ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

для студентов 4 курса отделения механики,
весна 2018/2019 учебного года

1. Примеры моделирования случайных процессов

1.1. Винеровский процесс. Будем моделировать винеровский процесс с шагом h =0,01 на отрезке $[0,T]$, $T=1$. Положим $t_n=(n-1)h$. Введем в ячейку A1 формулу =(СТРОКА()-1)/100 и скопируем в ячейки A2:A101. В столбце A получим текущее время.

Будем исходить из того, что $w(0)=0$ и

$$w(t+h)=w(t)+\sqrt{h}N(0,1).$$

Введем в ячейки B2:B101 формулу =НОРМСТОБР(СЛЧИС()) и таким образом, получим там набор независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением. Далее, введем в ячейку C1 ноль, а в ячейку C2 формулу =C1+0,1*B2, и затем скопируем ячейку C2 в ячейки C3:C101. Таким образом, получаем значения винеровского процесса.

Теперь можно нарисовать его график (точнее, его кусочно-линейное приближение) с помощью меню Вставка –>Диаграмма, выбрав тип диаграммы — точечный, на котором значения соединены отрезками. В качестве значений X надо выбрать ячейки A1:A101, в качестве значений Y — ячейки C1:C101.

1.2. Процесс Орнштейна–Уленбека. Будем моделировать процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами $\sigma=1$ и $\alpha=1$ на той же временной сетке. Используем столбцы A (время) и B (случайные величины).

Будем исходить из того, что $\xi(0)=N(0,\sigma^2)$ и

$$\xi(t+h)=e^{-\alpha h}\xi(t)+\sigma\sqrt{1-e^{-2\alpha h}}N(0,1).$$

Введем в ячейку D1 формулу =НОРМСТОБР(СЛЧИС()) и в ячейку D2 формулу =EXP(-0,01)*D1+КОРЕНЬ(1-EXP(-0,02))*B2, и затем скопируем ячейку D2 в ячейки D3:D101. Таким образом, получаем значения процесса Орнштейна–Уленбека.

Теперь можно нарисовать его график, как и в предыдущем случае. В качестве значений X надо выбрать ячейки A1:A101, в качестве значений Y — ячейки D1:D101.

1.3. Пуассоновский процесс. Будем моделировать пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 1$ как процесс восстановления с показательно распределенными промежутками между скачками, до $K = 10$ скачков. Показательно распределенную случайную величину с параметром λ можно представить в виде $(1/\lambda)(-\ln U)$, где U равномерно распределена на $[0, 1]$.

Введем в ячейку G1 формулу =ЦЕЛОЕ((СТРОКА()-1)/2) и скопируем в ячейки G2:G21. Это будут значения пуассоновского процесса от 0 до 10 (повторения соответствуют промежуткам постоянства).

Введем в ячейку F1 ноль, а в ячейку F2 формулу =F1-LN(СЛЧИС())*(ОСТАТ(СТРОКА();2)=0) и скопируем ячейку F2 в ячейки F3:F21. Это будут моменты времени (повторения соответствуют точкам до и после скачка).

Теперь можно нарисовать график, как и в предыдущем случае. В качестве значений X надо выбрать ячейки F1:F21, в качестве значений Y — ячейки G1:G21.

2. Задание

1. Провести моделирование процессов с указанными в вариантах значениями параметров, а также процесса, заданного функцией от винеровского процесса и, возможно, времени. Сделать графики трех разных траекторий каждого процесса.

2. Изучив раздел учебника C9, вычислить стационарные вероятности[1] для цепи Маркова из задачи для самостоятельного решения к главе 9 с номером, указанным в варианте, провести моделирование за 1000 шагов, найти относительные частоты, сравнить их с вероятностями, оценить погрешность (как максимум из модулей отклонений).

Результаты представить в виде отчета в PDF, содержащего пояснения, как делали, и графики, с приложением файла-таблицы в Excel.

Названия файлов в виде: NNNMM_Фамилия, где NNN — номер группы, MM — номер студента в списке группы, представленном старостой, он же номер варианта.

[1]Заодно сравнить с ответами в книге.

Варианты

01. $h =$0,01; $T = 5$; $\alpha = 1$; $\sigma^2 = 2$; $\lambda = 3$; $K = 10$; $\eta(t) = (w(t) + 1)^2$; N 1.
02. $h =$0,005; $T = 2$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 3$; $\lambda = 2$; $K = 7$; $\eta(t) = \sin(2w(t) + \pi/6)$; N 2.
03. $h =$0,01; $T = 2$; $\alpha = 3$; $\sigma^2 = 4$; $\lambda = 5$; $K = 8$; $\eta(t) = \exp\{t + w(t)\}$; N 3.
04. $h =$0,005; $T = 3$; $\alpha = 4$; $\sigma^2 = 6$; $\lambda = 4$; $K = 12$; $\eta(t) = (w(t) - 1)^3$; N 4.
05. $h =$0,01; $T = 8$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 5$; $\lambda = 3$; $K = 11$; $\eta(t) = \cos(3w(t) + \pi/3)$; N 5.
06. $h =$0,005; $T = 4$; $\alpha = 5$; $\sigma^2 = 7$; $\lambda = 5$; $K = 9$; $\eta(t) = \exp\{w(t) - t\}$; N 6.
07. $h =$0,01; $T = 3$; $\alpha = 3$; $\sigma^2 = 9$; $\lambda = 2$; $K = 10$; $\eta(t) = (w(t) - 2)^3$; N 7.
08. $h =$0,005; $T = 5$; $\alpha = 4$; $\sigma^2 = 8$; $\lambda = 4$; $K = 6$; $\eta(t) = \sin(4w(t) + \pi/4)$; N 8.
09. $h =$0,01; $T = 10$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 3$; $\lambda = 3$; $K = 7$; $\eta(t) = \exp\{2w(t) - t/5\}$; N 9A.
10. $h =$0,005; $T = 2$; $\alpha = 5$; $\sigma^2 = 4$; $\lambda = 7$; $K = 15$; $\eta(t) = (2w(t) + 1)^4$; N 9Б.
11. $h =$0,01; $T = 8$; $\alpha = 3$; $\sigma^2 = 2$; $\lambda = 6$; $K = 12$; $\eta(t) = \cos(w(t) + \pi/6)$; N 10A.
12. $h =$0,005; $T = 4$; $\alpha = 4$; $\sigma^2 = 6$; $\lambda = 8$; $K = 9$; $\eta(t) = \exp\{t/2 + w(t)\}$: N 10Б.
13. $h =$0,01; $T = 11$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 8$; $\lambda = 3$; $K = 7$; $\eta(t) = (w(t) + 2)^2/4$; N 1.
14. $h =$0,005; $T = 2$; $\alpha = 1$; $\sigma^2 = 9$; $\lambda = 5$; $K = 8$; $\eta(t) = \sin(3w(t) + \pi/3)$; N 2.
15. $h =$0,01; $T = 2$; $\alpha = 3$; $\sigma^2 = 5$; $\lambda = 4$; $K = 9$; $\eta(t) = \exp\{2w(t) - t\}$; N 3.
16. $h =$0,005; $T = 7$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 3$; $\lambda = 7$; $K = 14$; $\eta(t) = (w(t) - 1)^5$; N 4.
17. $h =$0,01; $T = 3$; $\alpha = 3$; $\sigma^2 = 4$; $\lambda = 4$; $K = 8$; $\eta(t) = \cos(3w(t) - \pi/6)$; N 5.
18. $h =$0,005; $T = 2$; $\alpha = 2$; $\sigma^2 = 6$; $\lambda = 5$; $K = 10$; $\eta(t) = (w(t) + 1)^5$; N 6.