

ЗАДАЧИ

для подготовки к курсу “Теория случайных процессов” Д.Д.Соколова
(весна 2017/2018 учебного года)

Тригонометрия

1. Решить уравнения:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$, б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\cos x = -\frac{1}{2}$, г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Преобразовать к синусам и косинусам от x и y :

а) $\cos(2x - y)$, б) $\cos(x + 2y)$, в) $\sin(2x + y)$, г) $\sin(x - 2y)$.

3. Преобразовать в сумму косинусов или синусов кратных углов:

а) $\cos 2x \cos 3x$, б) $\sin 7x \cos x$, в) $\sin 5x \sin 4x$.

Алгебра

4. Привести к общему знаменателю:

а) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2}$, б) $\frac{2}{x+5} - \frac{3}{x+2}$, в) $\frac{3}{x+2} + \frac{6}{x+1} - \frac{1}{x+4}$.

5. Разложить в сумму элементарных дробей:

а) $\frac{1}{(x+2)(x+4)}$, б) $\frac{1}{(x+3)(x+5)(x+9)}$.

6. Найти собственные числа и собственные вектора матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Решить уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

8. Разложить по формуле Тейлора

порядка 5: а) e^{-2x} , б) $\frac{4}{2+x}$; порядка 10: в) e^{x^2} , г) $\frac{1}{1-x^3}$.

9. Найти производную функции:

а) $x^3 + e^{2x} + \cos 5x$, б) $x^2 e^{3x}$, в) $\frac{x^2 - 4}{x^3 + x + 5}$, г) $\frac{\cos(xe^x)}{1 + x^2}$.

10. Найти первые и вторые частные производные функции $f(x, y)$:

а) $x^3 e^{2y}$, б) $(2x + y) \cos(x - 2y)$, в) $\sin(x^2 + y^3)$.

11. Вычислить интеграл:

а) $\int_0^1 \frac{2+3x}{1+x} dx$, б) $\int_0^1 \frac{3+2x}{\sqrt{1+x}} dx$, в) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$.

12. Вычислить интеграл:

а) $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$, б) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} \cos 2x dx$, в) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos 3x dx$,
г) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, д) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$, е) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+4x} dx$.

13. Вычислить интеграл:

а) $\int_0^1 \cos x \cos 5x dx$, б) $\int_0^1 (1-x) \cos 2x dx$, в) $\int_0^1 (1-x^2) \cos 3x dx$.

14. Найти квадрат модуля комплексного числа:

а) $2 + 3i$, б) $\frac{1}{3 + 4i}$, в) $\frac{2 + 5i}{3 + 4i}$, г) $\frac{1}{2 + 3i} + \frac{1}{1 - 4i}$.

15. Вычислить интеграл:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|+i\lambda x} dx$, б) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+i\lambda x} dx$,
в) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + 9} dx$, г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x^2 + 2x + 5} dx$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

16. Решить дифференциальные уравнения при начальном условии $x(0) = x_0 > 0$:

а) $x' = 2x + 1$, б) $x' = x^2$, в) $x' = x^{1/3}$, г) $x' = e^x$.

Теория вероятностей

17. Вычислить математическое ожидание и дисперсию распределений:

- а) равномерного на отрезке $[a, b]$,
- б) показательного с параметром λ ;
- в) нормального с параметрами a и σ^2 ;

18. Найти характеристические функции распределений:

- а) равномерного на отрезке $[a, b]$,
- б) показательного с параметром λ ;
- в) нормального с параметрами a и σ^2 ;
- г) Лапласа с плотностью

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0.$$

- д) Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{c}{\pi(c^2 + (x - \alpha)^2)}, \quad c > 0.$$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

для подготовки к курсу “Теория случайных процессов” Д.Д.Соколова
(весна 2017/2018 учебного года)

1. а) $\pi/6+2\pi k$, $5\pi/6+2\pi k$; б) $-\pi/3+2\pi k$, $-2\pi/3+2\pi k$; в) $\pm 2\pi/3+2\pi k$;
г) $\pm \pi/6 + 2\pi k$.

2. а) $(\cos^2 x - \sin^2 x) \cos y + 2 \sin x \cos x \sin y$; б) $(\cos^2 y - \sin^2 y) \cos x - 2 \sin x \sin y \cos y$; в) $2 \sin x \cos x \cos y + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin y$; г) $(\cos^2 y - \sin^2 y) \sin x - 2 \cos x \sin y \cos y$.

3. а) $(\cos 5x + \cos x)/2$; б) $(\sin 6x + \sin 8x)/2$; в) $(\cos x - \cos 9x)/2$.

4.

$$\text{а) } \frac{10x+13}{(x+1)(x+2)}, \quad \text{б) } -\frac{x+11}{(x+2)(x+5)}, \quad \text{в) } \frac{8x^2+48x+58}{(x+1)(x+2)(x+4)}.$$

5.

$$\text{а) } \frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2(x+4)} \quad \text{б) } \frac{1}{12(x+3)} - \frac{1}{8(x+5)} + \frac{1}{24(x+9)}.$$

6. а) $\lambda_1 = 5$, $\vec{v}_1 = (-1, 1)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{v}_2 = (1, 2)^T$; б) $\lambda_1 = 3$, $\vec{v}_1 = (2, 2, -1)^T$; $\lambda_2 = 6$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 2)^T$; $\lambda_3 = 9$, $\vec{v}_3 = (2, -1, 2)^T$; в) $\lambda_{1,2} = 0$, собственное пространство с базисом из векторов $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1)^T$; $\lambda_3 = 6$, $\vec{v}_3 = (1, -1, 2)^T$.

7. а) $(5, -2)^T$; б) $(-1, 2, 3)^T$.

8.

а)

$$1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + o(x^5);$$

б)

$$2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{16} + o(x^5);$$

в)

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{10}}{120} + o(x^{10});$$

г)

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + o(x^{10}).$$

9. а) $3x^2 + 2e^{2x} - 5 \sin 5x$; б) $(2x + 3x^2)e^{3x}$;

в)

$$\frac{-x^4 + 13x^2 + 10x + 4}{(x^3 + x + 5)^2};$$

Г)

$$-\frac{(1+x)(1+x^2)e^x \sin(xe^x) + 2x \cos(xe^x)}{(1+x^2)^2}.$$

10.

а)

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= 3x^2 e^{2y}, & \partial f / \partial y &= 2x^3 e^{2y}, \\ \partial^2 f / \partial x^2 &= 6x e^{2y}, & \partial^2 f / \partial x \partial y &= 6x^2 e^{2y}, & \partial^2 f / \partial y^2 &= 4x^3 e^{2y};\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= 2 \cos(x-2y) - (2x+y) \sin(x-2y), \\ \partial f / \partial y &= \cos(x-2y) + 2(2x+y) \sin(x-2y), \\ \partial^2 f / \partial x^2 &= -(4 \sin(x-2y) + (2x+y) \cos(x-2y)), \\ \partial^2 f / \partial x \partial y &= 3 \sin(x-2y) + 2(2x+y) \cos(x-2y), \\ \partial^2 f / \partial y^2 &= 4 \sin(x-2y) - 4(2x+y) \cos(x-2y);\end{aligned}$$

В)

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= 2x \cos(x^2 + y^3), & \partial f / \partial y &= 3y^2 \cos(x^2 + y^3), \\ \partial^2 f / \partial x^2 &= 2 \cos(x^2 + y^3) - 4x^2 \sin(x^2 + y^3), \\ \partial^2 f / \partial x \partial y &= -6xy^2 \sin(x^2 + y^3), \\ \partial^2 f / \partial y^2 &= 6y \cos(x^2 + y^3) - 9y^4 \sin(x^2 + y^3).\end{aligned}$$

11. а) $3 - \ln 2$; б) $(14\sqrt{2} - 10)/3$; в) $(\pi - 2 \ln 2)/4$.

12. а) $1/4$; б) $3/13$; в) $-0,08$; г) $\sqrt{\pi}/2$; д) $1/2$; е) $\sqrt{\pi}e^4$.

13. а) $(3 \sin 4 + 2 \sin 6)/24$; б) $(1 - \cos 2)/4$; в) $2(\sin 3 - 3 \cos 3)/27$.

14. а) 13 ; б) $1/25$; в) $29/25$; г) $10/221$.

15. а) $2/(1 + \lambda^2)$; б) $\sqrt{\pi}e^{-\lambda^2/4}$; в) $(\pi/3)e^{-3|\lambda|}$; г) $(\pi/2)e^{-2|\lambda| - i\lambda}$.

16. а) $(e^{2t}(2x_0 + 1) - 1)/2$; б) $x_0/(1 - x_0 t)$, $t < 1/x_0$; в) $((2/3)t + x_0^{2/3})^{3/2}$;

г) $-\ln(e^{-x_0} - t)$, $t < e^{-x_0}$.

17.

$$\text{а) } \frac{a+b}{2}, \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \text{б) } \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}; \quad \text{в) } a, \sigma^2.$$

18.

$$\text{а) } \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}; \quad \text{б) } \frac{\lambda}{\lambda - it}; \quad \text{в) } e^{iat - \sigma^2 t^2/2}; \quad \text{г) } \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}; \quad \text{д) } e^{iat - c|t|}.$$