

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



МИХОВИЧ АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

**ФУНКТОР СХЕМАТИЗАЦИИ В РАЗМЕРНОСТИ ДВА
И АСФЕРИЧНОСТЬ**

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научные руководители: **Мищенко Александр Сергеевич**

доктор физико-математических наук

Мануйлов Владимир Маркович

доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Янчевский Вячеслав Иванович**

доктор физико-математических наук

академик НАН Беларуси,

заведующий отделом алгебры

института математики НАН Беларуси

Каледин Дмитрий Борисович

доктор физико-математических наук

профессор РАН,

в.н.с. отдела алгебраической геометрии

МИАН им. В.А. Стеклова

Романовский Николай Семенович

доктор физико-математических наук,

г.н.с института математики

им. С.Л. Соболева РАН, Новосибирск

Защита диссертации состоится "17" мая 2019 года в 16.45 на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14.08. E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на сайте ИАС "ИСТИНА": <https://www.istina.msu.ru/dissertations/182730881>

Автореферат разослан "12" апреля 2019 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.01.17

член корреспондент РАН



А.И. Шафаревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задача изучения подкомплексов асферических двумерных CW -комплексов была впервые поставлена Д.Г.К. Уайтхедом¹ в 1941 году в связи с вопросом об асферичности дополнения к узлу в трехмерной сфере. Несмотря на усилия нескольких поколений математиков, данный вопрос остается открытым и по сей день, обзор имеющихся результатов содержится в статье В. Боглей². Одним из первых примеров асферических 2-комплексов являются CW -комплексы, построенные по копредставлениям дискретных групп с одним соотношением, у которых соотношение r не является степенью ($r \neq s^n, n > 1$). Ключом к пониманию феномена асферичности является G -модульная структура модуля соотношений копредставления группы. Несмотря на простоту структуры модуля соотношений копредставлений групп с одним соотношением (ввиду теоремы Линдона “о тождествах” строение таких модулей соотношений полностью описано), нельзя сказать, что глубинная природа данного феномена понятна до конца. По аналогии с дискретными копредставлениями в 1962 году Ж.-П. Серр³ на семинаре Бурбаки сформулировал Вопрос (10.2) о структуре модуля соотношений про- p -групп с одним соотношением, который мы рассматриваем с позиции концепции проунипотентных гомотопических типов в данной работе.

Возвращаясь к вопросу Уайтхеда, напомним, что В. Боглей и М.Дайер⁴ получили теоретико-групповую редукцию, позволяющую вместо двумерных комплексов и их подкомплексов рассматривать асферические копредставления и подкопредставления дискретных групп. Обзор В. Боглей⁵ содержит библиографию, в которой описываются раз-

¹Whitehead J. H. C. On Adding Relations to Homotopy Groups. Annals of Mathematics. Second Series. Vol. 42, No. 2 (Apr. 1941). pp. 409-428

²Bogley W. A. Whitehead’s asphericity question. In: Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory. C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski editors. London Math. Soc. Lecture Note Series 197. Cambridge University Press. 1993. 309–334.

³Серр Ж.-П. Структура некоторых про- p -групп. Собрание сочинений. Т.3. М.: МЦНМО. 2007.

⁴Bogley W. A., Dyer M. N. A group-theoretic reduction of J. H. C. Whitehead’s asphericity question. in: Groups-Korea 94. Walter de Gruyter. 1995. 15–24.

⁵там же

личные классы асферических копредставлений, а также достаточные условия, обеспечивающие асферичность их подкопредставлений. Чуть более общие по сравнению с асферическими классы дискретных, а также про- p копредставлений, рассматривались в работах И. Чизвелла, Д. Коллинза, Й. Хьюбшманна⁶ и О.В. Мельникова⁷, где авторы изучали вопросы о строении комбинаторно-асферических дискретных копредставлений и, соответственно, “асферических” про- p -копредставлений. Несмотря на множество структурных результатов, именно проблема доказательства принадлежности ряда ключевых классов копредставлений к “асферическим” представляется наиболее сложной (например подкопредставлений асферических копредставлений в дискретном случае и про- p -копредставлений про- p -групп с одним соотношением) .

Определенный в диссертации класс квазирациональных копредставлений (QR -копредставлений) не только включает в себя асферические копредставления и их подкопредставления в дискретном случае, но и про- p -копредставления про- p -групп с одним соотношением в про- p -случае. Мы показываем, что QR -копредставления удовлетворяют ожиданиям, высказанным О.В. Мельниковым в виде предположения, о существовании хорошего класса копредставлений (“оболочки”), содержащего асферические копредставления. Работа с копредставлениями в рамках данного класса позволяет избежать указанных выше недостатков и унифицированно с помощью техники групповых схем исследовать их структуру.

Существенный сегмент работы состоит в разработке гомотопического арсенала для изучения QR -копредставлений. Наш подход лежит в русле анонсированной Гротендиком⁸ концепции схемных гомотопических типов (идея которой состоит в замене симплициальных групп на симплициальные аффинные групповые схемы), различные варианты которой реализованы в работах Б. Тоэна⁹, Д. Придхэма^{10,11} и Л. Кацар-

⁶Chiswell I., Collins D.J., Huebschmann J. Aspherical group presentations. Math.Z. 178. 1981. 1–36.

⁷Мельников О. В. Асферические про- p -группы. Мат.сборник. Том 193. 11. 2002.

⁸Grothendieck A. Pursuing stacks. 1983. <https://ncatlab.org/nlab/show/Pursuing+Stacks>

⁹Toën B. Affine stacks (Champs affines). <https://arxiv.org/abs/math/0012219>

¹⁰Pridham J. P. Pro-algebraic homotopy types. Proc. London Math. Soc. 97(2). 2008. 273–338.

¹¹Pridham J. P. Galois actions on homotopy groups. Geom. Topol. 15:1. 2011. 501–607.

кова, Т. Пантева, Б. Тоэна¹². В нашем частном случае копредставлений групп мы используем покомпонентное проунипотентное пополнение свободной 2-редуцированной симплициальной группы. Общая же конструкция схемного проунипотентного гомотопического типа пары (X, k) (где X - связное симплициальное множество, k - поле) – это симплициальная проунипотентная группа $(GX)_w^\wedge$, где G – это функтор Кана, а $(GX)_w^\wedge$ – покомпонентное (непрерывное) проунипотентное пополнение свободной (в нашем случае 2-редуцированной) симплициальной группы GX . Данная концепция позволяет не только по-новому смотреть на старые проблемы 2-мерной комбинаторной теории гомотопий, но и с помощью конструкции непрерывного проунипотентного пополнения привлекать результаты о проунипотентных группах над полем характеристики ноль для исследования копредставлений про- p -групп. Для целостности картины напомним, что применение функтора Кана к связному симплициальному множеству, вырожденному в размерностях больших двух, приводит к свободной симплициальной группе, вырожденной в размерностях, больших единицы (функтор Кана G сдвигает размерность гомотопических групп $\pi_{n-1}(GX) \cong \pi_n(X)$). Теорема Кана о существовании CW -базиса в свободной симплициальной группе позволяет в полученной вырожденной симплициальной группе выбрать CW -базис $X \cup Y$ вида:

$$\begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{array} F(X \cup Y) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} F(X), \quad (1)$$

где d_0, d_1, s_0 на $x \in X, y \in Y, r_y \in F(X)$ определены по формулам: $d_1(x) = x, d_1(y) = r_y, d_0(x) = x, d_0(y) = 1, s_0(x) = x$. Соответствующая 2-редуцированная симплициальная группа

$$F(X \cup Y) \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} F(X) \quad (2)$$

является стандартным объектом изучения в комбинаторной теории

¹²Katzarkov L. Pantev T. Toën B. Algebraic and topological aspects of the schematization functor. Compositio Math. 145. 2009. 633–686.

групп. Действительно, полагая $R = d_1(Kerd_0)$, получаем хорошо знакомое копредставление (4) группы $F(X)/R$ (ниже по тексту). Соответствующий редуцированный схемный проунипотентный гомотопический 2-тип теперь можно построить с помощью покомпонентного проунипотентного пополнения

$$F(X \cup Y)_w^\wedge \begin{matrix} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{matrix} F(X)_w^\wedge \quad (3)$$

Далее мы рассматриваем только копредставления конечного типа, то есть $|X| < \infty, |Y| < \infty$. В этом случае непрерывное проунипотентное пополнение $F(X)_w^\wedge$ совпадает с так называемой свободной проунипотентной группой $F_u(X)$, детально описанной например у А. Везанни¹³. Тогда $R_u = d_1(ker(d_0))$ – это нормальное замыкание Зарисского определяющих соотношений для проунипотентного копредставления проунипотентной группы $G_u = F_u(X)/R_u$.

Симплициальное тождество $d_0 s_0 = id_{F_u(X)}$ (сохраняя обозначения) влечет, что, как и в дискретном случае, для соответствующего проунипотентного копредставления имеет место разложение в полупрямое произведение $F_u(X \cup Y) \cong Kerd_0 \rtimes s_0 F_u(X)$ и можно собрать необходимую гомотопическую информацию, изучая пару $Kerd_0 \xrightarrow{d_1} F_u(X)$ с действием $F_u(X)$ через s_0 сопряжением на $Kerd_0$. Тройка $(Kerd_0, F_u(X), d_1)$ – это частный пример проунипотентного предскрещенного модуля. По аналогии с теорией, развитой для дискретных копредставлений Р. Брауном, Й. Хьюбшманном¹⁴ и Т. Портером¹⁵ в про- $\mathcal{C}$ -случае, в диссертации определяется категория проунипотентных скрещенных модулей.

Скрещенный модуль копредставления играет центральную роль двумерной теории гомотопий. Одно из его эквивалентных определений в

¹³Vezzani A. The pro-unipotent completion. <http://users.mat.unimi.it/users/vezzani/Files/Research/prounipotent.pdf>

¹⁴Brown R. Huebschmann J. Identities among relations. Low-dimensional topology, London Math. Soc. Lecture Notes Series. 48. 1982. 153–202.

¹⁵Porter T. Profinite Algebraic Homotopy (2009). <http://ncatlab.org/timporter/files/ProfAlgHomotopy.pdf>

обозначениях (1), (2) – это тройка

$$(\frac{Kerd_0}{[Kerd_0, Kerd_1]}, F(X), \bar{d}_1) = (C, F, \bar{d}_1)$$

с действием $F(X)$ на $\frac{Kerd_0}{[Kerd_0, Kerd_1]}$, которое получается из действия $F(X)$ сопряжением на $Kerd_0$. Итак, это диаграмма следующего вида

$$\frac{Kerd_0}{[Kerd_0, Kerd_1]} \xrightarrow{\bar{d}_1} F(X).$$

Хорошо известно, что $Kerd_1 \cong \pi_2$, где π_2 – это вторая гомотопическая группа копредставления в классическом смысле. В диссертации введены и изучены проунипотентные аналоги (пред)скрещенных модулей копредставлений, доказаны необходимые для приложений их свойства.

Модулем соотношений симплициального копредставления (1) (которое, как мы уже отмечали, равносильно (2), (4)) называется абелева группа $R/[R, R]$ с G -действием, индуцированным действием свободной группы $F = F(X)$ сопряжением. Важность этого объекта обусловлена, в частности, следующим наблюдением, поскольку $R = im(d_1)$ – свободная группа (как подгруппа свободной), то d_1 расщепляется, а так как π_2 центральна в C , то, как хорошо объяснено в монографии Т. Портера¹⁶, точна последовательность абелианизации

$$0 \rightarrow \pi_2 \rightarrow \bar{C} \rightarrow \bar{R} \rightarrow 0,$$

где $\bar{C}$ и $\bar{R}$ обозначены абелианизации C и R соответственно. Более того, имеется изоморфизм $\mathbb{Z}G$ -модулей $\bar{C} \cong \mathbb{Z}G^{|Y|}$, а следовательно изучение π_2 сводится к изучению модульной структуры $\bar{R}$.

Для того, чтобы методы “схематизации” стали эффективными, необходимо ограничить класс рассматриваемых копредставлений. Таким классом являются введенные в диссертации **квазирациональные копредставления**. Квазирациональные копредставления – это те копредставления, у которых отсутствует p -кручение в коинвариантах моду-

¹⁶Porter T. Crossed Menagerie (2011). <https://ncatlab.org/timporter/files/menagerie10.pdf>

ля соотношений по действию открытых нормальных подгрупп индекса равного некоторой степени простого числа p . Это условие используется для установления связи между модулем соотношений исходного (про- p) копредставления с соответствующим проунипотентным модулем соотношений. Такая связь в диссертации реализована Теоремой 2, которая является важным техническим результатом работы. Полученная в Теореме 2 диаграмма абелевых проунипотентных групп позволяет связать теорию квазирациональных копредставлений с теорией проунипотентных групп в характеристике ноль. Если же имеется вложение про- p -группы с одним соотношением в свое непрерывное проунипотентное пополнение $G \hookrightarrow G_u^\wedge(\mathbb{Q}_p)$, то мы показываем в Теореме 4, что $cd(G) = 2$ и оказываемся в состоянии определить ряд достаточных условий на фильтрации, чтобы обеспечить такое вложение. Это устанавливает связь нашей работы с уже известными результатами, например Д.Лабюта¹⁷, Н.С. Романовского¹⁸, В. Цветкова¹⁹ и Д. Гильденхьюза, С.Иванова, О. Харлампович²⁰ и другими.

Часть работы занимает модификация результатов Люботского и Мэджида о когомологиях и копредставлениях проунипотентных групп на случай произвольного поля характеристики ноль. В частности, в Теореме 3 впервые получено описание модулей соотношений проунипотентных групп с одним соотношением в случае произвольного поля, которое вложимо в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Цель работы.

Цель настоящей работы состоит в изучении класса квазирациональных копредставлений с помощью техники проунипотентных пополнений, теории представлений и гомологической алгебры.

Положения выносимые на защиту

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

¹⁷Labute J. Algèbres de Lie et pro- p -groupes définis par une seule relation. Inventiones mathematicae. Volume 4. Issue 2. 1967. 142–158.

¹⁸Romanovskii N. On pro- p -groups with a single defining relator. Israel Journal of Mathematics. Volume 78. Issue 1.1992. 65–73.

¹⁹Цветков В., М. О про- p -группах с одним соотношением. Мат.заметки. 37:4. 1985. 491–496.

²⁰Gildenhuys D. Ivanov S. Kharlampovich O. On a family of one-relator pro- p -groups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. 124. 1994. 1199–1207.

- В классе квазирациональных копредставлений пермутационность модуля соотношений обобщенно эквивалентна пермутационности его фактора по модулю простого числа. Про- p -группы с одним соотношением и подкопредставления дискретных асферических копредставлений принадлежат классу квазирациональных копредставлений. Квазирациональность допускает гомологическое описание, таким образом это свойство самой группы, а не конкретного (про- p) копредставления.
- Для модулей соотношений проунипотентных групп с одним соотношением над полями нулевой характеристики имеет место аналог теоремы Линдона “о тождествах”.
- Если про- p -группа с одним соотношением вкладывается в свое непрерывное проунипотентное пополнение, то ее кохомологическая размерность равна двум.

Основные методы исследования

В работе применяются методы гомотопической и гомологической алгебры (свободные симплициальные резольвенты, скрещенные модули, лемма Брауна-Лодэя, проконечная теория гомотопий, кохомологии и гомологии групп), алгебраической геометрии (коммутативные алгебры Хопфа, аффинные групповые схемы, проунипотентные группы, кохомологии аффинных групп), теории проконечных групп (копредставления и кохомологии про- p -групп), теория представлений (комодули над алгебрами Хопфа, топологические модули над полными линейнокомпактными алгебрами Хопфа, рациональные и модулярные представления конечных p -групп, двойственность (между дискретными и линейнокомпактными пространствами)).

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты относятся к двумерной теории гомотопий и могут применяться для изучения копредставлений дискретных групп и про- p -копредставлений про- p -групп, к исследованию феномена асферичности, построению новых инвариантов, имеющих приложение в некоммутативной геометрии.

Аппробация работы

- A. Mikhovich “Quasirational relation modules and p-adic Malcev completions”. На международной конференции “2014 International Conference on Topology and its Applications” (July 3-7, 2014, Nafpaktos, Greece).
- A. Mikhovich “Pro-algebraic crossed modules of quasirational presentations”. На международной конференции “Opening Perspectives in Algebra, Representations and Topology (OP-ART)”, May 25-29, 2015, Centre de Recerca Matematica, Barcelona, Spain.
- Михович А.М. “Функтор схематизации и квазирациональность” на семинаре “Некоммутативная геометрия и топология” механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. А.С. Мищенко (2016 год), 29.09.2016г., 06.10.2016г.
- A. Mikhovich “Schematization, QR-presentations and Conjuring(s)” на международной конференции “Knots in Hellas 2016. International Conference on Knots, Low-Dimensional Topology and Applications”, July 17-23, 2016, International Olympic Academy, Ancient Olympia, Greece.
- Михович А.М. “Схематизация копредставлений и полиномиальные тождества” на семинаре “Кольца, модули и матрицы” кафедры алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 21.11.2016 г.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы, включающего в себя 50 наименований. Общий объем диссертации – 70 страниц.

Публикации

По теме диссертации опубликовано шесть печатных работ.

Краткое содержание работы

Во введении дается литературный обзор, обосновывается актуальность работы, описывается ее структура и дается краткое содержание диссертации. Приводятся основные определения и результаты, выносимые на защиту.

В первой главе вводится класс квазирациональных копредставлений (параграф 1.1), доказываемся, что квазирациональные копредставления удовлетворяют ожиданиям О.В. Мельникова (параграф 1.2). Во второй главе определяются и затем доказываются основные свойства проунипотентных (пред)скрещенных модулей (параграф 2.1), а также (параграф 2.2), где доказываемся технически важная Теорема 2 и результаты о про- p -группах с одним соотношением. Раздел 3 диссертации посвящен проунипотентным группам над полями нулевой характеристики. Так, в разделе (3.1) доказываются необходимые результаты о когомологиях проунипотентных групп, раздел (3.2) связан с копредставлениям проунипотентных групп в нулевой характеристике, “теорема о тождествах для про- p -групп” доказываемся в последнем - разделе (3.3) работы.

Копредставление конечного типа дискретной группы G - это точная последовательность

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad (4)$$

в которой $F = F(X)$ есть свободная группа с конечным множеством образующих X , а R - нормальная подгруппа в F , порожденная конечным числом определяющих соотношений $r \in R$. Про- p -группой называется группа, изоморфная проективному пределу конечных p -групп. Это топологическая группа (с топологией проективного предела), которая является компактной вполне несвязной группой. Для таких групп имеется представленная в монографиях Х. Коха²¹ и Л. Рибеса, П. Залесского²² теория копредставлений во многом аналогичная комбинаторной теории дискретных групп. Пусть X - проконечное топологическое

²¹Кох Х. Теория Галуа p -расширений. М. Мир. 1973.

²²L. Ribes P. Zalesskii Profinite Groups. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer. vol. 40. 2000.

пространство, тогда в категории про- p -групп имеется свободная про- p -группа $(F(X), i : X \hookrightarrow F(X))$, обладающая свойствами свободного объекта. А именно, для любого непрерывного гомоморфизма $\phi : X \rightarrow G$ в про- p -группу G такого, что образ X порождает G , существует единственный непрерывный гомоморфизм про- p -групп $\tilde{\phi} : F(X) \rightarrow G$, делающий соответствующую диаграмму коммутативной. Если X – конечное множество, то свободная про- p -группа может быть построена конструктивно, как $F(X) = \varprojlim_{U \triangleleft \Phi(X)} \Phi(X)/U$, где $|\Phi(X)/U| = p^n$ – это про- p -пополнение дискретной свободной группы $\Phi(X)$ (порожденной образующими из X) в про- p -топологии на $\Phi(X)$, в которой базис системы окрестностей единицы составляют нормальные подгруппы конечного индекса равного некоторой степени простого числа p . По аналогии с копредставлением конечного типа дискретной группы, будем говорить, что про- p -группа G задана про- p -копредставлением конечного типа, если группа G включена в точную последовательность (4), в которой F – свободная про- p -группа с конечным числом образующих (то есть X – конечное множество), а R – замкнутая нормальная подгруппа, топологически нормально порожденная конечным числом элементов в F . При этом в теории про- p -групп принято рассматривать про- p -копредставления, у которых число образующих в F совпадает с числом образующих в G .

Пусть $C = \varprojlim C_\alpha$ – проконечное кольцо (C_α – конечные кольца), тогда обозначим через CG – пополненную групповую алгебру про- p -группы G . Под пополненной групповой алгеброй мы понимаем топологическую алгебру $CG = \varprojlim CG_\mu$, где $G = \varprojlim G_\mu$ – разложение про- p -группы G в проективный предел конечных p -групп G_μ .

Для дискретных групп, p будет пробегать все простые числа, для про- p -групп p фиксировано. Пусть G – (про- p)группа с (про- p)копредставлением конечного типа (4), $\bar{R} = R/[R, R]$ соответствующий G -модуль соотношений, где $[R, R]$ – это коммутант, а действие G индуцировано сопряжением F на R . Для каждого простого числа $p \geq 2$ обозначим через Δ_p – аугментационный идеал кольца $\mathbb{F}_p G$, а через $\mathcal{M}_n, n \in \mathbb{N}$ его p -фильтрацию Цассенхауза в F с коэффициентами в

поле $\mathbb{F}_p$, которая определена по правилу $\mathcal{M}_n = \{f \in F \mid f - 1 \in \Delta_p^n\}$. В про- p -случае под Δ^n мы понимаем замыкание модуля порожденного n -ми степенями элементов из $\Delta = \Delta_p$, а в дискретном случае - это n -ая степень идеала Δ_p . Свойства этой фильтрации в про- p -случае изложены в монографии Х. Коха²³, в дискретном случае свойства фильтрации Цассенхауза аналогичны, разница состоит в использовании обычного группового кольца вместо пополненного.

Ключевое понятие, введенное в диссертации, – это понятие квазирационального копредставления. Пусть задано некоторое (про- p) копредставление конечного типа (4).

Определение 1. [2] *Копредставление (4) будем называть **квазирациональным**, если для каждого $n > 0$ и для каждого простого $p \geq 2$ $F/R\mathcal{M}_n$ -модуль $R/[R, R\mathcal{M}_n]$ не имеет p -кручения (p фиксировано для про- p -групп и пробегает все простые числа $p \geq 2$ и соответствующие p -фильтрации Цассенхауза в дискретном случае). Модули соотношений таких копредставлений будем называть **квазирациональными модулями соотношений**.*

В параграфе 1.1 диссертации показано, что данное определение эквивалентно отсутствию кручения в абелевой (про- p)группе $R/[R, F]$, что данное свойство не зависит от выбора копредставления группы, а также, что про- p -копредставления про- p -групп с одним соотношением являются квазирациональными. Также приводится доказательство квазирациональности асферических дискретных копредставлений и их подкопредставлений.

Свободным $\mathbb{F}_p$ -модулем, где $\mathbb{F}_p$ - поле из p элементов, над пунктированным проконечным пространством (T, t_0) называется проконечный $\mathbb{F}_p$ -модуль $\mathbb{F}_p(T, t_0)$ такой, что существует вложение $\omega : T \rightarrow \mathbb{F}_p(T, t_0)$, $\omega(t_0) = 0$, обладающее следующим универсальным свойством:

(*) для любого непрерывного вложения $\gamma : T \rightarrow B$ такого, что $\gamma(t_0) = 0$, где B - проконечный $\mathbb{F}_p$ -модуль, существует единственный

²³там же

гомоморфизм проконечных $\mathbb{F}_p$ -модулей $\alpha : \mathbb{F}_p(T, t_0) \rightarrow B$, удовлетворяющий равенству $\gamma = \alpha\omega$.

В дальнейшем мы работаем со свободными $\mathbb{F}_p$ -модулями $\mathbb{F}_p(S)$ над непунктированными проконечными пространствами S , которые возникают как проективные пределы конечномерных $\mathbb{F}_p(S_\alpha)$, но данная конструкция является частным случаем предыдущего определения, поскольку достаточно взять пунктированное пространство $T = S \cup \{t_0\}$, где точка t_0 изолирована в пространстве T .

Пусть теперь G - про- p -группа, тогда будем говорить, что (T, t_0) это G -пространство, если G действует непрерывно на проконечном пространстве (T, t_0) гомеоморфизмами, оставляющими на месте отмеченную точку t_0 . Нам потребуется понятие введенное О. Мельниковым²⁴

Определение 2. Модуль $\mathbb{F}_p(T, t_0)$, где (T, t_0) - какое-либо G -пространство, называется пермутационным G -модулем, если действие каждого элемента $g \in G$ является автоморфизмом этого модуля, продолжающим по универсальному свойству (*) непрерывное отображение $t \mapsto g \cdot t$ из T в $T \subset \mathbb{F}_p(T, t_0)$.

Копредставления дискретных групп с одним соотношением ввиду теоремы Линдона “о тождествах” - базовый пример CA -асферических копредставлений. Параллельно работе И. Чизвелла, Д. Коллинза, Й.Хьюбшманна²⁵ О.В.Мельников²⁶ ввел в рассмотрение и изучил с прицелом на про- p -группы с одним соотношением копредставления про- p -групп, у которых $\mathbb{F}_p$ -модуль соотношений является пермутационным.

Определение 3. $\mathbb{F}_p G$ -модуль соотношений $\overline{R}/p\overline{R}$ копредставления (4) называется $\mathbb{F}_p$ -пермутационным, если имеется изоморфизм пунктированных проконечных G -модулей $\overline{R}/p\overline{R} = R/R^p[R, R] \cong \mathbb{F}_p(T, t_0)$, где (T, t_0) - некоторое проконечное G -пространство с отмеченной точкой.

²⁴там же

²⁵там же

²⁶там же

В полной аналогии с понятием $\mathbb{F}_p$ -пермутационного модуля соотношений $\overline{R}/p\overline{R}$ введем понятие $\mathbb{Z}_p$ -пермутационного модуля соотношений $\overline{R}$.

Определение 4. $\mathbb{Z}_p G$ -модуль соотношений $\overline{R}$ копредставления (4) называется $\mathbb{Z}_p$ -пермутационным, если имеется изоморфизм пунктированных проконечных G -модулей $\overline{R} = R/[R, R] \cong \mathbb{Z}_p(T, t_0)$, где (T, t_0) -некоторое проконечное G -пространство с отмеченной точкой.

Пусть G - дискретная группа, обозначим через $G_p^\wedge$ ее про- p -пополнение, которое по определению задается, как $G_p^\wedge = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$, где $\mathcal{N}$ - это система нормальных делителей конечного индекса равного степени p , то есть $\mathcal{N} = \{N \trianglelefteq G, |G/N| = p^n, n \in \mathbb{N}\}$. Если G - про- p -группа, то считаем, что $G_p^\wedge = G$. Каждому (про- p) модулю соотношений, возникающему из (4), поставим в соответствие две проективные системы:

$$\mathcal{T}_n = ((\frac{R}{[R, R\mathcal{M}_n]})_p^\wedge, \phi_n^{n+1}), \mathcal{T}_n^p = (\frac{R}{R^p[R, R\mathcal{M}_n]}, \tilde{\phi}_n^{n+1}),$$

где $n \in \mathbb{N}$, с $G_p^\wedge$ -модульными гомоморфизмами

$$\phi_n^{n+1} : (R/[R, R\mathcal{M}_{n+1}])_p^\wedge \twoheadrightarrow (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^\wedge,$$

$$\tilde{\phi}_n^{n+1} : R/R^p[R, R\mathcal{M}_{n+1}] \twoheadrightarrow R/R^p[R, R\mathcal{M}_n],$$

индуцированными вложениями $[R, R\mathcal{M}_{n+1}] \subseteq [R, R\mathcal{M}_n]$.

Пусть ζ - примитивный корень из единицы порядка, равного степени p и H - некоторая подгруппа в конечной p -группе G . Предположим, что H действует слева на $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ посредством гомоморфизма в группу корней из единицы $\xi : H \rightarrow \langle \zeta \rangle$, мы можем продолжить это действие по линейности до левого действия $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$ на $\mathbb{Z}_p[\zeta]$. Разумеется, что H действует справа обычным умножением на G , а это действие можно продолжить по линейности до действия $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$ на $\mathbb{Z}_p[\zeta]G$. Главным обобщенным пермутационным G -модулем

$$\mathbb{Z}_p[\zeta] \uparrow_H^G := \mathbb{Z}_p[\zeta]G \otimes_{\mathbb{Z}_p[\zeta]H} \mathbb{Z}_p[\zeta]$$

называется левый $\mathbb{Z}_p[\zeta]G$ -модуль, индуцированный с $\mathbb{Z}_p[\zeta]H$ -модуля $\mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Обозначим $\pi = 1 - \zeta$, тогда π порождает (π) - простой идеал в $\mathbb{Z}_p[\zeta]$, лежащий над $p\mathbb{Z}_p$ (то есть $(\pi) \cap \mathbb{Z}_p = (p) = p\mathbb{Z}_p$). Целое расширение $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ над $\mathbb{Z}_p$ вполне разветвлено с индексом ветвления $p - 1$, а поэтому вложение $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta]$ индуцирует изоморфизм $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}_p[\zeta]/\pi\mathbb{Z}_p[\zeta]$.

Определение 5. Пусть G - конечная p -группа, тогда будем говорить, что M - обобщенный пермутационный G -модуль, если:

- (i) M - свободный конечнопорожденный $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ -модуль;
- (ii) $M \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_p[\zeta] \uparrow_{H_i}^G$, то есть M изоморфен прямой сумме главных обобщенных пермутационных модулей.

Определение 6. Пусть G - про- p -группа и фиксирован некоторый базис системы окрестностей единицы $\mathfrak{U}$ в G , состоящий из открытых нормальных делителей конечного индекса $U \triangleleft G$. Предположим, что задана $M = \{M_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ - некоторая проективная система, состоящая из $\mathbb{Z}_p$ -проективных $\mathbb{Z}_p[G/U]$ -модулей конечной $\mathbb{Z}_p$ -размерности. Будем говорить, что M - это обобщенный пермутационный про- G -модуль, если для каждого $U \in \mathfrak{U}$ существует гомоморфизм $\xi_U : G/U \rightarrow \langle \zeta \rangle$, где ζ - примитивный корень p -й степени из единицы в $\mathbb{Z}_p$, что G/U -модуль M_U является обобщенным пермутационным G/U -модулем.

В случае про- p -копредставлений (4) M_U будет возникать, как модуль коинвариантов $\bar{R}_{\mathcal{M}_n} = R/[R, R\mathcal{M}_n]$ модуля соотношений по действию $\mathcal{M}_n$. Если рассматриваемое копредставление дискретно, то M_U появятся, как $\bar{R}_{\mathcal{M}_n} = (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^\wedge$. Использование p -адического пополнения в дискретном случае позволяет исключить в M_U кручение взаимнопростое с p , а тогда квазирациональность влечет, что $\bar{R}_{\mathcal{M}_n} = (R/[R, R\mathcal{M}_n])_p^\wedge$ являются $\mathbb{Z}_p$ -проективными $\mathbb{Z}_p[G/\mathcal{M}_n]$ -модулями конечной $\mathbb{Z}_p$ -размерности. Если соответствующие проективные системы $\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n^p$ состоят, соответственно, из обобщенных пермутационных, пермутационных модулей, то мы будем говорить, что $\bar{R} = R/[R, R]$ это обобщенный пермутационный про- $\mathbb{Z}_p G_p^\wedge$ -модуль, а $\bar{R}/p\bar{R} = R/R^p[R, R]$

это пермутационный про- $\mathbb{F}_p G_p^\wedge$ -модуль. Свойства пермутационности и обобщенной пермутационности модуля соотношений про- p копредставления конечного типа (соответствующих проективных систем фактормодулей коинвариантов в случае дискретных копредставлений) не зависят от выбора базиса окрестностей единицы для про- p -топологии свободной (про- p) группы, состоящего из нормальных делителей индекса, равного степени p . Фильтрации Цассенхауза - лишь удобный выбор.

Обобщенный пермутационный модуль нельзя определить, как просто $\mathbb{F}_p$ -пермутационный, поскольку из пермутационности модуля $R/R^p[R, R\mathcal{M}_n]$, вообще говоря, не следует отсутствие кручения в факторах коинвариантов $R/[R, R\mathcal{M}_n]$, требуемое в определении обобщенной пермутационности. Более того, конечная p -группа G может действовать на абелевой группе $M = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ при $k \geq 2$ нетривиально, поскольку например при $p > 2$ имеем $|Aut(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| = (p-1)p^{k-1}$. Тогда M - главный (то есть порожденный, как модуль, одним элементом) неразложимый модуль, поскольку он изоморфен циклической группе, но он не только не $\mathbb{Z}_p$ -пермутационный модуль, но и не может иметь пермутационной системы образующих, как абелевой группы, в то время как $M/pM = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ уже является тривиальным пермутационным $\mathbb{F}_p G$ -модулем.

Изопренность ситуации состоит в том, что для модулей из проективной системы $\mathcal{T}_n$ введенное Определение 6 является избыточным. На самом деле, при $p > 2$ обобщенная пермутационность совпадает с обычной $\mathbb{Z}_p$ -пермутационностью, а при $p = 2$ возникает лишь действие на $\mathbb{Z}_2$ “изменением ориентации”, то есть с помощью автоморфизма аддитивной группы целых 2-адических чисел, переводящего ± 1 в ∓ 1 . Действительно, в $\mathbb{Z}_p$ при $p > 2$ нет корней p -й степени из единицы, поскольку отображение $\log(1+z) : 1+p\mathbb{Z}_p = U^{(1)} \rightarrow \mathfrak{p}^1 = p\mathbb{Z}_p$ устанавливает гомеоморфизм между мультипликативной группой главных единиц и аддитивной группой максимального идеала кольца $\mathbb{Z}_p$. Но поскольку в $p\mathbb{Z}_p$ нет кручения, то и нет корней из единицы в мультипликативной группе кольца $\mathbb{Z}_p$. При $p = 2$ имеется единственный - квадратный корень из единицы (равный -1). На самом деле, -1 является квадратным корнем из единицы в $\mathbb{Z}_2$. Остается проверить, что других корней из единицы в $\mathbb{Z}_2$ нет.

В этом случае имеем изоморфизм $1 + 2\mathbb{Z}_2 \cong (1 + 4\mathbb{Z}_2) \times \{\pm 1\}$ (логарифм сходится на $1 + 4\mathbb{Z}_2$ и задает гомеоморфизм $\log(1 + z) : 1 + 4\mathbb{Z}_2 \rightarrow 4\mathbb{Z}_2$), а поэтому других корней из единицы нет.

Теорема 1. Пусть (4) - QR -(про- p) копредставление, тогда следующие свойства эквивалентны:

- а) $\mathcal{T}_n$ - обобщенный пермутационный про- $G_p^\wedge$ -модуль;
- б) $\mathcal{T}_n^p$ - пермутационный про- $G_p^\wedge$ -модуль.

Следствие 1. Класс квазирациональных про- p -копредставлений обладает следующими свойствами:

- 1) асферические про- p -копредставления и копредставления про- p -групп с одним соотношением являются квазирациональными;
- 2) модуль соотношений $\overline{R} = R/[R, R]$ квазирационального копредставления является обобщенно пермутационным тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_p$ -пермутационным является его $\text{mod}(p)$ фактор $R/R^p[R, R]$.

Не составляет трудности сформулировать и доказать аналог Следствия 1 для дискретных QR -копредставлений в терминах про-объектов. В этом случае условие 1) Следствия привлекательно конструировать используя CA -асферические копредставления и их подкопредставления.

В самом начале работы О.В. Мельников²⁷ отмечает, что существует теория $\mathbb{Z}_p$ -пермутационных модулей соотношений полностью параллельная теории асферических про- p -копредставлений (то есть когда модули соотношений являются $\mathbb{F}_p$ -пермутационными). Также в личных беседах с автором еще в 1997 году он неоднократно высказывал неудовлетворенность отсутствием способов выявления асферичности копредставления в ряде ключевых ситуаций (например не получается выяснить всякая ли про- p -группа с одним соотношением является асферической). Мельников предполагал существование некоторого класса про- p -копредставлений (с содержательным аппаратом изучения и возможностью достаточно просто проверить принадлежность к этому классу) со следующими свойствами:

²⁷там же

1) данный гипотетический класс содержит одновременно асферические про- p -копредставления и копредставления про- p -групп с одним соотношением;

2) в рамках данного гипотетического класса копредставлений возможна унификация концепций $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{F}_p$ -пермутационности.

В диссертации и в работах автора [5], [4], [2], [3] показана возможность исследования квазирациональных копредставлений с помощью перехода к p -адическим Мальцевским пополнениям (“схематизация”). Таким образом, Следствие 1 подтверждает правильность предположения, высказанного О.В. Мельниковым.

В параграфе 1.3 для формулировки Теоремы 2 необходимо следующее определение.

Группа $\mathbb{Q}_p$ -точек любой аффинной групповой схемы G над $\mathbb{Q}_p$ имеет p -адическую топологию. На самом деле, П. Делинь и Дж.Милн ²⁸ замечают, что G может быть представлена в виде проективного предела $G = \varprojlim G_\alpha$ сюръективной проективной системы линейных алгебраических групп. Каждая $G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ имеет каноническую p -адическую топологию, индуцированную вложением $G_\alpha \hookrightarrow GL_n$. Определим топологию на $G(\mathbb{Q}_p)$ как топологию проективного предела $G(\mathbb{Q}_p) = \varprojlim G_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Теперь мы можем сформулировать определение из работы Р. Хейна и М. Мацумото²⁹.

Определение 7. *Зафиксируем группу G с про- p -топологией. Определим непрерывное проунипотентное пополнение G как универсальную диаграмму, где ρ это непрерывный плотный по Зарисскому гомоморфизм G в группу $\mathbb{Q}_p$ -точек проунипотентной аффинной группы $G_w^\wedge$*

$$\begin{array}{ccc} & G_w^\wedge(\mathbb{Q}_p) & \\ \rho \nearrow & \downarrow \tau & \\ G & & H(\mathbb{Q}_p) \\ \chi \searrow & & \end{array}$$

²⁸Делинь П., Милн Дж. Категории Таннаки. Ходжевы циклы и мотивы. М. Мир. 1985, 94–201.

²⁹Hain R. Matsumoto M. Weighted completion of Galois groups and Galois actions on the fundamental group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Compos. Math. 139(2). 2003. 119–167.

Мы требуем, чтобы для каждого непрерывного и плотного по Зарисскому гомоморфизма χ в группу рациональных точек проунипотентной группы H существовал единственный гомоморфизм проунипотентных групп τ , делающий диаграмму коммутативной.

Будем говорить, что задано конечное копредставление некоторой проунипотентной группы G_u , если G_u включена в следующую диаграмму свободных проунипотентных групп

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\quad} & & \\ \xrightarrow{\quad} & F_u(X \cup Y) & \xrightarrow[\frac{d_1}{\quad}]{\frac{s_0}{d_0}} F_u(X) \longrightarrow G_u \\ \xrightarrow{\quad} & & \end{array} \quad (5)$$

в которой на рациональных точках выполнены тождества аналогичные дискретному и про- p -случаям (1), а также $G_u \cong F_u(X)/d_1(Kerd_0)$, где $F_u(Z)$ - свободная проунипотентная группа на конечном множестве Z .

Обозначим алгебру Хопфа, представляющую G_u , через $\mathcal{O}(G_u)$, а двойственную ей полную линейнокомпактную алгебру Хопфа через $\mathcal{O}(G_u)^*$, тогда одним из ключевых результатов работы является следующая

Теорема 2. Пусть задано конечное QR про- p -копредставление (4), тогда имеет место коммутативная диаграмма абелевых проунипотентных групп, в которой на $\mathbb{Q}_p$ -точках верхняя строка гомоморфизм топологических G -модулей, нижняя - гомоморфизм $\mathcal{O}(G_u)^*$ -модулей, а вертикальные стрелки - G -гомоморфизмы на плотных по Зарисскому подгруппах $\frac{kerd_0}{[kerd_0, kerd_1 kerd_0]}$ и $\bar{R}$ в $\bar{C}_w^\wedge(\mathbb{Q}_p)$ и $\bar{R}_w^\wedge(\mathbb{Q}_p)$ соответственно.

$$\begin{array}{ccc} \bar{C}_w^\wedge & \xrightarrow{\gamma} & \bar{R}_w^\wedge \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \tau \\ \bar{C}_u & \xrightarrow{\mu} & \bar{R}_u \end{array}$$

мы обозначили $\bar{C}_w^\wedge, \bar{C}_u, \bar{R}_w^\wedge, \bar{R}_u$ абелианизации соответствующих проунипотентных групп, $\bar{C}_u(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{O}(G_u)^{*|Y|}$.

В параграфах 3.1, 3.2 диссертации мы приводим очень сжатое построение теории когомологий аффинных групп (и в частности проунипотентных групп), интерпретируя, когомологии как синтез взаимности

Фробениуса, тензорной индукции и теории инвариантов, а также основные концепции теории копредставлений проунипотентных групп. Доказательства рассуждений из ^{30,31} сохраняются, но мы приводим обобщенные доказательствами ключевых результатов, формулируя остальные результаты в необходимой общности.

В параграфе 3.2 доказывается, что проунипотентная группа с одним соотношением имеет когомологическую размерность равную 2. В разделе (3.3) доказаны две Теоремы. Одна, это Теорема, описывающая модули соотношений проунипотентных групп с одним соотношением, возникающих из копредставлений про- p -групп с одним соотношением, представляя осмысленный ответ на вопрос Ж.-П.Серра³² об аналоге теоремы Линдона.

Теорема 3 (“о тождествах для про- p -групп”). Пусть G - про- p -группа с одним соотношением, заданная конечным правильным $(H^1(G, \mathbb{F}_p) = H^1(F, \mathbb{F}_p))$ копредставлением (4) в категории про- p -групп. Тогда имеет место изоморфизм топологических $\mathcal{O}(G_u)^*$ -модулей

$$\overline{R_u}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathcal{O}(G_u)^*,$$

где G_u - проунипотентная группа, которая получается замыканием Зарисского в $F_u(\mathbb{Q}_p)$ исходного про- p -копредставления, которую мы также всегда отождествляем с непрерывным $\mathbb{Q}_p$ -проунипотентным пополнением G .

Вторая теорема, предоставляет достаточное условие равенства 2 когомологической размерности про- p -группы с одним соотношением, дающее положительный ответ на вариацию вопроса Ж.-П. Серра³³

³⁰Lubotzky A. Magid A. Cohomology of unipotent and pronipotent groups. J.Algebra 74. 1982. 76–95.

³¹Lubotzky A. Magid A. Cohomology, Poincare series, and group algebras of pronipotent groups. Amer.J.Math. 107. 1985. 531–553.

³²там же

³³Серр Ж.-П. Структура некоторых про- p -групп. Собрание сочинений. Т.3. М.: МЦНМО. 2007 стр. 121, Позднейшие замечания, пункт 6.

Теорема 4. Пусть G - конечнопорожденная про- p -группа с одним соотношением. Если естественный гомоморфизм $G \rightarrow G_u(\mathbb{Q}_p)$ про- p -группы G в $\mathbb{Q}_p$ -точки своего непрерывного проунипотентного пополнения является мономорфизмом, то $cd(G) = 2$;

В диссертации вводится понятие **проунипотентного действия**, которое состоит из про- p групп G_1 (обычно G_1 конечно-порождена) и G_2 , мы требуем существование цепочки $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ - G_1 -инвариантных нормальных подгрупп в G_2 с абелевыми градуированными факторами, такими, что $\cap N_i = 1$, N_i/N_{i+1} не имеют кручения, конечно порождены и индуцированное действие G_1 должно быть тривиальным на градуированных факторах N_i/N_{i+1} .

Мы будем говорить, что конечно-порожденная про- p -группа G является **p -регулярной**, если действие сопряжением G на самой себе является проунипотентным.

Следующее Предложение 1 дополняет ранее упомянутые теоретико-групповые результаты, где использовалось отсутствие делителей нуля в градуированных алгебрах, соответствующих фильтрациям определенного типа. Если конечно-порожденная про- p -группа G наделена центральной фильтрацией G_i с градуированными факторами без кручения, то G/G_i это нильпотентные про- p -группы без кручения, а следовательно G является p -регулярной.

Предложение 1. Предположим, что про- p -группа G с одним определяющим соотношением является p -регулярной, то $cd(G) = 2$.

Заключение

В диссертации введены и исследованы квазирациональные копредставления (про- p) групп, связанные с гипотезой Дж. Уайтхеда в 2-мерной теории гомотопий и вопросами Ж.-П. Серра о про- p -группах с одним соотношением, иначе говоря, из 2-мерной p -адической теории гомотопий. Получены следующие результаты:

- Доказано, что этот класс копредставлений соответствует ожиданиям О.В. Мельникова, высказанным в виде гипотезы.

- Описаны модули соотношений проунипотентных групп с одним соотношением над полями нулевой характеристики.
- Показано, что если про- p -группа с одним соотношением вкладывается в свое непрерывное проунипотентное пополнение, то ее кохомологическая размерность равна двум, что дает положительный ответ на вопрос Ж.-П.Серра в немного уточненной форме.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность научным руководителям: профессору Александру Сергеевичу Мищенко и профессору Владимиру Марковичу Мануйлову за внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Также автор благодарен своим учителям: профессору Мельникову Олегу Владимировичу за перспективные постановки задач в комбинаторной теории про- p -групп, и профессору, академику НАН Беларуси Янчевскому Вячеславу Ивановичу за арсенал алгебраической геометрии.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Михович А.М. Гомотопии проконечных групп. arXiv:1205.4365.
- [2] Mikhovich A. Quasirational relation modules and p -adic Malcev completions. Topol. Appl. Volume 201. 2016. 86–91.
- [3] Mikhovich A. Proalgebraic crossed modules of quasirational presentations. In: Herbera D., Pitsch W., Zarzuela S. (eds) Extended Abstracts Spring 2015. Trends in Mathematics, vol 5. Birkhäuser. Cham. 2016.
- [4] Mikhovich A. Quasirationality and prounipotent crossed modules. Journal of Knot Theory and its Ramifications. (in press) arXiv:1701.04793
- [5] Mikhovich A. Identity theorem for pro- p -groups. In: Knots, Low-dimensional Topology and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (PROMS); C. Adams et al, Eds. (2019).
- [6] Михович А.М. Квазирациональность и асферические (про- p) ко-представления. Мат. Заметки, 105:4. 2019.