Произведение независимых случайных величин. Показатель Ляпунова и скорости роста статистических моментов.

Произведение случайных величин.

Рассмотрим случайную величину мультипликативного типа, т.е. являющуюся произведением большого числа одинаково распределенных независимых случайных величин. Пусть, скажем, ξ_j, $j = 1, ..., N$, принимает с одинаковой вероятностью $1/2$ значения 0 и 2. Тогда случайная величина, равная произведению

$$\xi = \prod_{j=1}^{N} \xi_j = \xi_1 \xi_2 ... \xi_i ... \xi_N$$

почти для всех возможных реализаций ξ_j принимает нулевое значение. Исключением является лишь одна реализация, когда все ξ_j принимают значение 2. Вероятность этой уникальной реализации крайне мала, при больших N она равна 2^{-N}. С другой стороны, ξ в этой реализации очень велика и равна 2^N.

Случайная величина ξ оказывается распределенной удивительным образом. Она вовсе не похожа на гауссовскую. Практически все значения нулевые, кроме одного, очень большого. Но именно этим значением определяется *среднее*

$$\langle \xi \rangle = \frac{\text{сумма всех реализаций}}{\text{число реализаций}} = \frac{0 + 0 + ... + 0 + 2^N}{2^N} = 1$$

Средний квадрат

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\text{сумма квадратов всех реализаций}}{\text{число реализаций}} = \frac{0 + 0 + ... + 0 + 2^{2N}}{2^N} = 2^N$$

экспоненциально растет с ростом N. Еще быстрее растут следующие *моменты*: $\langle \xi^3 \rangle, \langle \xi^4 \rangle, ..., \langle \xi^p \rangle = 2^{(p-1)N}$.

<u>*Скорость роста моментов*</u> равна

$$\gamma_p \equiv \frac{\log_2 \langle \xi^p \rangle}{N} = p - 1 \tag{1}$$

Отсюда видим, что с ростом p растет и скорость роста момента. В пределе $p \to \infty$, $\gamma_p \to p$.

Подобное поведение случайной величины в науке принято называть перемежаемостью. Величина

$$\gamma = \lim_{N \to \infty} \frac{\ln \xi}{N}$$

называется *показателем Ляпунова*. Подобно тому, как гауссовская величина является типичной характеристикой суммы большого числа случайных величин, перемежаемая случайная величинаслужит характеристикой произведения большого числа сомножителей.

Представленный простой пример может показаться патологическим из-за наличия нулей. Однако появление перемежаемости вовсе не связано с нулями. Пусть, например, ξ_j распределены логнормально. Тогда логарифм произведения

$$\ln \xi = \ln \xi_1 + \ln \xi_2 + ... + \ln \xi_N$$

представляет собой сумму большого числа гауссовских случайных величин. Поэтому в пределе больших N

$$\ln \xi \sim N^{1/2} \sigma \eta + \mu,$$

где η - гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией, а $sigma$ и μ - стандартное уклонение и математическое ожидание логарифмов. *Среднее значение* логнормальной величины равно (при $\mu = 0$)

$$\langle \xi^2 \rangle = \int \xi(\eta) P(\eta)\, d\eta \sim \int \exp(N^{1/2}\eta)\, \exp(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2})\, d\eta \sim \exp \frac{N\sigma^2}{2}$$

Оно, в отличие от отдельной реализации, растет монотонно и экспоненциально. Также экспоненциально растут и другие *статистические моменты*

$$\langle \xi^p \rangle \sim \exp \frac{Np^2\sigma^2}{2}$$

Скорость роста p-го момента

$$\gamma_p = \lim_{N \to \infty} \frac{\ln \langle \xi^p \rangle}{N} \tag{2}$$

неограниченно возрастает с ростом p.

Показатель Ляпунова равен $\gamma = \mu$.

Таким образом, этот более реалистический пример сохраняет все черты перемежаемости.