгенерированных только из непотоковых эффектов, процедура развертки не сходится. Это происходит по той причине, что итеративная развертка пытается восстановить нулевой сигнал потока, — распределение с бесконечно малым средним значением и практически нулевой дисперсией. В связи с этим, точки на среднем рисунке 6.2 для являются приближительными и стремятся к нулю.

Помимо этого, одним из наиболее важных вопросов является зависимость подсобытийного метода анализа с применением процедуры развертки от формы истинного распределения. Для оценки такого влияния в анализе, проведенном в рамках модели [HYDJET++](#), было использовано равномерное распределение (“ступенька”) параметров анизотропии в том же интервале, что и во введенной модификации (см. раздел 5): $\pm\sigma_\epsilon$. Выбор интервала в таком виде обеспечивает распределение с тем же средним значением и той же шириной,

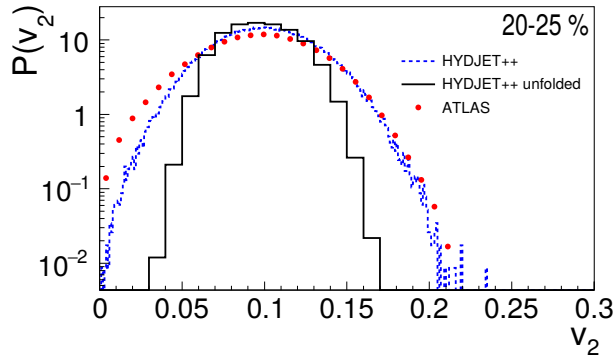


Рисунок 6.3.: Распределение эллиптического потока $p(v_2)$ в интервале центральности 20 – 25% в модели [HYDJET++](#), полученное с равномерным распределением параметров анизотропии ϵ и δ . Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры. Красные точки обозначают данные [ATLAS](#) из [25].

что и изначальное распределение. Результат проведенного теста представлен на Рисунке 6.3 для эллиптического потока $p(v_2)$ в интервале центральности 20 – 25%, где наблюдаются наибольшие по величине флуктуации. Удивительно, что наблюдаемое распределение потока, полученное с такими параметрами анизотропии, получилось довольно близким к данным, за исключением низких значений v_2 . Восстановленное методом развертки распределение, однако, воспроизводит введенное равномерное распределение прямоугольной формы, при этом кривизна плеч может быть объяснена внутренними флуктуациями модели за счет радиального потока. Такой тест показывает не только надежность процедуры развертки, но также подтверждает предположение о чувствительности используемого метода анализа к заданному “истинному” распределению.

6.2. Стандартный метод анализа многочастичных кумулянтов

В недавней работе коллаборации [ALICE](#) [73] был проведен анализ на основе многочастичных корреляций частиц, использующий так называемый метод Q-кумулянтов [6]. В этом анализе авторы измерили многочастичные Q-кумулянты для каждого события, и затем применили стандартную процедуру усреднения по событиям, для того чтобы уменьшить статистические флуктуации. Это было осуществлено используя скорректированное значение множественности заряженных частиц в качестве веса. Все полученные наблюдаемые были вычислены в 1%-ых бинах центральности, после чего интегрированы, если этого требовала недостаточная статистика измерений. Коллаборация [ALICE](#) привела в работе ряд наблюдаемых, которые были изучены нами с помощью пособытийного анализа анизотропного потока на основе процедуры развертки в экспериментальных данных [CMS](#) (см. главу 5).

Рисунок 6.4 показывает слева значения кумулянтов $v_2\{m\}$ эллиптического потока ($m = 2, 4, 6, 8$), полученных коллаборацией [ALICE](#) в анализе столкновений ионов свинца при энергиях 2.76 ТэВ и 5.02 ТэВ в кинематических диапазонах $|\eta| < 0.8$, $0.2 < p_T < 3.0$. С переходом к более высокой энергии столкновения наблюдается увеличение значений кумулянтов потока, при этом также наблюдается приблизительная пропорциональность между кумулянтами высокого порядка. На правом рисунке 6.4 показано сравнение результатов коллаборации [ALICE](#) с полученными нами кумулянтами в эксперименте [CMS](#). Различия, наблюдаемые между двумя результатами, могут быть объяснены как отличия-

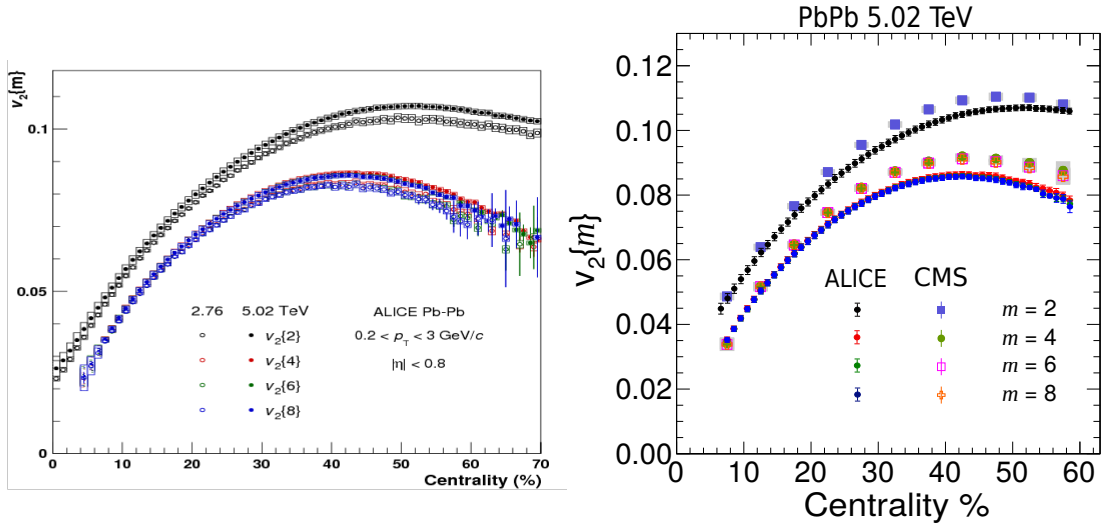


Рисунок 6.4.: (Слева) Кумулянты $v_2\{m\}$ эллиптического потока, полученные в анализе многочастичных корреляций частиц коллаборацией ALICE для энергий столкновения 2.76 ТэВ и 5.02 ТэВ в кинематических диапазонах $|\eta| < 0.8$, $0.2 < p_T < 3.0$ [73]. (Справа) Сравнение кумулянтов $v_2\{m\}$ из работы ALICE с вычисленными из моментов распределений $p(v_2)$ кумулянтами в анализе данных CMS. Результаты CMS получены при $|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$.

ми в кинематических диапазонах (как упоминалось в предыдущих разделах, анализ CMS был проведен при $|\eta| < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$), так и разными методами анализа.

Рисунок 6.5 показывает аналогичное сравнение полученных в обоих анализах коэффициентов асимметрии γ_1^{exp} . Как видно из рисунка, рассматриваемая наблюдаемая согласуется как между анализами данных ALICE и CMS, так и теоретическими оценками. Однако, результаты анализа многочастичных корреляций ALICE имеют заметно большие погрешности по сравнению с приведенными результатами CMS методом подсобытийного анализа потока на основе процедуры развертки. Такая же ситуация наблюдается для отношений кумулянтов высоких порядков.

Следует отметить наиболее важную разницу в двух подходах. Подсобытийный анализ с процедурой развертки вычисляет экспериментально истинные распределения анизотропного потока, которые затем могут сравниваться с теоретическими расчетами, или же использоваться для вычисления их характеристик через соответствующие моменты полученных распределений функции вероятности. Таким образом, подсобытийный анализ позволяет проверить теорию, без использования каких-либо предположений о форме распределений потока. Метод многочастичных корреляций с физической точки зрения совершает обратное: вычисляются оценки кумулянтов анизотропного потока, являющиеся характеристиками (моментами) подсобытийных распределений. Соответственно, из измеренных кумулянтов можно оценить форму подсобытийного распределения, если взять априори модельное предположение. Это означает, что данный метод не позволяет сделать прямых сравнений с теорией, и необходимо тестировать каждое предположение. Помимо этого, чувствительность метода многочастичных корреляций к непотоковым эффектам остается нерешенным вопросом. Как было показано в предыдущем разделе, моделирование дает различные результаты для наблюдаемых кумулянтов потока, если присутствуют непотоковые корреляции. С другой стороны, активно развивается перспективное направление, — методы трех- и четырех-подсобытий для уменьшения вкладов непотока в многочастичные кумулянты.

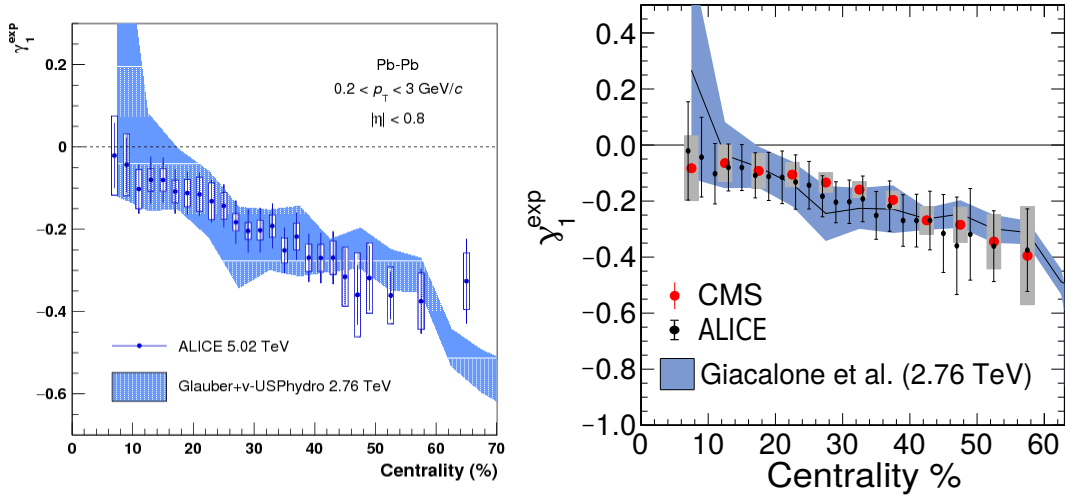


Рисунок 6.5.: (Слева) Зависимость коэффициента асимметрии γ_1^{exp} от центральности, полученная в анализе многочастичных корреляций частиц коллаборацией ALICE [73]. (Справа) Сравнение зависимости от центральности γ_1^{exp} , полученной в работе ALICE с вычисленной в анализе CMS. На каждом рисунке синим приведены оценки теоретических расчетов.

6.3. Теоретическое исследование асимметрии в рамках пособытийной вязкой гидродинамики

Как упоминалось в предыдущих главах, для среднего значения анизотропного потока ожидается линейная зависимость от соответствующего эксцентриситета начальной системы (по крайней для v_2 и v_3), однако в случае пособытийных значений данное приближение может быть неверным. В связи с этим пропорциональность между эксцентриситетом и гармоникой потока определенного порядка исследовалась пособытийно в теоретической работе [74]. Данное исследование проводилось в рамках пособытийной вязкой гидродинамики (со значением сдвиговой вязкости $\eta/s = 0.16$), при этом в начальном состоянии пространственные координаты генерировались либо за счет подхода “раненых нуклонов” (sWN), либо с помощью парных столкновений (как в модели Глаубера). Для версии, использующей модель Глаубера начального состояния, также был вычислен результат идеальной гидродинамики с $\eta/s = 0$. Рисунок 6.6 показывает полученные корреляции гармоник эллиптического потока с соответствующими значениями эллиптичности в различных версиях модели, полученные для интервала центральности 20 – 30%. Коэффициент $c(\varepsilon_2, v_2)$ обозначает так называемый коэффициент линейной корреляций, который равен 1 (-1), если величины коррелированы (антикоррелированы), и равен 0 при отсутствии корреляции. С хорошей точностью получено, что от события к событию $v_2 = C_2 \varepsilon_2$, где C_2 - показанный на рисунке коэффициент отклика. Отклонения от линейной пропорциональности для эллиптического потока составляют лишь $\sim 10\%$ для заданного значения ε_2 , тогда как для для треугольного потока они составили $\sim 50\%$, а в случае v_4 линейная корреляция отсутствует совсем.

Помимо этого, авторами была предложена новая наблюдаемая, которая зависит только от флуктуаций эксцентриситета начальной геометрии системы. Она представляет собой отмасштабированное распределение функции вероятности потока и выражается как $p(\delta v_n)$, где:

$$\delta v_n = \frac{v_n - \langle v_n \rangle_{ev}}{\langle v_n \rangle_{ev}}, \quad (6.1)$$

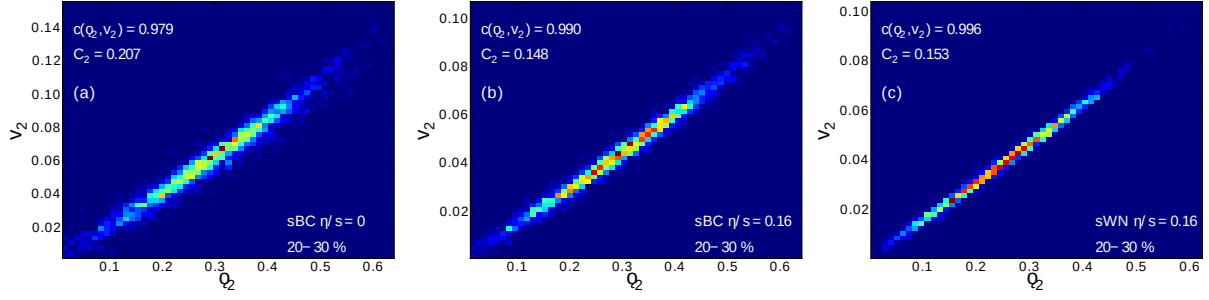


Рисунок 6.6.: Корреляция между эллиптичностью ε_2 и гармоникой эллиптического потока v_2 для различных версий модели пособытийной гидродинамики [74].

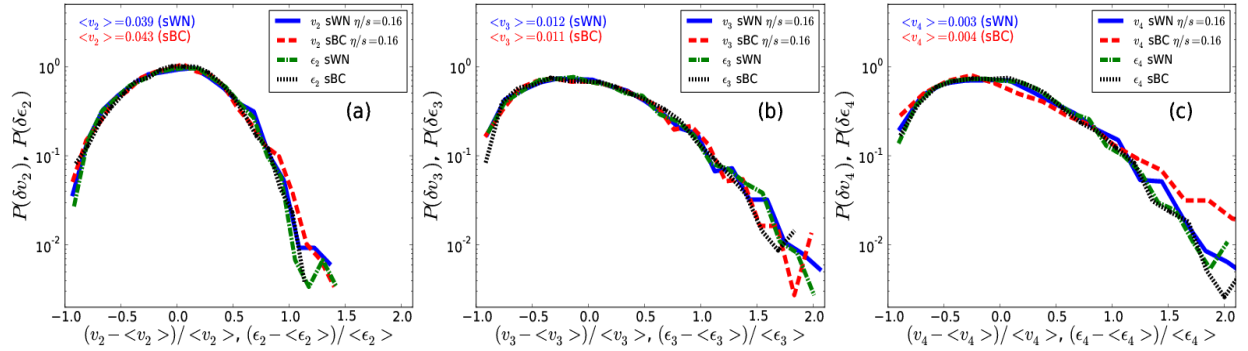


Рисунок 6.7.: Отмасштабированные функции вероятности потока $p(\delta v_n)$ и эксцентриситета $p(\delta \varepsilon_n)$ ($n=2,3,4$) для различных версий модели пособытийной вязкой гидродинамики [74].

при этом $\langle v_n \rangle_{ev}$ обозначает среднее значение гармоники потока.

Предполагается, что поскольку вязкость имеет незначительный эффект на корреляцию между v_n и ε_n , то дисперсии соответствующих пособытийных распределений $p(v_n)$ и $p(\varepsilon_n)$ должны совпадать: $\sigma_{v_n}^2 \approx \sigma_{\varepsilon_n}^2$. В этом случае вся информация об отклике образующейся жидкости к начальной геометрии заключена в коэффициенте отклика C_n , который контролирует среднее значение распределения $p(v_n)$, в то время как относительные флуктуации v_n происходят за счет соответствующих относительных флуктуаций ε_n и не зависят от вязкости жидкости. В связи с этим, должны совпадать распределения $p(\delta v_n)$ и $p(\delta \varepsilon_n)$, что показано на Рисунке 6.7 для вязкой гидродинамики с разными начальными состояниями.

6.4. Новые физические задачи, осуществимые в рамках пособытийного анализа потока

Рассмотренный в настоящей диссертационной работе пособытийный анализ анизотропного потока на основе развертки может быть использован для ряда интересных физических задач, например:

- Детальный анализ пособытийных флуктуаций анизотропного потока с $n > 2$.
- Изучение нелинейной пропорциональности между гармониками потока и значениями эксцентриситета начальной системы.
- Исследование флуктуаций дифференциального потока $v_n(p_T, \eta) \rightarrow$ восстановление

пособытийных распределений функции вероятности дифференциального потока $p(v_n(p_T, \eta))$.

- Экспериментальное вычисление новой наблюдаемой — отмасштабированного распределения $p(\delta v_n)$.
- Исследование флуктуаций потока в различных системах столкновения: p-p, p-Pb, d-Au, Cu-Cu и др.

Следует отметить, что для осуществления большинства приведенных задач может потребоваться дальнейшее развитие метода пособытийного анализа, поскольку в своем текущем состоянии он сильно зависит от используемой статистики. Количество событий, создаваемое при столкновениях ионов свинца на [ЛНС](#), позволяет вычислить пособытийные распределения анизотропного потока с хорошей точностью. Однако, при переходе к другой системе столкновения, более низким энергиям, или же изучению более статистически узкой наблюдаемой (напр., дифференциального потока) количества событий может оказаться недостаточно для получения корректной оценки $p(v_n)$. С другой стороны, при рассмотрении столкновений несимметричных ядер (или асимметричных систем) необходимо пересмотреть определения геометрии начального состояния и ее связь с анизотропным потоком в конечном состоянии.

7. Заключение

В заключение следует отметить, что были успешно выполнены все цели и задачи настоящей диссертационной работы. Основные результаты, полученные в ходе выполнения работы, заключаются в следующем:

- Развита метод пособытийного анализа на основе применения развертки итеративным методом D’Agostini, позволяющий вычислить динамические флуктуации анизотропного потока. Используемый метод анализа дает уникальную возможность получить напрямую плотность вероятности потока $p(v_n)$ и ее характеристики: средние значения гармоник потока $\langle v_n \rangle$, дисперсии σ_{v_n} , кумулянты $v_n\{m\}$, коэффициент асимметрии γ_1 .
- В рамках двух-компонентной модели [HYDJET++](#) для столкновений тяжелых ионов проведено исследование флуктуаций гармоник эллиптического и триангулярного потока v_2, v_3 при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ ТэВ. Полученные распределения потока $p(v_n)$ использованы для количественного описания результатов коллаборации [ATLAS](#).
- Предложена модификация генератора событий [HYDJET++](#), которая позволила достичь успешного количественного описания распределений гармоник потока $p(v_2)$ и $p(v_3)$ в эксперименте [ATLAS](#) при энергии 2.76 ТэВ. По результатам исследования метода пособытийного анализа, установлено, что он является чувствительным к внутренним флуктуациям модели. Показана необходимость корректной оценки динамических флуктуаций потока, вычисляемых через смоделированные спектры.
- Выполнен пособытийный анализ азимутальной анизотропии в столкновениях ионов свинца при $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ в эксперименте [CMS](#). Впервые получены независимые от модельных предположений распределения функции вероятности гармоник эллиптического потока при энергии 5.02 ТэВ, исключающие статистические и непотоковые флуктуации.
- Используя измеренные распределения плотности вероятности потока, вычислены кумулянты гармоник потока $v_2\{m\}$, $m = 2, 4, 6, 8$, а также отношения кумулянтов высших порядков, с учетом систематических погрешностей измеренных величин. При этом достигнута максимальная на данный момент точность (порядка 0.1%) в экспериментальном измерении “тонкого расщепления” $v_2\{8\}$ и $v_2\{6\}$.
- Получено отрицательное значение коэффициента асимметрии плотности вероятности эллиптичности γ_1^{exp} , растущее по модулю с переходом к более периферическим столкновениям.
- Измерены параметры эллиптичности начального состояния области перекрытия ядер свинца. Проведено сравнение с доступными теоретическими моделями. Установлено, что асимметрия в распределении эллиптического потока может быть объяснена геометрией начального состояния, в частности асимметрией распределения функции эллиптичности $p(\varepsilon_2)$.

7. Заключение

- Вычислены независимые от модельных предположений параметры эллиптичности начального состояния и транспортного коэффициента отклика КГП.

Согласие данных характеристик распределений потока, полученных при энергии 5.02 ТэВ в эксперименте CMS, с аналогичными результатами при энергии 2.76 ТэВ подтверждает теоретические ожидания о том, что эксцентриситеты начального состояния должны иметь лишь незначительные изменения между этими энергиями [72], и что отношения кумулянтов гармоник потока зависят от соответствующих соотношений кумулянтов эксцентриситета [17]. Помимо этого, следует заметить, что дальнейшее развитие использованного в диссертации метода подсобытийного анализа является перспективным, поскольку на данный момент не существует другого метода, позволяющего напрямую вычислить подсобытийные распределения функции вероятности анизотропного потока.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю, проф. В.Л. Коротких, за постановку задачи и помощь в работе над диссертацией.

Автор благодарит весь коллектив лаборатории сильных взаимодействий отдела экспериментальной физики высоких энергий за создание прекрасной творческой атмосферы для научной работы, а также за своевременные и конструктивные обсуждения.

Кроме того, автор приносит благодарность проф. Д.О. Еременко и проф. С.Ю. Платонову за полезные консультации.

Наконец, автор хотел бы выразить благодарность своим коллегам по анализу экспериментальных данных CMS: Steve Sanders, James Castle, Quan Wang за активную совместную работу.

Список сокращений и условных обозначений

- ALICE** A Large Ion Collider Experiment (один из четырех детекторов, расположенных в точках столкновения LHC) [12](#), [13](#), [19](#), [29](#), [30](#), [64](#), [65](#), [79](#), [83](#)
- ATLAS** A Toroidal LHC ApparatuS (один из четырех детекторов, расположенных в точках столкновения LHC) [10](#), [13](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [21](#), [25](#), [26](#), [32](#), [30](#), [33](#), [35](#), [36](#), [38](#), [48](#), [49](#), [51](#), [49](#), [51](#), [54](#), [55](#), [57](#), [58](#), [64](#), [69](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [84](#)
- BNL** Brookhaven National Laboratory in Upton, USA (Брукхейвенская национальная лаборатория, расположенная в Аптоне, США) [4](#)
- CERN** European Organization for Nuclear Research in Geneva, Switzerland (Европейский Центр ядерных исследований, расположенный в Женеве, Швейцария) [4](#), [19](#)
- CMS** Compact Muon Solenoid (один из четырех детекторов, расположенных в точках столкновения LHC) [7](#), [13](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [21](#), [23](#), [24](#), [25](#), [24](#), [25](#), [26](#), [29](#), [30](#), [34](#), [35](#), [36](#), [39](#), [41](#), [42](#), [44](#), [48](#), [51](#), [54](#), [55](#), [57](#), [58](#), [60](#), [62](#), [64](#), [65](#), [64](#), [65](#), [69](#), [79](#), [80](#), [81](#), [82](#), [83](#), [84](#)
- ECAL** Electromagnetic calorimeter (Электромагнитный калориметр) [23](#)
- ESE** Event-shape engineering (Инженерный анализ формы события) [24](#)
- HCAL** Hadron Calorimeter (Адронный калориметр) [23](#)
- HIJING** Heavy Ion Jet INteraction Generator [62](#), [63](#), [62](#), [83](#)
- HYDJET++** HYDrodynamics plus JETs event generator [16](#), [17](#), [18](#), [26](#), [28](#), [29](#), [30](#), [32](#), [30](#), [32](#), [35](#), [38](#), [48](#), [49](#), [51](#), [49](#), [51](#), [62](#), [63](#), [64](#), [69](#), [80](#), [81](#), [83](#), [84](#)
- КГП** Кварк-глюонная плазма [4](#), [7](#), [8](#), [17](#), [21](#), [27](#), [69](#)
- LEIR** Low Energy Ion Ring (один из ускорителей комплекса LHC) [19](#)
- LHC** Large Hadron Collider (Большой адронный коллайдер, БАК) [4](#), [6](#), [19](#), [21](#), [24](#), [29](#), [32](#), [68](#), [79](#), [80](#)
- LHCb** Large Hadron Collider beauty (один из четырех детекторов, расположенных в точках столкновения LHC) [19](#)
- MB** Minimum-bias events: “минимальные события смещения”, выбираемые с помощью “свободного” триггера [23](#), [24](#), [25](#), [80](#)
- PS** Proton Synchrotron (Протонный синхротрон) [19](#)
- QCD** Quantum Chromodynamics (Квантовая хромодинамика) [21](#)

RHIC Relativistic Heavy Ion Collider (Релятивистский коллайдер тяжёлых ионов) [4](#), [6](#)

SPS Super Proton Synchrotron (Протонный суперсинхротрон) [19](#)

SVD Singular Value Decomposition (Сингулярное разложение) [35](#)

ZDC Zero Degree Calorimeter (Калориметр эксперимента CMS) [23](#)

Список литературы

- [1] Edward V. Shuryak. “Quantum Chromodynamics and the Theory of Superdense Matter”. В: *Phys. Rept.* 61 (1980), с. 71—158. DOI: [10.1016/0370-1573\(80\)90105-2](#).
- [2] Afsar Abbas. “Colour confinement, baryon asymmetry and dark matter in quantum chromodynamics”. В: (2005). arXiv: [physics/0506042 \[physics\]](#).
- [3] Paul Sorensen. “Elliptic Flow: A Study of Space-Momentum Correlations In Relativistic Nuclear Collisions”. В: *Quark-gluon plasma 4*. Под ред. Rudolph C. Hwa и Xin-Nian Wang. 2010, с. 323—374. DOI: [10.1142/9789814293297_0006](#). arXiv: [0905.0174 \[nucl-ex\]](#). URL: <http://inspirehep.net/record/819303/files/arXiv:0905.0174.pdf>.
- [4] I. Arsene и др. “Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment”. В: *Nucl. Phys.* A757 (2005), с. 1—27. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2005.02.130](#). arXiv: [nucl-ex/0410020 \[nucl-ex\]](#).
- [5] S. Voloshin и Y. Zhang. “Flow study in relativistic nuclear collisions by Fourier expansion of Azimuthal particle distributions”. В: *Z. Phys.* C70 (1996), с. 665—672. DOI: [10.1007/s002880050141](#). arXiv: [hep-ph/9407282 \[hep-ph\]](#).
- [6] Ante Bilandzic, Raimond Snellings и Sergei Voloshin. “Flow analysis with cumulants: Direct calculations”. В: *Phys. Rev.* C83 (2011), с. 044913. DOI: [10.1103/PhysRevC.83.044913](#). arXiv: [1010.0233 \[nucl-ex\]](#).
- [7] Arthur M. Poskanzer и S. A. Voloshin. “Methods for analyzing anisotropic flow in relativistic nuclear collisions”. В: *Phys. Rev.* C58 (1998), с. 1671—1678. DOI: [10.1103/PhysRevC.58.1671](#). arXiv: [nucl-ex/9805001 \[nucl-ex\]](#).
- [8] R. S. Bhalerao, N. Borghini и J. Y. Ollitrault. “Analysis of anisotropic flow with Lee-Yang zeroes”. В: *Nucl. Phys.* A727 (2003), с. 373—426. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2003.08.007](#). arXiv: [nucl-th/0310016 \[nucl-th\]](#).
- [9] N. Borghini, R. S. Bhalerao и J. Y. Ollitrault. “Anisotropic flow from Lee-Yang zeroes: A Practical guide”. В: *J. Phys.* G30 (2004), S1213—S1216. DOI: [10.1088/0954-3899/30/8/092](#). arXiv: [nucl-th/0402053 \[nucl-th\]](#).
- [10] Jean-Yves Ollitrault, Arthur M. Poskanzer и Sergei A. Voloshin. “Effect of flow fluctuations and nonflow on elliptic flow methods”. В: *Phys. Rev.* C80 (2009), с. 014904. DOI: [10.1103/PhysRevC.80.014904](#). arXiv: [0904.2315 \[nucl-ex\]](#).
- [11] Serguei Chatrchyan и др. “Measurement of the elliptic anisotropy of charged particles produced in PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV”. В: *Phys. Rev.* C87.1 (2013), с. 014902. DOI: [10.1103/PhysRevC.87.014902](#). arXiv: [1204.1409 \[nucl-ex\]](#).
- [12] Zhi Qiu и Ulrich W. Heinz. “Event-by-event shape and flow fluctuations of relativistic heavy-ion collision fireballs”. В: *Phys. Rev.* C84 (2011), с. 024911. DOI: [10.1103/PhysRevC.84.024911](#). arXiv: [1104.0650 \[nucl-th\]](#).
- [13] Sergei A. Voloshin и др. “Elliptic flow in the Gaussian model of eccentricity fluctuations”. В: *Phys. Lett.* B659 (2008), с. 537—541. DOI: [10.1016/j.physletb.2007.11.043](#). arXiv: [0708.0800 \[nucl-th\]](#).

- [14] Peter F. Kolb и Ulrich W. Heinz. “Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy ion collisions”. В: (2003), с. 634—714. arXiv: [nucl-th/0305084](#) [[nucl-th](#)].
- [15] Li Yan. “A flow paradigm in heavy-ion collisions”. В: *Chin. Phys.* C42.4 (2018), с. 042001. DOI: [10.1088/1674-1137/42/4/042001](#). arXiv: [1712.04580](#) [[nucl-th](#)].
- [16] Mike Miller и Raimond Snellings. “Eccentricity fluctuations and its possible effect on elliptic flow measurements”. В: (2003). arXiv: [nucl-ex/0312008](#) [[nucl-ex](#)].
- [17] Giuliano Giacalone и др. “Skewness of elliptic flow fluctuations”. В: *Phys. Rev.* C95.1 (2017), с. 014913. DOI: [10.1103/PhysRevC.95.014913](#). arXiv: [1608.01823](#) [[nucl-th](#)].
- [18] Vardan Khachatryan и др. “Evidence for Collective Multiparticle Correlations in p-Pb Collisions”. В: *Phys. Rev. Lett.* 115.1 (2015), с. 012301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.115.012301](#). arXiv: [1502.05382](#) [[nucl-ex](#)].
- [19] Betty Bezverkhny Abelev и др. “Multiparticle azimuthal correlations in p-Pb and Pb-Pb collisions at the CERN Large Hadron Collider”. В: *Phys. Rev.* C90.5 (2014), с. 054901. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.054901](#). arXiv: [1406.2474](#) [[nucl-ex](#)].
- [20] Georges Aad и др. “Measurement of flow harmonics with multi-particle cumulants in Pb+Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector”. В: *Eur. Phys. J.* C74.11 (2014), с. 3157. DOI: [10.1140/epjc/s10052-014-3157-z](#). arXiv: [1408.4342](#) [[hep-ex](#)].
- [21] Li Yan, Jean-Yves Ollitrault и Arthur M. Poskanzer. “Eccentricity distributions in nucleus-nucleus collisions”. В: *Phys. Rev.* C90.2 (2014), с. 024903. DOI: [10.1103/PhysRevC.90.024903](#). arXiv: [1405.6595](#) [[nucl-th](#)].
- [22] Stanislaw Mrowczynski и Edward V. Shuryak. “Elliptic flow fluctuations”. В: *Acta Phys. Polon.* B34 (2003), с. 4241—4256. arXiv: [nucl-th/0208052](#) [[nucl-th](#)].
- [23] Sergei A. Voloshin, Arthur M. Poskanzer и Raimond Snellings. “Collective phenomena in non-central nuclear collisions”. В: *Landolt-Bornstein* 23 (2010), с. 293—333. DOI: [10.1007/978-3-642-01539-7_10](#). arXiv: [0809.2949](#) [[nucl-ex](#)].
- [24] Betty Abelev и др. “Anisotropic flow of charged hadrons, pions and (anti-)protons measured at high transverse momentum in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV”. В: *Phys. Lett.* B719 (2013), с. 18—28. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.12.066](#). arXiv: [1205.5761](#) [[nucl-ex](#)].
- [25] Georges Aad и др. “Measurement of the distributions of event-by-event flow harmonics in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector at the LHC”. В: *JHEP* 11 (2013), с. 183. DOI: [10.1007/JHEP11\(2013\)183](#). arXiv: [1305.2942](#) [[hep-ex](#)].
- [26] G. D’Agostini. “A Multidimensional unfolding method based on Bayes’ theorem”. В: *Nucl. Instrum. Meth.* A362 (1995), с. 487—498. DOI: [10.1016/0168-9002\(95\)00274-X](#).
- [27] Tim Adye. “Unfolding algorithms and tests using RooUnfold”. В: *Proceedings, PHYSTAT 2011 Workshop on Statistical Issues Related to Discovery Claims in Search Experiments and Unfolding, CERN, Geneva, Switzerland 17-20 January 2011*. CERN. Geneva: CERN, 2011, с. 313—318. DOI: [10.5170/CERN-2011-006.313](#). arXiv: [1105.1160](#) [[physics.data-an](#)]. URL: <http://inspirehep.net/record/898599/files/arXiv:1105.1160.pdf>.
- [28] Serguei Chatrchyan и др. “Measurement of higher-order harmonic azimuthal anisotropy in PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV”. В: *Phys. Rev.* C89.4 (2014), с. 044906. DOI: [10.1103/PhysRevC.89.044906](#). arXiv: [1310.8651](#) [[nucl-ex](#)].
- [29] Li Yan, Jean-Yves Ollitrault и Arthur M. Poskanzer. “Azimuthal Anisotropy Distributions in High-Energy Collisions”. В: *Phys. Lett.* B742 (2015), с. 290—295. DOI: [10.1016/j.physletb.2015.01.039](#). arXiv: [1408.0921](#) [[nucl-th](#)].

- [30] L. V. Bravina и др. “Anisotropic flow fluctuations in hydro-inspired freeze-out model for relativistic heavy ion collisions”. В: *Eur. Phys. J.* C75.12 (2015), с. 588. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3815-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3815-9). arXiv: [1509.02692](https://arxiv.org/abs/1509.02692) [hep-ph].
- [31] L. V. Bravina и др. “Hydro and Jets in Relativistic Heavy-Ion Collisions”. В: *EPJ Web Conf.* 125 (2016), с. 04010. DOI: [10.1051/epjconf/201612504010](https://doi.org/10.1051/epjconf/201612504010).
- [32] L. Bravina и др. “HYDRO + JETS (HYDJET++) event generator for Pb+Pb collisions at LHC”. В: *J. Phys. Conf. Ser.* 736 (2016), с. 012024. DOI: [10.1088/1742-6596/736/1/012024](https://doi.org/10.1088/1742-6596/736/1/012024).
- [33] L. V Bravina и др. “Anisotropic flow fluctuations in Pb+Pb collisions at LHC”. В: *EPJ Web Conf.* 126 (2016), с. 04006. DOI: [10.1051/epjconf/201612604006](https://doi.org/10.1051/epjconf/201612604006).
- [34] S. V. Petrushanko и др. “HYDJET++ model as a hot mixture of jets and hydrodynamics at ultra-relativistic heavy-ion collisions”. В: *Nucl. Part. Phys. Proc.* 289-290 (2017), с. 381—384. DOI: [10.1016/j.nuclphysbps.2017.05.088](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2017.05.088).
- [35] E N. Nazarova. “Unfolding of anisotropic flow parameters in event-by-event analysis of heavy ion collisions”. В: *Memoirs of the Faculty of Physics* 2 (2015), с. 1—16. URL: <http://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2015/2/152201>.
- [36] E.N. Nazarova и др. “Anisotropic flow fluctuations in Pb-Pb collisions at the LHC energy in HYDJET++ model”. В: *Proceedings of XX International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists (AYSS-2016) Dedicated to the 60th Anniversary of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, March 14-18, 2016)*. 2016, с. 180—184. ISBN: 978-5-9530-0416-9. URL: <http://indico.jinr.ru/getFile.py/access?resId=0&materialId=2&confId=73>.
- [37] L. Bravina и др. “Novel Developments of HYDJET++ Model for Ultra-relativistic Heavy-Ion Collisions”. В: *New Horizons in Fundamental Physics. FIAS Interdisciplinary Science Series*. Proceedings, International Symposium on New Horizons in Fundamental Physics: From Neutrons Nuclei via Superheavy Elements and Supercritical Fields to Neutron Stars and Cosmic Rays: Makutsi, South Africa, November 23-29, 2015. Springer International Publishing, 2017, с. 187—197. DOI: [10.1007/978-3-319-44165-8_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-44165-8_15).
- [38] Albert M Sirunyan и др. “Non-Gaussian elliptic-flow fluctuations in PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV”. В: (2017). arXiv: [1711.05594](https://arxiv.org/abs/1711.05594) [nucl-ex].
- [39] Lyndon Evans и Philip Bryant. “LHC Machine”. В: *JINST* 3 (2008), S08001. DOI: [10.1088/1748-0221/3/08/S08001](https://doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08001).
- [40] S. Chatrchyan и др. “The CMS Experiment at the CERN LHC”. В: *JINST* 3 (2008), S08004. DOI: [10.1088/1748-0221/3/08/S08004](https://doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08004).
- [41] Serguei Chatrchyan и др. “Description and performance of track and primary-vertex reconstruction with the CMS tracker”. В: *JINST* 9.10 (2014), P10009. DOI: [10.1088/1748-0221/9/10/P10009](https://doi.org/10.1088/1748-0221/9/10/P10009). arXiv: [1405.6569](https://arxiv.org/abs/1405.6569) [physics.ins-det].
- [42] Vardan Khachatryan и др. “CMS Tracking Performance Results from early LHC Operation”. В: *Eur. Phys. J.* C70 (2010), с. 1165—1192. DOI: [10.1140/epjc/s10052-010-1491-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1491-3). arXiv: [1007.1988](https://arxiv.org/abs/1007.1988) [physics.ins-det].
- [43] G. Aad и др. “The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider”. В: *JINST* 3 (2008), S08003. DOI: [10.1088/1748-0221/3/08/S08003](https://doi.org/10.1088/1748-0221/3/08/S08003).
- [44] Pasi Huovinen. “Hydrodynamical description of collective flow. Chapter 1.” В: (2003), с. 600—633. DOI: [10.1142/9789812795533_0009](https://doi.org/10.1142/9789812795533_0009). arXiv: [nuc1-th/0305064](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0305064) [nucl-th].

- [45] K. Werner и др. “Jets, Bulk Matter, and their Interaction in Heavy Ion Collisions at Several TeV”. В: *Phys. Rev.* C85 (2012), с. 064907. DOI: [10.1103/PhysRevC.85.064907](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.85.064907). arXiv: [1203.5704](https://arxiv.org/abs/1203.5704) [[nucl-th](#)].
- [46] Hannah Petersen и др. “A Fully Integrated Transport Approach to Heavy Ion Reactions with an Intermediate Hydrodynamic Stage”. В: *Phys. Rev.* C78 (2008), с. 044901. DOI: [10.1103/PhysRevC.78.044901](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.78.044901). arXiv: [0806.1695](https://arxiv.org/abs/0806.1695) [[nucl-th](#)].
- [47] Tetsufumi Hirano и др. “Hadronic dissipative effects on elliptic flow in ultrarelativistic heavy-ion collisions”. В: *Phys. Lett.* B636 (2006), с. 299—304. DOI: [10.1016/j.physletb.2006.03.060](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.03.060). arXiv: [nucl-th/0511046](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0511046) [[nucl-th](#)].
- [48] Chiho Nonaka и Steffen A. Bass. “3-D hydro + cascade model at RHIC”. В: *Nucl. Phys.* A774 (2006), с. 873—876. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2006.06.155](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2006.06.155). arXiv: [nucl-th/0510038](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0510038) [[nucl-th](#)].
- [49] F. Grassi и др. “Results on transverse mass spectra obtained with NeXSPheRIO”. В: *J. Phys.* G31 (2005), S1041—S1044. DOI: [10.1088/0954-3899/31/6/054](https://doi.org/10.1088/0954-3899/31/6/054).
- [50] K. Werner и др. “Event-by-Event Simulation of the Three-Dimensional Hydrodynamic Evolution from Flux Tube Initial Conditions in Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions”. В: *Phys. Rev.* C82 (2010), с. 044904. DOI: [10.1103/PhysRevC.82.044904](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.82.044904). arXiv: [1004.0805](https://arxiv.org/abs/1004.0805) [[nucl-th](#)].
- [51] Sangwook Ryu и др. “MUSIC with the UrQMD Afterburner”. В: *Nucl. Phys.* A904-905 (2013), с. 389c—392c. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2013.02.031](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2013.02.031). arXiv: [1210.4588](https://arxiv.org/abs/1210.4588) [[hep-ph](#)].
- [52] I. P. Lokhtin и др. “Heavy ion event generator HYDJET++ (HYDrodynamics plus JETs)”. В: *Comput. Phys. Commun.* 180 (2009), с. 779—799. DOI: [10.1016/j.cpc.2008.11.015](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.11.015). arXiv: [0809.2708](https://arxiv.org/abs/0809.2708) [[hep-ph](#)].
- [53] I. P. Lokhtin и A. M. Snigirev. “A Model of jet quenching in ultrarelativistic heavy ion collisions and high-p(T) hadron spectra at RHIC”. В: *Eur. Phys. J.* C45 (2006), с. 211—217. DOI: [10.1140/epjc/s2005-02426-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s2005-02426-3). arXiv: [hep-ph/0506189](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0506189) [[hep-ph](#)].
- [54] N. S. Amelin и др. “A Fast hadron freeze-out generator”. В: *Phys. Rev.* C74 (2006), с. 064901. DOI: [10.1103/PhysRevC.74.064901](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.74.064901). arXiv: [nucl-th/0608057](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0608057) [[nucl-th](#)].
- [55] N. S. Amelin и др. “Fast hadron freeze-out generator. Part II. Noncentral collisions”. В: *Phys. Rev.* C77 (2008), с. 014903. DOI: [10.1103/PhysRevC.77.014903](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.77.014903). arXiv: [0711.0835](https://arxiv.org/abs/0711.0835) [[hep-ph](#)].
- [56] Giorgio Torrieri и др. “SHARE: Statistical hadronization with resonances”. В: *Comput. Phys. Commun.* 167 (2005), с. 229—251. DOI: [10.1016/j.cpc.2005.01.004](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.004). arXiv: [nucl-th/0404083](https://arxiv.org/abs/nucl-th/0404083) [[nucl-th](#)].
- [57] L. V. Bravina и др. “Higher harmonics of azimuthal anisotropy in relativistic heavy ion collisions in HYDJET++ model”. В: *Eur. Phys. J.* C74.3 (2014), с. 2807. DOI: [10.1140/epjc/s10052-014-2807-5](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2807-5). arXiv: [1311.7054](https://arxiv.org/abs/1311.7054) [[nucl-th](#)].
- [58] Torbjorn Sjostrand, Stephen Mrenna и Peter Z. Skands. “PYTHIA 6.4 Physics and Manual”. В: *JHEP* 05 (2006), с. 026. DOI: [10.1088/1126-6708/2006/05/026](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/05/026). arXiv: [hep-ph/0603175](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0603175) [[hep-ph](#)].
- [59] R. Brun и F. Rademakers. “ROOT: An object oriented data analysis framework”. В: *Nucl. Instrum. Meth.* A389 (1997), с. 81—86. DOI: [10.1016/S0168-9002\(97\)00048-X](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(97)00048-X).
- [60] I. P. Lokhtin и др. “Hadron spectra, flow and correlations in PbPb collisions at the LHC: interplay between soft and hard physics”. В: *Eur. Phys. J.* C72 (2012), с. 2045. DOI: [10.1140/epjc/s10052-012-2045-7](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2045-7). arXiv: [1204.4820](https://arxiv.org/abs/1204.4820) [[hep-ph](#)].

- [61] Georges Aad и др. “Measurement of the correlation between flow harmonics of different order in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}}=2.76$ TeV with the ATLAS detector”. B: *Phys. Rev. C* 92.3 (2015), с. 034903. DOI: [10.1103/PhysRevC.92.034903](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.92.034903). arXiv: [1504.01289](https://arxiv.org/abs/1504.01289) [hep-ex].
- [62] Andreas Hocker и Vakhtang Kartvelishvili. “SVD approach to data unfolding”. B: *Nucl. Instrum. Meth. A* 372 (1996), с. 469—481. DOI: [10.1016/0168-9002\(95\)01478-0](https://doi.org/10.1016/0168-9002(95)01478-0). arXiv: [hep-ph/9509307](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9509307) [hep-ph].
- [63] A. N. Tikhonov. “On the solution of improperly posed problems and the method of regularization”. B: *Sov. Math.: Reports* 151:3 (1963), 501—504. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan28329>.
- [64] Mikael Kuusela и Victor M. Panaretos. “Statistical unfolding of elementary particle spectra: Empirical Bayes estimation and bias-corrected uncertainty quantification”. B: (2015). DOI: [10.1214/15-A0AS857](https://doi.org/10.1214/15-A0AS857). arXiv: [1505.04768](https://arxiv.org/abs/1505.04768) [stat.AP].
- [65] J. Ocariz. “Probability and Statistics for Particle Physicists”. B: *Proceedings, 1st Asia-Europe-Pacific School of High-Energy Physics (AEPSHEP): Fukuoka, Japan, October 14-27, 2012*. [253(2014)]. 2014, с. 253—280. DOI: [10.5170/CERN-2014-001.253](https://doi.org/10.5170/CERN-2014-001.253). arXiv: [1405.3402](https://arxiv.org/abs/1405.3402) [physics.data-an].
- [66] Zhi Qiu, Chun Shen и Ulrich Heinz. “Hydrodynamic elliptic and triangular flow in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s} = 2.76$ ATeV”. B: *Phys. Lett. B* 707 (2012), с. 151—155. DOI: [10.1016/j.physletb.2011.12.041](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2011.12.041). arXiv: [1110.3033](https://arxiv.org/abs/1110.3033) [nucl-th].
- [67] Li Yan и Jean-Yves Ollitrault. “Universal fluctuation-driven eccentricities in proton-proton, proton-nucleus and nucleus-nucleus collisions”. B: *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014), с. 082301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.112.082301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.082301). arXiv: [1312.6555](https://arxiv.org/abs/1312.6555) [nucl-th].
- [68] Li Yan, Jean-Yves Ollitrault и Art M. Poskanzer. “Universal parameterization of initial-state fluctuations and its applications to event-by-event anisotropy”. B: *Nucl. Phys. A* 931 (2014), с. 1007—1011. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2014.09.021](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2014.09.021). arXiv: [1408.0709](https://arxiv.org/abs/1408.0709) [nucl-th].
- [69] Jiangyong Jia. “Event-shape fluctuations and flow correlations in ultra-relativistic heavy-ion collisions”. B: *J. Phys. G* 41.12 (2014), с. 124003. DOI: [10.1088/0954-3899/41/12/124003](https://doi.org/10.1088/0954-3899/41/12/124003). arXiv: [1407.6057](https://arxiv.org/abs/1407.6057) [nucl-ex].
- [70] Bjoern Schenke, Prithwish Tribedy и Raju Venugopalan. “Event-by-event gluon multiplicity, energy density, and eccentricities in ultrarelativistic heavy-ion collisions”. B: *Phys. Rev. C* 86 (2012), с. 034908. DOI: [10.1103/PhysRevC.86.034908](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.86.034908). arXiv: [1206.6805](https://arxiv.org/abs/1206.6805) [hep-ph].
- [71] Björn Schenke, Prithwish Tribedy и Raju Venugopalan. “Gluon field fluctuations in nuclear collisions: Multiplicity and eccentricity distributions”. B: *Nucl. Phys. A* 926 (2014), с. 102—108. DOI: [10.1016/j.nuclphysa.2014.03.001](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2014.03.001). arXiv: [1312.5588](https://arxiv.org/abs/1312.5588) [hep-ph].
- [72] Jacquelyn Noronha-Hostler, Matthew Luzum и Jean-Yves Ollitrault. “Hydrodynamic predictions for 5.02 TeV Pb-Pb collisions”. B: *Phys. Rev. C* 93.3 (2016), с. 034912. DOI: [10.1103/PhysRevC.93.034912](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.93.034912). arXiv: [1511.06289](https://arxiv.org/abs/1511.06289) [nucl-th].
- [73] S. Acharya и др. “Energy dependence and fluctuations of anisotropic flow in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ and 2.76 TeV”. B: *JHEP* 07 (2018), с. 103. DOI: [10.1007/JHEP07\(2018\)103](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2018)103). arXiv: [1804.02944](https://arxiv.org/abs/1804.02944) [nucl-ex].
- [74] H. Niemi и др. “Event-by-event distributions of azimuthal asymmetries in ultrarelativistic heavy-ion collisions”. B: *Phys. Rev. C* 87.5 (2013), с. 054901. DOI: [10.1103/PhysRevC.87.054901](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.054901). arXiv: [1212.1008](https://arxiv.org/abs/1212.1008) [nucl-th].
- [75] Raghunath Sahoo. “Relativistic Kinematics”. B: 2016. arXiv: [1604.02651](https://arxiv.org/abs/1604.02651) [nucl-ex].

- [76] Jaroslav Adam и др. “Centrality dependence of the charged-particle multiplicity density at midrapidity in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV”. В: *Phys. Rev. Lett.* 116.22 (2016), с. 222302. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.222302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.222302). arXiv: [1512.06104](https://arxiv.org/abs/1512.06104) [nucl-ex].
- [77] Michael L. Miller и др. “Glauber modeling in high energy nuclear collisions”. В: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 57 (2007), с. 205—243. DOI: [10.1146/annurev.nucl.57.090506.123020](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.57.090506.123020). arXiv: [nuc1-ex/0701025](https://arxiv.org/abs/nuc1-ex/0701025) [nucl-ex].
- [78] Hans-Joachim Drescher и Yasushi Nara. “Eccentricity fluctuations from the color glass condensate at RHIC and LHC”. В: *Phys. Rev.* C76 (2007), с. 041903. DOI: [10.1103/PhysRevC.76.041903](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.76.041903). arXiv: [0707.0249](https://arxiv.org/abs/0707.0249) [nucl-th].
- [79] H. J. Drescher и Y. Nara. “Effects of fluctuations on the initial eccentricity from the Color Glass Condensate in heavy ion collisions”. В: *Phys. Rev.* C75 (2007), с. 034905. DOI: [10.1103/PhysRevC.75.034905](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.75.034905). arXiv: [nuc1-th/0611017](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/0611017) [nucl-th].
- [80] Francois Gelis и др. “The Color Glass Condensate”. В: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 60 (2010), с. 463—489. DOI: [10.1146/annurev.nucl.010909.083629](https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.010909.083629). arXiv: [1002.0333](https://arxiv.org/abs/1002.0333) [hep-ph].

А. Список иллюстративного материала

Список иллюстраций

1.1. Стадии эволюции нецентрального столкновения тяжелых ионов.	5
1.2. Формирование области перекрытия, переход от пространственной асимметрии начальной геометрии системы в импульсную анизотропию конечного состояния (создание анизотропного потока).	6
1.3. Формы области перекрытия с выделенным вкладом в эллиптический и триангулярный поток, а также направления максимального потока соответствующего порядка.	6
1.4. Гармоники эллиптического потока, вычисленные различными методами экспериментального анализа данных с помощью детектора CMS.	7
1.5. Определение плоскостей реакции (RP), события (EP) и нуклонов-участников (PP).	8
1.6. Зависимость среднего значения эксцентриситета от прицельного параметра, вычисленного с использованием различных весовых функций, а также двух моделей начального состояния: MC-Glauber и MC-KLN. В качестве контуров использованы распределения деформированного Гаусса из модели MC-KLN.	9
1.7. Корреляция между $\langle v_n \rangle$ и ε_n для эллиптического и триангулярного потока в различных интервалах центральности.	9
1.8. (Слева) Асимметрия проекций компонент потока (v_x, v_y) и эллиптичности $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$, домноженных с коэффициентом отклика $k = 0.21$. (Справа) Отношение кумулянтов потока $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ в данных ATLAS (зеленым) и модельном расчете (пустые точки), и эллиптичности $\varepsilon_2\{6\}/\varepsilon_2\{4\}$ (цветные точки).	11
1.9. Распределения эллиптичности $p(\varepsilon_2)$ в моделях начального состояния MC-Glauber и IP-Glasma, фитированные функцией Бессель-Гаусса и эллиптик-степенной параметризацией, представленные для различных интервалов центральности.	12
1.10. Оценка относительных флуктуаций дифференциального потока $v_2(p_T)$ в эксперименте ALICE, в зависимости от поперечного импульса p_T и центральности столкновения.	13
1.11. Распределения функции вероятности $p(v_n)$ ($n=2,3,4$), вычисленные методом пособийного анализа на основе процедуры развертки коллаборацией ATLAS для различных интервалов центральности столкновения.	14
1.12. Оценка относительных флуктуаций интегрального потока v_2 и v_3 в эксперименте CMS в зависимости от центральности столкновения. Относительные флуктуации в пособийном анализе ATLAS.	14
1.13. Сравнение гармоник потока v_2 (слева) и v_3 (справа) в эксперименте ATLAS, полученных различными методами: $v_n\{EP\}$ - методом плоскости события, $v_n\{2,4\}$ - кумулянты, полученные методом многочастичных корреляций, $v_n\{EbyE\}$ - средние значения распределений $p(v_n)$, вычисленных методом пособийного анализа на основе процедуры развертки.	15

2.1.	Схематическое представление ускорительной системы ЛНС (“Цепочка инжекции ЛНС”). Показан процесс ускорения протонов и ионов. Детали приведены в тексте.	20
2.2.	Схема главного кольца ЛНС с выделением подсистем, присутствующих в каждом октанте. Показано прохождение встречных пучков адронов через систему коллайдера, с указанием четырех точек столкновения, в которых расположены детекторы частиц. Детали приведены в тексте.	20
2.3.	3D-макет детектора CMS. Выделены внутренние системы детектора: трекер, адронный и электромагнитный калориметры, магнит-соленоид, передний калориметр и мюонные камеры. Детали приведены в тексте.	22
2.4.	Внутренние компоненты детектора CMS в поперечном сечении. Расстояние от центра детектора показано в метрах. Треки частиц, регистрируемых в каждой из внутренних систем детектора, показаны различными цветами.	22
2.5.	Распределение поперечной энергии, измеренное калориметрами HF для набора MB событий в столкновениях ионов свинца 2015 года детектором CMS. Границы между долями полного неупругого сечения показаны вертикальными линиями.	26
3.1.	Распределения пространственной анизотропии в модели HYDJET++. В левой части рисунка моделирование проведено для v_2 ($\epsilon_3(b) = 0$), на правой — для $v_2 + v_3$ ($\epsilon_3(b) = 0.2$). В обоих случаях были выбраны параметры $R_f = 5$ фм, $\epsilon(b) = 0.2$, $\Psi_2^{RP} = 0$, $\Psi_3^{RP} = 0$	30
3.2.	Схематическая последовательность генерации событий в модели HYDJET++.	31
3.3.	Результаты модели HYDJET++ для столкновений ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ. Слева: нормированная множественность заряженных частиц при средней скорости $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от среднего числа взаимодействующих нуклонов (центральности столкновения). Центр: $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от псевдобыстроты для двух интервалов центральности. Справа: спектр заряженных частиц по поперечному импульсу.	31
3.4.	Результаты модели HYDJET++ для столкновений ионов свинца при энергии 2.76 ТэВ по дифференциальному эллиптическому потоку $v_2(p_T)$ в трех интервалах центральности. Точки обозначают данные CMS. Результаты мягкой компоненты показаны точечной кривой, жесткой компоненты - пунктирной кривой, полный результат - сплошной кривой.	32
3.5.	Корреляция между эллиптическими и триангулярными гармониками потока в модели HYDJET++, в сравнении с данными эксперимента ATLAS.	32
4.1.	Наблюдаемые (сплошные символы) и конечные (пустые символы) распределения $p(v_n)$, для которых значения гармоник потока были получены одночастичным методом (точки) или методом двухчастичных корреляций (квадраты), представленные для интервала центральности 20 – 25% для v_2 (слева), v_3 (центр) и v_4 (справа). Отношения результатов двухчастичного к одночастичному методу показаны в нижнем ряду.	34
4.2.	Распределение плотности вероятности в Монте-Карло (MC) тесте, показывающее влияние конечной множественности частиц на наблюдаемое распределение $p(v_n^{obs})$. Статистические флуктуации уширяют распределение по сравнению с истинным $p(v_n)$, а также сдвигают среднее значение $\langle v_n \rangle$ к большему значению. Данный “разброс” увеличивается с уменьшением множественности.	35

4.3.	Последовательность построения функции отклика. Слева направо: разделение полного события распределения потокового вектора на два подсобытия, симметричных относительно $\eta = 0$; вычитание подсобытия B из подсобытия A ; преобразование распределения разницы подсобытий в функцию отклика.	37
4.4.	Распределение разницы потоковых векторов подсобытий и его проекции на x и y , фитированные функцией Гаусса и распределением Стьюдента. Верхний ряд показывает функции в интервале центральностей $0 - 5\%$, нижний — для $55 - 60\%$.	37
4.5.	Пример процедуры развертки, произведенной с различным числом итераций. Оценки нулевой итерации истинного распределения показана пустыми черными точками и совпадает с наблюдаемым распределением.	40
4.6.	χ^2/NDF тест регуляризации развертки, проводимый между “пересвернутым” и наблюдаемым распределением, в зависимости от числа итераций. Пунктиром показана “линия отсечения”.	41
4.7.	Результаты процедуры развертки для событий в интервале центральности $40 - 45\%$. (A): Матрица отклика $p(\vec{v}_n^{obs} \vec{v}_n)$. (B): Наблюдаемое (черные точки) и конечное (розовые точки) распределения $(p(v_n^{obs}), p(v_n))$. (C): Корреляционная матрица для конечного распределения. (D): χ^2/NDF между “пересвернутыми” и наблюдаемыми распределениями. (E): Сравнение “пересвернутых” распределений с наблюдаемым.	42
5.1.	Пособытийные распределения эллиптического $p(v_2)$ (верхний ряд) и триангулярного $p(v_3)$ (нижний ряд) потока в стандартной версии модели HYDJET++ в интервалах центральности $5 - 10\%$ (слева), $20 - 25\%$ (центр) и $35 - 40\%$ (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры, красные точки обозначают данные ATLAS.	49
5.2.	Пособытийные распределения эллиптического $p(v_2)$ потока в модели HYDJET++ в интервалах центральности $5 - 10\%$ (слева), $20 - 25\%$ (центр) и $35 - 40\%$ (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры. Красные точки обозначают данные ATLAS. Верхний/нижний ряд показывает результаты стандартной/модифицированной версии HYDJET++.	50
5.3.	Пособытийные распределения эллиптического $p(v_3)$ потока в модели HYDJET++ в интервалах центральности $5 - 10\%$ (слева), $20 - 25\%$ (центр) и $35 - 40\%$ (справа). Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры, красные точки обозначают данные ATLAS. Верхний/нижний ряд показывает результаты стандартной/модифицированной версии HYDJET++.	50
5.4.	Распределение эллиптического потока ($p(v_2)$) в интервале центральности $60 - 65\%$. Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные в HYDJET++ спектры. Красные точки обозначают данные ATLAS. Фиолетовая кривая показывает фит конечного распределения с помощью функции Бессель-Гаусса.	52
5.5.	Распределения эллиптического потока ($p(v_2)$) в модели HYDJET++ (черные точки), фитированные эллиптик-степенной параметризацией (красные кривые) для интервалов центральности $20 - 25\%$ (слева) и $35 - 40\%$ (справа).	52

5.6.	Наблюдаемые $p(v_2^{obs})$ (пустые точки) и конечные $p(v_2)$ (полные точки) распределения эллиптического потока, полученные в экспериментальном анализе данных CMS столкновений ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ для трех интервалов центральности: 15 – 20%, 30 – 35% и 55 – 60%. Фитирование $p(v_2)$ с помощью эллиптик-степенной и Бессель-Гаусса параметризаций представлено красной и синей кривой, соответственно.	54
5.7.	Наблюдаемые $p(v_2^{obs})$ (пустые точки) и конечные $p(v_2)$ (полные точки) распределения эллиптического потока, полученные в экспериментальном анализе данных CMS столкновений ионов свинца при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ ТэВ для всего диапазона центральностей. Верхняя правая картинка иллюстрирует тест максимального соответствия χ^2/NDF для каждой параметризации. Значения параметров фитирования для каждого интервала центральности представлены как проценты.	55
5.8.	Зависимость от центральности параметров фитирования эллиптик-степенной функцией конечных распределений $p(v_2)$, полученных в эксперименте CMS. Синяя сплошная кривая на левом рисунке показывает теоретическую оценку с $\eta/s = 0.19$. На центральном и правом рисунке показаны вычисления с помощью моделей Glauber (синяя полоса) и IP-Glasma (красная полоса). . .	56
5.9.	Зависимость от центральности параметров фитирования эллиптик-степенной функцией конечных распределений $p(v_2)$. Черными полными символами представлены результаты эксперимента CMS, полученные в столкновениях PbPb при энергии 5.02 ТэВ, при этом серыми полосами обозначены систематические погрешности измерений. Пустые символы обозначают значения, полученные в переанализе [29] данных ATLAS [25] по столкновениям PbPb при энергии 2.76 ТэВ.	56
5.10.	Распределения $p(v_2)$, полученные в эксперименте CMS для столкновений ионов свинца при энергии 5.02 ТэВ с $ \eta < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$ в интервале центральности 30 – 35%. Наблюдаемые распределения показаны пустыми точками, конечные распределения - полными черными точками. Для сравнения представлены конечные распределения, полученные в анализе ATLAS при энергии 2.76 ТэВ и $ \eta < 2.5$, $0.5 < p_T < 1.0$	57
5.11.	Кумулянты $v_2\{m\}$ эллиптического потока, полученные из моментов распределений $p(v_2)$. Серые полосы отмечают статистические и систематические погрешности измерений.	58
5.12.	Отношения кумулянтов высокого порядка эллиптического потока, полученных из моментов распределений $p(v_2)$. Серые полосы отмечают статистические и систематические погрешности измерений. Предсказание из гидродинамической модели для отношения $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ при энергии 2.76 TeV показано коричневой полосой.	59
5.13.	Отношения кумулянтов $v_2\{6\}/v_2\{4\}$ и $v_2\{8\}/v_2\{4\}$, полученные коллаборацией ATLAS в столкновениях при энергии 2.76 TeV в сравнении с измеренными отношениями в эксперименте CMS при энергии 5.02 TeV. Погрешности измерений ATLAS представляют собой квадратичную сумму статистических и систематических погрешностей.	59
5.14.	Зависимость коэффициента асимметрии γ_1 , вычисленного через кумулянты эллиптического потока в анализе экспериментальных данных CMS. Гидродинамическая оценка показана синей полосой. Систематические и статистические погрешности отмечены серым.	60

5.15.	Двумерное распределение $p(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ эллиптик-степенной параметризации, полученное из конечные распределения $p(v_2)$ анализа экспериментальных данных CMS в интервалах центральности 25—30% и 55—60%. Нижние картинки представляют контурные проекции двумерных распределений.	61
6.1.	Исследование, проведенное в рамках модели HYDJET++ по чувствительности кумулянтов эллиптического потока $v_2\{n\}$, полученных методом событийного анализа на основе развертки, и с помощью многочастичных корреляций по методу Q-кумулянтов, к непотоковым эффектам. Приведены результаты оценки для центральности 35 — 40%.	63
6.2.	Исследование, проведенное в рамках модели HIJING по чувствительности кумулянтов эллиптического потока $v_2\{n\}$, полученных методом событийного анализа на основе развертки, и с помощью многочастичных корреляций по методу Q-кумулянтов, к непотоковым эффектам.	63
6.3.	Распределение эллиптического потока $p(v_2)$ в интервале центральности 20 — 25% в модели HYDJET++, полученное с равномерными распределением параметров анизотропии ϵ и δ . Синие/черные гистограммы представляют наблюдаемые/конечные (до/после процедуры развертки) смоделированные спектры. Красные точки обозначают данные ATLAS из [25].	64
6.4.	(Слева) Кумулянты $v_2\{m\}$ эллиптического потока, полученные в анализе многочастичных корреляций частиц коллаборацией ALICE для энергий столкновения 2.76 ТэВ и 5.02 ТэВ в кинематических диапазонах $ \eta < 0.8$, $0.2 < p_T < 3.0$. (Справа) Сравнение кумулянтов $v_2\{m\}$ из работы ALICE с вычисленными из моментов распределений $p(v_2)$ кумулянтами в анализе данных CMS. Результаты CMS получены при $ \eta < 1.0$, $0.3 < p_T < 3.0$	65
6.5.	(Слева) Зависимость коэффициента асимметрии γ_1^{exp} от центральности, полученная в анализе многочастичных корреляций частиц коллаборацией ALICE. (Справа) Сравнение зависимости от центральности γ_1^{exp} , полученной в работе ALICE с вычисленной в анализе CMS. На каждом рисунке синим приведены оценки теоретических расчетов.	66
6.6.	Корреляция между эллиптичностью ε_2 и гармоникой эллиптического потока v_2 для различных версий модели событийной гидродинамики.	67
6.7.	Отмасштабированные функции вероятности потока $p(\delta v_n)$ и эксцентриситета $p(\delta \varepsilon_n)$ ($n=2,3,4$) для различных версий модели событийной вязкой гидродинамики.	67
V.1.	Зависимость псевдобыстроты η от полярного угла θ	87
V.2.	$\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от энергии столкновения в системе центра масс (слева) и среднего значения участвующих частиц (справа) в интервале псевдобыстроты $ \eta < 0.5$. Представлены соответствующие зависимости для различных экспериментов, систем, и теоретических моделей.	87
V.3.	Схематическое представление столкновения двух встречных пучков частиц.	88
C.1.	Схематическое представление геометрии в оптической модели Глаубера, в поперечном (а) и продольном (б) направлениях.	90

Список таблиц

2.1.	Критерии отбора пиксельных треков анализа CMS.	25
2.2.	Критерии отбора общих треков анализа CMS.	25

4.1.	Вклады каждого из источников систематических погрешностей в общую оценку, представленные как проценты.	45
4.2.	Отборы в исследовании систематики качества треков	46
4.3.	Полная систематическая погрешность для исследуемого диапазона центральныхностей для каждой наблюдаемой, представленная как проценты.	47
5.1.	Средние значения $\langle v_2 \rangle$, дисперсии σ_{v_2} и отношения $\sigma_{v_2}/\langle v_2 \rangle$ для распределений эллиптического потока HYDJET++ модели и ATLAS данных в интервалах центральности 5 – 10%, 20 – 25% и 35 – 40%.	51
5.2.	Средние значения $\langle v_3 \rangle$, дисперсии σ_{v_3} и отношения $\sigma_{v_3}/\langle v_3 \rangle$ для распределений триангулярного потока HYDJET++ модели и ATLAS данных в интервалах центральности 5 – 10%, 20 – 25% и 35 – 40%.	53
5.3.	Параметры фитирования распределения $p(v_2)$ эллиптик-степенной параметризацией для HYDJET++ модели и переанализа данных ATLAS.	53
5.4.	Параметры фита эллиптик-степенной функцией конечных распределений $p(v_2)$ анализа данных CMS для всех рассмотренных интервалов центральности.	57

В. Релятивистская кинематика

В данном приложении приведены переменные релятивистской кинематики [75], которые используются в основном тексте диссертации для описания симметричных столкновений тяжелых ионов. Рассматриваются соотношения между описываемыми переменными в рамках физики элементарных частиц при высоких энергиях. Для описания кинематики элементарных частиц используется специальная теория относительности в качестве математического инструмента, что предполагает выполнение соотношения для энергии $E \approx pc \gg mc^2$, также как естественную систему единиц ($\hbar = c = k_B = 1$), для которой выполняется: $E^2 = p^2 + m^2$, при этом размерность энергии - [ГэВ]. Полезно также иметь ввиду соотношение единиц системы СИ в пересчете на естественную системы единиц: $1[\text{с}] = 1.52 \times 10^{24}[\text{ГэВ}^{-1}]$, $1[\text{м}] = 5.07 \times 10^{15}[\text{ГэВ}^{-1}] \rightarrow 1[\text{фм}] = 5.07[\text{ГэВ}^{-1}]$. Преимущество использования такой системы единиц заключается в том, что физика элементарных частиц при высоких энергиях описывает сильные взаимодействия, в которых время жизни $\sim 10^{-23}\text{с}$, и размеры лучше представлять в ферми (ф).

Рассмотрим столкновение двух симметричных ядер $A + A$. При работе в лабораторной системе координат (LS - laboratory system), налетающая частица с импульсом $\vec{p}_1$, массой m_1 и энергией E_1 сталкивается с частицей-мишенью массы m_2 . В таком случае 4-импульс каждой из частиц выражается как:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad p_2 = (m_2, 0), \quad (\text{B.1})$$

где было учтено релятивистское соотношение между энергией и импульсом для второй частицы: $E_2^2 = p_2^2 + m_2^2$.

С другой стороны, в системе центра масс или центра импульса (CM или CMS - center-of-mass system) импульсы частиц равны по величине, и 4-импульс может быть представлен следующим образом:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}_2). \quad (\text{B.2})$$

Поскольку в столкновении 4-импульс сохраняется, получаем следующее выражение для системы центра масс:

$$p_\mu p^\mu = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_{cm}^2 = s, \quad (\text{B.3})$$

где $\sqrt{s}$ представляет собой полную энергию столкновения в системе CMS, которая является инвариантом данной системы координат.

Для лабораторной системы координат закон сохранения 4-импульса дает:

$$p_\mu p^\mu = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2. \quad (\text{B.4})$$

Переписывая энергию налетающей частицы как $E_1 = E_{proj}$, получаем соотношение между полной энергией каждой из рассматриваемых систем:

$$E_{CM} = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_{proj} m_2}. \quad (\text{B.5})$$

Полученное выражение B.5 означает, что система центра масс CMS с инвариантной массой $\sqrt{s}$ движется в лабораторной системе координат LS в направлении вектора $\vec{p}_1$ со скоростью, соответствующей Лоренц-фактору: $\gamma_{cm} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}}$. Другими словами, “лабораторная” энергия связана с инвариантной массой системы центра масс как: $\sqrt{s} = \frac{E_{lab}}{\gamma_{cm}}$.

Из уравнения B.5 видно, что наиболее высокая энергия для рождения новых частиц может быть достигнута в экспериментах на встречных пучках, нежели в экспериментах с фиксированной мишенью. Следует отметить, что размерность $\sqrt{s}$ - [АГэВ] (А - число нуклонов в ядре). Для столкновений симметричных ядер принято выражать энергию в пересчете на нуклон-нуклонную энергию в системе центра масс, определенную как $A\sqrt{s_{NN}} = \sqrt{s}$. Таким образом, размерность $\sqrt{s_{NN}}$ представляет собой [ГэВ].

Координата вдоль направления пучка (условно обозначаемой как ось z) называется продольной, тогда как координата, перпендикулярная оси z, - поперечной (в плоскости xy). Таким образом, 3-импульс может быть разложен на продольную (p_z) и поперечную (p_T) компоненты, при этом p_T представляет собой вектор, инвариантный при преобразовании Лоренца вдоль продольного направления и называемый поперечным импульсом частицы. Угол φ - азимутальный угол частицы, определяемый относительно плоскости реакции.

Безразмерная переменная “быстрота”, определяемая как

$$y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \log \left(\frac{E + p_z}{m_T} \right), \quad (\text{B.6})$$

связана с отношением переднего к обратному световому конусу импульса. Здесь m_T обозначает поперечную массу: $m_T^2 = m^2 + p_T^2$. Следуя такому определению, свободная частица на массовой оболочке (т.е. для которой верно выражение $E^2 = p^2 + m^2$) имеет только 3 степени свободы и может быть выражена через (y, p_T) :

$$E = m_T \cosh y, \quad p_z = m_T \sinh y \quad (\text{B.7})$$

Предположим, что частица испускается под углом θ к направлению пучка. Тогда быстрота, определяемая по формуле B.6 может быть записана как:

$$y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{m^2 + p^2} + p \cos \theta}{\sqrt{m^2 + p^2} - p \cos \theta} \right). \quad (\text{B.8})$$

При высоких энергиях $p \gg m$, тогда:

$$y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{p + p \cos \theta}{p - p \cos \theta} \right) = -\log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \equiv \eta, \quad (\text{B.9})$$

где η обозначает псевдобыстроту и показывает, насколько направление движения элементарной частицы отличается от направления оси пучка. Рисунок B.1 показывает зависимость псевдобыстроты от полярного угла θ . Переменная η используется в описании экспериментальных данных на коллайдерах.

Множественность частиц M определяет число частиц в событии. В экспериментальных данных часто используется множественность заряженных частиц, а также множественность заряженных частиц в интервале “средней быстроты” (multiplicity at midrapidity), обозначаемая как $\langle \frac{dN}{d\eta} \rangle / 0.5 \langle N_{part} \rangle$, показанная на Рисунке слева в зависимости от энергии в системе центра масс в различных экспериментах [76]. Справа представлена зависимость этой наблюдаемой от центральности столкновения, выраженной в данном случае через среднее число “участвующих” частиц. Также представлены теоретические описания наблюдаемой различными моделями.

Центральность столкновения с определяется отношением доли неупругого сечения $\Delta\sigma_{in}$ к полному неупругому геометрическому сечению σ_{in} , что соответствует доле измеренных событий в эксперименте к полному числу в процентах:

$$c = \frac{\Delta\sigma_{in}}{\sigma_{in}} = \frac{\Delta N_{ev}}{N_{ev}}. \quad (\text{B.10})$$

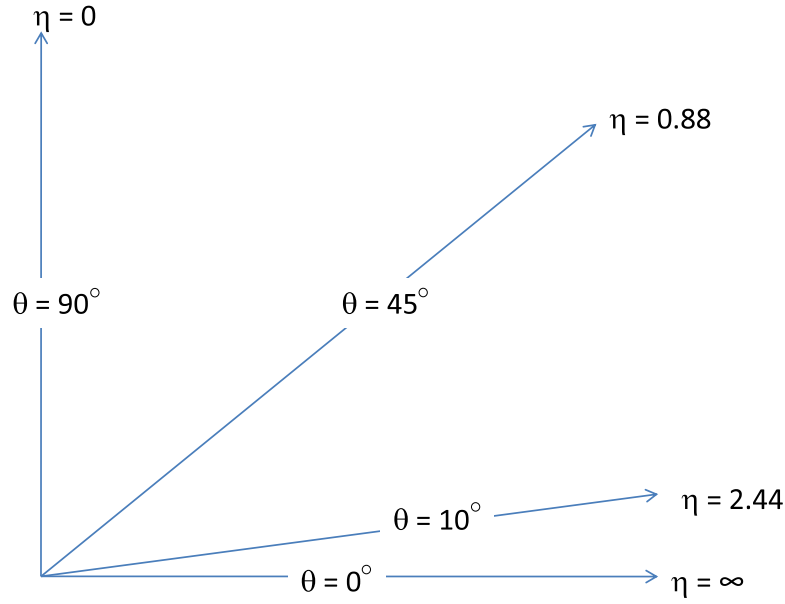


Рисунок В.1.: Зависимость псевдобыстроты η от полярного угла θ .

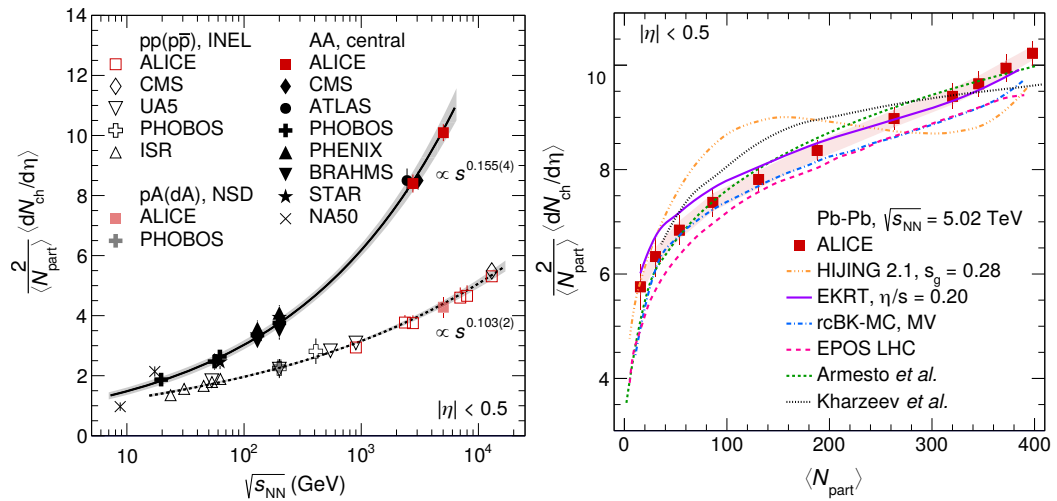


Рисунок В.2.: $\frac{2}{\langle N_{part} \rangle} \langle dN/d\eta \rangle$ в зависимости от энергии столкновения в системе центра масс (слева) и среднего значения участвующих частиц (справа) [76]. Представлены соответствующие зависимости для различных экспериментов, систем, и теоретических моделей.

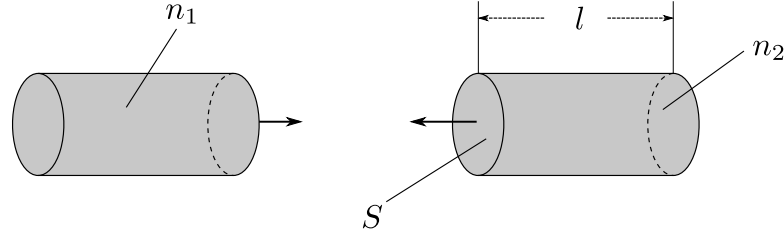


Рисунок В.3.: Схематическое представление столкновения двух встречных пучков частиц.

В модели Глаубера центральность столкновения связана с прицельным параметром $\vec{b}$ (вектором, соединяющим центры ядер) как $s = \pi b^2 / \pi(R_A + R_B)^2$.

Количество событий N_{ev} (другими словами, количество взаимодействий), произведенных за единицу времени для данного процесса, определяется по формуле:

$$\frac{dN_{ev}}{dt} = L\sigma = jnSl\sigma, \quad (B.11)$$

где L представляет собой “машинную” светимость, σ обозначает эффективное поперечное сечение интересующего процесса, j - плотность потока частиц, S - поперечная площадь мишени, l - толщина мишени в направлении пучка, n - концентрация ядер. Упрощенная схема столкновения двух пучков частиц (банчей) в коллайдере представлена на Рисунке В.3. Принимая левый сгусток n_1 частиц за налетающую частицу, а правый сгусток, имеющий n_2 частиц, за мишень, получаем число взаимодействий в единицу времени:

$$\frac{dN_{ev}}{dt} = \frac{n_1}{S} n_2 \sigma, \quad (B.12)$$

где учтено, что плотность потока частиц левого банча, падающая на правый: $j = n_1/S$, а полное число частиц в правом сгустке равно $n_2 = nSl$. Если принять частоту столкновений за f , то светимость L коллайдера дается выражением:

$$L = f \frac{n_1 n_2}{S}. \quad (B.13)$$

Размерность светимости $[\text{см}^{-2}\text{с}^{-1}]$. Часто используют также интегральную светимость, — светимость, умноженную на время работы ускорителя, выражаемую в обратных фемтобарнах $[\text{фм}^{-1}]$.

С. Модели начального состояния

1. Модель Глаубера (MC-Glauber)

Модель Глаубера [77] была разработана для решения задачи рассеяния при высоких энергиях с составными частицами. На протяжении многих лет (начиная с изначальных работ Глаубера 1950х годов), развитие подхода Глаубера привело к созданию техники Монте-Карло Глаубера (MC-Glauber), которая до сих пор широко используется научным сообществом для моделирования начального состояния в столкновениях тяжелых ионов.

Для того, чтобы использовать подход Глаубера для расчета любых геометрических параметров, в качестве входных параметров необходимо использовать некоторые экспериментальные данные. Например, одним из наиболее важных входных параметров является плотность распределения заряда, которая измеряется в экспериментах рассеяния электронов низкой энергии:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + \omega(r/R)^2}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} . \quad (\text{C.1})$$

Как видно из уравнения C.1, она обычно параметризуется распределением Ферми с тремя параметрами: ρ_0 обозначает плотность нуклонов в центре ядра, R представляет собой радиус ядра, a — константа, характеризующая “диффузный” край, и ω характеризует отличия от сферической формы.

Другим необходимым входным параметром является неупругое нуклон-нуклонное поперечное сечение, которое невозможно вычислить с использованием пертурбативной КХД, так как поперечное сечение включает процессы с малой передачей импульса. В связи с этим необходимо экспериментально измерить сечение σ_{inel}^{NN} , которое дает нетривиальную энергетическую зависимость в вычислениях подходом Глаубера.

Модель Глаубера рассматривает столкновение двух ядер с точки зрения индивидуально-го взаимодействия составляющих их нуклонов. Модель предполагает, что при достаточно высоких энергиях нуклоны будут иметь достаточный импульс, чтобы не отклоняться от траектории движения, когда ядра проходят друг через друга. Предполагается, что нуклоны движутся независимо в ядре и что размер ядра является большим по сравнению со степенью нуклон-нуклонной силы. Гипотеза независимых линейных траекторий составляющих нуклонов позволяет получить достаточно простые аналитические выражения для поперечного сечения взаимодействия двух ядер, числа взаимодействующих нуклонов и числа нуклон-нуклонных столкновений. Рисунок C.1 схематически показывает геометрию в оптической модели Глаубера, в поперечном (a) и продольном (b) направлениях. Два тяжелых иона, — мишень A (target) и налетающее ядро B (projectile), — сталкиваются при релятивистских скоростях с некоторым прицельным параметром $\vec{b}$. Рассмотрим две потоковые трубки, расположенные на расстоянии $\vec{s}$ от центра мишени и на расстоянии $\vec{s} - \vec{b}$ от центра налетающей частицы. Во время столкновения эти трубки перекрываются. Вероятность на единицу поперечной площади, что данный нуклон находится в потоковой трубке мишени, равна $T_A(\vec{s}) = \int \rho_A(\vec{s}, z_A) dz_A$, где $\rho_A(\vec{s}, z_A)$ — вероятность на единицу объема (нормированная на единицу) найти нуклон в $(\vec{s}, z_A)$. Аналогичное выражение можно определить для налетающей частицы, и в итоге $T_A(\vec{s})T_B(\vec{s} - \vec{b})d^2s$ дает полную вероятность, что нуклоны находятся в соответствующих перекрывающихся потоковых трубках

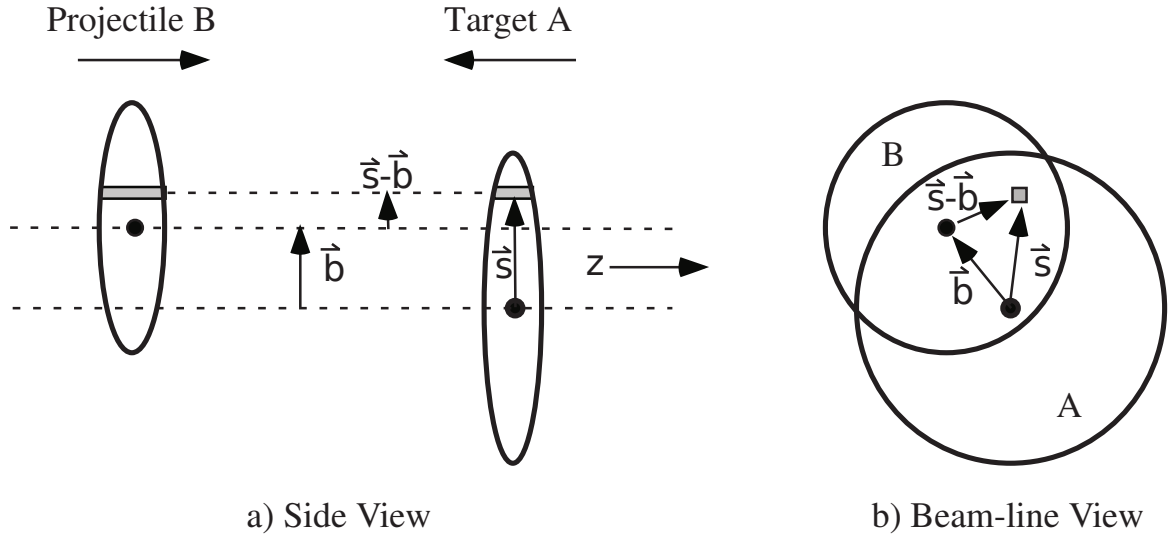


Рисунок С.1.: Схематическое представление геометрии в оптической модели Глаубера, в поперечном (а) и продольном (б) направлениях. [77]

площади d^2s . Интегрируя это выражение по всем $\vec{s}$, получаем так называемую функцию перекрытия двух ядер (“функцию толщины”, “thickness function”):

$$T_{AB}(\vec{b}) = \int T_A(\vec{s})T_B(\vec{s} - \vec{b})d^2s . \quad (C.2)$$

Заметим, что $T(\vec{b})$ имеет размерность, обратную площади. Это можно интерпретировать как эффективную область перекрытия, для которой конкретный нуклон в А может взаимодействовать с данным нуклоном из В. Вероятность такого взаимодействия будет $T(\vec{b})\sigma_{inel}^{NN}$, где σ_{inel}^{NN} обозначает нуклон-нуклонное неупругое сечение. Упругие процессы, с другой стороны, ведут лишь к малым потерям энергии и не учитываются в модели Глаубера. Вектор прицельного параметра может быть заменен скаляром, если ядра не поляризованы. В этом случае полное сечение можно выразить как:

$$\sigma_{inel}^{A+B} = \int_0^\infty 2\pi b db \left\{ 1 - [1 - T_{AB}(b)\sigma_{inel}^{NN}]^{AB} \right\} . \quad (C.3)$$

Полное число нуклон-нуклонных соударений будет выражено через биномиальное распределение вероятности иметь n взаимодействий между А и В:

$$N_{coll}(b) = \sum_{n=1}^{AB} n P(n, b) = AB T_{AB}(b) \sigma_{inel}^{NN} . \quad (C.4)$$

Число нуклонов в мишени и налетающей частице, которые взаимодействуют, называется числом участников или числом “раненых” нуклонов. Для заданного значения прицельного параметра b оно задается по формуле:

$$N_{part}(\vec{b}) = A \int T_A(\vec{s}) \left\{ 1 - [1 - T_B(\vec{s} - \vec{b})\sigma_{inel}^{NN}]^B \right\} d^2s + \\ + B \int T_B(\vec{s} - \vec{b}) \left\{ 1 - [1 - T_A(\vec{s})\sigma_{inel}^{NN}]^A \right\} d^2s . \quad (C.5)$$

В анзаце модели Монте-Карло Глаубера два встречных ядра создаются в компьютерной симуляции посредством распределения А нуклонов ядра А и В нуклонов ядра В в трехмерной системе координат в соответствии с выбранным распределением ядерной плотности. После этого из распределения $d\sigma/db = 2\pi b$ вычисляется случайный прицельный

параметр b . Ядро-ядерное столкновение рассматривается как последовательность независимых (парных) нуклон-нуклонных столкновений. Нуклоны движутся по прямолинейным траекториям, а неупругое нуклон-нуклонное сечение считается не зависящим от числа предшествующих столкновений нуклона. В простейшей версии подхода Монте-Карло нуклон-нуклонное столкновение происходит, если расстояние между ними d в плоскости, ортогональной оси пучка, удовлетворяет выражению:

$$d \leq \sqrt{\sigma_{inel}^{NN}/\pi} . \quad (C.6)$$

Такое моделирование позволяет оценить экспериментальные наблюдаемые, и провести соотношение между параметрами геометрии Глаубера (b, N_{part}) и соответствующими экспериментальными наблюдаемыми (c, N_{ch}).

2. Модель CGC: Color glass condensate

Модели MC-KLN [78, 79] и IP-Glasma [71] начального состояния основаны на подходе “конденсата цветового стекла” (CGC, Color glass condensate) [80] к описанию сильных взаимодействий при высоких плотностях. Данный подход представляет собой эффективную теорию поля, основанную на разделении степеней свободы на быстромерзающие источники цвета и медленные динамические цветовые поля. При этом независимость физических величин относительно критерия отрезания, разделяющего два вида степеней свободы, обеспечивается уравнением перенормировки группы (JIMWLK equation). Быстрые глюоны с продольным импульсом $k^+ > \Lambda^+$ замораживаются в силу релятивистского замедления времени Лоренца в конфигурациях, которые определяются цветовым током $J_a^\mu = \delta^{\mu+} \rho^a$. При этом $\rho^a(x^-, x_\perp)$ обозначает соответствующую плотность цветового заряда. Глюоны с продольным импульсом $k^+ < \Lambda^+$, напротив, описываются стандартными калибровочными полями A^μ квантовой хромодинамики. В связи с такой иерархией, два вида степеней свободы связываются эйконально с помощью $J_\mu A^\mu$, при этом быстрые глюоны являются источниками полей, которые представляют медленные глюоны.