

Летние конференции Турнира городов

Избранные материалы

Выпуск 1

Под общей редакцией Н. Н. Константинова
Составитель Б. Р. Френкин

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51(07)
ББК 22.1
Л52

*Проведение XX Летней конференции Турнира городов
и издание настоящей книги поддержано Департаментом
образования г. Москвы в рамках программы
«Одаренные дети», благотворительным фондом
Д. Зимины «Династия» и корпорацией «Боинг»*

Летние конференции Турнира городов: Избранные материалы. Вып. 1 / Под общ. ред. Н. Н. Константинова.
Сост. Б. Р. Френкин. — М.: МЦНМО, 2009. — 264 с.

ISBN 978-5-94057-466-8

В настоящем издании подробно рассмотрены некоторые задачи, предложенные на Летних конференциях международного математического Турнира городов. Использован ряд материалов других изданий, в частности брошюр, изданных Информационным центром Турнира городов в 1993—1999 гг. Условия задач Летних конференций в исходном виде содержатся в книге «Летние конференции Турнира городов. Условия задач» (М.: МЦНМО, 2009).

ББК 22.1

Оглавление

От составителя	5
<i>В. О. Бугаенко</i> Зеркала и ячейки	6
<i>К. А. Кноп</i> Монетные системы	15
<i>Ф. Догру, С. Л. Табачников</i> Внешние бильярды	28
<i>С. Л. Табачников</i> Доказательство теоремы Калтера о существовании периодических орбит в многоугольных внешних бильярдах	48
<i>А. Б. Сосинский</i> Классификация гибких проволок и инварианты узлов	55
<i>И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов, С. И. Кублановский, А. С. Малистов</i> Задача о разбойниках	71
<i>С. Л. Берлов, Д. В. Карпов</i> Экстремальные графы	83
<i>С. Л. Берлов, К. П. Кохась</i> Выпуклые многоугольники	93
<i>Л. А. Емельянов, Т. Л. Емельянова</i> Семейство Фейербаха	114
<i>А. В. Акопян, А. А. Заславский</i> Геометрическое доказательство теоремы Емельяновых	132
<i>В. В. Доценко</i> Числа Каталана и естественные отображения	139
<i>И. И. Богданов, Г. Р. Челноков</i> Алгебра паркетов	166
<i>А. А. Заславский</i> Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра	207

М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов

Вписанные зацепления 223

В. В. Прасолов, М. Б. Скопенков

Рамсеевская теория узлов и зацеплений 251

От составителя

В настоящей книге подробно рассмотрен ряд задач, предложенных на Летних конференциях международного Турнира городов, где одарённые школьники из разных стран приобщаются к исследовательской работе в области математики. Приведены решения этих задач, их обобщения, освещены смежные вопросы. Тематика издания связана с различными областями современной математики. В дальнейшем предполагается издание аналогичных выпусков, посвящённых другим задачам Летних конференций. Данное издание примыкает по содержанию к книге «Летние конференции Турнира городов. Условия задач» (М.: МЦНМО, 2009), в которой собраны условия задач Летних конференций в первоначальном варианте.

При составлении сборника использованы некоторые материалы, опубликованные в других изданиях, в частности в брошюрах IV—X Летних конференций, выпущенных Информационным центром Турнира городов. Статьи В. О. Бугаенко, И. И. Богданова и Г. Р. Челнокова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова и начало статьи А. Б. Сосинского заново написаны авторами на основе представленных ими задач. Отметим, что задачи большинства Летних конференций в первоначальном виде доступны в Интернете (см. www.turgor.ru/1ktg/index.php).

Зеркала и ячейки

В. О. Бугаенко

Тема этого проекта на научном языке звучит так: «Дискретные группы отражений в трёхмерном евклидовом пространстве». А в популярном изложении речь идёт о трёхмерных калейдоскопах. Основной объект нашего рассмотрения — многогранники Кокстера.

Представим себе многогранник как ячейку, ограниченную зеркальными гранями. Если многократные отражения этой ячейки относительно стенок замостят всё пространство без самопересечений (как в классической детской игрушке — калейдоскопе), то рассматриваемый многогранник и называется многогранником Кокстера. Впервые их стал изучать выдающийся геометр двадцатого века Гарольд Скотт Макдональд Кокстер (Harold Scott MacDonald Coxeter, 1907—2003), чьим именем они и стали впоследствии называться. Ещё в 1934 году Кокстер дал полное описание этих многогранников в евклидовых пространствах любой размерности, а также на сферах любой размерности [8]. Позднее в работах московского математика Э. Б. Винберга была сформулирована аналогичная задача для пространств Лобачевского. Винберг со своими учениками получил много интересных результатов в этом направлении, однако до конца задача не решена до сих пор. Большинство результатов опирается на неэлементарные методы, однако некоторые возникающие задачи вполне доступны школьникам.

Настоящий проект, предлагавшийся участникам Четвёртой летней конференции Турнира городов в Миассе, являлся первой попыткой представить базовые понятия и результаты теории многогранников Кокстера, не выходя за рамки программы математической школы. Несколько позже популярное изложение этой темы появилось в статье Винберга [1]. Группам отражений посвящён седьмой выпуск сборника «Математическое просвещение». В опубликованных там статьях [2], [3], [5] даётся более глубокое введение в теорию дискретных групп отражений. В статье [4] эта теория изящно применяется

Пересмотренный автором вариант статьи с тем же названием: Бугаенко В.О. Зеркала и ячейки // Четвёртая Летняя конференция Турнира городов. М.: Информационный центр Турнира городов, 1993. С. 7—8, 18—25.

для классификации правильных многогранников в пространствах любой размерности. И наконец, обзор научных результатов по теме представлен в статьях [6], [7].

Здесь мы приводим задачи проекта, которые были даны участникам конференции. Приведены также полные решения всех задач, за исключением последнего пункта последней задачи, элементарное решение которого неизвестно.

Условия задач

I. Определение 1. Будем называть *координатным зеркалом* плоскость в трёхмерном пространстве, отражение относительно которой переводит любую точку с целыми координатами в точку с целыми координатами.

а) Докажите, что угол между любыми двумя координатными зеркалами равен одному из значений: 0 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{2}$.

б) Приведите пример пары координатных зеркал, угол между которыми равен $\frac{\pi}{3}$.

в) Опишите все координатные зеркала.

II. Рассмотрим более общий случай. Для этого зафиксируем в пространстве произвольную точку O и три некопланарных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Рассмотрим множество

$$L = \{M \mid \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Такое множество называется *решёткой*, натянутой на векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В частности, если O — начало координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей, то L совпадает с множеством точек, имеющих целые координаты, и называется *координатной решёткой*.

Определение 2. Будем называть *зеркалом решётки* плоскость, отражение относительно которой переводит любую точку решётки в точку решётки.

а) Докажите, что угол между зеркалами любой решётки равен одному из значений 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

б) Приведите пример решётки и пары её зеркал, угол между которыми равен $\frac{\pi}{6}$.

III. Рассмотрим теперь произвольную решётку и множество всех её зеркал.

а) Докажите, что эти зеркала разбивают пространство на равные выпуклые многогранники (не обязательно ограниченные, т. е. под выпуклым многогранником мы понимаем любое пересечение конечного числа полупространств). Эти многогранники будем называть *ячейками*.

б) Докажите, что две соседние (т. е. смежные по грани) ячейки симметричны друг другу относительно плоскости их общей грани.

в) Какой многогранник является ячейкой координатной решётки?

г) Какие многогранники могут являться ячейками решёток? Приведите как можно больше таких примеров. Постарайтесь перечислить все такие многогранники (с точностью до подобия).

Решения

Ниже использованы работы участников конференции: школьников Андрея Бирюка из Краснодара и Егора Краева из Москвы.

И. Начнём с решения пункта в). Приведём сначала примеры зеркал координатной решётки. Очевидно, что три координатные плоскости xy , xz и yz будут таковыми. Также зеркалами будут все плоскости, параллельные координатным плоскостям и пересекающие третью координатную ось в точках с целыми и полуцелыми координатами. Таким образом, мы имеем три серии параллельных зеркал с расстояниями между соседними зеркалами, равными $1/2$. Также очевидно, что плоскость, проходящая через одну из координатных осей и биссектрису двух других, является зеркалом. Более того, зеркалом будет любая плоскость, параллельная ей и проходящая через любую *целую точку* (т. е. точку с целыми координатами). Таким образом, мы имеем ещё шесть (так как каждая пара осей имеет по две биссектрисы) серии параллельных зеркал с расстояниями между соседними зеркалами $1/\sqrt{2}$.

Докажем, что все зеркала координатной решётки исчерпываются описанными выше. Для этого заметим, что расстояние от любой точки с целыми координатами до зеркала, не проходящего через неё, не меньше $1/2$. Действительно, предположив противное, отразим целую точку относительно зеркала, расстояние до которого меньше $1/2$. Получим целую точку, находящуюся от исходной на расстоянии меньше 1. Последнее невозможно, так как расстояние между двумя целыми точками не может быть меньше 1. Рассмотрим теперь прямую, параллельную координатной оси и проходящую через целую точку. Из доказанного утверждения следует, что любое зеркало пересекает такую

прямую либо в целой точке, либо в середине отрезка, соединяющего две соседние целые точки. Причём в последнем случае зеркало должно быть перпендикулярно этой прямой. Завершение доказательства не составляет труда. (Чуть ниже, решая задачу II б), мы приведём другой способ решения и этой задачи.)

Непосредственной проверкой убеждаемся, что все углы между описанными зеркалами принимают значения, перечисленные в пункте Ia) задачи. Угол между плоскостями, проходящими через координатную ось и биссектрису угла между двумя другими осями, равен $\frac{\pi}{3}$, что даёт ответ на пункт Ib).

II а). Будем называть *вектором решётки* вектор, соединяющий любые две точки решётки. Вектор решётки будем называть *несократимым*, если он не кратен никакому другому вектору решётки. Заметим, что для любого зеркала найдётся перпендикулярный ему вектор решётки. Действительно, им будет вектор, соединяющий любую точку решётки, не принадлежащую зеркалу, с её образом при отражении относительно этого зеркала. Если потребовать несократимость, то такой вектор определяется зеркалом однозначно с точностью до умножения на -1 .

Пусть теперь $\vec{e}$ — произвольный несократимый вектор решётки. Вектор $\vec{e}$ называется *корнем решётки*, если существует перпендикулярное ему зеркало Π_e . Отражение относительно плоскости Π_e будем обозначать R_e . Если $\vec{e}$ — корень решётки, то для любого вектора решётки $\vec{v}$ вектор $R_e(\vec{v})$ тоже является вектором решётки. Вектор $\vec{v} - R_e(\vec{v})$ перпендикулярен плоскости отражения Π_e , значит, коллинеарен $\vec{e}$. Поскольку $\vec{e}$ несократим, можно записать

$$\vec{v} - R_e(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{e}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

С другой стороны, очевидно, что

$$(\vec{e}, \vec{v}) = -(\vec{e}, R_e(\vec{v})), \quad (2)$$

где скобки означают скалярное произведение векторов. Подставляя значение $R_e(\vec{v})$ из (1) в (2), имеем

$$\begin{aligned} (\vec{e}, \vec{v}) &= -(\vec{e}, \vec{v} - \lambda \vec{e}), \\ (\vec{e}, \vec{v}) &= -(\vec{e}, \vec{v}) + \lambda(\vec{e}, \vec{e}), \\ \lambda &= \frac{2(\vec{e}, \vec{v})}{(\vec{e}, \vec{e})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что попутно мы вывели формулу отражения вектора v относительно плоскости Π_e :

$$R_e(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{2(\vec{e}, \vec{v})}{(\vec{e}, \vec{e})} \vec{e}. \quad (4)$$

Пусть теперь $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — два корня решётки. Согласно (1) и (3), числа $\frac{2(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}$ и $\frac{2(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}$ целые. Их произведение равно

$$\frac{4(\vec{e}_1, \vec{e}_2)^2}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = 4\cos^2(\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}) = 4\cos^2(\widehat{(\Pi_1, \Pi_2)}).$$

(Последнее равенство следует из того, что угол между двумя корнями либо равен углу между соответствующими зеркалами, либо дополняет его до π . В обоих случаях косинус угла между зеркалами по модулю равен косинусу угла между соответствующими корнями.) Число $4\cos^2(\widehat{(\Pi_1, \Pi_2)})$ является целым и лежит на отрезке от 0 до 4, следовательно, равно одному из чисел 0, 1, 2, 3 или 4. Соответственно угол $(\widehat{(\Pi_1, \Pi_2)})$ может быть равен $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ или 0. Задача II а) решена.

Заметим, что приведённое выше рассуждение даёт аналитический метод нахождения всех корней произвольной решётки. Точнее: вектор $\vec{e}$ является корнем тогда и только тогда, когда для любого вектора $\vec{v}$ решётки число $\frac{2(\vec{e}, \vec{v})}{(\vec{e}, \vec{e})}$ является целым. В свою очередь, последнее условие достаточно проверить только для базисных векторов решётки ($\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$). Это позволяет найти все корни координатной решётки (т. е. решить задачу I в) другим, более формальным способом). Пусть $\vec{e} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ — корень координатной решётки. Тогда $(\vec{e}, \vec{i}) = x$; $(\vec{e}, \vec{j}) = y$; $(\vec{e}, \vec{k}) = z$. Согласно (1) и (3), числа $\frac{2(\vec{e}, \vec{i})}{(\vec{e}, \vec{e})}$, $\frac{2(\vec{e}, \vec{j})}{(\vec{e}, \vec{e})}$, $\frac{2(\vec{e}, \vec{k})}{(\vec{e}, \vec{e})}$ — целые. Так как вектор $\vec{e}$ несократим, то числа x , y и z не имеют общих делителей. Поэтому любой общий делитель чисел $2x$, $2y$ и $2z$ является делителем двойки. Значит, $(\vec{e}, \vec{e})$ равно 1 или 2. Таким образом, корни координатной решётки получаются решением уравнений $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Решениями первого уравнения будут тройки $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ и $(0, 0, \pm 1)$, соответствующие корням, направленным вдоль координатных осей. Решениями второго уравнения будут тройки $(\pm 1, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$, и $(0, \pm 1, \pm 1)$, соответствующие корням, направленным вдоль биссектрис координатных плоскостей.

II б). Требуемая решётка натянута на такие векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, что угол между векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равен $\frac{\pi}{3}$, а вектор $\vec{k}$ перпендикулярен $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{i} + \vec{j}$ являются корнями решётки, и угол между определяемыми ими зеркалами равен $\frac{\pi}{6}$.

III а) и б). Нам потребуется следующая

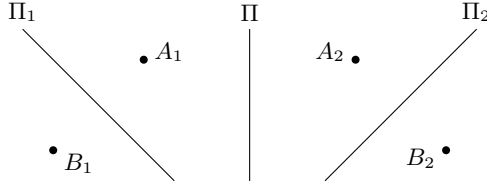


Рис. 1

Лемма. Любое зеркало решётки при отражении относительно другого зеркала также переходит в зеркало.

Доказательство леммы. Пусть Π и Π_1 — два зеркала решётки, Π_2 — плоскость, симметричная Π_1 относительно Π . Докажем, что Π_2 также является зеркалом. Для этого рассмотрим произвольную точку A_2 решётки и её образ B_2 при отражении относительно Π_2 . Нужно доказать, что B_2 — точка решётки. При отражении относительно зеркала Π пара точек (A_2, B_2) переходит в пару точек (A_1, B_1) , симметричных относительно плоскости Π_1 (рис. 1). Поскольку A_2 — точка решётки, а Π и Π_1 — зеркала решётки, мы последовательно заключаем, что A_1 , B_1 и B_2 — точки решётки, что и требовалось. Лемма доказана. $\square$

Из леммы следует, что отражение относительно любого зеркала сохраняет множество всех зеркал (переставляя его элементы), а следовательно, и множество всех ячеек. Значит, отражение относительно зеркала, содержащего грань ячейки, переводит эту ячейку в смежную с ней по этой грани. Поэтому любые две смежные (а в силу транзитивности, и любые две произвольные) ячейки равны.

III в). Ячейкой координатной решётки является, например, тетраэдр, ограниченный плоскостями

$$\Pi_1: x = \frac{1}{2}; \quad \Pi_2: -x + y = 0; \quad \Pi_3: -y + z = 0 \quad \text{и} \quad \Pi_4: z = 0$$

(рис. 2). Корнями, соответствующими граням ячейки, будут векторы

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0); \quad \vec{e}_2 = (-1, 1, 0); \quad \vec{e}_3 = (0, -1, 1); \quad \vec{e}_4 = (0, 0, -1).$$

Двугранные углы равны соответственно

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha_{1,3} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{1,4} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2,3} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{2,4} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{3,4} = \frac{\pi}{4}.$$

III г). Мы не даём здесь полного и строгого решения этого пункта. Приведём лишь некоторые соображения и основные результаты.

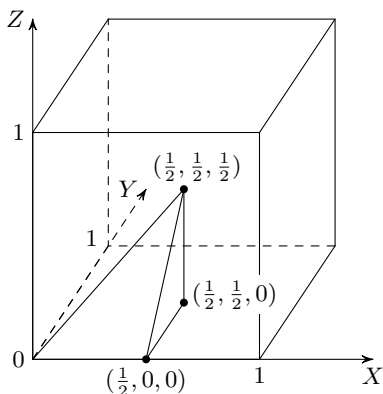


Рис. 2

Из задачи II а) следует, что любая ячейка является многогранником, все двугранные углы которого равны $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{2}$. Такие многогранники называются многогранниками Кокстера. Перечислим их. Для начала будем рассматривать лишь ограниченные многогранники Кокстера. Они естественно делятся на три класса.

1. Прямоугольные параллелепипеды. Соответствующие им множества корней разбиваются на три пары так, что векторы разных пар перпендикулярны друг другу. Существует бесконечно много таких параллелепипедов с точностью до подобия. Каждый класс подобия характеризуется отношениями длин рёбер параллелепипеда.

2. Призмы. В этом случае множество корней разбивается на два взаимно ортогональных подмножества (т. е. таких, что векторы разных подмножеств перпендикулярны друг другу). Первое подмножество соответствует основаниям призмы, второе — её боковым граням. В основании призмы должен лежать многоугольник с углами из рассматриваемого списка. Им может быть только один из трёх треугольников: равносторонний, равнобедренный прямоугольный или треугольник с углами $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$. В каждом случае классы подобия таких призм параметризуются отношением любого фиксированного ребра основания и бокового ребра призмы.

3. Неразложимые многогранники. Это такие многогранники, что множество корней, соответствующих их граням, не разлагается на взаимно ортогональные подмножества. Таких многогранников всего три, и все они являются тетраэдрами. Доказательство этого факта, ис-

пользующее методы линейной алгебры, в частности понятие матрицы Грама, можно почерпнуть в статье [3]. Элементарное доказательство этого утверждения нам неизвестно. Поэтому здесь мы ограничимся лишь перечислением искомых тетраэдров. Один из них описан в решении задачи III в). Приведём системы корней и двугранные углы двух оставшихся тетраэдров:

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 0); \quad \vec{e}_2 = (1, -1, 0); \quad \vec{e}_3 = (-1, 0, -1); \quad \vec{e}_4 = (-1, 0, 1);$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{1,3} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{1,4} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{2,3} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{2,4} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{3,4} = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 0); \quad \vec{e}_2 = (1, -1, 0); \quad \vec{e}_3 = (-1, 0, -1); \quad \vec{e}_4 = (0, 0, 1);$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{1,3} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{1,4} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2,3} = \frac{\pi}{3}; \quad \alpha_{2,4} = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{3,4} = \frac{\pi}{4}.$$

Стоит упомянуть, что вопрос описания многогранников Кокстера представляет интерес и в пространствах размерности больше трёх. Их полная классификация впервые была проведена в работе [8]. Эту классификацию (с полным доказательством) на русском языке можно найти в статье [3]. В частности, строгое решение рассматриваемой задачи III г) следует из неё.

В евклидовом пространстве любой размерности все ограниченные неразложимые многогранники Кокстера являются симплексами (не давая строгого определения, скажем, что симплекс — это самый простой многогранник в n -мерном пространстве, аналог треугольника на плоскости и тетраэдра в трёхмерном пространстве). Количество $C(n)$ ограниченных симплексов Кокстера в n -мерном пространстве приведено в следующей таблице.

n	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
$C(n)$	3	3	5	4	5	5	5	4

Произвольные многогранники Кокстера получаются из ограниченных с помощью следующей процедуры: мы выбираем в множестве плоскостей граней некоторое подмножество и рассматриваем многогранник, ограниченный лишь плоскостями из этого подмножества.

Остаётся выяснить, а все ли описанные многогранники Кокстера являются ячейками решёток? Для этого в каждом случае рассмотрим решётку, порождённую найденной системой корней (нормалей к граням многогранника). Она, как правило, и является искомой. В некоторых случаях, правда, исходный многогранник не является её ячейкой, а состоит из нескольких ячеек. Например, куб разбивается на

шесть равных ячеек координатной решётки. Попробуйте самостоятельно найти все случаи, когда такое происходит.

Литература

1. Винберг Э. Б. Калейдоскопы // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 2. С. 121—127.
2. Винберг Э. Б. Калейдоскопы и группы отражений // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 45—63.
3. Бугаенко В. О. Классификация многогранников Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 7. 2003. С. 82—106.
4. Бугаенко В. О. Правильные многогранники // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 107—115.
5. Шварцман О. В. Группы отражений и группы Кокстера // Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 64—81.
6. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. Гл. 5 и 6 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. (Фундаментальные направления. 1988. Т. 29: Геометрия-2). С. 147—259.
7. Винберг Э. Б. Гиперболические группы отражений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 29—66.
8. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35, № 3. P. 588—621.

Монетные системы

К. А. Кноп

Темой статьи является частный случай так называемой задачи о рюкзаке, которую в общем виде можно сформулировать так: из совокупности предметов, каждый из которых имеет свою стоимость и полезность, требуется отобрать некоторые предметы таким образом, чтобы получить максимальную суммарную полезность при ограничении на суммарную стоимость (см., например, Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2007). Несмотря на простую постановку, задача о рюкзаке общего вида весьма сложна: количество вычислений, необходимых для ее решения, с ростом числа переменных растет как геометрическая прогрессия. Это сильно ограничивает размер решаемых задач. Тем не менее для некоторых классов задач удастся построить алгоритмы решения, сложность которых оценивается многочленом от числа переменных. Такие алгоритмы можно считать достаточно эффективными, поэтому описание соответствующих классов задач имеет высокую практическую ценность. В данном проекте рассматриваются некоторые связанные с этим вопросы.

В России имеются в обращении монеты достоинством 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 копеек¹. Какие ещё есть в обращении купюры и монеты после реформы денег, не знает никто, поэтому ограничимся этими.

Как заплатить сумму N копеек наименьшим числом монет (без сдачи)? Для этого можно использовать следующий алгоритм.

Жадный алгоритм (N)

Пусть A — наибольшая стоимость монеты, не превосходящая N . Тогда нужно взять монету A , а для нахождения остальных монет, если A не равно N , выполнить Жадный алгоритм ($N - A$).

Например, для $N = 29$ получаем $29 = 20 + 5 + 3 + 1$. Ясно, что жадный алгоритм даёт только одно из возможных решений (другое, например: $15 + 10 + 2 + 2$).

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^M$ — монетная система. Выплату суммы N копеек монетами этой системы будем называть также *разложением* числа N .

Впервые опубликовано: Кноп К. А. Монетные системы // Пятая Летняя конференция Турнира городов. М.: Информационный центр Турнира городов. 1994. С. 16—17, 55—66.

¹ Написано в начале 1990-х годов. — Прим. составителя.

Разложение назовём *жадным*, если оно совпадает с результатом применения жадного алгоритма к числу N . Длиной разложения будем называть количество входящих в него монет. Разложение назовём *кратчайшим*, если его длина — наименьшая из всех возможных длин разложений данного числа. Будем обозначать длину любого из кратчайших разложений $F(N)$, а длину жадного разложения $G(N)$. Назовём систему *удобной*, если для всех N выполнено равенство $F(N) = G(N)$, и *неудобной* — в противном случае.

1. Докажите, что российская монетная система — удобная.
2. Докажите, что если ввести в обращение монету 7 копеек, система перестанет быть удобной.
3. Сохранит ли система удобность, если ввести монету 9 копеек?
4. а) Найдите ещё хотя бы одну монету, отличную от имеющихся и не большую 50, добавление которой сохраняет удобность российской системы.
- б) Найти все такие значения N , что при добавлении в российскую монетную систему монеты N система остаётся удобной.
5. Докажите, что монетная система $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_M$ является удобной, если для каждого $k = 1, \dots, M - 1$ число a_{k+1} делится на a_k .
6. Докажите, что любая арифметическая прогрессия с первым членом, равным 1, является удобной системой.
7. Придумайте алгоритм, проверяющий, является ли некоторая монетная система $\{a_i\}_{i=1}^M$ из M монет удобной. Алгоритм должен выполнять не более CM^3 действий, где C — константа.

Рассмотрим теперь выплаты ограниченным количеством монет (не обязательно в удобной системе): выплату числа N назовём *K-выплатой*, если $F(N)$ не больше K . Пусть M — количество монет в монетной системе, а $N(K, M)$ — наибольшее из таких чисел, что для всех n от 1 до $N(K, M)$ существует K -выплата числа n .

8. Покажите, что для российской системы ($M = 8$, монеты указаны выше) $N(3, 8) = 28$.
9. Существует ли (для любого M) система из M монет, для которой $N(2, M) > 4M - 5$?
10. а) При каких M существует система из M монет, для которой $N(2, M) > CM$ при некотором $C > 4$?
- б) Найдите монетные системы из M ($M = 2, 3, 4, \dots$) монет, для которых $N(2, M)$, $N(3, M)$ и т. д. — наибольшие.

Возьмём некоторую монетную систему. Ясно, что её «качество» зависит от того, сколько монет она требует для уплаты произвольной суммы N , а также от числа M монет в самой системе. Так, система из

одной монеты (1 копейка) для суммы $N = 100$ требует 100-выплаты; а система из 100 монет (1, 2, ..., 100) для любой суммы от 1 до 100 требует всего 1-выплаты, но зато содержит $M = 100$ монет. Поэтому обе эти системы плохи. Пусть $S_1 = M \max \{F(N)\}$, $N = 1, \dots, 100$, $S_2 = M(F(1) + F(2) + \dots + F(100))$.

11. Найдите монетную систему, минимизирующую S_1 .

12. Найдите монетную систему, минимизирующую S_2 .

(Решившего эти задачи просим не сообщать решение в ЦБ России во избежание новых денежных реформ.)

Решения

1. Жадный алгоритм рекурсивно вызывает сам себя, поэтому для проверки удобства российской системы нужно только проверить, что он всегда правильно определяет первую монету. То есть в любом кратчайшем разложении числа N должна присутствовать наибольшая монета, не превосходящая N . Для проверки вручную этого свойства можно поступить следующим образом. Сначала выпишем соотношения

$$\begin{array}{ll} 1 + 1 = 2, & 2 + 1 = 3, \\ 2 + 2 = 3 + 1, & 3 + 2 = 5, \\ 3 + 3 = 5 + 1, & \\ 5 + 5 = 10, & 10 + 5 = 15, \\ 10 + 10 = 20, & 15 + 5 = 20, \\ 15 + 15 = 20 + 10, & 15 + 10 = 20 + 5, \\ 20 + 20 + 10 = 50, & \\ 20 + 20 + 15 = 50 + 5, & \\ 20 + 20 + 20 = 50 + 10, & \end{array}$$

из которых получаем следующее. Если в некоторой выплате имеется более одной монеты стоимостью до 20 копеек, а также если имеются одновременно монеты 1 и 2, 2 и 3 и т. п., то эту выплату можно преобразовать таким образом, чтобы либо уменьшить количество монет в ней, либо увеличить стоимость наибольшей входящей в выплату монеты (то, что стоит слева от знаков равенства, заменить на то, что стоит справа). Пусть такую операцию проделать больше не удаётся. Тогда в выплате числа 2 есть монета 2 (так как монеты 1 не более одной); в выплате чисел 3 и 4 есть монета 3 (так как 1 и 2 не более одной и они не вместе); в выплате чисел от 5 до 9 есть монета 5 (так

как из меньших монет вместе могут быть только 1 и 3, а их сумма не более 4) и т. д. Рассуждая так, получаем, что жадный алгоритм правилен во всех случаях.

2, 3. В обоих случаях контрпример — 14: $F(14) = 2$, $14 = 7 + 7 = 9 + 5$, в то время как жадный алгоритм требует 3 монет: $10 + 3 + 1$, т. е. $G(14) = 3$.

4. а) Рассуждая как и в задаче 1, можно показать, что единственными монетами до 50, при добавлении которых российская система остаётся удобной, являются: 4, 6, 8, 25, 30, 35, 40, 45.

б) Поскольку для суммы 100 существует выплата $50 + 50$, то и жадный алгоритм должен гарантировать 2-выплату. Отсюда следует такое необходимое условие: если добавляемая монета меньше 100, то она может быть только одной из следующих: 80 ($80 = 100 - 20$), 85 ($85 = 100 - 15$), 90 ($90 = 100 - 10$), 95, 97, 98, 99. Оказывается, это условие является и достаточным, т. е. каждую из них можно добавить. Аналогично для монет, больших 100, можно добавить монеты 110, 115, 120, 125, а также любую монету, большую 126, за исключением следующих: 131, 136, 141, 151, 152, 153, 154, 156, 161, 166, 171, 201. Эти результаты были получены на ЭВМ при помощи алгоритма проверки удобства (см. решение задачи 7). Алгоритмом производилась проверка для всех добавляемых монет от 4 до 300. Докажем, что можно добавить любую монету, большую 300, и система при этом останется удобной. В самом деле, пусть мы добавили монету A , $A = 300 + 50k + r = 50(6 + k) + r$, где r — остаток от деления A на 50. Уплата любой суммы, меньшей A , не изменится. Уплата любой большей суммы, не использующая монеты A , содержит не менее $6 + k$ монет, так как наибольшая из предыдущих монет равна 50. Но жадный алгоритм даст выплату, содержащую монету A , не более k монет по 50 копеек и ещё не более 5 монет (наибольший остаток — 49 — требует 5-выплаты), т. е. всего не более $6 + k$ монет. Поэтому система осталась удобной.

5. Докажем это утверждение по индукции.

База индукции для $M = 2$. Пусть имеются 2 монеты 1 и A . Любое число N может быть представлено в виде $N = xA + y$, где y — остаток от деления N на A . Для числа N жадный алгоритм даёт, таким образом, выплату из $x + y$ монет, а любая другая выплата содержит $(y + zA)$ монет 1 и $(x - z)$ монет A , т. е. $x + y + z(A - 1)$ монет. Так как A больше 1, то последнее число больше, чем $x + y$, т. е. жадное разложение — кратчайшее.

Шаг индукции: пусть утверждение верно для любой системы из k монет. Рассмотрим систему $1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$. Так как стоимость

каждой следующей монеты делится на величину предыдущей, то все стоимости, начиная со второй, делятся на a_2 . Пусть $b_i = \frac{a_i}{a_2}$ для каждого $i = 2, 3, \dots, k+1$, и пусть $N = xa_2 + y$. Аналогично доказательству базы индукции получаем, что в кратчайшем разложении числа N монетами 1 уплачено только число y . Для числа x и монетной системы $b_2, b_3, \dots, b_{k+1}$, состоящей из k монет, применим предположение индукции. Оно означает, что кратчайшая выплата числа x обеспечивается жадным алгоритмом. Значит, это же верно для числа xa_2 в монетной системе $a_2b_2, a_2b_3, \dots, a_2b_{k+1}$, которая есть не что иное как $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$. Объединив это с выплатой числа y , получаем, что и для числа N всё доказано.

6. Аналогично равенствам, выписанным в задаче 1, для этой системы выписываются равенства $a_{i+1} + a_{j-1} = a_i + a_j$, «раздвигающие» выплату. Пусть имеется некоторая кратчайшая выплата числа N . Применяя эти равенства, пока это возможно, получаем, что существует выплата с тем же числом монет, содержащая не более одной «промежуточной» монеты (не самой крупной и не 1). После этого заметим, если это возможно, группу из монет 1 на более крупную монету и опять, если возможно, применим «раздвижку» и т.д. В итоге получим выплату, в которой сколько-то монет 1 (не больше, чем величина следующей монеты), не более одной промежуточной монеты и некоторое число старших монет. Легко видеть, что жадный алгоритм даёт именно эту выплату.

Участники V Летней конференции из Канады предложили следующие две леммы, расширяющие эту задачу:

Лемма 1. Если две наибольшие монеты в удобной монетной системе равны N и $N+1$, то она содержит все монеты от 1 до $N+1$.

Доказательство. Действительно, если K — наибольшая пропущенная монета, то число $N+1+K$ имеет жадное представление, содержащее не менее 3 монет: $N+1$ и не менее 2 монет для представления K . В то же время оно имеет представление и из 2 монет: $N+(1+K)$. Мы пришли в противоречие с удобностью системы. $\square$

Лемма 2. Если удобная система содержит монеты N и $N+d$, $d > 0$, то она также содержит монеты $N-d$, $N-2d, \dots$

Доказательство. Аналогично. $\square$

Очевидно, что лемма 2 обобщает лемму 1.

Некоторые участники также доказали, что «фибоначчиева система» $\{1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ является удобной. Впрочем, этот результат, как

и результаты задач 5 и 6, следует из теоремы, приведённой в решении задачи 7.

7. Ниже будет приведён алгоритм проверки удобных монетных систем, найденный московским школьником О. Поповым, а также теорема, которая доказывает правильность этого алгоритма.

Пусть $\{a_i\}_{i=1}^M$ — монетная система. Для каждого $k, k = 2, \dots, M$, рассмотрим жадное разложение числа a_k в монетной подсистеме $\{a_i\}_{i=1}^{k-1}$:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} a_i. \quad (1)$$

Найдя коэффициенты $\beta_{k,i}$, рассмотрим числа

$$P_{k,j} = a_j + \sum_{i=j}^{k-1} \beta_{k,i} a_i \quad (j = 1, 2, \dots, k-1). \quad (2)$$

Заметим, что (2) задаёт разложение числа $P_{k,j}$, имеющее длину $1 + \sum_{i=j}^{k-1} \beta_{k,i}$. При этом для всех допустимых значений k и j выполнено неравенство

$$a_j > \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{k,i} a_i, \quad (3)$$

иначе разложение (1) не являлось бы жадным разложением, начиная с j -го места.

Из (1)—(3) следует, что

$$P_{k,j} > \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{k,i} a_i = a_k.$$

Таким образом, жадное разложение числа $P_{k,j}$ должно содержать монету a_k или монеты, большие её, т. е. отличаться от разложения (2). Если в некотором разложении числа N количество каждой из монет от a_j до $a_k - 1$ не меньше, чем их количество в (2), то такое разложение допускает преобразование, которое мы назовём $P_{k,j}$ -операцией (или просто P -операцией): заменим все эти монеты на монеты жадного разложения числа $P_{k,j}$.

Докажем, что если некоторое разложение допускает применение P -операций, то их можно выполнить лишь конечное число раз. Пусть число s на 1 больше максимального из чисел $P_{k,j}$ ($k = 1, \dots, m$,

$j = 1, \dots, k - 1$). Если считать, что монета a_i «имеет вес» s^i , то $P_{k,j}$ -операция увеличивает суммарный вес монет в разложении: до неё вес был равен $s^j + \sum_{i=j}^{k-1} \beta_{k,i} s^i$, т. е. был не больше, чем

$$s^j + \sum_{i=j}^{k-1} (s-1)s^i = s^j + (s^k - s^j) = s^k,$$

а после операции в разложении появилась либо монета a_k (с весом s^k), либо ещё более тяжёлая монета, а также ещё какие-то монеты (так как $P_{k,j} > a_k$). Это означает, что общий вес входящих в разложение монет увеличился. Таким образом, введённое понятие веса является полуинвариантом относительно P -операций. А поскольку для каждого N имеется лишь конечное число возможных разложений, то P -операцию можно применить лишь конечное число раз.

В итоге, когда P -операции уже невозможны, получено некоторое разложение числа N , которое мы назовём P -разложением. Наконец, мы подошли к формулировке основной теоремы — теоремы о проверке удобных систем.

Теорема 1 (о проверке удобных систем). *Чтобы монетная система $\{a_i\}_{i=1}^M$ являлась удобной, необходимо и достаточно, чтобы для всех $k = 2, 3, \dots, M$ и всех $j = 1, 2, \dots, k - 1$ выполнялись неравенства*

$$G(P_{k,j}) \leq 1 + \sum_{i=j}^{k-1} \beta_{k,i} \quad (4)$$

(иначе говоря, чтобы длина жадного разложения каждого из чисел $P_{k,j}$ не превосходила длины его разложения (2)).

Алгоритм О. Попова, основанный на этой теореме (хотя сама теорема и не была им строго доказана), устроен так: для каждой монеты a_k , $k \geq 2$, находим разложение (1). По нему строим числа P — всего $\frac{M(M-1)}{2}$ чисел. За $C \cdot M$ действий жадного алгоритма для каждого числа $P_{k,j}$ находим длину его жадного разложения, после чего проверяем (4). Если выполнены все такие неравенства, то в силу теоремы система является удобной, если нет — неудобной. Итого алгоритм О. Попова требует не более $C \cdot M^3$ операций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Необходимость. Если для какого-то из чисел P неравенство (4) не выполнено, то его разложение (2) является более коротким, чем жадное, т. е. система неудобна по определению.

2. Достаточность. Мы должны доказать, что при выполнении всех неравенств (4) система является удобной. Предварительно отметим, что из (4) следует, что никакая P -операция не увеличивает длины разложения. Поэтому если взять любое из кратчайших разложений любого числа и применять, пока это возможно, P -операции, придём к P -разложению этого числа, которое также будет кратчайшим.

Предположим противное: существует неудобная монетная система, для которой, тем не менее, все неравенства (4) выполнены. Возьмём наименьшее число N , для которого жадное разложение и кратчайшее P -разложение

$$N = \sum_{i=1}^M \gamma_i a_i \quad (5)$$

не совпадают. Это означает, что для некоторых значений индексов j неравенство, аналогичное (3), неверно, т. е. $a_j \leq \sum_{i=1}^{j-1} \gamma_i a_i$. Пусть r — наименьший из таких индексов. Выпишем для a_r разложение (1):

$$a_r = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i.$$

Будем сравнивать коэффициенты γ_i и $\beta_{r,i}$. Возможны три случая.

1) Для всех $i = 1, 2, \dots, r-1$ они попарно равны. Тогда в (5) можно заменить сумму нескольких монет $\sum_{i=1}^{j-1} \gamma_i a_i = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i$ на одну, равную этой сумме, монету a_r , уменьшив при этом длину разложения. Это противоречит тому, что (5) — кратчайшее.

Значит, существуют значения индекса j , для которых $\gamma_j \neq \beta_{r,j}$. Пусть s — наибольший из таких индексов.

2) Если $\gamma_s \geq \beta_{r,s} + 1$, то (5) допускает $P_{r,s}$ -операцию:

$$\begin{aligned} N = \sum_{i=1}^M \gamma_i a_i &= \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i a_i + (\gamma_s - \beta_{r,s} - 1) a_s + \left(a_s + \sum_{i=s}^{r-1} \beta_{r,i} a_i \right) + \sum_{i=r}^M \gamma_i a_i = \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i a_i + (\gamma_s - \beta_{r,s} - 1) a_s + P_{r,s} + \sum_{i=r}^M \gamma_i a_i. \end{aligned}$$

Так как в сумму входит число $P_{r,s}$, то возможна $P_{r,s}$ -операция, что противоречит тому, что (5) — P -разложение.

3) Пусть $\beta_{r,s} \geq \gamma_s + 1$. Поскольку $s < r$, в силу выбора r имеем неравенство $a_s > \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i a_i$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i a_i &= \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_i a_i + \gamma_s a_s + \sum_{i=s+1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i < (1 + \gamma_s) a_s + \sum_{i=s+1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i \leq \\ &\leq \beta_{r,s} a_s + \sum_{i=s+1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i \leq \sum_{i=1}^{r-1} \beta_{r,i} a_i = a_r, \end{aligned}$$

т. е. $a_r > \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i a_i$. Последнее неравенство противоречит выбору r .

Полученные противоречия во всех трёх случаях показывают, что предположение о том, что кратчайшее P -разложение отличается от жадного, неверно. Следовательно, жадное разложение равно одному из кратчайших разложений (а именно P -разложению), т. е. система удобна. $\square$

8. Простое упражнение на усвоение введённой терминологии: нужно проверить, что кратчайшие выплаты любого числа до 28 требуют не более 3 монет, а для числа 29 трёх монет не хватает. Последнее следует из задачи 1 и разложения $29 = 20 + 5 + 3 + 1$.

9. Да, существует: 1, 3, 5, ..., $2M - 1$ (все нечётные) и последняя монета равна $2M - 2$. Рассмотрим отдельно разложения чётных и нечётных чисел. Любое чётное число, меньшее $2M$, выплачивается монетой 1 и ещё одной монетой, любое чётное число от $2M$ до $4M - 2$ выплачивается монетой $2M - 1$ и ещё одной монетой, число $4M - 4$ выплачивается двумя монетами $2M - 2$. Нечётные числа до $2M - 1$ требуют одной монеты, а любое нечётное число от $2M + 1$ до $4M - 3$ выплачивается монетой $2M - 2$ и ещё одной монетой. Поэтому для этой системы $N(2, M) = 4M - 4$.

10. а) Для чётного числа монет $M = 2K$ можно рассмотреть набор из M монет

$$1, 2, 3, \dots, K, 2K + 1, 3K + 2, 4K + 3, \dots, (K + 1)K + K.$$

Двумя монетами из этого набора можно выплатить любое число до

$$(K + 1)K + 2K = (K + 3)K = \frac{M^2}{4} + \frac{3M}{2}.$$

Для нечётного числа $M = 2K + 1$ берём набор

$$1, 2, 3, \dots, K, K + 1, 2(K + 1) + 1, 3(K + 1) + 2, \dots, (K + 1)(K + 1) + K.$$

Двумя монетами из этого набора можно выплатить любое число до

$$(K+1)(K+1) + K + K + 1 = K^2 + 4K + 2 = \frac{(M-1)^2}{4} + \frac{4(M-1)}{2} + 2 = \frac{M^2}{4} + \frac{3}{2}M + \frac{1}{4}.$$

В обоих случаях $N(2, M)$ имеет порядок $\frac{M^2}{4}$, так что $N(2, M) > C \cdot M$ для любой константы C . Легко найти оценку величины $N(2, M)$ сверху: $N(2, M) \leq \frac{M^2 + 3M}{2}$.

Докажем это.

1-выплата существует ровно для M чисел. Ещё для не более чем M чисел существует 2-выплата, содержащая две равные монеты. Количество чисел, допускающих 2-выплату двумя различными монетами, не превосходит $\frac{M(M-1)}{2}$ — числа сочетаний из M по 2. Итого получаем $\frac{M^2 - M}{2} + 2M = \frac{M^2 + 3M}{2}$. Если бы $N(2, M)$ было больше этой величины, то какие-то из $N(2, M)$ чисел $1, 2, \dots, M$ были бы непредставимы. Поэтому $N(2, M) \leq \frac{M^2 + 3M}{2}$. На ЭВМ участниками были исследованы монетные системы, максимизирующие значения $N(2, M)$ для значений $M \leq 10$. Эти системы приведены ниже.

$M = 3$	$N(2, 3) = 8$	$\{1, 3, 4\}$
$M = 4$	$N(2, 4) = 12$	$\{1, 3, 5, 6\}$
$M = 5$	$N(2, 5) = 16$	$\{1, 3, 5, 7, 8\}$
$M = 6$	$N(2, 6) = 20$	$\{1, 2, 5, 8, 9, 10\}$
$M = 7$	$N(2, 7) = 26$	$\{1, 2, 5, 8, 11, 12, 13\}$
$M = 8$	$N(2, 8) = 32$	$\{1, 2, 5, 8, 11, 14, 15, 16\}$
$M = 9$	$N(2, 9) = 40$	$\{1, 3, 4, 9, 11, 16, 17, 19, 20\}$
$M = 10$	$N(2, 10) = 46$	$\{1, 2, 5, 7, 11, 15, 19, 21, 22, 24\}$

Отметим, что не удалось найти никакой закономерности, которой бы подчинялись эти системы или хотя бы значения $N(2, M)$. Более того, все алгоритмы, применённые участниками для поиска таких систем на ЭВМ, по сути являлись полным перебором всех возможных систем, т. е. не было найдено никакого эффективного алгоритма «отбраковки» неоптимальных систем. Всё сказанное относится и к пункту б).

Также нерешённым остался вопрос о том, для какого наибольшего значения A справедливо неравенство $N(2, M) > AM^2 + BM + C$ (выше было показано, что $1/4 \leq A \leq 1/2$).

б) Оценка сверху для $N(3, M)$ находится из тех же соображений, что и для $N(2, M)$: к $M^2 + 3M$ суммам, требующим 2-выплаты, нужно добавить ещё M сумм, которые можно уплатить тремя равными монетами, $M(M-1)$ сумм, которые можно уплатить тремя монетами, ровно две из которых одинаковы, и $\frac{M(M-1)(M-2)}{6}$ сумм, которые можно уплатить тремя различными монетами. Итого получаем

$$N(3, M) \leq M^2 + 3M + M + M^2 - M + \frac{M(M-1)(M-2)}{6} = \frac{M(M^2 + 9M + 20)}{6}.$$

Оценку снизу можно получить так. Пусть $K = [M/3]$, $R = M - 2K$, $R \geq K$. Рассмотрим систему:

$$1, 2, \dots, K, K+1, 2(K+1), 3(K+1), \dots, K(K+1), \\ (K+1)^2 + 1, 2(K+1)^2 + 2, \dots, R(K+1)^2 + R.$$

Тремя монетами этой системы можно получить все суммы до

$$(R+1)(K+1)^2 + R \geq (K+1)^3 + K = K(K^2 + 3K + 4) + 1,$$

а это величина порядка $\frac{M^3}{27}$. Монетные системы, максимизирующие $N(3, M)$ для небольших значений M , также были найдены при помощи ЭВМ.

$$\begin{array}{lll} M = 3 & N(3, 3) = 14 & \{1, 4, 6\} \\ M = 4 & N(3, 4) = 23 & \{1, 4, 7, 9\} \\ M = 5 & N(3, 5) = 36 & \{1, 4, 6, 14, 15\} \\ M = 6 & N(3, 6) = 52 & \{1, 3, 7, 9, 19, 24\} \\ M = 7 & N(3, 7) = 70 & \{1, 4, 5, 15, 18, 27, 34\} \end{array}$$

Покажем, как в общем случае получить для $N(K, M)$ оценку сверху. Рассмотрим, как и выше, число способов взять L монет. Оно равно числу сочетаний с повторениями из M по L , т. е. $\binom{M+L-1}{L}$. Если просуммировать эти коэффициенты по $L = 1, \dots, K$, получим

$$\binom{M}{1} + \binom{M+1}{2} + \dots + \binom{M+K-1}{K} = \binom{M+K}{M} - \binom{K}{K} = \binom{M+K}{K} - 1$$

Это, как и в частных случаях, рассмотренных выше, многочлен K -й степени от M со старшим коэффициентом $\frac{1}{K!}$.

Участники V Летней конференции из Канады предложили другую постановку задач 10—12: в K -выплате разрешается некоторые из K монет брать со знаком «минус», т. е. рассматривается уплата со

сдачей, но общее число уплаченных и полученных в сдачу монет не больше K . Для уплат со сдачей также можно определять значения $F(N)$, $N(K, M)$, S_1 , S_2 . Например, один из полученных канадцами результатов такой: $N(3, 2) = 12$. В самом деле, пусть у нас имеются 2 монеты стоимостью A и B , $B > A$. Тогда все возможные их комбинации из не более чем трёх монет будут такими: A , B , $A + A$, $A + B$, $B + B$, $B - A$, $A + A + A$, $A + A + B$, $B + B - A$, $A + B + B$, $B + B + B$, $A + A - B$ (или $B - A - A$) — всего не более 12 различных комбинаций. Отсюда $N(3, 2) \leq 12$, $B \leq 4$. Если мы хотим, чтобы все эти 12 чисел были различными, то мы должны потребовать, чтобы A не было равно $B - A$ и $A + A + A$ не было равно $B - A$. Отсюда A должно быть отлично от 1 и 2, т. е. $A = 3$. Легко проверить, что для системы $\{3, 4\}$ действительно $N(3, 2) = 12$.

11. Докажем, что $S_1 = 24$. Для этого рассмотрим систему 1, 5, 16, 40. В ней любое число до 100 требует не более чем 6-выплаты (например, $76 = 40 + 16 + 5 + 5 + 5 + 5$, $94 = 40 + 16 + 16 + 16 + 5 + 1$, $99 = 40 + 40 + 16 + 1 + 1 + 1$), поэтому $S_1 \leq 24$. С другой стороны, надо доказать, что невозможны системы, для которых $S_1 < 24$. Случаи, требующие этого доказательства, таковы:

$$\begin{aligned} S_1 &= 22 = 2 \cdot 11 = 11 \cdot 2, \\ S_1 &= 21 = 3 \cdot 7 = 7 \cdot 3, \\ S_1 &= 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2, \\ S_1 &= 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 9 \cdot 2, \\ S_1 &= 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2, \\ S_1 &= 15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3, \\ S_1 &= 14 = 2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Здесь везде первый множитель — количество монет в системе (т. е. M), а второй — наибольшее требуемое для выплат число монет (т. е. K).

Таким образом, нужно доказать фактически такие неравенства:

$$\begin{aligned} N(2, 11) &< 100, & N(3, 7) &< 100, & N(4, 5) &< 100, \\ N(5, 4) &< 100, & N(7, 3) &< 100, & N(11, 2) &< 100. \end{aligned}$$

Некоторые из них несложно доказываются без использования вычислительной техники, а для некоторых приходится перебирать все возможные системы при помощи ЭВМ.

12. Докажем, что $S_2 = 3 \cdot 521 = 1563$. Рассмотрим системы $\{1, 10\}$, $\{1, 12, 19\}$, $\{1, 5, 18, 25\}$. Как показывает перебор систем из 2, 3, 4 монет, проведённый на ЭВМ, эти системы дают наилучшие значения

$F(1) + F(2) + \dots + F(100)$, равные 910, 521 и 393 соответственно. Поскольку $2 \cdot 910 = 1820 > 4 \cdot 393 = 1572 > 3 \cdot 521 = 1563$, наилучшей является вторая система. Докажем, что при количестве монет более 4 значения S_2 будут больше.

Пусть $M = 5$. Как показано в решении задачи 10, существует не более $\binom{8}{3} - 1 = 55$ чисел, требующих не более чем 3-выплаты, а остальные числа (их не менее, чем 45) требуют для выплаты не менее 4 монет. Отсюда

$$S_2 \geq 5 \cdot (45 \cdot 4 + 35 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = 1600.$$

Пусть $M = 6$. Аналогично

$$S_2 \geq 6 \cdot (17 \cdot 4 + 56 \cdot 3 + 21 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = 1704.$$

Для $M = 7$ получаем

$$S_2 \geq 7 \cdot (65 \cdot 3 + 28 \cdot 2 + 7 \cdot 1) = 7 \cdot 258 = 1806.$$

Для $M = 8$ получаем

$$S_2 \geq 8 \cdot (44 \cdot 3 + 36 \cdot 2 + 8 \cdot 1) = 1696.$$

При $M \geq 9$ имеется не более M чисел, требующих 1 монету, и, значит, $100 - M$ чисел требуют 2 монет.

$$S_2 \geq M \cdot (200 - M) = 10\,000 - (100 - M)^2 \geq 10\,000 - 91^2 = 1719.$$

Итак, наилучшим значением M является 3, соответствующее значение $S_2 = 1563$.

Внешние бильярды

Ф. Догру, С. Л. Табачников

1. Определение и примеры

В первом томе журнала «Mathematical Intelligencer» помещена статья Юргена Мозера «Is the solar system stable?» («Устойчива ли солнечная система?») [24]. В качестве игрушечной модели движения планет Мозер предложил систему, которая показана на рис. 1 и называется дуальным, или внешним, бильярдом. Столом для внешнего бильярда служит ограниченная выпуклая область P на плоскости. Выберем точку x вне бильярдного стола. Из точки x можно провести две касательные (опорные) прямые к области P ; выберем одну из них, скажем правую, если смотреть из точки x , и отразим x относительно точки касания z . Получим новую точку y . Преобразование T называется внешним бильярдным отображением. Как и движения планет, динамику внешнего бильярда легко задать, но трудно анализировать; в частности, нелегко делать выводы о её глобальных свойствах, например об ограниченности или неограниченности орбит.

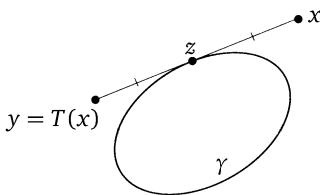


Рис. 1. Определение внешнего бильярдного отображения

Эта статья посвящена результатам по проблеме внешнего бильярда, полученным после выхода статьи Мозера. Надеемся, что читатель

Перевод статьи: Dogru F., Tabachnikov S. Dual billiards // Math. Intelligencer. 2005. Vol. 27, № 4. P. 18—25. При частичной поддержке NSF. Расширенный вариант статьи: Табачников С. Л. Внешние бильярды // Математическое просвещение. Третья серия. 2001. Вып. 5. С. 125—135. См. проект А. Я. Канель-Белова на VIII Летней конференции.

разделит наше восхищение красотой этого сюжета. Мы не предполагаем знакомство с изученными гораздо лучше свойствами обычного, внутреннего бильярда; интересующийся читатель может обратиться к [13], [17], [28].

Определение внешнего бильярдного отображения имеет дефект: T не определено, если точка z не единственна. Это происходит, если внешняя бильярдная кривая γ , граница бильярдного стола, содержит отрезок прямой: например, если бильярдный стол — многоугольник. Внешнее бильярдное отображение и его итерации не определены на продолжениях отрезков, являющихся частью кривой γ , и на их прообразах относительно T . Множество таких точек — счётное объединение прямых и, значит, имеет меру нуль, так что остаётся достаточно места для игры во внешний бильярд. Ситуация напоминает внутренний бильярд: если бильярдный шар попадает в угол, его дальнейшее движение не определено.

Юрген Мозер описал внешний бильярд в оказавшей большое влияние книге [23]. Мозер узнал о внешнем бильярде из выступления Б. Ньюмана в 1959 г. на Манчестерском математическом коллоквиуме, опубликованного под заглавием «Sharing ham and eggs» («Делёж яичницы с ветчиной») [25]. К настоящему моменту имеется обширная литература по внешним бильярдам, перечисленная в библиографии к статье.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Если внешний бильярдный стол — круг, то каждая точка движется по концентрической с ним окружности. Таким образом, концентрические окружности являются инвариантными кривыми внешнего бильярдного отображения. Значит, на круге это отображение интегрируемо (т. е. имеется сохраняющаяся величина): инвариантной функцией является радиус окружности. Поскольку внешнее бильярдное отображение коммутирует с аффинными преобразованиями плоскости, оно интегрируемо и на эллипсе. Для внешнего бильярда можно сформулировать аналог знаменитой гипотезы Биркгофа (о внутренних бильярдах): единственный интегрируемый внешний бильярд — эллиптический. Этот вопрос, как и его «внутренний» аналог, остаётся открытым.

Пример 2. Если стол для внешнего бильярда — квадрат, то движение каждой точки периодически. Структура орбит изображена на рис. 2: каждая точка квадрата, отмеченного номером n , посещает все остальные квадратики с этим номером (их $4n$) по одному разу, прежде чем вернуться в исходное положение. Аналогично описыва-

ется динамика дуального бильярда на треугольнике или на шестиугольнике, аффинно эквивалентном правильному.

			3			
		3	2	3		
	3	2	1	2	3	
3	2	1		1	2	3
	3	2	1	2	3	
		3	2	3		
			3			

Рис. 2. Внешний бильярд на квадрате

Пример 3. Пусть внешний бильярдный стол — правильный пятиугольник. Этот пример рассмотрен в [29], [32], см. также [28]. Множество полной меры, составленное из правильных пятиугольников и десятиугольников, состоит из периодических орбит. Кроме того, существуют бесконечные орбиты. Одна такая орбита, точнее её замыкание, показана на рис. 3 слева. Бросается в глаза самоподобие изображённого множества. Его хаусдорфова размерность оказывается равной $\ln 6 / \ln(\sqrt{5} + 2) = 1,24\dots$

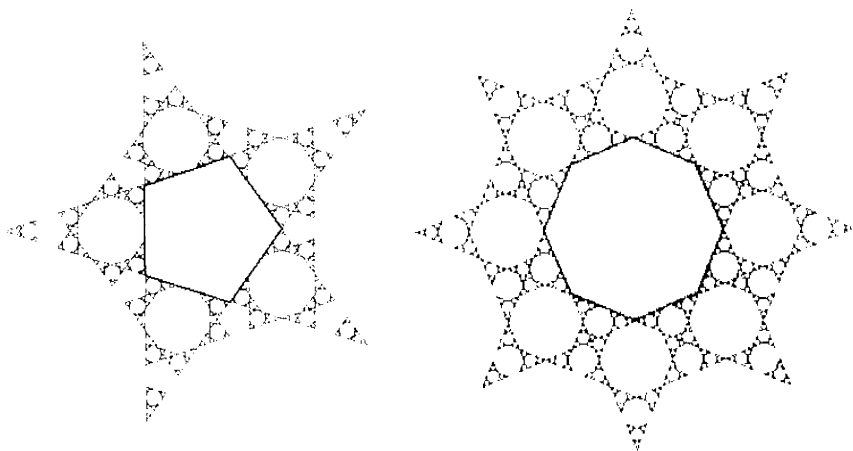


Рис. 3. Внешний бильярд на правильном пятиугольнике и восьмиугольнике

Компьютерные эксперименты показывают, что нечто подобное происходит и с другими правильными n -угольниками (за исключением $n = 3, 4, 6$), но строгий анализ пока что возможен лишь в случаях $n = 5, 8$; случай правильного восьмиугольника см. на рис. 3. Соответствующий анализ кусочных вращений см. в [1], [3], [12], [19], [21], [22].

Пример 4. Интересным примером внешнего бильярдного стола служит полукруг. Численный анализ этого случая выявляет очень сложное поведение: периодические траектории и окружающие их эллиптические «острова» (большие белые овалы на рис. 4) сосуществуют с хаотическими орбитами (закрашенными чёрным). Компьютерные эксперименты определённо показывают, что некоторые точки и даже области уходят на бесконечность; эти области видны на рис. 4 как маленькие белые овалы, расположенные между большими эллиптическими островами¹.

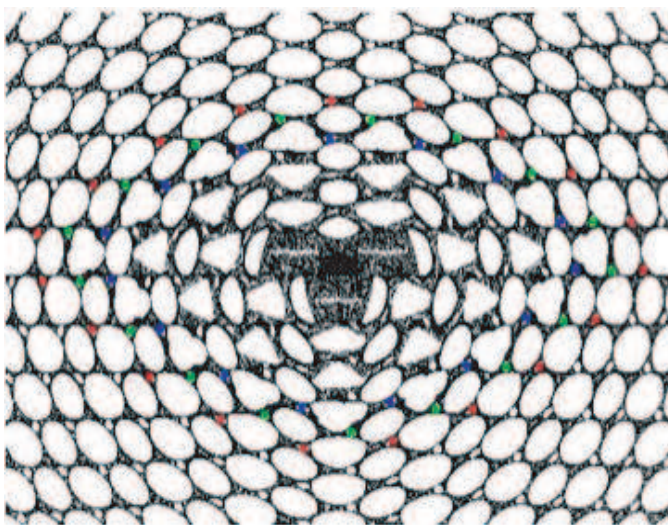


Рис. 4. Внешний бильярд на полукруге

Закончим этот раздел механической интерпретацией внешнего бильярда как ударного осциллятора. Мы следуем Ф. Бойланду [4]. Рассмотрим гармонический осциллятор на прямой, т.е. частицу,

¹ Недавно Д. Долгопят и Б. Файяд доказали существование «островов», уходящих на бесконечность (Unbounded orbits for semicircular outer billiard. Preprint).

координата которой как функция времени является линейной комбинацией синуса и косинуса. Слева от частицы имеется массивная стенка с периодом движения 2π , положение которой $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $p''(t) + p(t) = r(t)$, где $r(t)$ — неотрицательная периодическая функция, ортогональная в смысле L^2 функциям² $\sin t$ и $\cos t$. Когда частица сталкивается со стенкой, происходит упругое отражение, так что скорость частицы относительно стенки мгновенно меняет знак. Это показано на рис. 5, взятом из [4].

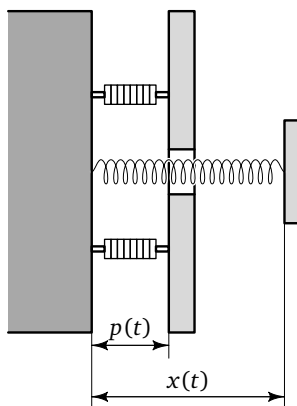


Рис. 5. Ударный осциллятор

Эта механическая система изоморфна внешнему бильярду вокруг замкнутой выпуклой кривой $\gamma(t)$, параметризованной углом её касательной с горизонталью и имеющей радиус кривизны $r(t)$. Поместим начало координат O внутри γ , и пусть $p(t)$ — опорная функция, т. е. расстояние от O до касательной в точке $\gamma(t)$. С помощью элементарной дифференциальной геометрии получаем $p''(t) + p(t) = r(t)$, см., например, [26].

Пусть x — точка вне $\gamma(t)$, и пусть плоскость вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью. Посмотрим, как проектируются x и γ на горизонтальную прямую. Проекция точки x — гармонический осциллятор на прямой, а правый конец проекции кривой γ — «стенка» $p(t)$. Когда осциллятор и стенка сталкиваются, ка-

² Читатель легко докажет необходимость этого условия, поскольку

$$\int_0^{2\pi} (p''(t) + p(t)) \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} (p''(t) + p(t)) \cos t \, dt = 0.$$

сательная к γ , проходящая через x , горизонтальна; чтобы в проекции имело место упругое отражение, точка x должна отразиться относительно точки касания — см. рис. 6.

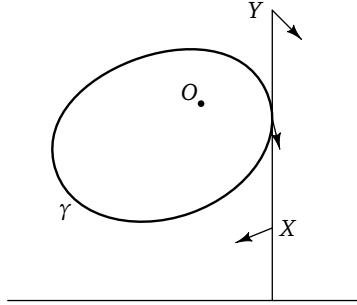


Рис. 6. Внешний бильярд как ударный осциллятор

2. Сохранение площади

Независимо от формы внешнего бильярдного стола, внешнее бильярдное отображение обладает свойством сохранять площадь. Докажем это.

Возьмём близкие точки X и X' на кривой γ . Выберем число $r > 0$ и рассмотрим касательные отрезки длины r к γ в каждой точке между X и X' . Концы этих отрезков пробегают кривые AA' и BB' (см. рис. 7). Внешнее бильярдное отображение T переводит AA' в BB' . Теперь сделаем то же построение, заменив r на $r - \varepsilon$, где ε бесконечно мало. Получим бесконечно малые четырёхугольники $AA'C'C$ и $BB'D'D$, связанные отображением T . Обозначим через Y точку пересечения отрезков AB и $A'B'$ и через δ (ещё одно бесконечно малое!) — угол между этими отрезками (см. рис. 7).

Вычислим площадь полученных криволинейных четырёхугольников с точностью до слагаемых третьего порядка. Имеем:

$$S_{AYA'} = \frac{1}{2} \delta r^2,$$

$$S_{CYC'} = \frac{1}{2} \delta (r - \varepsilon)^2 = \frac{1}{2} \delta r^2 - \delta \varepsilon r,$$

а значит,

$$S_{ACC'A'} = \delta \varepsilon r.$$

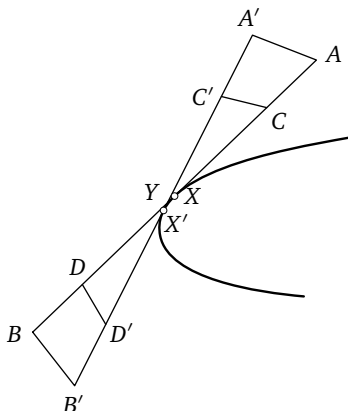


Рис. 7. Сохранение площади при внешнем бильярдном отображении

Аналогично

$$S_{BDD'B'} = \delta\epsilon r.$$

Это и доказывает свойство внешнего бильярдного отображения сохранять площадь.

Сохранение площади имеет разнообразные следствия. Фазовым пространством внешнего бильярдного отображения T является дополнение к овалу P , топологически это цилиндр. Он расслоен на касательные лучи к γ (согласованные с её ориентацией), причём T — сохраняющее площадь закручивающее отображение; последнее означает, что дифференциал dT поворачивает вертикальные слои в положительном направлении, см. рис. 8.

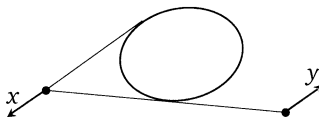


Рис. 8. Условие закручивания для внешнего бильярдного отображения

Теория закручивающих отображений, сохраняющих площадь, хорошо развита, см., например, [18]. Один из её результатов относится к периодическим орбитам внешнего бильярдного отображения. Такая орбита является n -угольником, описанным вокруг γ , причём точки касания являются серединами его сторон, см. рис. 9. Периодическая траектория имеет топологическую характеристику, которая

называется числом вращения: она равна количеству оборотов соответствующего описанного многоугольника вокруг внешнего бильярдного стола. Аналог знаменитой теоремы Биркгофа для внешних бильярдных утверждает, что для любого $n \geq 3$ и для любого целого числа вращения $1 \leq r \leq n/2$ существует не менее двух различных n -периодических орбит с числом вращения r .

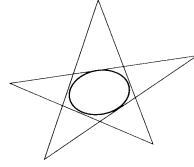


Рис. 9. 5-периодическая орбита внешнего бильярдного отображения с числом вращения 2

На самом деле периодические траектории внешнего бильярдного отображения соответствуют описанным многоугольникам экстремальной площади. Это показано на рис.10: если сторона AB не делится точкой касания пополам, то бесконечно малый поворот отрезка в новое положение $A'B'$ меняет площадь в линейном приближении (почти такое же рассуждение, как и в связи с рис.7). Одна из n -периодических орбит с данным числом вращения соответствует минимуму площади описанного n -угольника, а другая — седловой точке.

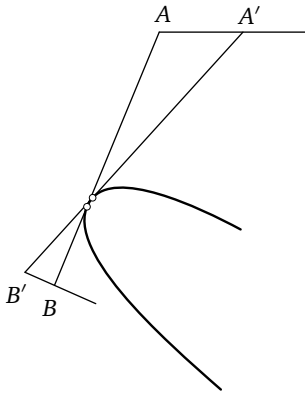


Рис. 10. Периодические орбиты соответствуют экстремумам площади

Предположим теперь, что у внешнего бильярдного отображения есть инвариантная кривая Γ . Можно ли восстановить внешнюю бильярдную кривую γ по Γ ? Ответ даётся следующей конструкцией. Рассмотрим однопараметрическое семейство прямых, отсекающих от фигуры, которую ограничивает Γ , сегменты одинаковой площади s , и пусть γ — огибающая этого семейства.

Эта огибающая может иметь особенности, в общем положении это полукубические каспы (этот вопрос подробно обсуждается, например, в статье [9]), но мы предположим, что γ — гладкая кривая. Тогда Γ — инвариантная кривая внешнего бильярдного отображения T_γ ; доказательство по существу содержится в рис. 7. Отметим, что описанная конструкция зависит от параметра s : существует целое однопараметрическое семейство бильярдных столов с данной инвариантной кривой³.

Отметим также, что описанная конструкция напоминает более известную конструкцию для внутреннего бильярда (с помощью нерастяжимой нити): чтобы восстановить границу бильярдного стола γ по инвариантной кривой бильярдного отображения Γ , нужно обмотать замкнутую нерастяжимую нить вокруг кривой и поворачивать её, как показано на рис. 11 справа (см., например, [28]). Применённая к эллипсу, эта конструкция даёт эллипс с теми же фокусами; этот факт известен как теорема Грейвза [2].

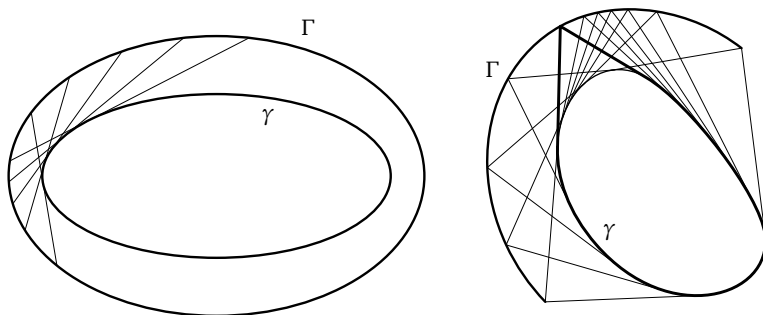


Рис. 11. Площадь и конструкции с нерастяжимой нитью

Инвариантная кривая Γ не обязана быть гладкой. Например, она может иметь форму квадрата, тогда внешняя бильярдная кривая состоит из четырёх дуг гипербол. Недавно D. Genin [10] показал, что если площадь s достаточно мала, то этому внешнему бильярду соответствует гиперболическая динамика⁴ внутри инвариантного квадра-

³ Эта конструкция известна также в теории плавучести, где сегмент постоянной площади соответствует погруженной части плавающего тела; константа s — это плотность. О теории плавучести см. [11].

⁴ Гиперболическая динамика характеризуется наличием направлений, на которых дифференцирование является растягивающим или сжимающим оператором, что приводит к экспоненциально быстрому расхождению орбит (подробнее см. www.scholarpedia.org/article/Hyperbolic_dynamics).

та Γ (и вне четырёх 4-периодических правильных восьмиугольников). В случае внутреннего бильярда известны многочисленные примеры выпуклых областей с гиперболической динамикой, начиная со знаменитого стадиона Бунимовича; обзор см. в [28].

3. Двойственность между внутренними и внешними бильярдами

Читатель, вероятно, уже отметил своеобразную двойственность между внутренними и внешними бильярдами. Например, периодическая траектория внутреннего бильярда — вписанный многоугольник, а внешнего — описанный, причём первый имеет экстремальный периметр, а последний — экстремальную площадь (см., например, [28]). Другое проявление этой двойственности показано на рис. 11. Чем можно объяснить такую двойственность между длиной и площадью?⁵

Ситуация прояснится, если рассмотреть бильярд не на плоскости, а на единичной сфере. На сфере имеется замечательная двойственность между точками и ориентируемыми прямыми (т. е. большими кругами): полюсу отвечает соответственно ориентированный экватор (см. рис. 12). Отметим, что сферическое расстояние AB равно углу между прямыми a и b .

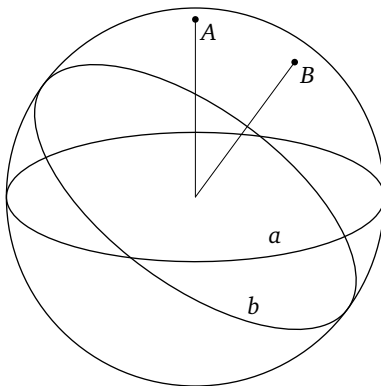


Рис. 12. Сферическая двойственность

Сферическая двойственность сохраняет отношение инцидентности: если точка A лежит на прямой b , то двойственная точка B ле-

⁵ И тем самым оправдать термин «дуальный бильярд».

жит на двойственной прямой a . Двойственность распространяется на гладкие кривые: такая кривая γ определяет однопараметрическое семейство касательных прямых, а каждая прямая — двойственную ей точку. Полученное однопараметрическое семейство точек и есть кривая γ^* , двойственная кривой γ . Применив эту конструкцию к γ^* , получим кривую, диаметрально противоположную γ .

В качестве примера рассмотрим отражение бильярдного шара от бильярдной кривой γ (см. рис. 13).

Закон бильярдного отражения гласит: «угол падения равен углу отражения». На двойственной картине это означает, что $AL = LB$, а значит, двойственное бильярдное отображение относительно кривой γ^* переводит точку A в точку B . Итак, сферические внутренний и внешний бильярды двойственны друг другу.

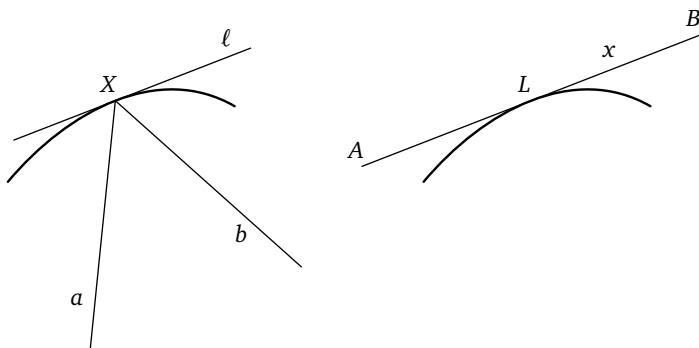


Рис. 13. Двойственность между внутренними и внешними бильярдами

А как объяснить двойственность между длиной и площадью? Траектория внутреннего бильярда — вписанный многоугольник экстремального периметра. Двойственный ему многоугольник описан вокруг двойственной кривой γ^* и имеет экстремальную сумму углов. Сумма углов сферического n -угольника связана с его площадью по теореме Гаусса—Бонне: сумма внешних углов многоугольника равна 2π минус его площадь. Это объясняет, почему экстремумы площади отвечают за периодические траектории внешнего бильярда. Плоскость можно представлять как сферу бесконечного радиуса. При переходе к этому пределу сумма углов многоугольника перестает быть переменной, однако площадь сохраняет роль порождающей функции внешнего бильярдного отображения, экстремумы которой отвечают периодическим орбитам.

4. Поведение на бесконечности. Рациональные и квазирациональные многоугольники

Для внешнего бильярда на плоскости специфично наличие простого предельного движения вдали от стола, что можно наблюдать в компьютерных экспериментах. С высоты птичьего полета внешняя бильiardная кривая γ представляется почти точкой, а внешнее бильiardное отображение T — почти центральной симметрией относительно этой точки. Точнее, в подходящем масштабе расстояние между точкой x и её второй итерацией $T^2(x)$ очень мало, и эволюция точки под действием отображения T^2 выглядит как непрерывное движение. Оно происходит вдоль центрально-симметричной замкнутой кривой Γ и удовлетворяет второму закону Кеплера: площадь, заметаемая радиус-вектором, зависит от времени линейно (единица времени — это одна итерация отображения T^2). На рис. 14 изображены некоторые внешние бильiardные кривые γ (верхняя строка) и Γ — соответствующие инвариантные кривые «на бесконечности». Последняя из кривых Γ состоит из двух равных дуг парабол, пересекающихся под прямым углом, она соответствует полукругу γ , см. пример 4 в начале статьи.

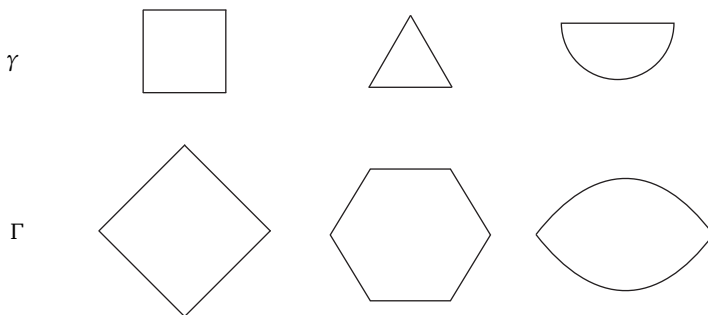


Рис. 14. Траектории внешнего бильiardного отображения на бесконечности

Чтобы объяснить эти наблюдения, рассмотрим случай параметризованной гладкой кривой $\gamma(t)$. Рассмотрим касательную к $\gamma(t)$. Существует другая параллельная ей касательная; пусть вектор $v(t)$ соединяет точки касания той и другой, см. рис. 15.

Для точек, очень удалённых от бильiardного стола, угол ABC на рис. 15 пренебрежимо мал, поэтому инвариантная кривая в бесконечности $\Gamma(t)$ должна иметь касательный вектор, пропорциональ-

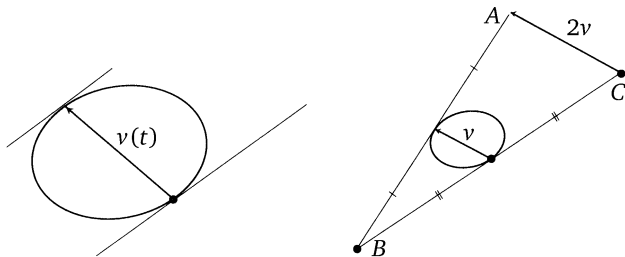


Рис. 15. Объяснение поведения на бесконечности

ный $v(t)$. Иными словами, нужно решить дифференциальное уравнение

$$\Gamma'(t) \sim v(t).$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до гомотетии. В самом деле, уравнение можно решить в явном виде:

$$\Gamma(t) = \frac{v'(t)}{v(t) \times v'(t)},$$

где $\times$ обозначает определитель из координат двух векторов. Непосредственное вычисление (предоставляемое читателю) показывает, что если задать Γ этой формулой, то выполнено равенство $v \times \Gamma' = 0$, что и требовалось.

Наличие явной формулы для кривой Γ позволяет объяснить закон Кеплера: движение по кривой Γ происходит со скоростью $v(t)$, а секториальная скорость равна $v(t) \times \Gamma(t) = 1$; разумеется, значение константы не имеет особого смысла, так как всё определено лишь с точностью до подобия.

Предлагаем читателю доказать, что если кривая γ центрально-симметрична, то соответствие $\gamma \mapsto \Gamma$ является двойственностью, т. е. его повторное применение даёт исходную кривую γ .

Мы видим, что динамика внешнего бильярдного отображения в бесконечности хорошо аппроксимируется непрерывным движением вдоль кривых, гомотетичных Γ . Такое движение обладает интегралом (сохраняющейся величиной): это однородная функция, линиями уровня которой служат указанные кривые. Таким образом, внешнее бильярдное отображение на бесконечности — малое возмущение интегрируемого отображения. Предположим, что кривая γ — достаточно гладкая (достаточно пятикратной непрерывной дифференцируемости) и всюду имеет положительную кривизну. В этом случае, ис-

пользуя теорию КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера), можно доказать, что внешнее бильярдное отображение имеет инвариантные кривые, сколь угодно далёкие от бильярдного стола. Этот результат принадлежит Мозеру [23], [24]; подробное доказательство дал Р. Дуади [7]. Кривая, инвариантная относительно T , служит «оградой», которую не может пересечь никакая орбита внешнего бильярдного отображения, и потому все его орбиты ограничены. Неизвестно, остаётся ли это верным для внешних бильярдных кривых меньшей гладкости или с нулями кривизны.

Если внешний бильярдный стол — многоугольник, то траектория в бесконечности Γ — центрально-симметричный $2k$ -угольник, а векторы $\pm v_1, \dots, \pm v_k$ — диагонали стола. Каждой стороне Γ отвечает «время» — отношение длины этой стороны к длине соответствующего вектора v . Набор «времён» $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ определён с точностью до общего множителя. Внешний бильярдный стол называется *квазирациональным*, если отношения всех этих чисел рациональны.

Примером квазирационального многоугольника служит многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты. Другой пример — правильный многоугольник: в этом случае все числа t_k равны.

Следующая теорема даёт частичный ответ на вопрос Ю. Мозера [24]: если внешний бильярдный стол — квазирациональный многоугольник, то любая орбита внешнего бильярда T ограничена. В этой ситуации имеется аналог инвариантных кривых: это T -инвариантные ожерелья из многоугольников вокруг бильярдного стола, связанных общими вершинами. На рис. 3 можно видеть первое из таких ожерелий: для левого стола оно состоит из 5 правильных десятиугольников, окружающих фрактальную «пентаграмму» (таким образом, она является внутренностью ожерелья), а для правого — из 8 правильных восьмиугольников, окружающих фрактальную восьмиконечную звезду.

Отметим следствие сформулированной теоремы: если внешний бильярдный стол — многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты, то все орбиты внешнего бильярдного отображения периодические. Действительно, тогда орбита любой точки дискретна и, по предыдущей теореме, ограничена. Можно было бы ожидать, что для сформулированного факта существует простое доказательство, но нам таковое неизвестно.

Отметим в заключение этого раздела, что до весьма недавнего времени не было известно, всегда ли внешний бильярд на многоугольнике имеет периодическую орбиту. Летом 2004 г. Крис Калтер, участник

Penn State REU Program, доказал (см. с. 48—54), что в случае внешнего бильярда на многоугольнике периодические орбиты всегда существуют⁶, причём периодические точки составляют по мере положительную долю всей плоскости [5].

5. Внешний бильярд на гиперболической плоскости

Мы рассмотрели внешние бильярды на евклидовой плоскости и на сфере. Точно так же можно рассматривать внешние бильярды на гиперболической плоскости H^2 . Удобно использовать модель Клейна — Бельтрами (проективную модель гиперболической геометрии). В ней H^2 является внутренностью единичной окружности («бесконечно удалённой окружности»), прямые — её хордами, а расстояние между точками x и y задано формулой

$$d(x, y) = \ln[a, b, y, x],$$

где a и b — точки пересечения прямой xy с окружностью,

$$[a, b, y, x] = \frac{(y-a)(x-b)}{(x-a)(y-b)}$$

— двойное отношение.

Первые шаги в изучении внешних бильярдov на гиперболической плоскости сделаны в [8], [30], [35]. В гиперболическом случае внешнее бильярдное отображение продолжается до непрерывного отображения $t: S^1 \rightarrow S^1$ бесконечно удалённой окружности. Последнее содержит много информации о внешнем бильярдном отображении. Пусть $\rho \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — число вращения Пуанкаре для t (определение и основные свойства см., например, в [18]). Число ρ непрерывно зависит от внешнего бильярдного стола.

Вначале предположим, что внешняя бильярдная кривая — достаточно гладкая и строго выпуклая. Как мы видели, на евклидовой плоскости отсюда вытекает ограниченность всех орбит внешнего бильярда. На гиперболической плоскости ситуация совсем иная. Пусть ρ рационально, а отображение окружности t имеет гипер-

⁶ В случае внутреннего бильярда на многоугольнике, даже если ограничиться тупоугольными треугольниками, существование периодических траекторий — открытая проблема. Недавно Р. Шварц достиг заметного прогресса, доказав существование периодических бильярдных траекторий на всех треугольниках с тупым углом, не превосходящим 100° . Он также показал, что для любого иррационального осесимметричного четырёхугольника существуют орбиты, уходящие на бесконечность. Это даёт ответ на вопрос Мозера. Монография Шварца выложена на его сайт и будет опубликована в Princeton University Press.

болическую периодическую орбиту. Тогда существует область в H^2 , которая под действием внешнего бильярдного отображения уходит в бесконечность — точнее, притягивается на бесконечности к гиперболической периодической орбите. При этом такое поведение устойчиво относительно малых возмущений внешнего бильярдного стола.

Если внешняя бильярдная кривая — окружность на гиперболической плоскости, то внешнее бильярдное отображение интегрируемо: его инвариантные кривые — концентрические окружности, так же как в примере 1 в начале нашей статьи. Что можно сказать об эллиптической внешней бильярдной кривой γ ? Внешнее бильярдное отображение по-прежнему интегрируемо, а инвариантные кривые являются эллипсами из пучка коник, порождённого кривой γ и бесконечно удалённой окружностью⁷. Из этой интегрируемости можно вывести классический результат проективной геометрии — поризм Понселе, см. [30].

Рассмотрим теперь случай многоугольного внешнего бильярда на гиперболической плоскости. Пусть γ — выпуклый n -угольник. Можно доказать, что $\rho \geq 1/n$. Если $\rho = 1/n$ и отображение окружности t имеет гиперболическую n -периодическую точку, то n -угольник называется большим; пример см. на рис. 16. Множество больших многоугольников открыто в естественной топологии.

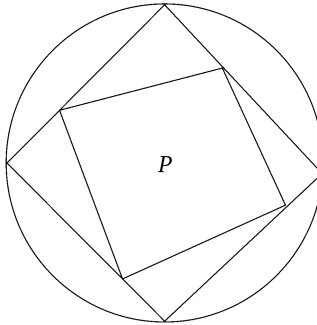


Рис. 16. Большой четырёхугольник

Что касается устойчивости орбит внешнего бильярда, то большие многоугольники на гиперболической плоскости находятся на противоположном конце спектра по отношению к гладким строго выпук-

⁷ Пучок состоит из коник, проходящих через четыре фиксированные точки; в рассматриваемом случае эти точки комплексные.

лым кривым на евклидовой плоскости: в [8] доказано, что любая орбита внешнего бильярда вокруг большого многоугольника уходит на бесконечность.

Класс больших треугольников описывается явно. Рассмотрим треугольник со сторонами a_1, a_2, a_3 и полупериметром s . Этот треугольник является большим в точности тогда, когда

$$\sqrt{\operatorname{sh} s \operatorname{sh}(s - a_1) \operatorname{sh}(s - a_2) \operatorname{sh}(s - a_3)} > \frac{1}{2}.$$

Левая часть этого неравенства напоминает формулу Герона для площади евклидова треугольника.

Пример 5. Пусть внешний бильярдный стол P — правильный n -угольник с прямыми углами ($n \geq 5$). Такими многоугольниками можно замостить гиперболическую плоскость, см. рис. 17. Как и в примере 2, все орбиты внешнего бильярдного отображения T периодичны: T циклически переставляет «плитки», которые образуют концентри-

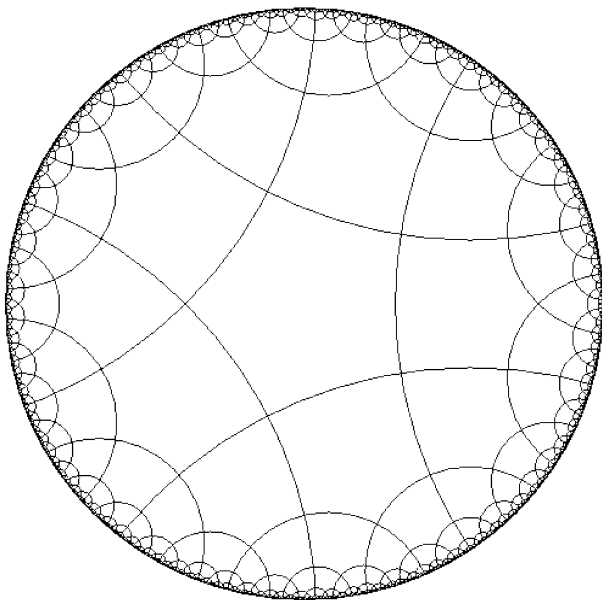


Рис. 17. Замощение гиперболической плоскости (в модели Пуанкаре) правильными прямоугольными пятиугольниками

ческие «ожерелья» вокруг P . Число вращения определяется формулой

$$\rho(P) = \frac{n - \sqrt{n(n-4)}}{2n}$$

(в некотором смысле эта формула верна и при $n = 4$: квадратами можно замостить евклидову, а не гиперболическую, плоскость, и внешнее бильярдное отображение «на бесконечности» — это центральная симметрия с числом вращения $1/2$).

Мы не знаем, существуют ли многоугольники на гиперболической плоскости, для которых все орбиты внешнего бильярдного отображения ограничены, но не все орбиты конечны. Такие многоугольники были бы аналогами квазирациональных, но не решёточных многоугольников в евклидовом случае.

6. Многомерный внешний бильярд

Внутренний бильярд определён в пространстве любой размерности. А как обстоит дело с внешним бильярдом?

Оказывается, внешний бильярд можно определить в любом чётномерном пространстве (плоскость ведь чётномерна!). отождествим $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$, и пусть J — оператор умножения на $\sqrt{-1}$.

Внешний бильярдный стол — это (как и раньше) выпуклая ограниченная область с гладкой $(2n - 1)$ -мерной границей M , которая называется внешней бильярдной гиперповерхностью. Внешнее бильярдное отображение можно определить, если в каждой точке M определена единственная касательная прямая. Проблема же в том, что таких прямых слишком много.

Разрешается эта трудность так. Обозначим через N внешний единичный нормальный вектор к M в точке z . Вектор $J(N)$ касается M и задаёт ориентированную касательную прямую $\ell(M)$ в точке z . Можно доказать, что через каждую точку x вне бильярдного стола проходят ровно две такие касательные прямые к M , причём одна из них имеет направление к M , а другая — от M , так же как и на плоскости. Внешнее бильярдное отображение определяется следующим образом: находим такую точку $z \in M$, что $\ell(z)$ проходит через x , и отражаем x относительно z , получая новую точку $y = T(x)$ (сравните с рис. 1).

Что данное определение «правильное», показывает следующий аналог свойства сохранения площади. Пространство $\mathbb{C}^n$ обладает симплектической структурой, которую задаёт невырожденная косо-

симметричная билинейная форма вида

$$\omega(u, v) = J(u) \cdot v,$$

где u и v — касательные векторы. Определённая выше прямая $\ell(z)$ является симплектическим ортогональным дополнением к касательной гиперплоскости $T_z M$ (и называется характеристическим направлением в точке z).

Для любого внешнего бильярдного стола внешнее бильярдное отображение T сохраняет симплектическую структуру. Как и в случае плоскости, отсюда вытекают многочисленные следствия — например, существование периодических орбит; см. [28], [29], [32], [36]. Тем не менее, в целом многомерный внешний бильярд — по-прежнему *terra incognita*.

Литература

1. Adler R., Kitchens B., Tresser C. Dynamics of nonergodic piecewise affine maps of the torus. *Ergod. Theory Dynam. Syst.* 21 2001. P. 959—999.
2. Berger M. *Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
3. Boshernitzan M., Goetz A. A dichotomy for a two-parameter piecewise rotation // *Ergod. Theory Dynam. Syst.* 2003. Vol. 23. P. 759—770.
4. Boyland Ph. Dual billiards, twist maps and impact oscillators // *Nonlinearity*. Vol. 9. 1996. P. 1411—1438.
5. Tabachnikov S. A proof of Culter's theorem on the existence of periodic orbits in polygonal outer billiards // *Geometriae Dedicata*. 2007. Vol. 129. P. 83—87.
6. Day M. Polygons circumscribed about closed convex curves. 1947. (Trans. AMS; Vol. 62.) P. 315—319.
7. Douady R. *Thèse de Troisième Cycle*. Université de Paris VII, 1982.
8. Dogru F., Tabachnikov S. On polygonal dual billiard in the hyperbolic plane // *Reg. Chaotic Dynamics*. 2003. Vol. 8. P. 67—82.
9. Табачников С., Фукс Д. Сегменты постоянной площади // *Квант*. 1990. № 8. С. 26—31.
10. Genin D. Hyperbolic outer billiards: a first example. *Nonlinearity*. 2006. Vol. 19, № 6. P. 1403—1413.
11. Gilbert E. How things float // *Amer. Math. Monthly*. Vol. 98. 1991. P. 201—216.
12. Goetz A., Poggiaspalla G. Rotation by $\pi/7$ // *Nonlinearity*. 2004. Vol. 17. P. 1787—1802.
13. Gutkin E. Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems // *Reg. Chaotic Dynamics*. 2003. Vol. 8. P. 1—13.
14. Gutkin E., Katok A. Caustics for inner and outer billiards. *Comm. Math. Phys.* 173 (1995), P. 101—134.
15. Gutkin E., Simanyi N. Dual polygonal billiards and necklace dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1991. Vol. 143. P. 431—450.

16. Gutkin E., Tabachnikov S. Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions / With applications to polygonal billiards // Moscow Math. J. 2006. Vol. 6. P. 673—701.
17. Каток А. Б. Бильярдный стол как игровая площадка для математика // Студенческие чтения МК НМУ. 2001. Вып. 2. С. 8—36. [Английский перевод доступен на странице http://www.math.psu.edu/katok_a/pub/Russian-bill.pdf]
18. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Camb. Univ. Press, 1995.
19. Kahng B. Dynamics of kaleidoscopic maps // Adv. Math. 2004. Vol. 185. P. 178—205.
20. Kolodziej R. The antibilliard outside a polygon // Bull. Pol. Acad. Sci. 1989. Vol. 37. P. 163—168.
21. Kouptsov K., Lowenstein J., Vivaldi F. Quadratic rational rotations of the torus and dual lattice maps // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1795—1842.
22. Lowenstein J., Kouptsov K., Vivaldi F. Recursive tiling and geometry of piecewise rotations by $\pi/7$ // Nonlinearity. 2004. Vol. 17. P. 371—395.
23. Moser J. Stable and random motions in dynamical systems // Ann. of Math. Stud. Vol. 77. 1973.
24. Moser J. Is the solar system stable? // Math. Intell. Vol. 1. 1978. P. 65—71.
25. Neumann B. Sharing ham and eggs. Iota, Manchester University, 1959.
26. Santalo L. Integral geometry and geometric probability. Addison-Wesley, 1976.
27. Shaidenko A., Vivaldi F. Global stability of a class of discontinuous dual billiards // Comm. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 625—640.
28. Tabachnikov S. Billiards // SMF «Panoramas et Synthèses». 1995. № 1.
29. Табачников С. Внешние бильяры // Успехи матем. наук. 1993. Т. 48, вып. 6. С. 75—102.
30. Tabachnikov S. Poncelet's theorem and dual billiards // L'Enseign. Math. 1993. Vol. 39. P. 189—194.
31. Tabachnikov S. Commuting dual billiards // Geom. Dedicata. Vol. 53. 1994. P. 57—68.
32. Tabachnikov S. On the dual billiard problem // Adv. in Math. 1995. Vol. 115. P. 221—249.
33. Tabachnikov S. Asymptotic dynamics of the dual billiard transformation // J. Stat. Phys. 1996. Vol. 83. P. 27—38.
34. Tabachnikov S. Fagnano orbits of polygonal dual billiards // Geom. Dedicata. 1999. Vol. 77. P. 279—286.
35. Tabachnikov S. Dual billiards in the hyperbolic plane // Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 1051—1072.
36. Tabachnikov S. On three-periodic trajectories of multi-dimensional dual billiards // Alg. Geom. Topology. 2003. Vol. 3. P. 993—1004.

Доказательство теоремы Калтера

С. Л. Табачников

В этой заметке содержится доказательство недавней теоремы Криса Калтера; он получил этот результат, будучи студентом и участвуя в 2004 Penn State REU program¹. Полное изложение работы Калтера, с рассмотрением более общего класса отображений и более подробным анализом их периодических орбит, появится в его статье, которая готовится к печати.

Внешний бильярдный стол — это компактная выпуклая область P . Выберем точку x вне P . Из x можно провести две опорные прямые к P ; выберем одну из них, скажем правую, если смотреть из x , и отразим x относительно опорной точки. Получаем новую точку y , и преобразование $T: x \rightarrow y$ является внешним (или двойственным) бильярдным отображением, см. рис. 1. Отображение T не определено, если опорная прямая имеет общий отрезок с внешним бильярдным столом. В этой заметке P является выпуклым n -угольником; множество точек, для которых не определено T или какая-либо его итерация, содержит

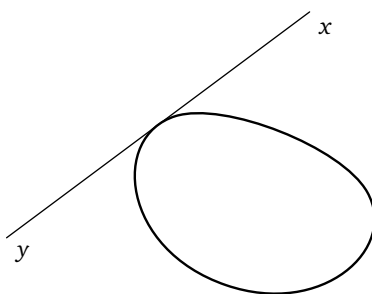


Рис. 1. Определение внешнего бильярдного отображения

Перевод заметки: *Tabachnikov S.* A proof of Culter's theorem on the existence of periodic orbits in polygonal outer billiards // *Geom. Dedicata*. 2007. Vol. 129. P. 83—87. По тематике связано с предыдущей статьей.

¹Программа была поддержана грантом NSF; задача, решённая Калтером, поставлена автором этой заметки.

ся в счётном объединении прямых и имеет меру нуль. Для удобства изложения будем считать, что P не имеет параллельных сторон.

Внешние бильярды были введены в работе [8] и приобрели популярность после [6], [7]; обзоры см. в [1], [16], [17]. Здесь нас интересует существование периодических траекторий внешнего бильярдного отображения. Для обычных, внутренних бильярдных это крупная открытая проблема: всякий ли многоугольник обладает периодической бильярдной траекторией. Лучший до сих пор результат — это теорема Р. Шварца: любой тупоугольный треугольник с тупым углом не свыше 100° обладает периодической траекторией, см. [10], [11], [12]. Отметим также, что и внутренние, и внешние многоугольные бильярды на сфере S^2 могут вообще не иметь периодических траекторий, см. [4].

Нам будет удобно рассматривать вторую итерацию T^2 внешнего бильярдного отображения. Соединив последовательные точки её периодической орбиты, получаем замкнутую ломаную. Количество оборотов этой ломаной вокруг бильярдного стола называется числом вращения. Основным результатом состоит в следующем.

Теорема 1. *Вне любой компактной окрестности многоугольника P имеется периодическая траектория отображения T^2 с числом вращения 1.*

Доказательство. Для любого внешнего бильярда, не обязательно многоугольного, асимптотическая динамика отображения T^2 на бесконечности описывается следующим образом (см. упомянутые обзоры или [18], [19], [20]). С высоты птичьего полёта внешний бильярд представляется почти точкой, а отображение T — почти отображением относительно этой точки. Точнее, в соответствующем масштабе расстояние между точкой x и $T^2(x)$ очень мало, и эволюция точки под действием T^2 выглядит непрерывным движением по часовой стрелке вдоль центрально-симметричной кривой R .

В нашем случае R — это выпуклый $2n$ -угольник, и каждый вектор $(x, T^2(x))$ принадлежит конечному множеству $\{\pm v_1, \dots, \pm v_n\}$, которое состоит из следующих векторов. В каждом направлении, отличном от направлений сторон, проходят две параллельные опорные прямые к P ; вектор v_i — это удвоенный вектор, соединяющий соответствующие опорные вершины, см. рис. 2. Векторы v_i упорядочены в соответствии с последовательностью расположения пар опорных вершин. Например, если P — треугольник, то векторы v_i — это удвоенные стороны многоугольника P , а R — шестиугольник, аффинно эквивалентный правильному.

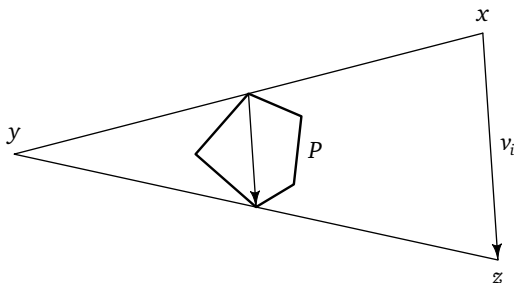


Рис. 2. Вторая итерация внешнего бильярдного отображения

Многоугольник R определён лишь с точностью до растяжения. Пусть выбран его представитель R_0 (скажем, имеющий единичную площадь). Каждой стороне в R_0 соответствует «время» — отношение её длины к длине соответствующего вектора v_i . Получаем совокупность «времён» $(t_1, \dots, t_k)$. Если выбран другой представитель многоугольника R , то вектор $(t_1, \dots, t_k)$ умножается на число, и потому отношения t_i/t_j определены корректно. Многоугольник P называется квазирациональным, если попарные отношения всех чисел t_i рациональны. Например, квазирациональны решётчатые многоугольники, а также аффинно эквивалентные правильным. Известно, что орбиты внешнего бильярда на квазирациональном многоугольнике ограничены, см. [3], [5], [9] или упомянутые обзоры. Недавно Р. Шварц доказал, что многоугольные внешние бильярды на специальном классе четырёхугольников имеют орбиты, уходящие на бесконечность, см. [13], [14] и книгу [15] (в печати).

Отображение T является кусочной центральной симметрией. Поскольку композиция двух центральных симметрий — параллельный перенос, отображение T^2 является кусочным параллельным переносом. Рассмотрим отображение T^2 вдалеке от многоугольника P . Тогда оно имеет разрывы на $2n$ лучах, которые получаются продолжением сторон P по часовой стрелке и отражением таких лучей относительно противоположных вершин (т. е. наиболее удалённых от данной стороны). Прямые, содержащие эти $2n$ лучей, образуют n полос $S_1, \dots, S_n$, пересечение которых содержит P , см. рис. 3. Полосы занумерованы по часовой стрелке.

В итоге можно согласованно занумеровать полосы S_i и векторы v_i так, что вдали от P отображение T^2 описывается следующим образом: начав с точки в полосе i , многократно добавляем вектор v_i или проти-

воположный ему (тот из них, который направлен по часовой стрелке), пока точка не окажется в полосе $i + 1$, затем многократно добавляем вектор v_{i+1} , пока точка не окажется в полосе $i + 2$, и т. д.

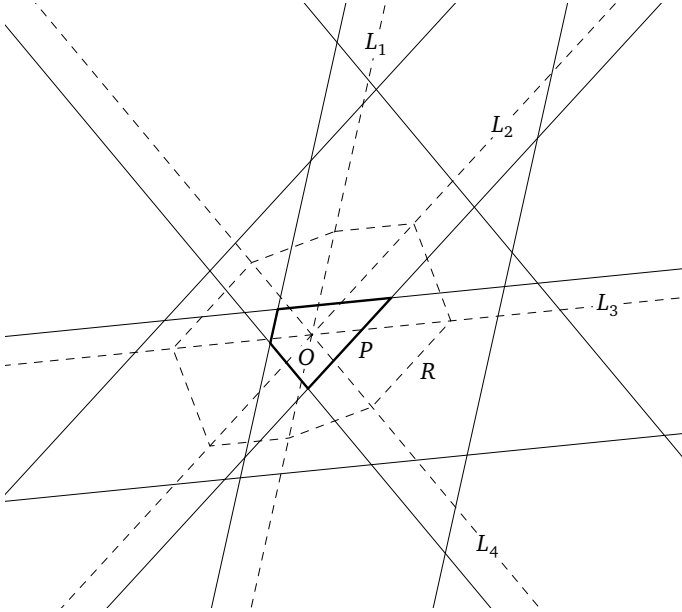


Рис. 3. Прямые L_i , полосы S_i и многоугольник R

Поместим начало координат O внутри P и рассмотрим прямые $L_1, \dots, L_n$, проходящие через O параллельно сторонам P . Зафиксируем описанный выше многоугольник R так, что O — его центр. Обозначим через qR результат растяжения многоугольника R с коэффициентом q . Чтобы построить такие многоугольники, выберем исходную точку на L_1 , проведём прямую в направлении v_1 до пересечения с L_2 , затем проведём прямую в направлении v_2 до пересечения с L_3 , и т. д.

Пусть $p_1, \dots, p_n$ — натуральные числа. Обозначим через $Q(p_1, \dots, p_n)$ центрально-симметричный $2n$ -угольник с центром O , стороны которого заданы векторами

$$p_1 v_1, p_2 v_2, \dots, p_n v_n, -p_1 v_1, \dots, -p_n v_n.$$

Мы хотим показать, что при подходящем выборе чисел $p_1, \dots, p_n$ многоугольник $Q(p_1, \dots, p_n)$ является орбитой отображения T^2 . Для это-

го вершины многоугольника $Q(p_1, \dots, p_n)$ должны лежать внутри полос S_i (противоположные вершины — в одной и той же полосе).

Ясно, что существует такое $\varepsilon > 0$ (зависящее только от P и выбора начала координат), что если вершины $2n$ -угольника Q удалены не более чем на ε от соответствующих вершин многоугольника qR , то вершины многоугольника Q лежат внутри полос S_i . Мы утверждаем, что можно найти произвольно большое вещественное q и целые $p_1, \dots, p_n$, такие что расстояние между соответствующими вершинами многоугольников qR и $Q(p_1, \dots, p_n)$ не превосходит ε .

Наше утверждение следует из справедливости соотношения

$$|qt_i - p_i| < \delta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $\delta > 0$ — достаточно малая константа. Действительно, первые вершины многоугольников qR и $Q(p_1, \dots, p_n)$ имеют вид соответственно

$$-\frac{1}{2} \sum_1^n qt_i v_i \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} \sum_1^n p_i v_i,$$

и аналогично для остальных вершин.

Наконец, рассмотрим тор $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, и пусть F_t — постоянный поток, заданный вектором $(t_1, \dots, t_n)$. Тогда (1) означает, что $F_q(O)$ удалено от $O = (0, \dots, 0)$ не более чем на δ . Действительно, поток F_t либо периодичен, и тогда $F_q(O) = O$ для значений q , составляющих арифметическую прогрессию, либо квазипериодичен, и тогда он бесконечно часто возвращается в любую окрестность исходной точки. $\square$

Замечания

1. Композиция нескольких центральных симметрий является либо центральной симметрией, либо параллельным переносом. Следовательно, k -периодическая точка внешнего бильярдного отображения на многоугольнике имеет многоугольную окрестность, состоящую из периодических точек с периодом k или $2k$ (последнее соответствует случаю нечётного k).

2. Выбор начала координат O в доказательстве был произволен и не влиял на ход рассуждений. Малое смещение начала координат приводит к тому же результату ввиду устойчивости периодических орбит в смысле предыдущего замечания.

3. Плотность значений q , удовлетворяющих условию (1), положительна. Можно доказать, что нижняя плотность множества периодических траекторий, описанных в теореме 1, также положительна.

4. Периодическая траектория внешнего бильярда на многоугольнике называется устойчивой, если при достаточно малом возмущении

нии внешнего бильярдного многоугольника P траектория также возмущается, но не исчезает. Критерий устойчивости известен, см. [16]. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — вершины многоугольника P , занумерованные по часовой стрелке. Чётно-периодическая орбита внешнего бильярдного отображения кодируется последовательностью вершин, в которых происходят последовательные отражения. Результатом является циклическое слово W от символов $A_1, \dots, A_n$. Орбита устойчива в точности тогда, когда каждому вхождению каждого символа в слово W на месте с нечётным номером отвечает его вхождение на месте с чётным номером. Согласно этому критерию периодические траектории из теоремы 1 устойчивы.

5. Из теоремы 1 вытекает существование произвольно больших периодических областей, состоящих из выпуклых многоугольников, которые в динамике меняются местами. Дополнение этого периодического множества состоит из точек с бесконечными орбитами (и, разумеется, точек, в которых не определена некоторая итерация внешнего бильярдного отображения). Для случая пятиугольника, аффинно эквивалентного правильному, ситуация была полностью исследована в [18], [19]: множество точек с бесконечными орбитами является замыканием множества разрывов, и это фрактал с хаусдорфовой размерностью, равной $\ln 6 / \ln(\sqrt{5} + 2)$. Компьютерные эксперименты (см. [16], [18], [19]) приводят к выводу, что ситуация аналогична и для других n -угольников, аффинно эквивалентных правильным (исключая случаи $n = 3, 4, 6$, когда получаются решётчатые многоугольники). Предположительно, то же верно для всех многоугольников.

6. Внешнее бильярдное отображение T можно определить и на гиперболической плоскости. В этом случае отображение T продолжается до непрерывного отображения бесконечно удалённой окружности. Это отображение окружности имеет число вращения ρ . Если внешний бильярдный n -угольник достаточно велик, то все орбиты отображения T уходят на бесконечность, см. [2]; однако в случае «больших» n -угольников имеем $\rho = 1/n$, и потому внешнее бильярдное отображение на бесконечности имеет n -периодическую орбиту. Точно так же, если ρ рационально, имеется периодическая траектория на бесконечности. Мы предполагаем, что для любого внешнего бильярдного многоугольника на гиперболической плоскости внешнее бильярдное отображение имеет периодические орбиты, даже если $\rho \notin \mathbb{Q}$.

Благодарности. Я весьма признателен К. Калтеру за многократные обсуждения, Р. Шварцу за проявленный интерес и поддержку, а также рецензенту за многие полезные замечания. Автор был частично поддержан NSF, грант DMS-0555803.

Литература

1. *Dogru F., Tabachnikov S.* Dual billiards // *Math. Intelligencer*. 2005. Vol. 27, № 4. P. 18—25. [Перевод см. в настоящем издании: *Догру Ф., Табачников С.* Внешние бильярды. С. 28—47.]
2. *Dogru F., Tabachnikov S.* On polygonal dual billiard in the hyperbolic plane // *Reg. Chaotic Dynamics*. 2003. Vol. 8. P. 67—82.
3. *Gutkin E., Simanyi N.* Dual polygonal billiards and necklace dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1991. Vol. 143. P. 431—450.
4. *Gutkin E., Tabachnikov S.* Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions / With applications to polygonal billiards // *Moscow Math. J.* 2006. Vol. 6. P. 673—701.
5. *Kolodziej R.* The antibilliard outside a polygon // *Bull. Pol. Acad. Sci.* 1989. Vol. 37. P. 163—168.
6. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // *Princeton U. P.*, 1973. (Ann. of Math. Stud.; Vol. 77).
7. *Moser J.* Is the solar system stable? // *Math. Intelligencer* 1. 1978. P. 65—71.
8. *Neumann B.* Sharing ham and eggs. Iota, Manchester University, 1959.
9. *Shaidenko A., Vivaldi F.* Global stability of a class of discontinuous dual billiards // *Comm. Math. Phys.* 1987. Vol. 110. P. 625—640.
10. *Schwartz R.* Obtuse triangular billiards I: Near the (2, 3, 6) triangle // *Exp. Math.* 2006. Vol. 15. P. 161—182.
11. *Schwartz R.* Obtuse triangular billiards II: 100 degrees worth of periodic trajectories. Preprint.
12. *Schwartz R.* Billiards obtuse and irrational. Preprint.
13. *Schwartz R.* Unbounded orbits for outer billiards // *J. of Modern Dynamics* 1. 2007. № 3. P. 371—424.
14. *Schwartz R.* Research announcement: unbounded orbits for outer billiards. *E.R.A-M.S.* 14 2007. P. 1—6.
15. *Schwartz R.* Outer billiards on kites. *Advances in Math. Studies*. Princeton University Press (в печати).
16. *Tabachnikov S.* Billiards. *SMF «Panoramas et Synthèses»*. № 1. 1995.
17. *Tabachnikov S.* Geometry and billiards. *Amer. Math. Soc.*, 2005.
18. *Табачников С.* Внешние бильярды // *Успехи матем. наук*. 1993. Т. 48, вып. 6. С. 75—102.
19. *Tabachnikov S.* On the dual billiard problem. 1995. (*Adv. in Math.*; Vol. 115). P. 221—249.
20. *Tabachnikov S.* Asymptotic dynamics of the dual billiard transformation // *J. Stat. Phys.* 1996. Vol. 83. P. 27—38.

Классификация гибких проволок и инварианты узлов

А. Б. Сосинский

Ниже приводятся две серии задач о «гибких проволоках», которые давались школьникам на Летней школе Турнира городов в Угличе в 1996 году. Самим задачам и их решениям мы предпосылаем здесь вводный текст, в котором поясняем связь этих задач для школьников с серьёзной математикой, а именно с современной теорией узлов. Школьникам, взявшимся за решение этих задач, мы советуем прочитывать введение дважды: в первый раз бегло, не смущаясь, если что-то будет непонятно, а во второй (после работы над задачами) — вдумчиво (тогда многие непонятные места прояснятся).

1. Немного истории

Конец восьмидесятых и начало девяностых годов прошлого столетия ознаменовались небывалым расцветом теории узлов. Теория узлов и зацеплений имела к этому времени более чем столетнюю историю — первые существенные шаги в её создании сделал Гаусс в середине XIX века (занимаясь электродинамикой, он изобрёл так называемый «индекс зацепления кривых»); затем физики, возглавляемые лордом Кельвином, пытались построить теорию материи, основываясь на узлах, но эта теория провалилась; в начале XX века немецкая топологическая школа стала с успехом применять придуманную Пуанкаре фундаментальную группу к изучению узлов; затем последовали замечательные работы американского тополога Александра (он придумал очень красивый инвариант узлов и зацеплений — легко вычисляемый полином, теперь носящий его имя); а в конце двадцатых годов прошлого века немецкий тополог Рейдемейстер написал первую монографию по теории узлов (в ней, в частности, он доказал ключевую лемму, фактически сводящую пространственные задачи теории узлов

Впервые опубликовано: Сосинский А. Б. Классификация гибких проволок и инварианты узлов // Восьмая Летняя конференция Турнира городов. М.: Информационный центр Турнира городов, 1997. С. 40—48, 101—107.

к комбинаторным задачам на плоскости). Теория узлов продолжала спокойно развиваться вплоть до середины восьмидесятых годов, оставаясь при этом небольшим интересным, но частным разделом топологии.

Что же случилось в середине восьмидесятых? Все началось с того, что новозеландский математик Воан Джонс, специалист по операторным алгебрам, не интересующийся топологией и совсем не сведущий в теории узлов, неожиданно для окружающих и для себя самого изобрел топологический инвариант узлов — тоже полином, но намного более сильный, чем полином Александера. Полином Джонса и вызвал небывалый интерес к теории узлов — ею стали интересоваться не только топологи и алгебраисты, но и физики, и некоторые биохимики, и даже специалисты по логике и теории алгоритмов! Полученные вслед за этим результаты, связанные с узлами, оказались в некотором смысле шире и значительней самой теории узлов и получили признание всей математической общественности. Достаточно сказать, что в девяностые годы за работы, так или иначе связанные с узлами, премию Филдса получили Воан Джонс, американский теорфизик Эдуард Виттен, харьковский математик Владимир Дринфельд и работающий в Париже россиянин Максим Концевич. Кроме филдсовских лауреатов, нельзя не упомянуть о работах (относящихся к этому же периоду) москвича Виктора Васильева и петербуржцев Олега Виро, Владимира Тураева и Николая Решетихина.

Для нашего дальнейшего рассказа существенны ещё три момента из истории создания современной теории узлов. Первый связан с именем американского математика Хасслера Уитни, который вообще-то не занимался узлами, но преуспел в исследовании близкой задачи — классификации самопересекающихся гладких кривых на плоскости. Первые 9 задач из предлагаемого цикла (задачи о «гибкой проволоке на плоскости», придуманные челябинским топологом Сергеем Матвеевым) занимают в некотором смысле промежуточное положение между теорией узлов и задачей Уитни.

Второй важный для нас эпизод имеет отношение к яркому и очень разностороннему англо-американскому математику Джону Конвею, изобретателю игры «Жизнь», чисел Конвея, нескольких «спорадических групп» чудовищных размеров и многих других вещей. В начале восьмидесятых годов он придумал элементарную модификацию полинома Александера, позволяющую легко определять и вычислять этот инвариант узлов и зацеплений с помощью очень наглядного (хотя и необычного) исчисления диаграмм, основанного на так называемых «skein relations» (буквально — клубочных соотношениях).

Такими диаграммами пестрят ответы на задачи 9—23, особенно наглядно и красиво выглядит решение задачи 14.

Наконец, третий и самый важный для нас эпизод — это изобретение американским специалистом по теории узлов Луисом Кауффманом элементарного построения полинома Джонса, тоже основанного на диаграммных вычислениях. Именно этот подход позволил изложить в виде задач для школьников основные достижения математика, получившего за них престижнейшую математическую премию, всего через несколько лет после её присуждения!

2. Иммерсированные кривые и гибкие проволоки на плоскости

Регулярной кривой на плоскости называется гладкая кривая с непрерывно изменяющейся касательной. Две такие кривые называются гомотопными (или эквивалентными), если одну кривую можно продеформировать в другую, точнее, если существует непрерывное семейство регулярных кривых, параметризованное отрезком $[0, 1]$, которое начинается одной кривой и заканчивается другой. Регулярная кривая называется иммерсированной, если у неё имеется лишь конечное число точек самопересечения, и в них направления касательных не совпадают (такие самопересечения называются трансверсальными). В восьмидесятые годы прошлого века Уитни классифицировал иммерсированные кривые на плоскости, для чего создал целочисленный инвариант, называемый сегодня индексом Уитни. Этот инвариант играет важную роль в первой серии задач (1—9).

Эти задачи, однако, посвящены не проблеме классификации иммерсий, а другой проблеме, поставленной и разобранный С. Матве-

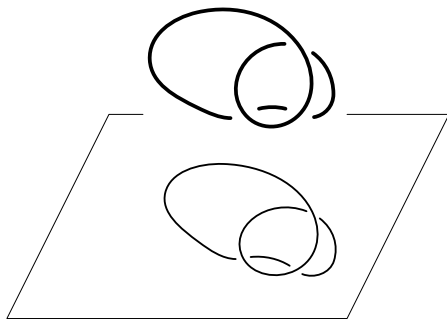


Рис. 1. Гибкая проволока

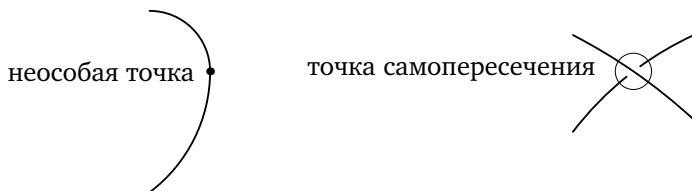


Рис. 2. Неособые точки и точки самопересечения

евым. Её мы и называем задачей о гибкой проволоке на плоскости (рис. 1). От задачи об иммерсированных кривых она отличается тем, что лежащая на плоскости «физическая» проволока, в отличие от «математической» кривой, не имеет настоящих самопересечений — вместо трансверсального пересечения в двойных точках одна ветвь кривой проходит над (или под) другой (рис. 2). Как и для узлов в пространстве, скрещивающиеся ветви нельзя провести одну «сквозь» другую. Поэтому мы и говорим, что проблема Матвеева занимает промежуточное положение между теорией плоских кривых и теорией узлов. Проблема классификации гибких проволок на плоскости сложнее проблемы Уитни, и для её решения вводится ещё один (замечательно красивый!) инвариант — скручивание.

3. Диаграммы узлов и заузленные гибкие проволоки на плоскости

Мы уже упомянули лемму Рейдемейстера, которая играет основополагающую роль в современных построениях теории узлов. Она позволяет сводить деформации узлов (т. е. пространственные деформации замкнутых несамопересекающихся кривых) к некоторым простейшим операциям с проекциями узлов на плоскость. Эти операции в науке называются операциями Рейдемейстера, а в настоящей статье мы их называем наложением, протаскиванием (см. рис. 3) и удалением петелек. Строгое доказательство леммы Рейдемейстера техниче-

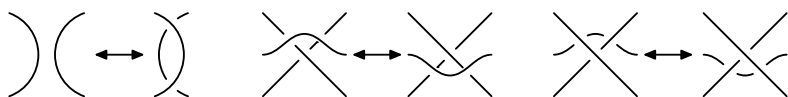


Рис. 3. Наложение и протаскивание

ски достаточно сложно и требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. Поэтому здесь мы работаем не с узлами в пространстве, а сразу с диаграммами узлов, т. е. с проекциями узлов на плоскость (в которых при скрещивании ветвей указывается, какая ветвь проходит сверху, какая снизу). При этом мы считаем две диаграммы эквивалентными, если одну в другую можно перевести операциями Рейдемейстера.

Для наглядности в этой статье в серии задач 10—23 вместо диаграмм узлов мы рассматриваем гибкие плоские проволоки, но в отличие от проволок из задач 1—9 эти проволоки могут быть изначально как угодно заузленными, и кроме того у них разрешается удалять маленькие петли (что в первой серии задач запрещено, см. рис. 4).

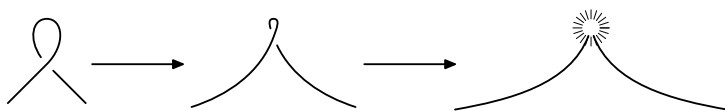


Рис. 4. Запрещённое действие

Задача классификации таких проволок эквивалентна задаче классификации узлов и до сих пор не имеет удовлетворительного решения. Однако серия задач 10—23 приводит к построению элементарными средствами мощного инварианта узлов — знаменитого полинома Джонса.

4. Классификация гибких проволок на плоскости

Рассмотрим круглый обруч, сделанный из тонкой гибкой проволоки. Продеформируем его произвольным образом, а затем опустим его на плоскость (рис. 1). Получим на плоскости то, что мы будем называть *проволокой*. Точки такой проволоки бывают двух типов: *неособые* и *точки самопересечения*, в которых одна часть проволоки проходит над другой (рис. 2).

Проволоку можно двигать по плоскости, не выводя её в пространство, сгибать и разгибать её части, пропускать одну часть под (или над) другой. При этом нельзя уничтожать образующиеся при этом петли, стягивая их в точку (считайте, что проволока ломкая и сломается при таком действии, рис. 4). На рис. 3 показаны допустимые способы изменения взаимного расположения частей: *наложение* и *протаскивание*. Их можно выполнять как в одну, так и в другую сторону. Две проволоки называются *эквивалентными*, если одну можно перевести в другую описанными выше преобразованиями.

Основная цель состоит в *классификации проволок*, т. е. нужно составить список *стандартных* проволок, такой что любая проволока эквивалентна ровно одной из списка.

Задача 1. Какие из проволок на рис. 5 эквивалентны?

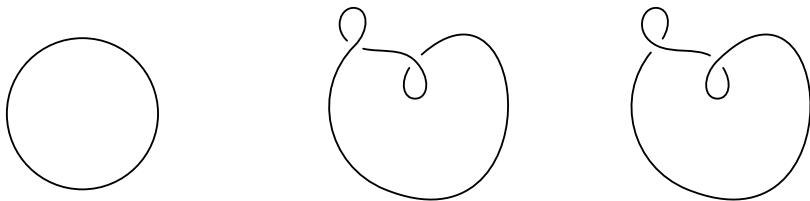


Рис. 5. Эквивалентны ли эти проволоки?

Задача 2. Составьте полный список проволок, т. е. такой список $h_1, h_2, \dots$, что любая проволока эквивалентна по крайней мере одной из этого списка.

После того как задача 2 решена, для решения задачи классификации проволок остаётся найти полный список $h_1, h_2, \dots$, все элементы которого попарно неэквивалентны ($i \neq j \Rightarrow h_i \not\sim h_j$).

Задача 3. Докажите, что проволоки ∞ и ∞ неэквивалентны.

Пусть x — точка на проволоке h . Выберем на h направление обхода. Обозначим через $\tau(x)$ единичный касательный вектор к проволоке в этой точке. Начиная с некоторой точки $x_0 \in h$, пройдем вдоль проволоки и посмотрим, как будет меняться вектор $\tau(x)$, начало которого мы перенесём в некоторую фиксированную точку O на плоскости. Ясно, что этот вектор будет поворачиваться (по часовой стрелке или против) и совершит некоторое количество $r(h)$ полных оборотов вокруг O . Если взять противоположное направление обхода, направление вращения изменится на противоположное, но количество полных оборотов будет, разумеется, тем же. Ясно также, что $r(h)$ не зависит от выбора точки O . Величину $r(h)$ назовём *числом вращения* проволоки h (она также иногда называется *индексом Уитни* или *числом Гаусса* кривой h). В случае, когда h ориентирована (фиксировано направление обхода), число $r(h)$ снабжается знаком $+$ или $-$ в зависимости от направления оборотов.

Задача 4. Докажите, что эквивалентные проволоки имеют одинаковое число вращения.

Обычно нетрудно посчитать число вращения прямо по определению. Однако $r(h)$ оказывается связанным с числом касательных к проволоке h в данном направлении, и это позволяет решить следующую задачу.

Задача 5. Придумайте простой способ вычисления $r(h)$.

Задача 6. Найдите две неэквивалентные проволоки с одинаковым числом вращения, попробуйте доказать их неэквивалентность.

Рассмотрим проволоку h . Заменяем её узкой плоской лентой $\rho(h)$, расположенной так же, как и проволока. Разрежем ленту в некотором месте и, слегка приподняв её над плоскостью, растянем за концы разреза (рис. 6). Лента окажется закрученной на какое-то число оборотов $t(h)$ (мы будем считать это число положительным, если закрутка соответствует правому винту, в противном случае будем считать это число отрицательным). Назовём полученную величину *числом скручивания* проволоки h .

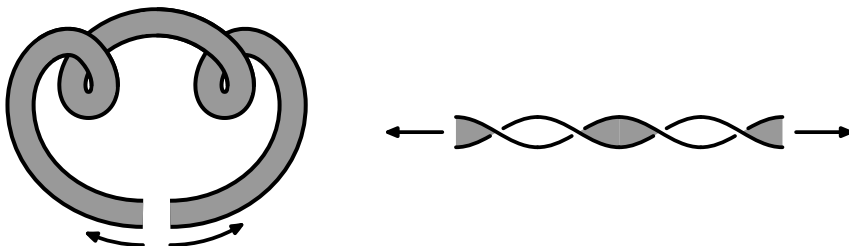


Рис. 6. Число скручивания

Задача 7. Попробуйте объяснить (а возможно, и доказать), почему эквивалентные проволоки имеют одинаковые числа скручивания.

Окончательно классификация проволок будет завершена, если вы решите ещё и следующую задачу.

Задача 8. Две плоские проволоки эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые числа вращения и одинаковые числа скручивания.

Теперь предположим, что можно не только изгибать проволоку, но и растягивать и сжимать. Поместим её на сферу и получим сферическую проволоку.

Задача 9. Решите задачу классификации для сферических проволок.

5. Заузленные гибкие проволоки на плоскости

Будем по-прежнему рассматривать гибкие проволоки, лежащие на плоскости, но теперь мы не требуем, чтобы исходный обруч имел форму окружности: он может быть заузленным (как на рис. 7). Как и прежде, мы опускаем его на плоскость, по которой плоский узел может скользить, совершая операции наложения и протаскивания; устранение маленьких петель по-прежнему запрещено. Эквивалентность определяется как и ранее. Наша цель — найти *инварианты* для таких проволоочных узлов, притом в двух случаях: когда они ориентированы, и когда нет.

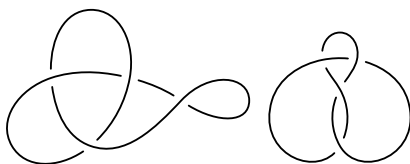


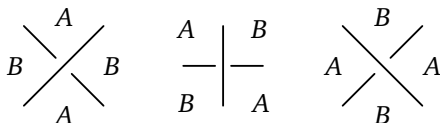
Рис. 7. Узлы

Задача 10 (ориентированный случай). Назовём точку самопересечения *положительной* (*отрицательной*), если она имеет вид  ().

(а) Пользуясь этими понятиями, придумайте инвариант $w(H)$ ориентированных плоских узлов H (доказав его инвариантность).

(б) Укажите, что происходит с $w(H)$ при запрещённой операции.

В неориентированном случае все точки самопересечения одинаковы, но они определяют два *разных* угла, называемых *A-углами* и *B-углами*:



Задача 11 (неориентированный случай). Дайте строгое определение *A-угла* и *B-угла*.

Далее кроме заузленных (или незаузленных) проволок, состоящих из одного куска, мы будем рассматривать *зацепления*, состоящие из

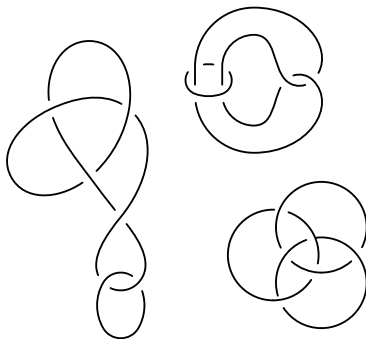


Рис. 8. Зацепления

нескольких таких проволок, которые к тому же могут заузливаться между собой (рис. 8).

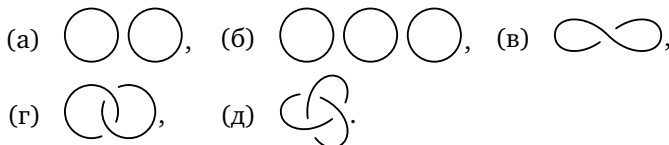
Каждому неориентированному зацеплению (в частности, узлу) L мы сопоставим многочлен $P_L(a, b, c)$, удовлетворяющий трем условиям:

$$(1) P_{\times} = aP_{\searrow} + bP_{\swarrow}; \quad (2) P_{L \bigcirc} = cP_L; \quad (3) P_{\bigcirc} = 1.$$

Здесь запись $P_{\times}$, $P_{\searrow}$, $P_{\swarrow}$ означает, что рассматриваются многочлены от трёх разных зацеплений, совпадающих всюду, кроме небольшого кружочка, в котором у первого происходит самопересечение $\times$, у второго — самопересечение заменено на проход по B -углу $\searrow$, у третьего — по A -углу $\swarrow$. Далее, $\bigcirc$ обозначает простейший (круглый) узел, а $L \bigcirc$ — зацепление (или узел) L , к которому доба-

вили $\bigcirc$ так, что новых зацеплений не произошло.

Задача 12. Найдите P_L для следующих L :



Задача 13. Покажите, что многочлен P_L , удовлетворяющий условиям (1), (2), (3), если он существует, определён однозначно зацеплением L .

Задача 14. (а) Найдите соотношения между параметрами a, b, c , при которых P_L не меняется при наложении  $\longleftrightarrow$ . Для этих значений параметров проверьте, меняется ли P_L при

(б) протаскивании;

(в) устранении петелек.

Отныне мы рассматриваем ориентированный случай и разрешаем *устранение (рождение) петелек* (это значит, что мы рассматриваем задачу эквивалентности в пространстве).

Задача 15. Пользуясь задачей 14 (особенно пунктом (а)), найдите инвариантный многочлен $K_L(a)$ плоских узлов и зацеплений.

Задача 16. Вычислите $K_L(a)$ для пяти случаев задачи 12.

Задача 17. Сравните результаты задач 10 (б) и 14 (в): чем схожи и чем различаются $w(H)$ и $P(H)$?

Задача 18. Найдите инвариант эквивалентности ориентированных узлов в пространстве и с его помощью докажите, что узел  нельзя распутать (превратить в ).

Полное решение задачи 18 должно включать доказательство существования вашего инварианта, для этого, например, достаточно определить его (т. е. предложить алгоритм для его вычисления) и показать инвариантность относительно трёх преобразований:



6. Дополнительные задачи о заузленных проволоках

Если вы нашли (см. задачу 18) требуемый инвариант $K_L(a)$ (это комбинация положительных и отрицательных степеней a с целыми коэффициентами, полученная модификацией $K_L(a)$ из задачи 15, инвариантная относительно запрещённого ранее преобразования  $\longleftrightarrow$ ), то попробуйте решить следующие задачи.

Задача 19. Проверьте, что $K_L(a)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1) a^4 K_{\text{cross with dot on top}} - a^{-4} K_{\text{cross with dot on bottom}} = (a^{-2} - a^2) K_{\text{cross}};$$

$$2) K_{\bigcirc} = 1;$$

Задача 20. Пусть L — незацепленное объединение двух зацеплений L_1 и L_2 . Докажите, что $K_L = (-a^2 - a^{-2}) K_{L_1} \cdot K_{L_2}$.

Задача 21. Пусть $L = L_1 \# L_2$ — «связная сумма» L_1 и L_2 , т.е. зацепление, полученное способом, указанным на рис. 9. Докажите, что $K_L = K_{L_1} \cdot K_{L_2}$.

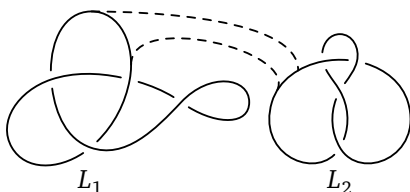


Рис. 9

Задача 22. Как изменяется K_L при изменении ориентации L на противоположную?

Задача 23. Найдите два неэквивалентных зацепления L и L' , для которых $K_L = K_{L'}$.

Решения

1. Все три. Например, вторая превращается в первую так, как показано на рис. 10. (Такое взаимное уничтожение петель называется *фокусом Уитни*.)



Рис. 10. Фокус Уитни

2. Здесь много вариантов правильного ответа. Чаще всего представлялся список, состоящий из *стандартных проволок типа* (k_1, k_2, k_3, k_4) , где k_i — целые неотрицательные числа, имеющий вид большой окружности с наборами петелек четырёх типов (рис. 11). Для превращения произвольной проволоки в одну из стандартных, систематически применяется операция протаскивания петель друг сквозь друга (рис. 12). Решившие эту задачу понимали, что в этом списке имеются повторения, например, при $k_4 > k_1$ стандартная проволока типа (k_1, k_2, k_3, k_4)

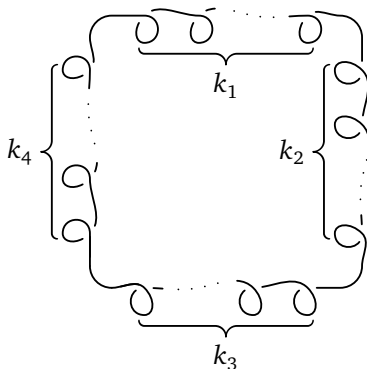


Рис. 11. Протаскивание петельки

эквивалентна стандартной проволоке типа $(0, k_2, k_3, k_4 - k_1)$ за счет фокуса Уитни (применённого k_1 раз). Высказывалась гипотеза (правильная!), что после подобных сокращений и сброса пары петель в левом нижнем углу рис. 11 получается *полный список без повторов* (т. е. решение задачи классификации), члены которого зависят от двух параметров, один из которых принимает целые значения (скажем, $m = k_3 - k_2$), а второй — целые неотрицательные значения (скажем, $n = |k_4 - k_1|$).

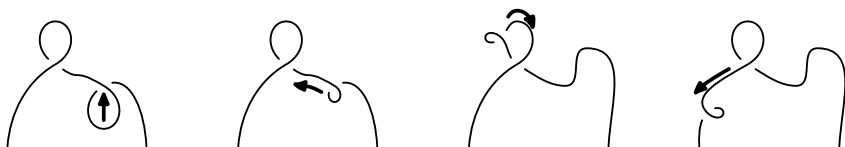


Рис. 12

3. Здесь нужно придумать инвариант. Годится, например, число скручиваний (см. задачу 7), которое и было предъявлено в разных вариантах (ориентированные и неориентированные проволоки, см. замечание 1 ниже). М. Мази из Словении придумал для решения этой задачи инвариант w (writhe, см. задачу 10), который в ориентированном случае совпадает со скручиванием. Решение задачи 3 следует из того, что ∞ и ∞ имеют различные числа скручивания.

Замечание 1. По ходу решения задач 1—9 было объявлено, что можно рассматривать как проволоки *ориентированные* (с фиксиро-

ванным направлением обхода), так и неориентированные. В приведённых здесь решениях задач 1—9, мы ограничиваемся неориентированным случаем, оставляя (более простой) ориентированный случай читателю.

4. Число вращений r — непрерывная функция с целыми значениями; значит, r — константа. Поясним этот важный общий способ рассуждения подробнее, применительно к нашему случаю. Очевидно, что при разрешённых операциях наложения и протаскивания число r не меняется; не меняется и оно при других *малых* разрешимых движениях проволоки, а значит не меняется и при *любых* её разрешённых преобразованиях (ибо любые движения — конечная последовательность малых).

5. Выбрав направление обхода на h , нужно отметить знаком «+» все точки, в которых касательный вектор к h горизонтален и направлен слева направо, отметить знаком «−» все точки, в которых этот вектор идёт горизонтально, но справа налево, и затем положить $r(h)$ равным половине числа перемен знака при движении по выбранному направлению.

6. Таковы проволоки из задачи 3. Их неэквивалентность следует из решения задачи 3 или задачи 7.

7. Доказательство такое же, как в задаче 4, только $r(h)$ нужно заменить на $t(h)$.

8. В одну сторону утверждение уже доказано: если $h \sim h'$, то из задачи 4 следует, что $r(h) = r(h')$, а из задачи 7, что $t(h) = t(h')$. Обратно, пусть $r(h) = r(h')$ и $t(h) = t(h')$ для двух проволок h и h' . Докажем, что $h \sim h'$. Приведём обе к стандартному виду, скажем, h к виду (k_1, k_2, k_3, k_4) , а h' — к виду (k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) (см. решение задачи 2). Тогда

$$\begin{aligned} |1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4| &= r(h) = r(h') = |1 + k'_1 + k'_2 - k'_3 - k'_4|, \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 &= t(h) = t(h') = k'_1 - k'_2 + k'_3 - k'_4. \end{aligned}$$

Заметим, что при сбросе пары петель в левом нижнем углу рис. 11 происходит следующее изменение параметров:

$$(k_1, k_2, k_3, k_4) \mapsto (k_3 - 1, k_4 - 1, k_1, k_2),$$

поэтому при этом сбросе величина $1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4$ в точности изменяет знак, а значит, можно добиться выполнения равенства

$$1 + k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 1 + k'_1 + k'_2 - k'_3 - k'_4.$$

Из этого равенства, с учётом $t(h) = t(h')$, следует, что $k_4 - k_1 = k'_4 - k'_1$ и $k_3 - k_2 = k'_3 - k'_2$, а значит, стандартный вид h' можно преобразовать

в стандартный вид h , выполнив фокус Уитни (и обратную к нему операцию) нужное число раз.

9. Полный список без повторений показан на рис. 13.

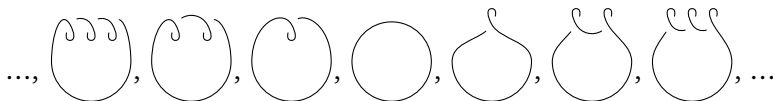


Рис. 13

Для доказательства полноты достаточно заметить, что любая проволока на сфере эквивалентна проволоке, лежащей вблизи южного полюса, где её можно привести (как на плоскости) к стандартному виду типа (k_1, k_2, k_3, k_4) , а затем воспользоваться операцией *переброски через северный полюс* (рис. 14).

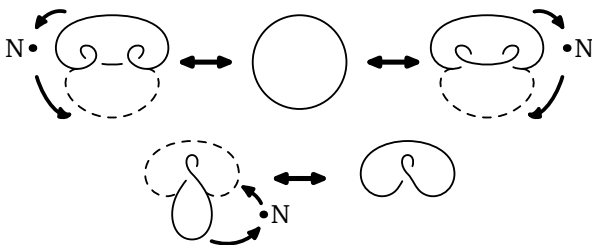


Рис. 14

Для доказательства неповторяемости следует воспользоваться (модифицированными) инвариантами $r(h)$ и $t(h)$.

10. а) Как ни странно, все решившие эту задачу указали тот инвариант, который имели в виду авторы: $w(H) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, где n — число точек самопересечения, $\varepsilon_i = +1$, если i -я точка самопересечения положительна, и $\varepsilon_i = -1$, если она отрицательна. Доказательство инвариантности $w(H)$ — простая проверка (при разрешённых операциях наложения и протаскивания $w(H)$ не меняется).

б) Число $w(H)$ меняется на слагаемое ± 1 в зависимости от типа устранимой (появляющейся) петельки (∞ или ∞).

11. Правильное описание можно дать разными способами, например: А-угол — это тот угол, который виден сначала справа, а потом слева при переходе по верхней ветке; при этом ясно, что этот угол не зависит от направления перехода.

12. Ответы: (а) c ; (б) c^2 ; (в) $a + bc$; (г) $(a^2 + b^2)c + 2ab$;
(д) $a^3c^2 + 3a^2bc + 3ab^2 + b^3c$.

13. Последовательно применяя условие (1), сведём задачу вычисления полинома P для данного зацепления к вычислению P для системы незацепленных окружностей, которые однозначно находятся по условиям (2) и (3).

14. а) Ответ: $b = a^{-1}$, $c = -a^2 - a^{-2}$, a — любое. Доказательство: в силу условий (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} P(\text{соединённые}) &= aP(\text{соединённые}) + bP(\text{соединённые}) = \\ &= a \left[bP(\text{соединённые}) + aP(\text{соединённые}) \right] + b \left[bP(\text{соединённые}) + aP(\text{соединённые}) \right] = \\ &= abP(\text{соединённые}) + (a^2 + b^2 + abc)P(\text{соединённые}) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$P(\text{соединённые}) = cP(\text{соединённые})$$

в силу условия (2)). Инвариантность относительно наложения означает, что $P(\text{соединённые}) = P(\text{соединённые})$, а это возможно только при $ab = 1$ и $a^2 + b^2 + c = 0$.

б) Если принять $b = a^{-1}$, $c = -a^2 - a^{-2}$, то нетрудно сосчитать, что $P(\text{соединённые}) = P(\text{соединённые})$ выполняется автоматически¹. Указание: воспользуйтесь соотношением $P(\text{соединённые}) = P(\text{соединённые})$, которое получается двукратным применением инвариантности относительно наложения.

в) При устранении петелек P умножается на $-a^{\pm 3}$ (в зависимости от типа удаляемой петельки).

15. Ответ: $K_H := (-a)^{-3w(H)}P(|H|)$, где H — ориентированное зацепление (или узел), $|H|$ — то же зацепление, но без ориентации. Этот ответ получил 14-летний Виктор Клепцын, ныне — известный математик.

16. Ответы: (а) $-a^2 - a^{-2}$, (б) $(-a^2 - a^{-2})^2$, (в) 1,
(г) $-a^{10} - a^2$, (д) $-a^{16} + a^{12} + a^4$.

17. Число $w(H)$, также как полином $P(H)$, инвариантно относительно наложения и протаскивания, но при устранении петель они

¹Мы сохраняем обозначение P для полинома $P = P(a, b, c)$ после замен $b = a^{-1}$ и $c = -a^2 - a^{-2}$.

меняются на слагаемое ± 1 и на множитель $a^{\pm 3}$ соответственно. Отсюда и следует инвариантность полинома K , ибо его инвариантность относительно наложения и протаскивания вытекает из этих свойств для w и P , а инвариантность относительно устранения петелек — из того, что изменения w и P компенсируют друг друга.

18. В качестве искомого инварианта можно взять K . Узел  нельзя распутать, т. к. в противном случае мы имели бы $-a^{16} + a^{12} + a^4 = 1$ (в силу задачи 16 (v) и условия (3)). Инвариантность K вытекает из решения задач 10 (а, б) и 17.

19—21. Доказывается прямыми вычислениями из определения $K(a)$.

22. $K_{-L}(a) = K_L(a)$, где $-L$ обозначает зацепление (узел), совпадающий с L , но имеющий противоположную ориентацию.

23. Пример показан на рис. 15. Равенство $K_L = K_{L'}$ вытекает из задачи 21, а неэквивалентность L и L' — из того, что обе компоненты L' заузлены, в то время как в L заузлена только одна.

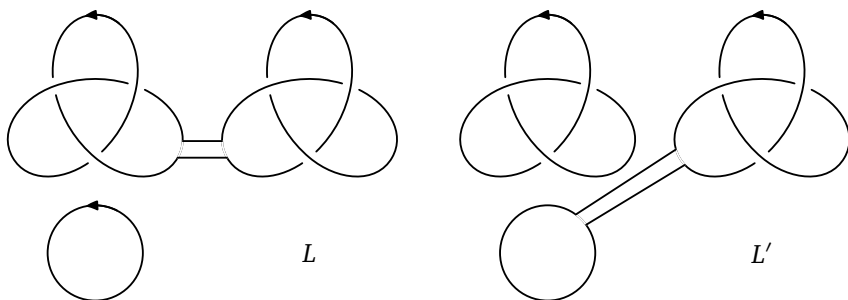


Рис. 15

Задача о разбойниках

И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов,
С. И. Кублановский, А. С. Малистов

В олимпиадном фольклоре получили распространение задачи о дележе добычи разбойниками, каждый из которых подходит со своей меркой. Такие задачи тесно связаны с теорией меры, которая является одной из основ современной математики. Им посвящён целый ряд работ, и они являются темой этой статьи. Логика исследования (в частности, постановка промежуточных задач) изложена в решениях. Приведём общую постановку проблемы.

Между n жадными разбойниками нужно разделить добычу. Мы считаем, что каждое подмножество сокровищ каждый разбойник оценивает по своему разумению. Оценка всегда неотрицательна, и если часть сокровищ разбита на две непересекающиеся части $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то оценка части A равна сумме оценок частей A_1 и A_2 . Добыча считается *безгранично делимой*, т. е. каждый набор сокровищ может быть разделен на любое число частей, равных с точки зрения данного разбойника. Как разделить добычу?

Например, если разбойников два, то один делит на две равные, по его мнению, части, а другой выбирает.

Ситуация резко осложняется, если разбойники *завистливы*. *Зависть* означает, что каждый разбойник хочет получить не только не менее $1/n$ всех сокровищ, но и не меньше любого другого разбойника (по своему мнению).

А. Вначале предположим, что зависть отсутствует.

A1. Пускай разбойники не завистливы, но каждый должен получить не менее $1/n$ части по своему мнению. Как им разделить добычу?

A2. Пусть теперь каждый разбойник хочет получить более $1/n$ (по своему мнению). Всегда ли они смогут разделить добычу?

A3. Зависть отсутствует, но есть договоренность о долях α_i . Разбойник с номером i должен получить не менее чем α_i от всей добычи (по его мнению), $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Как осуществить раздел?

В. Пусть разбойники завистливы.

В1. Осуществите процесс дележа для $n = 3$.

В2. Существует ли алгоритм дележа для $n = 4$?

В3. Решите задачу в общем случае.

С. Пусть теперь существуют такие пары разбойников (A, B) , что A не возражает, что B получит больше сокровищ, а B считает, что должен получить строго больше A . Будем называть это *отношением подчинения* (A — подчинённый разбойника B , B — начальник разбойника A). Для остальных пар сохраняется условие зависти.

С1. Верно ли, что если существует алгоритм раздела сокровищ, то отношение подчинения *транзитивно*, то есть если A — начальник B и B — начальник C , то A — начальник C ?

В пунктах С2 и С3 считаем, что отношение подчинения транзитивно и, следовательно, нет циклов.

С2. Исследовать, при каких n задача может быть неразрешимой.

С3. Пусть у всех разбойников, кроме одного, есть начальник. Существует ли алгоритм раздела?

С4. Общий случай: относительно отношения подчинения множество разбойников образует произвольный *ориентированный граф*. Исследовать, когда существует алгоритм раздела.

Для остальных задач нужно более строгое определение понятия *меры*.

Мерой на множестве E называется функция μ на некотором семействе $\mathcal{P}$ подмножеств E , удовлетворяющая следующему условию: если $A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Семейство $\mathcal{P}$ должно удовлетворять условию: если $A, B \in \mathcal{P}$, то множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ тоже принадлежат $\mathcal{P}$.

Элементы $\mathcal{P}$ называются *измеримыми множествами*.

Мера μ называется

— *неотрицательной*, если $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{P}$;

— *безгранично делимой*, если любое подмножество из $\mathcal{P}$ можно разбить на любое конечное число множеств равной меры;

— *вероятностной*, если $\mu(E) = 1$ (происхождение термина: вероятность того, что хоть что-то случится, равна единице).

Безгранично делимые меры μ и ν называются *взаимно непрерывными*, если для любого семейства измеримых множеств $\{B_k\}$ условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(B_k) = 0$$

равносильны.

Все рассматриваемые меры считаются неотрицательными, безгранично делимыми, вероятностными (поскольку общая ценность сокровищ конечна, а мерки каждого разбойника важны с точностью до пропорциональности).

Будем также считать все меры счётно-аддитивными, т. е. хорошо себя ведущими при счётных объединениях. А именно, мера μ называется *счётно-аддитивной*, если для любого счётного семейства попарно непересекающихся множеств $\{A_i\}$ имеет место равенство: $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$. Семейство $\mathcal{P}$ измеримых множеств здесь также должно удовлетворять условию счётной аддитивности: вместе с любым счётным семейством множеств оно должно содержать их объединение, пересечение и всевозможные дополнения.

Мы считаем, что разбойники могут делить добычу на части, принадлежащие некоторому семейству $\mathcal{P}$ измеримых множеств (одному для всех разбойников).

D1. Пусть меры μ_i , $i = 1, \dots, n$, связанные с разбойниками, взаимно непрерывны.

а) Докажите, что существует разбиение множества сокровищ на равные с точки зрения каждого разбойника части.

б) Докажите, что для любого набора чисел $\{c_j\}$ ($0 < c_j < 1$; $c_1 + \dots + c_n = 1$) существует разбиение множества E на такие множества M_j , что для любых i, j выполнено равенство $\mu_i(M_j) = c_j$.

D2. а)—б) Справедливы ли аналогичные утверждения, если условие взаимной непрерывности мер убрать?

D3. Докажите, что для взаимно непрерывных мер существует семейство множеств $\{M_\alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $M_\alpha \subset M_\beta$ при $\alpha < \beta$.

б) $\mu_i(M_\alpha) = \alpha$ при всех i .

D4. Справедливо ли утверждение задачи D3, если условие взаимной непрерывности мер убрать?

E1. а) Пусть множество E двумя способами разбито на k множеств $A_1 \cup \dots \cup A_k = E = B_1 \cup \dots \cup B_k$, причём

$$\mu_1(A_i) = 1/k, \quad i = 1, \dots, k, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

$$\mu_2(B_i) = 1/k, \quad i = 1, \dots, k, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Докажите, что если k достаточно велико, то существует множество C , являющееся объединением некоторых C_{ij} и такое, что

$$\left| \frac{1}{2} - \mu_1(C) \right| < 0,01 \quad \text{и} \quad \left| \frac{1}{2} - \mu_2(C) \right| < 0,01.$$

б) Докажите аналогичный результат для n мер.

Е2. Докажите, что существует разбиение множества E на такие части $E_1, \dots, E_{25}$, что

$$\mu_1(E_i) = 1/25 \quad \text{и} \quad 2/100 < \mu_2(E_i) < 6/100.$$

Иными словами, существует разбиение E на части, равные по мере μ_1 и мелкие по мере μ_2 .

Е3. Пусть меры взаимно непрерывны. Докажите, что существует алгоритм дележа на части, равные по каждой мере с точностью до ε , в случае:

а) $n = 2$;

б) произвольного n .

Е4. а), б) Существует ли алгоритм, указанный в Е3, если требование взаимной непрерывности мер убрать?

Е5. Пусть для любых двух разбойников существует подмножество сокровищ, которое они оценивают по-разному (в долях к общему количеству). Верно ли, что существует подмножество I , которое все разбойники оценивают по-разному, причём для любого i верно неравенство $\mu_i(I) < \varepsilon$?

Е6. Решите задачу В3 в предположении, что меры разбойников взаимно непрерывны.

Е7. *Обобщённое условие зависти.* Пусть α_i — доли, в которых разбойники должны получить сокровища согласно договоренности, A_{ij} — оценка фактической доли j -го разбойника по мнению i -го. *Обобщённое условие зависти* имеет вид $A_{ij}/\alpha_j \leq A_{ii}/\alpha_i$. Осуществить делёж.

Решения

Наша цель — решить задачу о разбойниках в самой общей её постановке. В таком виде, однако, она слишком трудна для кавалерийской атаки. Её нужно взять осадой. Для это нужны промежуточные задачи, на которых идеи работают по отдельности и решение которых углубляет их понимание.

Ясно, что сначала нужно исследовать ситуацию отсутствия зависти (серия А). Заранее понятно, что задача А3 может с большой вероятностью оказаться технически полезной. Обсудим решения задач из серии А.

А1. Приведём алгоритм дележа. Пусть первый разбойник откладывает себе $1/n$ часть. Если второй считает, что тот отложил себе много, то убирает из неё «лишнее» (по его мнению). Затем подходит третий, и процесс повторяется, и т. д. Тот из разбойников, который убирает «лишнее» последним, забирает оставшееся от куска.

Оставшаяся часть делится между остальными $n - 1$ разбойниками по тому же алгоритму.

A2. Нет. Это невозможно, если, например, мнения всех разбойников совпадают по всем вопросам.

A3. Решим задачу индукцией по числу разбойников.

База индукции ($n = 2$). Отметим, что если отношение рационально, то делёж можно осуществить согласно задаче A1. Разбойника, требующего долю, равную p/q , можно рассматривать как p разбойников с одинаковыми мнениями, где каждый желает получить $1/q$.

Пусть теперь отношение иррационально и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 < 1/2 < \alpha_2$. Второй разбойник откладывает для первого долю α_1 . Если первый не соглашается, то по его мнению эта доля строго меньше чем α_1 на некоторую величину ε , а по мнению второго она равна α_1 .

Её берёт себе второй разбойник. Ему осталось получить долю $\alpha_2 - \alpha_1$ из оставшейся добычи. Её надо разделить в отношении $\alpha_1 : (\alpha_2 - \alpha_1)$ по мнению второго, и тем более его удовлетворит отношение $(\alpha_1 - \delta) : (\alpha_2 - \alpha_1 + \delta)$ при $\delta > 0$. При достаточно малом δ это устроит и первого, так как он считает, что оставшаяся часть равна $\alpha_2 + \varepsilon$ и, следовательно, он получит не меньше, чем α_1 . Выберем δ так, чтобы отношение было рациональным, и разделим добычу.

Индуктивный переход. Пусть n разбойников делят добычу в отношении $\alpha_1 : \dots : \alpha_n$. Сначала разделим добычу между $n - 1$ разбойниками в отношении $\alpha_1 : \dots : \alpha_{n-1}$. Затем оставшийся забирает у каждого не менее своей доли (делёж между двумя). Итого он получает не менее своей доли от всего. Аналогично и с остальными.

Итак, случай отсутствия зависти разобран. Теперь логично попытаться исследовать основную проблему на малых числах, в частности, решить задачу для трёх разбойников.

B1. Сначала первый разбойник делит добычу на три равные, по его мнению, части. Второй располагает эти части по убыванию, в соответствии со своим мнением. Пусть эти части равны A, B, C . Затем второй делит часть A на две части A_1 и A_2 , так, что, по его мнению, $A_1 = B$. Теперь будем делить части между разбойниками. Сначала разделим A_1, B и C . Пусть выбирает третий.

Если он выберет A_1 , то дадим второму B , первому C . Третий никому не завидует, потому что он выбирал, второй не завидует, потому что у него $B = A_1$ и $B > C$. Первый не завидует, так как у него $C = B$ и $C = A > A_1$.

Если третий выберет B , дадим второму A_1 , а первому C . Аналогично, третий выбирал, у второго $A_1 = B > C$, у первого $C = B = A > A_1$. Зависти нет.

Если третий выберет C , дадим второму A_1 , а первому B . Второй не завидует, так как у него $A_1 = B > C$, первый не завидует, так как у него $B = C = A > A_1$.

Таким образом, осталось разделить A_2 . Заметим, что при дележе этой части можно считать, что первый *не завидует* тому, кто взял часть A_1 (в первом случае это третий разбойник, во втором и третьем — второй): по его мнению, доставшаяся ему часть (B или C) уже равна по размеру всей части A , и даже если обладателю A_1 отдать всю часть A_2 , первый не будет ему завидовать.

Используем это обстоятельство. Пусть, для определённости, первый не завидует второму. Третий делит A_2 на равные, по его мнению, части, потом второй выбирает из них наибольшую (для него). Затем выбирает первый, а третий забирает оставшуюся часть. Третий не завидует никому, так как части, по его мнению, равны. У второго нет зависти, так как он имел возможность выбрать. Первый не завидует третьему, так как выбирал перед ним, а второму — ввиду сказанного выше.

Итак, делёж добычи закончен.

Теперь логично было бы попытаться обобщить алгоритм для четырёх разбойников и далее. Нам не удалось это сделать. В перспективе этот путь мог бы дать гораздо более удобный в практическом отношении комбинаторный алгоритм с лучшей оценкой числа операций.

Если используемые методы не ведут к цели, нужно искать другие пути и подходы. Например, ослабить ограничения типа «зависть». Отсюда вытекают решения серии C .

C1. Допустим, алгоритм существует. Тогда он работает и в том случае, когда все разбойники думают одинаково. Поэтому если A получит больше B , а B больше C , то A должен получить больше C , что невозможно, если C завидует A . Получаем, что A — начальник C .

Решения задач **C2** и **C3** непосредственно следуют из решения **C4**.

C4. Согласно **C1**, искомый алгоритм может существовать, лишь если отношение подчинения транзитивно (и нет циклов). В этой ситуации он существует всегда. Докажем это.

Разбойниками первого ранга назовём тех разбойников, у которых нет начальников (существование таких разбойников следует из отсутствия циклов). Разбойником i -го ранга ($i > 1$) назовём такого, у которого есть начальники только меньшего ранга. Понятно, что каждый

разбойник попадает в один из таких классов. Разбойники одного ранга не связаны отношением подчинённости. Докажем, что любой разбойник B , имеющий ранг i , является начальником всех разбойников большего ранга.

Пусть существует разбойник X , который имеет ранг $i + k$ и не является подчинённым разбойника B . Согласно построению классов, у него существует начальник с рангом $i + k - 1$, у последнего — начальник с рангом $i + k - 2$, и так далее. Согласно транзитивности (задача C1), у разбойника X есть начальник C с рангом i . В случае когда все разбойники думают одинаково, B получает не менее C , а C больше X , следовательно, X будет завидовать C .

Пусть граф устроен, как описано выше. Покажем, как разделить добычу. Пусть разбойники первого ранга разделят добычу на такие части, что каждый из них считает любую из частей разбиения меньше ε (это возможно, если первый поделит на k равных частей, $k > 1/\varepsilon$, затем второй каждую из них ещё на k равных, потом третий, и так далее). Каждый из остальных пусть выберет себе наибольшую часть (возможно, разные разбойники выберут одну и ту же часть). Объединение этих частей S ненулевое с точки зрения любого из разбойников ранга больше 1. Разделим дополнение к S между всеми разбойниками первого ранга по алгоритму задачи ВЗ. Если взять ε достаточно маленьким, можно считать, что каждый разбойник считает S меньше, чем он сам получил. Далее делим S между остальными по тому же алгоритму.

К сожалению, и серия C не даёт нам возможность нащупать подход к решению общей проблемы (хотя мы получили полезную технику для возможных будущих индуктивных рассуждений).

Итак, необходим новый взгляд на проблему. И этот взгляд даёт теория меры. Ведь каждый разбойник подходит к дележу со своей меркой! Разбойник оценивает общую стоимость каждого подмножества сокровищ. Теория меры даёт нам инструмент, позволяющий изучать эти оценки. Напомним, что все меры, которые мы рассматриваем, являются безгранично делимыми, иначе задача не имеет решения.

Е1. Рассмотрим некоторую долю. Пусть для неё $\mu_1(C_{i_1j_1}) \geq \mu_2(C_{i_1j_1})$ (напомним, что C_{ij} — оценка фактической доли j -го разбойника по мнению i -го). Следовательно, существует такая часть $C_{i_2j_2}$, для которой $\mu_1(C_{i_2j_2}) \leq \mu_2(C_{i_2j_2})$. Рассмотрим объединение $A_1 = C_{i_1j_1} \cup C_{i_2j_2}$. Если $\mu_1(A_1) \geq \mu_2(A_1)$, то существует часть $C_{i_3j_3}$, для которой $\mu_1(C_{i_3j_3}) \leq \mu_2(C_{i_3j_3})$ или наоборот. Пусть $A_2 = A_1 \cup C_{i_3j_3}$. Далее продолжаем

аналогично до тех пор, пока по одной из мер множество A_r не превысит половины. Модуль разности $|\mu_1(A_r) - \mu_2(A_r)|$ не превышает $1/k$, так как добавляемые множества C_{ij} не превышают $1/k$ по любой мере. По той же причине отличие мер множества A_r от $1/2$ не более $1/k$. Таким образом, взяв $k > 1/\varepsilon$, мы можем достигнуть разницы не более ε . Из последнего факта следует и второе утверждение пункта а). Пункт б) доказывается аналогично.

Естественно рассмотреть для начала вопрос о *чистом существовании* нужного разбиения в случае взаимно непрерывных мер. Задачи чистого существования, как правило, легче задач поиска алгоритмов.

Таким образом ставятся задачи D1, D2, D3. Естественно сначала предположить взаимную непрерывность мер, а затем избавиться от этого предположения.

Задача 1. Пусть μ_i , $i = 1, \dots, n$, — взаимно непрерывные меры. Докажите, что множество E разбивается на такие множества M_j , что $\mu_i(M_j) = 1/n$.

Решение. Докажем более сильный результат. Покажем, что существует семейство множеств E_λ таких, что $E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_2}$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и при всех i выполняется $\mu_i(E_\lambda) = \lambda$.

Достаточно построить такое семейство для двух мер μ_1 и μ_2 . Тогда можно взять в качестве $\mathcal{P}$ счётные объединения и дополнения множеств E_λ и рассмотреть на нём оставшиеся меры. При этом меры μ_1 и μ_2 окажутся склеенными и дело завершает индукция.

Итак, пусть $n = 2$. Достаточно уметь строить множества E^{11} и E^{12} такие, что $\mu_1(E^{1i}) = \mu_2(E^{1i}) = 1/2$. Тогда, строя подразбиения E^{1i} и E^{2i} на два подмножества одинаковой меры (μ_1 и μ_2) и продолжая этот процесс дальше, мы получим семейство согласованных подразбиений $E^{m,n}$; $n = 1, \dots, 2^m$. В качестве E_λ можно взять $\bigcup_{n/2^m \leq \lambda} E^{m,n}$.

Итак, нам достаточно уметь строить разбиение множества E на две части, одинаковые с точки зрения двух взаимно непрерывных мер μ_1 и μ_2 . Опишем построение такого разбиения.

- Разбиваем E на две части, F_1 и F_2 , равные по мере μ_1 . Пусть при этом $\mu_2(F_1) > \mu_2(F_2)$. «Левую» часть F_1 и «правую» часть F_2 мы будем постепенно «перетягивать» друг в друга так, что в какой-то момент установится равенство и по мере μ_2 . Для этого организуется следующий процесс.
- Части F_1 и F_2 , в свою очередь, разбиваем на k частей, F_{1i} и F_{2i} , равных по мере μ_1 :

$$F_1 = F_{11} \cap F_{12} \cap \dots \cap F_{1k}; \quad F_2 = F_{21} \cap F_{22} \cap \dots \cap F_{2k}.$$

- Далее части F_{1i} и F_{2i} меняем местами, начиная от $i = 1$ и до $i = k$. При объединении получаются разбиения на части, равные по мере μ_1 . Обозначим их $F_1^{(i)}$ и $F_2^{(i)}$ соответственно. Таким образом:

$$F_1^{(i)} = F_{21} \cup F_{22} \cup \dots \cup F_{2i} \cup F_{1,i+1} \cup \dots \cup F_{1k};$$

$$F_2^{(i)} = F_{11} \cup F_{12} \cup \dots \cup F_{1i} \cup F_{2,i+1} \cup \dots \cup F_{2k}.$$

Ясно, что $\mu_1(F_1^{(i)}) = \mu_1(F_2^{(i)})$ и кроме того $F_1^{(k)} = F_2$; $F_2^{(k)} = F_1$. Следовательно, на каком-то i -м шаге неравенство

$$\mu_2(F_1^{(i)}) > \mu_2(F_2^{(i)})$$

сменит знак.

- Теперь будем производить ту же процедуру с частями F_{1i} и F_{2i} (вместо того, чтобы их поменять местами.) А именно, разобьём F_{1i} и F_{2i} на k частей F_{1s}^i, F_{2s}^i , где $s = 1, \dots, k$. Далее будем производить точно такие же перестановки с парами частей F_{1s}^i и F_{2s}^i .
- В силу взаимной непрерывности мер μ_i в пределе получится разбиение на два множества E^{11} и E^{12} , равные по этим мерам.

Для построения конструктивного алгоритма естественно вначале подобрать «почти» разбиение, то есть предположить, что разбойники способны прощать пустяки. Отсюда — серия задач E1—E4.

Решение задачи D2, а тем самым и D1, следует из решения задачи D4. При решении задачи D4 проходят те же рассуждения, что и при решении задачи D3, за исключением построения разбиения на две части, равные и по мере μ_1 , и по мере μ_2 . Этот процесс надо видоизменить, поскольку на каждом шаге могут появляться множества, на которых значение меры μ_2 больше ε . Чтобы этого не было, надо, чтобы на каждом шаге измельчения значение меры μ_2 убывало в несколько раз. Таким образом, задача D4 является следствием задачи E2.

E2. Пусть утверждение E4 выполняется, то есть мы можем разделить добычу на 100 частей, сколь угодно близких по мерам μ_1 и μ_2 к $1/100$. Тогда возьмём первые три части и добавим к ним кусок четвертой или четвертую и кусок пятой так, чтобы получилась часть, равная $1/25$ по мере μ_1 . Теперь берём кусок оставшейся части, присоединяем к нему несколько частей и, если надо, дополняем ещё куском, и так далее. В итоге получается требуемое разбиение. Итак, нам осталось научиться делить на почти равные части по каждой мере, т. е. доказать E4 а).

Отметим, что результат задачи E4 есть непосредственное следствие из E1. Но поскольку E1 является довольно сложным комбинаторным утверждением, мы дадим непосредственное решение E4.

Решим сначала задачу для случая двух равных частей индукцией по числу разбойников.

База индукции ($n = 2$). Пусть первый разбойник разделит добычу на 2 равных части A и B и каждую из них — ещё на m равных частей $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_m$ так, чтобы $\mu_1(A_i) < \varepsilon$ для всех i . Пусть второй разбойник считает, что первая часть A больше второй части B . Будем менять A_i и B_i между собой до тех пор, пока неравенство $\mu_2(A) > \mu_2(B)$ не поменяет знак или превратится в равенство. Пусть знак поменялся при замене A_j на B_j . Значит, второй может так отделить часть от A_j и добавить её к B_j , что для него части A и B сравняются, и так как $\mu_1(A_j) < \varepsilon$, то разница между $\mu_1(A)$ и $\mu_1(B)$ будет меньше ε .

Индуктивный переход. Пусть количество разбойников равно $n + 1$. Пусть первые n делят добычу на две равные части A и B , а затем каждую на $m = 2^l$ равных частей $A_1, A_2, \dots, A_m; B_1, B_2, \dots, B_m$ так, что $\mu_1(A_i) < \varepsilon/2$ для всех i с погрешностью $\delta = \varepsilon/2m$. Далее, аналогично случаю $n = 2$, пусть они перекалывают части, пока не поменяется знак, а $(n + 1)$ -й разбойник перекалывает из A в B . Получаем, что $\mu_{n+1}(A) = \mu_{n+1}(B)$, а в разницу $|\mu_i(A) - 1/2|$ входит не больше $\varepsilon/2$ за счет части A_j и $\varepsilon/2$ за счет перекалывания частей. Итого, ошибка не превосходит ε , что и требовалось.

Теперь не составляет труда доказать, что можно разделить в любом отношении $\alpha : \beta$. Действительно, мы можем отделить от добычи $1/2^l$ часть для любого l с любой положительной погрешностью. Теперь представим число $0 < \alpha < 1$ в виде суммы конечного числа отрицательных степеней двойки, отбросим все степени, дающие погрешность менее $\varepsilon/2$, и отделим части $1/2^l$ с погрешностью $\varepsilon/2^{l+1}$, что даёт общую погрешность не более $\varepsilon/2$. Итого, отделяемая часть отличается от α не более, чем на ε , что и требовалось. Теперь мы можем поделить и на k частей в отношении $\alpha_1 : \dots : \alpha_k$, в том числе и когда $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1/k$ (задача E4).

Верно также, что можно разделить с любой погрешностью в любых отношениях так, что один из разбойников будет считать, что разделил точно. Для этого, как и в E2, разделим на m частей, равных по мнению каждого с погрешностью меньше, чем ε/m^2 . Теперь один набирает нужные доли, забирая по одной части и деля часть один раз, где необходимо, а остальные считают, что эти доли отличаются от нужных

не более, чем на $(2 + \varepsilon)/t$, при этом t можно выбрать сколь угодно большим.

Итак мы доказали следующие две леммы, позволяющие делить сколь угодно близко к требуемому.

Лемма 1. *Существует алгоритм разбиения на n частей в пропорциях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ с погрешностью, не превосходящей ε по каждой мере.*

Лемма 2. *Существует алгоритм разбиения на n частей в пропорциях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ с погрешностью, не превосходящей ε по каждой мере, причём первый считает, что получил ровно в этой пропорции.*

Содержание этих лемм есть не что иное, как задача E4.

Итак, теперь сделаны все необходимые приготовления. Мы можем проводить операции дележа с маленькой погрешностью. Это даёт ключ к построению общего алгоритма, так как мы можем уменьшать погрешности по сходящемуся ряду. Кроме того, здесь нам помогает идея о сделанной небольшой уступке — это даёт возможность прервать алгоритм, так как разбойники могут немного «прощать» друг другу.

Решение E7. Докажем, что существует алгоритм дележа сокровищ в отношениях

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$$

с обобщённым условием зависти

$$\frac{A_{ij}}{\alpha_j} \leq \frac{A_{ji}}{\alpha_i}.$$

Доказательство проведем индукцией по числу разбойников.

База индукции для $n = 1$ очевидна.

Пусть кто-нибудь разделит добычу на n частей в исходных пропорциях. Если все согласны с таким дележом, то задача решена. В противном случае существует кусочек, который часть разбойников (для определённости первые s) оценивает более некоторого γ , а остальные меньше.

Можно считать, что этот кусочек I достаточно мал по любой мере (если он велик, то по лемме 1 его можно разделить на мелкие части). Временно отложим его.

Оставшуюся часть разделим на части A и B в отношении $(\alpha_1 + \dots + \alpha_s - \gamma) : (\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_n)$ по каждой мере с погрешностью, много меньшей каждой разности между γ и оценками части I . Получаем, что первые s разбойников считают часть $A \cup I$ на $\delta_1 > 0$ больше, чем $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$, то есть больше, чем им вместе полагается, а часть B остальные разбойники считают больше, чем им полагается, на δ_2 . Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Согласно лемме 2 можно считать, что при последующих разделениях любым разбойником мнения остальных относительно частей разбиения различаются с его мнением не более, чем на $\varepsilon/2^{k+1}$, где k — число предыдущих таких разбиений. При этом получается, что в дальнейшем оценки разбойниками любой из получившихся частей не превосходят ε .

Осталось выбрать ε много меньше δ . Далее первые s разбойников делят $A \cup I$ в соответствии со своими долями по предположению индукции, а затем остальные $n - s$ разбойников делят между собой часть B . Между разбойниками первой части зависти нет, аналогично и во второй части. Разбойники каждой из частей не завидуют разбойникам другой части, так как они были согласны со всеми делениями их части с точностью до ε и считают, что каждый из разбойников другой части получил меньше, чем ему полагается, то есть меньше чем $A_{ij}/\alpha_j < 1$, а сами они получают больше, чем им полагается, то есть больше $A_{ii}/\alpha_i > 1$, откуда и следует отсутствие зависти.

Решение задач E5 и E6 предоставляется читателю.

Эпилог. Подведем итоги проведённого исследования на идейном уровне. Сначала был испробован комбинаторный подход. Это сработало для трёх разбойников, но для четырёх и более перебор становится довольно тяжёлым. Тем не менее редукция к случаю трёх разбойников даёт полезную идею: сведение ситуации к случаю, когда один разбойник при дележе не завидует другому. Пробуем найти другой подход, используя эту идею и выражая её графически в виде стрелки: разбойник A не завидует разбойнику B . Приходим к идее, когда один разбойник может немного уступить другому.

Логично попытаться формализовать данное понятие, введя меры. Сначала выясняем вопрос о принципиальном существовании требуемого разбиения сокровищ. Попутно устанавливаем свойства мер, вырабатывая методы работы с ними. Следующая полезная идея — попробовать организовать почти-разбиение, когда зависть уменьшена до малой величины. Комбинируя идею почти-разбиения с идеей малых уступок, получаем новый подход: сначала выделить различия в мнениях разбойников, а потом использовать эти различия для прерывания работы алгоритма во время почти-разбиения. И, наконец, последняя идея — использовать почти-разбиение на *каждом шаге* работы алгоритма. Это позволяет нам контролировать *всех* разбойников во время дележа. Теперь используем сходящийся ряд для точностей полученных почти-разбиений и прерываем алгоритм, пользуясь заранее запасённым «куском различий».

Экстремальные графы

С. Л. Берлов, Д. В. Карпов

Широко известным типом задач теории экстремальных графов является вопрос о нахождении $ex(v, H)$ — наибольшего количества рёбер, которое может быть в графе, имеющем v вершин и не содержащем запрещённый подграф H .

Через K_n мы будем обозначать полный граф с n вершинами, а через $K_{m,n}$ — полный двудольный граф, в долях которого m и n вершин ($m, n \geq 2$).

Задачи

1. Найдите наибольшее количество рёбер в графе с v вершинами, не содержащем «звезды» с n вершинами.

2. Найдите $ex(v, K_3)$.

3. Найдите наибольшее количество рёбер в графе с n вершинами, в котором нет двух треугольников с общим ребром.

4. Докажите, что $ex(v, K_{2,2}) \leq \frac{v(1 + \sqrt{4v - 3})}{4}$.

5. В долях двудольного графа, не содержащего $K_{2,n}$, имеется w и $v - w$ вершин. Докажите, что рёбер в нём не более

$$\frac{v + \sqrt{v^2 + 8(n-1)(v-2)w(v-w)}}{4}.$$

6. Докажите, что

$$ex(v, K_{2,n}) \leq \frac{v(1 + \sqrt{1 + 4(n-1)(v-1)})}{4}.$$

7. Докажите, что

$$ex(v, K_{m,n}) \leq \frac{1}{2}(m-1)^{\frac{1}{n}} v^{2-\frac{1}{n}} + \frac{nv}{4}.$$

8. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел v , что

$$\frac{\sqrt{nv^3}}{2} + \frac{nv}{4} > \text{ex}(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \frac{nv}{4}.$$

9. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел v , что

$$\text{ex}(v, K_{2,n+1}) \geq \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \sqrt{nv}.$$

10. Докажите, что для простого p вида $4k + 3$ (k натуральное)

$$\text{ex}(p^3, K_{3,3}) > \frac{p^5 - p^4}{2}.$$

Решения задач 1—3

1. **Ответ.** $\lfloor v(n-2)/2 \rfloor$. Ясно, что степени всех вершин не превосходят $n-2$. Пример очевиден.

2. **Ответ.** $\lfloor v^2/4 \rfloor$. Пример: двудольный граф с долями по $\lfloor v/2 \rfloor$ и $\lfloor (v+1)/2 \rfloor$ вершин. Доказательство аналогично задаче 3.

3. **Ответ.** $\lfloor v^2/4 \rfloor$. Пример: двудольный граф с долями по $\lfloor v/2 \rfloor$ и $\lfloor (v+1)/2 \rfloor$ вершин.

Докажем индукцией по количеству вершин следующее утверждение: если в графе $2k$ вершин, любые 4 из которых соединены не более чем четырьмя рёбрами, то всего рёбер не более k^2 , если же вершин $2k+1$, то рёбер не более $k^2 + k$. База для четырёх вершин следует из условия. Переход: если утверждение неверно для m вершин, то, удаляя вершину, из которой выходит наименьшее количество рёбер (или одну из таких вершин), получим, что утверждение неверно и для $m-1$ вершин. Действительно, если при $m = 2k+1$ доказываемое утверждение не выполнено, то можно считать, что рёбер ровно $k^2 + k + 1$. Тогда найдётся вершина, из которой выходит не более k рёбер, иначе всего рёбер будет не менее

$$(k+1)(2k+1)/2 > k^2 + k + 1.$$

Удалим эту вершину. Тогда в графе останется $2k$ вершин и $k^2 + 1$ рёбер между ними, причём любые 4 вершины по-прежнему соединены не более чем четырьмя рёбрами. Это противоречит предположению индукции. Аналогичное рассуждение верно при $m = 2k$.

Немного теории

Определение 1. Пусть G — некоторый граф. Обозначим через $\text{ex}_2(v, G)$ наибольшее количество рёбер, которое может быть в двудольном графе с v вершинами, не содержащем подграфа G .

Определение 2. Рассмотрим произвольный граф G , имеющий v вершин $F_1, F_2, \dots, F_v$. Определим для графа G двудольный граф $D(G)$ следующим образом. У графа $D(G)$ будет $2v$ вершин: $A_1, A_2, \dots, A_v, B_1, B_2, \dots, B_v$. Для каждого ребра $F_i F_j$ в графе G проведём в графе $D(G)$ два ребра $A_i B_j$ и $A_j B_i$. Таким образом, в графе $D(G)$ окажется в два раза больше рёбер, чем в графе G . Назовём построенный граф удвоением графа G .

Отметим два очевидных свойства удвоения графа.

Лемма 1. 1) В графе $D(G)$ ни для какого i нет ребра $A_i B_i$.

2) Граф G имеет подграф $K_{m,n}$ тогда и только тогда, когда его удвоение $D(G)$ имеет подграф $K_{m,n}$.

3) Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$\text{ex}_2(2v, K_{m,n}) \geq 2 \text{ex}(v, K_{m,n}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно из определения удвоения.

2) Пусть в двудольном графе $D(G)$ есть подграф $K_{m,n}$; предположим, что каждая из вершин $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ соединена с каждой из вершин $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$. Так как ни для какого ℓ вершины A_ℓ и B_ℓ не соединены ребром в $D(G)$, то все индексы $i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_n$ попарно различны. Следовательно, по построению $D(G)$ в графе G каждая из вершин $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}$ соединена с каждой из вершин $F_{j_1}, F_{j_2}, \dots, F_{j_n}$. Таким образом, мы нашли в графе G подграф $K_{m,n}$.

Наоборот, если граф G имеет подграф $K_{m,n}$, т.е. содержит m вершин $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_m}$, каждая из которых соединена с каждой из n вершин $F_{j_1}, F_{j_2}, \dots, F_{j_n}$, то по определению удвоения графа каждая из вершин $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ в $D(G)$ соединена с каждой из вершин $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$.

3) Рассмотрим граф G_v с v вершинами и $\text{ex}(v, K_{m,n})$ рёбрами, не содержащий подграфа $K_{m,n}$. Его удвоение $D(G_v)$ также не содержит подграфа $K_{m,n}$ и имеет $2 \text{ex}(v, K_{m,n})$ рёбер. Следовательно, $\text{ex}_2(2v, K_{m,n}) \geq 2 \text{ex}(v, K_{m,n})$.

Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим граф G с v вершинами $F_1, F_2, \dots, F_v$, пусть степени его вершин равны $d_1, d_2, \dots, d_v$ соответственно. Пусть

$$S = \sum_{i=1}^v d_i, \quad d = \frac{S}{v}.$$

Теорема 1. Если граф G с v вершинами не содержит подграфа $K_{m,n}$ (где $v \geq m+n$), то выполняется неравенство

$$d(d-1) \cdot \dots \cdot (d-m+1) \leq (n-1) \cdot (v-1)(v-2) \cdot \dots \cdot (v-m+1).$$

Доказательство. 1. Рассмотрим $D(G)$ — удвоение графа G . По лемме 1 граф $D(G)$ также не содержит подграфа $K(m, n)$. Как мы знаем, $D(G)$ — двудольный граф с симметричными долями по v вершин. Пусть A — множество вершин одной из этих долей, $B_1, B_2, \dots, B_v$ — вершины из другой доли. Пусть S_i , $1 < i < v$, — множество вершин доли A , соединённых с вершиной B_i , тогда множество S_i содержит d_i вершин.

Для каждого m вершин множества A подсчитаем количество тех множеств S_i , которые содержат все эти m вершин. Из условия отсутствия подграфа $K_{m,n}$ в $D(G)$ следует, что таких множеств не более $n-1$. Следовательно, сложив эти количества для всех подмножеств из m вершин, мы получим не более чем $(n-1) \cdot C_v^m$. С другой стороны, каждое подмножество S_i , состоящее из d_i элементов, мы подсчитали, очевидно, $C_{d_i}^m$ раз. Домножив подсчитанные величины на $m!$, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^v d_i(d_i-1) \cdot \dots \cdot (d_i-m+1) \leq (n-1) \cdot v(v-1)(v-2) \cdot \dots \cdot (v-m+1).$$

2. Предположим, что $d \geq m-1$ (в противном случае утверждение теоремы очевидно). Пусть

$$P(x) = x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-m+1).$$

Докажем, что

$$v \cdot P(d) \leq \sum_{i=1}^v P(d_i).$$

Будем менять числа $d_1, d_2, \dots, d_v$ так, чтобы их сумма не изменялась, а левая часть не увеличивалась. Конечной целью этого процесса изменений будет замена всех чисел d_i на их среднее арифметическое d .

Сначала добьёмся того, чтобы все эти числа были не меньше $m-1$. Если это не так, пусть $d_i < m-1 \leq d \leq d_j$, причём d_i — наименьшее среди чисел $d_1, \dots, d_v$. Заметим, что $P(d_i) = P(m-1) = 0$ и

$$\begin{aligned} P(d_i) + P(d_j) &= P(d_j) \geq P(d_i + d_j - m + 1) = \\ &= P(d_i + d_j - m + 1) + P(m-1), \end{aligned}$$

так как $P(x)$ возрастает при $x \geq m - 1$. Следовательно, замена d_i и d_j на $m - 1$ и $d_i + d_j - m + 1$ уменьшает левую часть доказываемого неравенства и, очевидно, увеличивает наименьшее из чисел $d_1, d_2, \dots, d_v$, не меняя их суммы. Следовательно, после нескольких таких замен все числа будут не меньше чем $m - 1$. Но, поскольку при $x \geq m - 1$ многочлен $P(x)$ — выпуклая вниз функция, заменив v чисел на их среднее арифметическое $\bar{d}$, мы лишь уменьшим сумму значений многочлена в них. Итак,

$$v \cdot P(d) \leq \sum_{i=1}^v P(d_i) \leq (n-1) \cdot v(v-1) \cdot \dots \cdot (v-m+1).$$

Сокращая на v , получаем требуемое неравенство. Теорема доказана. $\square$

Следствие. 1) Рассмотрим двудольный граф G , не содержащий $K_{m,n}$, в долях которого w и v вершин соответственно. Пусть степени в доле из w вершин равны $d_1, d_2, \dots, d_w$ соответственно. Тогда выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^w d_i(d_i - 1) \cdot \dots \cdot (d_i - m + 1) \leq (n-1) \cdot v(v-1)(v-2) \cdot \dots \cdot (v-m+1).$$

2) Выполняется неравенство

$$d < (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{1-\frac{1}{n}} + \frac{n}{2}. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Аналогично первой части доказательства теоремы 1.

2) Положим

$$d_0 = (m-1)^{\frac{1}{n}} v^{1-\frac{1}{n}} + \frac{n}{2}.$$

Так как при $i < n/2$, как можно показать,

$$\begin{aligned} & \left(v + \left(\frac{n}{2} - i \right) \left(\frac{v}{m-1} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \cdot \left(v + \left(\frac{n}{2} - (n-i) \right) \left(\frac{v}{m-1} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \\ & = v^2 - \left(\frac{n}{2} - i \right)^2 \left(\frac{v}{m-1} \right)^{\frac{2}{n}} > \left(v - \frac{n}{2} \right)^2 - \left(\frac{n}{2} - i \right)^2 = (v-i)(v-(n-i)), \end{aligned}$$

мы получаем неравенство

$$\prod_{i=0}^{n-1} (d_0 - i) = (m-1) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(v + \left(\frac{n}{2} - i \right) \cdot \left(\frac{v}{m-1} \right)^{1/n} \right) > (m-1) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (v-i).$$

Следовательно, $d < d_0$, так как в противном случае не выполняется неравенство из теоремы 1 (если поменять в нём местами m и n). $\square$

Решения задач 4—10

4. Это частный случай утверждения задачи 6.

5. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_w$ — степени вершин первой доли, S — их сумма (отметим, что суммы степеней вершин в обеих долях совпадают). Тогда степени вершин доли удовлетворяют неравенству из следствия теоремы 1.

$$\sum_{i=1}^w d_i(d_i - 1) \leq (n - 1) \cdot (v - w)(v - w - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^w d_i^2 \leq (n - 1) \cdot (v - w)(v - w - 1) + S.$$

Применив неравенство о среднем квадратичном и среднем арифметическом для степеней вершин доли, мы получим квадратичное неравенство для их суммы:

$$S^2 - wS - (n - 1) \cdot w(v - w)(v - w - 1) \leq 0.$$

Аналогично рассмотрев другую долю, выводим неравенство

$$S^2 - (v - w)S - (n - 1) \cdot w(v - w)(w - 1) \leq 0.$$

Сложив эти два неравенства, мы получим квадратичное неравенство на S , из которого следует утверждение задачи.

6. По теореме 1 средняя степень вершин графа удовлетворяет квадратичному неравенству, из которого следует утверждение задачи.

7. В следствии из теоремы 1 доказана оценка сверху (1) на среднюю степень d вершин в графе с v вершинами, не содержащем подграфа $K_{m,n}$. Эта оценка имеет порядок $O(v^{\frac{n-1}{n}})$ (будем считать, что $m > n$). Поскольку количество рёбер в графе равно $vd/2$, то

$$\text{ex}(v, K_{m,n}) < \frac{1}{2} \cdot (m - 1)^{\frac{1}{n}} v^{(2 - \frac{1}{n})} + \frac{nv}{4}.$$

Оценка имеет порядок $O(v^{2 - \frac{1}{n}})$.

8, 9. Зафиксируем простое число p , не делящееся на него натуральное число n и рассмотрим конечное поле $F_{p^{\varphi(n)}}$ (через $\varphi(n)$ мы обозначаем функцию Эйлера). Так как $n \mid (p^{\varphi(n)} - 1)$ по теореме Эйлера, в этом поле содержатся все корни n -й степени из единицы. Обозначим эти корни через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, пусть $q = p^{\varphi(n)}$.

Рассмотрим множество пар (x, y) ненулевых элементов поля F_q . Введём на этом множестве пар отношение эквивалентности: будем

считать, что $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, если существует такой корень n -й степени из единицы ε_i , что $x_1 = \varepsilon_i x_2$, $y_1 = \varepsilon_i y_2$. В каждом классе эквивалентности будет ровно n пар. Мы будем обозначать класс эквивалентности пары (a, b) через $\langle a, b \rangle$. Обозначим через $M_n(p)$ множество таких классов эквивалентности, в нём ровно $\frac{(q-1)^2}{n}$ элементов. Для удобства элементы $M_n(p)$ будем называть точками.

Каждой точке $\langle a, b \rangle$ поставим в соответствие множество $T_{\langle a, b \rangle}$ таких точек $\langle x, y \rangle$, что $(ax + by)^n = 1$. Нетрудно видеть, что определение $T_{\langle a, b \rangle}$ корректно, т. е. не зависит от выбора представителя в классе эквивалентности.

Лемма 2. 1) Для любой точки $\langle a, b \rangle$ в множестве $T_{\langle a, b \rangle}$ ровно $q - 1$ точек.

2) Для любых двух точек $\langle a, b \rangle$ и $\langle c, d \rangle$ пересечение множеств $T_{\langle a, b \rangle} \cup T_{\langle c, d \rangle}$ содержит не более n точек.

Доказательство. 1) Зафиксируем ненулевые элементы $a, b \in F_q$. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in F_q$. Поскольку $(ax + by)^n = 1 \Leftrightarrow ax + by = \varepsilon_i$, элементы $y_i = \frac{\varepsilon_i - ax}{b}$ образуют n пар (x, y_i) — решений уравнения $(ax + by)^n = 1$. Других пар с элементом x на первом месте нет. Всего получаем $n(q - 1)$ пар решений, которые, очевидно, разбиваются на $q - 1$ класс эквивалентности.

2) Пусть $\langle x, y \rangle \in T_{\langle a, b \rangle} \cap T_{\langle c, d \rangle}$. Это значит, что

$$ax + by = \varepsilon_i(cx + dy),$$

откуда $(\varepsilon_i c - a)x = (b - \varepsilon_i d)y$. Если одна из скобок равна нулю, то вторая также равна нулю и тогда $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$, а значит, $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$. Следовательно, эти скобки не равны нулю, тогда определено и не равно нулю $k_i = \frac{\varepsilon_i c - a}{b - \varepsilon_i d}$ и

$$\begin{cases} y = k_i x, \\ ((a + bk_i)x)^n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k_i x, \\ \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (a + bk_i)x = \varepsilon_j. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет не более n решений (точнее, ровно n решений при $a + bk_i \neq 0$ и ни одного решения при $a + bk_i = 0$). Эти n решений, очевидно, образуют один класс эквивалентности. Следовательно, так как есть n вариантов коэффициента k_i , в пересечении $T_{\langle a, b \rangle} \cap T_{\langle c, d \rangle}$ не более n точек.

Лемма доказана. $\square$

Построим двудольный граф $D_n(p)$, вершины в каждой доле которого соответствуют точкам из $M_n(p)$, и каждую вершину $A_{\langle a, b \rangle}$ первой доли соединим со всеми вершинами $B_{\langle x, y \rangle}$ второй доли, такими что $(ax + by)^n = 1$. Таким образом, количество вершин в графе $D_n(p)$ равно $2v = 2 \frac{(q-1)^2}{n} = 2 \frac{(p^{\varphi(n)} - 1)^2}{n}$, из каждой вершины выходит $q - 1 = p^{\varphi(n)} - 1$ рёбер по первой части леммы 2. Построенный граф $D_n(p)$ не будет содержать подграфа $K_{2, n+1}$, так как для любых двух точек в одной доле множества соединённых с ними точек другой доли имеют по второй части леммы 2 не более n общих точек.

Уберём из графа $D_n(p)$ рёбра, соединяющие вершины, соответствующие одинаковым точкам множества $M_n(p)$. Количество таких рёбер не превосходит количества точек $\langle a, b \rangle$, таких что

$$(a^2 + b^2)^n = 1 \Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad a^2 + b^2 = \varepsilon_j.$$

Для каждого $a \in F_{p^{\varphi(n)}}$, $a \neq 0$, есть не более $2n$ вариантов выбора b , следовательно, количество решений этого уравнения не превосходит $2n(q-1)$, а количество решений с точностью до подобия не превосходит $2(q-1)$. Оставшийся после удаления этих рёбер граф, очевидно, будет удвоением некоторого графа $G_n(p)$. Граф $G_n(p)$ и будет искомым примером графа без подграфов $K_{2, n+1}$.

Теорема 2. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$v = \frac{(p^{\varphi(n)} - 1)^2}{n}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{nv^3}}{2} + \frac{nv}{4} > \text{ex}(v, K_{2, n+1}) \geq \frac{\sqrt{nv^3}}{2} - \sqrt{nv}.$$

Доказательство. Левое неравенство следует из утверждения задачи 6. Правое неравенство следует из только что построенного примера, поскольку правая часть — это количество рёбер графа $G_n(p)$. Действительно, при построении графа $G_n(p)$ мы удалили не более $2(q-1) = 2\sqrt{nv}$ рёбер из графа $D_2(p)$, а количество оставшихся рёбер нужно поделить пополам. Теорема доказана. $\square$

Ясно, что из этой теоремы непосредственно следует решение задачи 9 и несложно выводится решение задачи 8.

10. Пусть p — простое число вида $4k+3$. Зафиксируем $r \in F_p$, $r \neq 0$. Для каждого $x = (x_1, x_2, x_3) \in F_p^3$ обозначим через $S(x)$ «сферу радиуса r с центром x », т. е. множество точек $y \in F_p^3$, для которых выполняется соотношение

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = r^2.$$

Нам понадобится одно геометрическое свойство сферы.

Лемма. *Никакие три точки этой сферы не лежат на одной прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что прямая проходит через точку $(0, 0, 0)$, тогда её уравнение имеет вид $y = ta$. Если она пересекает сферу в трёх точках, то, подставляя её уравнение в уравнение сферы, получаем квадратное уравнение

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)t^2 - 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)t + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

коэффициенты которого должны быть нулевыми. Но тогда

$$\begin{aligned} a_1^2 r^2 &= a_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (-a_2x_2 - a_3x_3)^2 + a_1^2(x_2^2 + x_3^2) = \\ &= -(a_3x_2 - a_2x_3)^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что -1 — квадратичный вычет по модулю p , что неверно при $p = 4k + 3$. $\square$

Теорема Лебега утверждает, что для простых чисел p вида $4k + 3$ уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

имеет ровно $p^2 - p$ решений над F_p . Отсюда следует, что сфера $S(x)$ содержит ровно $p^2 - p$ точек из F_p^3 .

Рассмотрим граф, вершины которого — элементы F_p^3 , две вершины x и y соединены ребром тогда и только тогда, когда $y \in S(x)$ (или, что то же самое, $x \in S(y)$). Этот граф содержит p^3 вершин. Каждая из них соединена с $p^2 - p$ точками сферы. Поэтому количество рёбер равно

$$(p^3 - p^2 + p)(p^2 - p) + \frac{(p^2 - p)(p^2 - p - 1)}{2} > \frac{p^3(p^2 - p)}{2} = \frac{p^5 - p^4}{2}.$$

Покажем, что этот граф не содержит подграфов вида $K_{3,3}$, что и доказывает утверждение задачи.

Допустим, что это не так. Пусть a, a', a'' — вершины одной из долей этого подграфа. Тогда они принадлежат $S(x)$ для некоторого $x \in F_p^3$ и система уравнений

$$\begin{cases} (a_1 - y_1)^2 + (a_2 - y_2)^2 + (a_3 - y_3)^2 = r^2, \\ (a'_1 - y_1)^2 + (a'_2 - y_2)^2 + (a'_3 - y_3)^2 = r^2, \\ (a''_1 - y_1)^2 + (a''_2 - y_2)^2 + (a''_3 - y_3)^2 = r^2 \end{cases}$$

имеет не менее трёх решений b, b', b'' . Докажем, что тогда либо три точки a, a', a'' , либо три точки b, b', b'' лежат на одной прямой.

Действительно, вычитая из первого уравнения второе, а из второго — третье, получим

$$\begin{aligned} (a_1 - a'_1)(a_1 + a'_1 - 2y_1) + (a_2 - a'_2)(a_2 + a'_2 - 2y_2) + \\ + (a_3 - a'_3)(a_3 + a'_3 - 2y_3) = 0, \\ (a'_1 - a''_1)(a'_1 + a''_1 - 2y_1) + (a'_2 - a''_2)(a'_2 + a''_2 - 2y_2) + \\ + (a'_3 - a''_3)(a'_3 + a''_3 - 2y_3) = 0. \end{aligned}$$

Получилась система из двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Тогда либо решения этой системы лежат на одной прямой, либо коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Но тогда точки a , a' , a'' лежат на одной прямой и, согласно лемме, не могут принадлежать $S(x)$ ни для какого $x \in F_p^3$. Получаем противоречие.

Выпуклые многоугольники

С. Л. Берлов, К. П. Кохась

Будем говорить, что точки плоскости находятся *в общем положении*, если никакие три из них не лежат на одной прямой; *в выпуклом положении*, если они образуют вершины выпуклого многоугольника. Выпуклая оболочка множества X обозначается $\text{conv}(X)$.

1. Одиночный выпуклый многоугольник

1.1. Пусть X — произвольное конечное множество точек общего положения на плоскости. Треугольник ABC , где $A, B, C \in X$, назовём *чётным*, если внутри него содержится чётное число точек множества X , и *нечётным*, если нечётное. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — произвольные точки из множества X . Докажите, что если все треугольники с вершинами в этих точках имеют одну и ту же чётность, то точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ находятся в выпуклом положении.

1.2. Пусть $A_1, A_2, A_3, \dots$ — произвольное конечное множество точек общего положения на плоскости. Треугольник $A_i A_j A_k$, $i < j < k$, назовём *правильно ориентированным*, если его вершины перечисляются по часовой стрелке именно в таком порядке, в противном случае назовём его *неправильно ориентированным*. Докажите, что для каждого натурального n точки $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ находятся в выпуклом положении, если все треугольники $A_{i_p} A_{i_q} A_{i_r}$, $i_p < i_q < i_r$, ориентированы одинаково.

Пусть $N(n)$ — наименьшее натуральное число, такое что в любом множестве точек плоскости общего положения, содержащем не менее $N(n)$ точек, обязательно найдутся n точек, лежащих в вершинах выпуклого n -угольника. Задача о нахождении числа $N(n)$ или хотя бы получении каких-либо реалистичных оценок этого числа известна как *проблема Эрдёша — Секереша*.

1.3. Докажите, что $N(3) = 3$, $N(4) = 5$.

Впервые опубликовано: Берлов С. Л., Кохась К. П. Выпуклые многоугольники // Петербургские олимпиады школьников по математике. 2000—2002. СПб.: Невский диалект, 2006. С. 306—329. Проект представлен на XIII Летней конференции.

Эта подборка задач составлена в основном по материалам обзоров [9], [3].

1.4. На плоскости отмечено 2000 точек общего положения.

а) Докажите, что можно образовать не менее 400 непересекающихся выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках.

б) Докажите, что можно образовать не менее 444 непересекающихся выпуклых четырёхугольников.

в) Всегда ли можно вырезать 500 непересекающихся выпуклых четырёхугольников?

г) Кто больше?

1.5. Докажите, опираясь на задачи 1.1, 1.2, что число $N(n)$ существует для каждого $n > 2$.

1.6. Докажите, что $N(5) > 8$. На самом деле $N(5) = 9$, но, кажется, доказательство этого факта слишком рутинно.

1.7. а) Докажите, что величина $N(n)$ имеет экспоненциальный рост, т. е. существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $N(n) > \alpha^n$ при всех n .

б) Докажите, что $N(n) \geq 2^{n-2} + 1$.

1.8. *Открытая проблема.* В силу предыдущей задачи $N(6) \geq 17$. Верно ли, что $N(6) = 17$?

1.9. В плоскости даны $n > 4$ точек, причём никакие три не лежат на одной прямой. Покажите, что можно найти не менее

$$n(n-1)(n-2)(n-3)/120$$

выпуклых четырёхугольников с вершинами в четырёх из данных точек.

2. Пустые выпуклые многоугольники

Пусть $H(n)$ — наименьшее натуральное число, такое что в любом множестве точек плоскости общего положения, содержащем не менее $H(n)$ точек, обязательно найдётся n точек, лежащих в вершинах выпуклого n -угольника, не содержащего других точек этого множества.

2.1. а) Докажите, что $H(3) = 3$.

б) В плоскости даны $n > 3$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Всегда ли существует окружность, проходящая по крайней мере через три данные точки и не содержащая внутри себя ни одной из остальных точек?

2.2. Чему равно $H(4)$?

2.3. Докажите¹, что $H(5) \geq 10$.

2.4. Докажите, что $H(n)$ не существует при $n \geq 7$.

2.5. а) Докажите, что $H(6) \geq 20$, если существует.

б) *Открытая проблема.* Существует ли $H(6)$?

¹ На самом деле $H(5) = 10$.

3. Другие обобщения

Другие размерности

3.1. Докажите, что для любого n в любом достаточно большом множестве точек общего положения в $\mathbb{R}^d$ обязательно найдётся n точек в выпуклом положении.

Наименьшее число точек, для которого верно утверждение предыдущей задачи, обозначим $N_d(n)$.

3.2. *Открытая проблема.* Верно ли, что величина $N_3(n)$ имеет экспоненциальный рост?

Овалы вместо точек

Овалом будем называть выпуклое ограниченное замкнутое множество в плоскости. Мы будем рассматривать семейства попарно непересекающихся овалов. Будем говорить, что три овала не коллинеарны, если ни один из них не лежит целиком в выпуклой оболочке двух других, и, более общо, будем говорить, что n овалов находятся *в выпуклом положении*, если ни один из них не лежит в выпуклой оболочке остальных. Будем говорить, что набор овалов определяет (выпуклый) k -угольник, если какие-то k из этих овалов находятся в выпуклом положении (будем называть эти овалы вершинами), а остальные овалы лежат в выпуклой оболочке этих k овалов.

3.3. а) Докажите, что среди любых пяти овалов, никакие три из которых не коллинеарны, какие-то четыре находятся в выпуклом положении.

б) Пусть $m \geq 3$. Если в семействе овалов Φ любые $k \geq m$ овалов определяют всего лишь ровно m -угольник, то Φ состоит из не более чем $m + 1$ овалов.

Пусть $G(n)$ — наименьшее натуральное число, такое что в любом множестве овалов, никакие три из которых не коллинеарны, содержащем не менее $G(n)$ овалов, обязательно найдётся n овалов, находящихся в выпуклом положении. Очевидно, $G(n) \geq N(n)$. В предыдущей задаче утверждается, что $G(4) = N(4) = 5$. Можно показать, что $G(5) = N(5) = 9$. Неизвестно, верно ли, что $G(n) = N(n)$ при $n \geq 4$.

3.4. Докажите, что при всех n величина $G(n)$ конечна.

Абстрактная выпуклость

Прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^3$ с рёбрами, параллельными координатным осям, будем называть *стандартным*. Пересечение двух стандартных параллелепипедов, если оно не пусто, — также

стандартный параллелепипед. Этим множество параллелепипедов сходно с семейством всех выпуклых множеств. Возникающая выпуклая структура сильно отличается от привычной. Так, следующая задача утверждает, что выпуклый по отношению к этой структуре многогранник не может иметь слишком много вершин.

Рассмотрим три точки $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что x лежит между y и z , если x содержится в любом стандартном параллелепипеде, содержащем y и z .

3.5. а) Докажите, что среди любых 17 точек в $\mathbb{R}^3$ хотя бы одна лежит между двумя другими.

б) Докажите, что среди любых $2^{2^{d-1}} + 1$ точек в $\mathbb{R}^d$ хотя бы одна лежит между двумя другими. Для $2^{2^{d-1}}$ точек это утверждение неверно.

Не можем не отметить следующую идею близкую знаменитую теорему Эрдёша.

3.6. Во всякой последовательности из $pq + 1$ различных вещественных чисел можно найти возрастающую подпоследовательность из $p + 1$ членов или убывающую подпоследовательность из $q + 1$ членов.

4. После промежуточного финиша

4.1. На плоскости отмечено бесконечно много точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдётся выпуклый «счётноугольник» с вершинами в отмеченных точках, то есть такое счётное множество точек, быть может неограниченное, в котором при всех k любые k точек находятся в выпуклом положении.

Чашки и крышки (cups and caps)

Будем говорить, что точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, где $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, образуют m -крышку, если

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} > \dots > \frac{y_{m-1} - y_m}{x_{m-1} - x_m}.$$

Аналогично точки образуют m -чашку, если

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} < \dots < \frac{y_{m-1} - y_m}{x_{m-1} - x_m}.$$

Пусть $f(k, \ell)$ — наименьшее натуральное число, для которого любое множество X общего положения, в котором x -координаты всех точек различны, обязательно содержит k -чашку или ℓ -крышку, если только в нём не менее $f(k, \ell)$ элементов.

4.2. Докажите, что $f(k, \ell) \leq C_{k+\ell-4}^{k-2} + 1$.

4.3. Докажите, что $f(k, \ell) = C_{k+\ell-4}^{k-2} + 1$.

4.4. Докажите, что $N(n) \leq C_{2n-4}^{n-2} + 1$.

4.5. Докажите, что $N(n) \leq C_{2n-5}^{n-3} + 2$.



Пример 3-чашки и 4-крышки

Коэффициент неразбиваемости

4.6. Существуют ли на плоскости такие два непересекающихся бесконечных множества A и B , что выполняются два условия:

1) никакие три точки множества $M = A \cup B$ не лежат на одной прямой, а расстояние между любыми двумя точками M не меньше 1;

2) любой треугольник с вершинами из A содержит точку из B и любой треугольник с вершинами из B содержит точку из A ?

4.7. Для каждого натурального числа n найдем максимально возможное число k , обладающее следующим свойством: для любого множества из n точек общего положения найдётся такая раскраска этих точек в красный и синий цвета, что после удаления любых k точек выпуклые оболочки оставшихся красных и оставшихся синих точек пересекаются. Докажите, что отношение k/n может быть сколь угодно близко к $1/2$, если n достаточно велико.

Решения

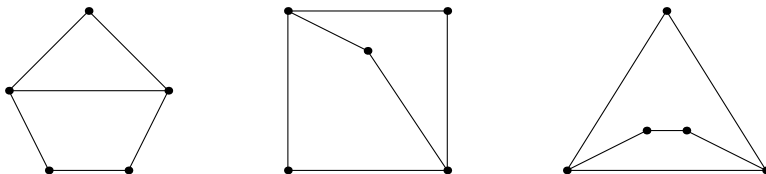
1.1. Допустим, что это не так, тогда одна из точек является выпуклой комбинацией трёх других, пусть, скажем, $A_1 \in \triangle A_2 A_3 A_4$. Чётность треугольника XYZ будем считать остатком по модулю 2 и обозначать $\mathcal{O}(XYZ)$. Тогда

$$\mathcal{O}(A_2 A_3 A_4) = \mathcal{O}(A_1 A_3 A_4) + \mathcal{O}(A_2 A_1 A_4) + \mathcal{O}(A_2 A_3 A_1) + 1,$$

где последнее слагаемое соответствует точке A_1 , которая лежит внутри треугольника $A_2 A_3 A_4$ и даёт вклад в его чётность, но не лежит ни в одном из остальных трёх треугольников. Полученное равенство невозможно, если все четыре чётности равны. Таким образом, наше предположение неверно, и точки лежат в вершинах выпуклого многоугольника.

1.2. Допустим, что это не так, тогда одна из точек является выпуклой комбинацией трёх других, пусть, скажем, $A_{i_1} \in \Delta A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$. Не умаляя общности, можно считать, что треугольник $A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$ ориентирован положительно и $i_2 < i_3 < i_4$. Нетрудно проверить, что какой бы ни была величина числа i_1 по отношению к числам i_2, i_3, i_4 , все треугольники не могут быть ориентированы одинаково. Например, если $i_2 < i_1 < i_3$, то треугольники $A_{i_2} A_{i_1} A_{i_3}$ и $A_{i_2} A_{i_1} A_{i_4}$ ориентированы по-разному. Аналогично разбираются другие случаи.

1.3. Любые пять точек общего положения определяют выпуклый четырёхугольник.



1.4. а) Выберем прямую, не параллельную никакой прямой, проходящей через две отмеченные точки. Проведем 401 прямую параллельно выбранной так, чтобы в каждой из 400 полос между соседними прямыми оказалось ровно по пять точек нашего множества. По утверждению задачи 1.3 мы сумеем в каждой полосе найти выпуклый четырёхугольник.

б) Произвольное множество точек общего положения, для которого можно найти прямую, отделяющую от него четыре точки в выпуклом положении, будем называть *разбиваемым*, в противном случае — *неразбиваемым*. Для доказательства утверждения задачи достаточно проверить, что любое множество из девяти точек общего положения является разбиваемым.

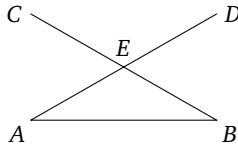
Пусть A, B, C — точки из данного множества. Угол ABC назовём *пустым*, если внутри него нет точек нашего множества. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Для каждой стороны AB выпуклой оболочки неразбиваемого множества найдётся такая точка C из этого же множества, для которой оба угла ABC и BAC пустые.

Точку C , описанную в формулировке леммы, будем называть *ближайшей* точкой к стороне AB .

Доказательство. Пусть при движении от A к B наше неразбиваемое множество находится слева. Возьмём луч AB и будем поворачивать его против часовой стрелки вокруг точки A до тех пор,

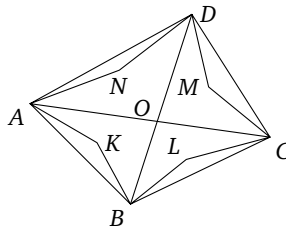
пока он не наткнется на какую-нибудь точку нашего множества — назовём её D . Аналогично будем поворачивать луч BA по часовой стрелке вокруг точки B до тех пор, пока он не наткнется на какую-нибудь точку нашего множества — назовём её C . Если точки C и D совпадают, то они-то и есть искомая ближайшая точка. В противном случае — если внутри треугольника CDE (где E — точка пересечения лучей, см. рис.) нет других точек нашего множества — выпуклый четырёхугольник $ABDC$ легко может быть отделён от него, что противоречит неразбиваемости.



Если же внутри треугольника CDE есть другие точки нашего множества, мы все равно сможем отделить от него выпуклый четырёхугольник. Это можно сделать следующим способом. Будем поворачивать луч CB против часовой стрелки вокруг точки C до тех пор, пока он не наткнется на какую-нибудь точку нашего множества, пусть это будет точка F . Сдвинув немного прямую CF , мы получим прямую, отделяющую от нашего множества выпуклый четырёхугольник $ABFC$. $\square$

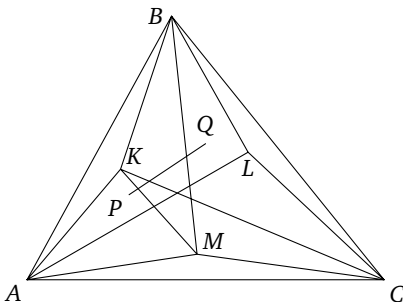
Очевидно, что одна и та же точка не может быть ближайшей к разным сторонам (если количество точек больше четырёх).

Внёмся к доказательству того, что любое множество из девяти точек общего положения разбиваемо. В силу свойства неразбиваемых множеств, описанного в лемме, выпуклая оболочка неразбиваемого множества из девяти точек может быть лишь треугольником или четырёхугольником. Разберем эти случаи.



Пусть выпуклая оболочка нашего девятиточечного множества — это четырёхугольник $ABCD$; K , L , M , N — точки, ближайшие к его сторонам; O — точка пересечения диагоналей. Не умаляя общности,

можно считать, что девятая точка Z нашего множества находится внутри треугольника AOB . Тогда один из четырёхугольников $ANZK$, $BKZL$ выпуклый и может быть отделён от нашего множества. Это противоречит неразбиваемости.



Пусть теперь выпуклая оболочка нашего девятиточечного множества — треугольник ABC ; K , L , M — точки, ближайшие к его сторонам. Остальные три точки расположены по одной в треугольниках AKM , BKL , CLM . Действительно, если, скажем, в треугольнике AKM нет ни одной точки нашего множества, то, сдвинув прямую MK в направлении от вершины A , мы сумеем отделить выпуклый четырёхугольник $AKLM$. Пусть в треугольниках AKM , BKL , CLM расположены соответственно точки P , Q , R . Хотя бы один из отрезков PQ , QR , RP пересекает ровно два из отрезков AL , BM , CK (докажите!). Не умаляя общности, можно считать, что отрезок PQ пересекает отрезки BM и CK и не пересекает AL . Тогда выпуклый четырёхугольник $BKPQ$ можно отделить от остальных точек прямой, параллельной AL .

в) Ответ: нет, не всегда.

Выберем произвольные 1999 точек на какой-нибудь подходящей выпуклой кривой, скажем, на одной из ветвей гиперболы (хоть бы даже и $y = 1/x$), а последнюю, двухтысячную, точку — в ее центре (в начале координат). Тогда последняя точка не образует выпуклого четырёхугольника ни с какими из остальных.

1.5. Утверждение задачи сразу следует из задач 1.1, 1.2, если воспользоваться теоремой Рамсея. Достаточно использовать теорему Рамсея в следующей частной формулировке.

Теорема (Рамсей). Для всякого натурального числа k существует натуральное число $R_3(k, k)$, обладающее следующим свойством: если во множестве точек плоскости общего положения не меньше $R_3(k, k)$

точек и всевозможные треугольники с вершинами в этих точках разбиты на два класса, то найдутся такие k точек, что все треугольники с вершинами в этих точках принадлежат одному классу.

Действительно, рассмотрим $R_3(n, n)$ точек общего положения. Разобьём все треугольники с вершинами в этих точках на два класса в зависимости от чётности (если мы используем задачу 1.1) или ориентации (для задачи 1.2) треугольника. По теореме Рамсея найдутся n точек, для которых все треугольники с вершинами в этих точках принадлежат одному классу. Это и значит, что точки находятся в выпуклом положении.

Доказательство теоремы Рамсея можно найти во многих учебниках по комбинаторике, см., например, [4].

Оценка $N(n) \leq R_3(n, n)$ весьма далека от оптимальной. По поводу чисел Рамсея третьего порядка известно, что

$$2^{bn^2} \leq R_3(n, n) \leq 2^{c^n}$$

для некоторых констант b и c . Результаты раздела «Чашки и крышки» показывают, что эти числа слишком велики по сравнению с $N(n)$.

1.6. Восемь точек, не определяющих ни одного выпуклого пятиугольника, см. на рисунке.



1.7. а) Следующую конструкцию сообщил нам Ф. Петров. Для каждого чётного n построим множество точек A_n , состоящее из $2^{n/2}$ точек, никакие n из которых не находятся в выпуклом положении. Построение будем вести по индукции. В качестве базы для $n = 4$ возьмём множество из четырёх точек, лежащих в вершинах невыпуклого четырёхугольника. Если множество A_n уже построено, выберем достаточно малый вектор $\vec{v}$, по направлению не совпадающий с прямыми, определяемыми парами точек из A_n , и положим

$$A_{n+2} = A_n \cup (A_n + \vec{v}).$$

Нетрудно проверить, что множество A_{n+2} не содержит выпуклых $(n+2)$ -угольников.

б) Мы приводим доказательство из [9], первоисточник — [7]. Построим множество X из 2^{n-2} точек, в котором никакие n точек не лежат в вершинах выпуклого многоугольника. Пусть T_i , $i = 0, \dots$,

$n - 2$, — множество из C_{n-2}^i точек, не содержащее $(i + 2)$ -крышек и $(n - i)$ -чашек. Такое множество существует в силу результата задачи 4.3; мы можем дополнительно потребовать, чтобы все отрезки с концами из T_i имели угловой коэффициент, по модулю не превосходящий 1.

Для $i = 0, \dots, n - 2$ разместим маленькую копию множества T_i в окрестности точки единичной окружности, радиус-вектор которой образует угол $\frac{\pi}{4} - \frac{i\pi}{2(n-2)}$ с положительным направлением вещественной оси. В качестве искомого множества X возьмём объединение этих множеств T_i . Тогда

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i = 2^{n-2}.$$

Предположим, что $Y \subset X$ — подмножество точек, расположенных в вершинах выпуклого многоугольника. Пусть k и ℓ — наименьшее и наибольшее значение i , при котором $Y \cap T_i \neq \emptyset$. Если $k = \ell$, то Y не содержит ни $(k + 2)$ -крышек, ни $(n - k)$ -чашек. Если же $k \neq \ell$ и Y выпукло, то наша конструкция гарантирует, что:

- 1) $Y \cap T_k$ является крышкой из не более чем $k + 1$ точек;
- 2) $Y \cap T_\ell$ является чашкой из не более чем $n - \ell - 1$ точек;
- 3) $|Y \cap T_i| \leq 1$ при $i = k + 1, \dots, \ell - 1$.

Таким образом,

$$|Y| \leq k + 1 + \ell - k - 1 + n - \ell - 1 = n - 1.$$

Мы доказали, что никакие n точек из множества X не лежат в вершинах выпуклого многоугольника.

1.9. Мы приводим решение из [2, задача 66].

В силу утверждения задачи 1.3 среди любых пяти точек плоскости общего положения найдутся четыре, образующие вершины выпуклого четырёхугольника. Для каждой из C_n^5 групп по пять точек, выбранных среди данных n точек, отметим четыре точки, образующие выпуклый четырёхугольник. Каждый выпуклый четырёхугольник мог быть отмечен не более $n - 4$ раз, поскольку любые четыре точки можно дополнить до пятёрки, добавив любую из $n - 4$ оставшихся точек. Поэтому всего выпуклых четырёхугольников будет не менее $C_n^5 / (n - 4)$. Это и есть величина, указанная в условии.

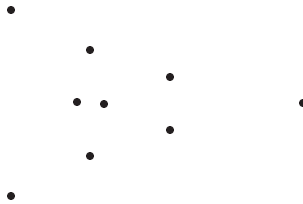
2.1. а) Это ясно всякому, кто слышал слово «триангуляция». Или рассмотрим треугольник наименьшей площади с вершинами в данных точках.

б) Ответ: да.

Мы взяли задачу из [2, задача 99]. Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек. Это некоторый многоугольник. Пусть AB — произвольная сторона этого многоугольника. Выберем среди оставшихся точек такую точку C , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Описанная окружность треугольника ABC — это то, что нам требуется.

2.2. Ответ: $H(4) = 5$.

2.3. Вот пример множества из девяти точек, не имеющего ни одного пустого выпуклого пятиугольника.



2.4. Это решение взято из [11]. Будем рассматривать лишь такие множества, у которых x -координаты всех точек различны. Пусть $x(A)$ — это x -координата точки A . Назовём множество точек k -замкнутым сверху, если в нём для любой k -чашки $A_1A_2\dots A_k$ найдётся такая точка A , что $x(A_1) < x(A) < x(A_k)$ и точка A расположена выше ломаной $A_1A_2\dots A_k$ (многоугольник $AA_1A_2\dots A_k$ при этом не обязательно выпуклый). Аналогично (при помощи k -крышек) определяется k -замкнутость множества снизу. Множество, k -замкнутое и сверху, и снизу, будем называть k -замкнутым.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ построим множество X_k , состоящее из 2^k точек, являющееся 4-замкнутым и не содержащее пустых выпуклых семиугольников (и такое, что x -координаты всех его точек различны). База индукции — одноточечное множество.

Пусть множество $X = X_{k-1}$ уже построено. Положим $Y = X_{k-1} + \varepsilon$, где ε — вектор, у которого достаточно мала x -координата и достаточно велика y -координата. Тогда:

- i) x -координаты точек из множеств X и Y чередуются;
- ii) множество X лежит ниже любой прямой, соединяющей точки из Y ;
- iii) множество Y лежит выше любой прямой, соединяющей точки из X .

Положим $X_k = X \cup Y$.

1. Проверим, что множество X_k не содержит пустых выпуклых семиугольников. Допустим, что это не так. Пусть Z — выпуклый

семиугольник, составленный из точек множества X_k . Обозначим $X' = X \cap Z$, $Y' = Y \cap Z$. Множества X' и Y' непусты, поскольку ни X , ни Y не содержат *пустых* выпуклых семиугольников. В силу ii) и iii) X' — чашка, а Y' — крышка. Если X' состоит из не менее чем четырёх точек, то в силу 4-замкнутости сверху множества X (и опять с учётом ii), iii)) точка множества X , осуществляющая это 4-замыкание, лежит внутри семиугольника Z . Аналогично разбирается случай, когда Y' содержит не менее четырёх точек.

2. Проверим, что множество X_k является 4-замкнутым. Пусть $ABCD$ — 4-чашка. Если $B \in Y$ (и аналогично, если $A \in Y$), то обе точки A и C не могут одновременно принадлежать X в силу iii). Тогда, если, скажем, $C \in Y$, в силу выпуклости и свойства ii) все четыре точки A, B, C, D принадлежат Y , и в силу 4-замкнутости множества Y мы можем найти в Y точку, реализующую замыкание этой четвёрки сверху. Если же обе точки B, C лежат в X , то в силу i) найдётся точка $E \in Y$, $x(B) < x(E) < x(C)$, лежащая выше отрезка BC и осуществляющая тем самым замыкание нашей 4-чашки сверху. Аналогично проверяется замкнутость снизу для 4-крышек.

Итак, мы построили семейство множеств X_k , состоящих из 2^k точек и не содержащих выпуклых пустых семиугольников. Теперь нетрудно для любого натурального n построить множество из n точек, не содержащее пустых выпуклых семиугольников. Для этого достаточно взять множество X_k , $2^k > n$, и удалять из него последовательно экстремальные точки до тех пор, пока не останется n точек.

2.5. а) Мы приводим рисунок из [3]. Многие участники придумали эту конфигурацию. В 1989 году M. Overmars, B. Scholten, I. Vincent построили при помощи компьютера конфигурацию из 26 точек.



3.1. Докажем, что $N_d(n) \leq N(n)$. Выберем в $\mathbb{R}^d$ такую двумерную плоскость, чтобы проекции точек нашего множества точек на неё не

совпадали и образовывали множество общего положения. Если исходное множество (а значит, и его проекция) содержит не менее $N(n)$ точек, то какие-то n точек проекции образуют выпуклый n -угольник. Тогда соответствующие точки исходного множества находятся в выпуклом положении, поскольку свойство точки «быть выпуклой комбинацией других точек» сохраняется при проектировании.

3.3. Утверждения этой и следующей задачи вместе с доказательствами взяты из [6].

а) Если в какой-то конфигурации, состоящей из пяти овалов, не нашлось четырёх овалов в выпуклом положении, то любой набор из трёх, четырёх или всех пяти овалов в этой конфигурации определяет треугольник. Это противоречит утверждению следующего пункта задачи.

б) Будем говорить, что два (пересекающихся) овала X и Y образуют крест, если оба множества $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$ несвязны. Если овалы не образуют креста, будем говорить, что они имеют простое пересечение (быть может, пустое). Если овалы $A_1, A_2, \dots$ определяют выпуклый k -угольник и для всех вершин A_i этого k -угольника овалы A_i и выпуклая оболочка $\text{conv}(\bigcup_{j \neq i} A_j)$ образуют простое пересечение, то будем говорить, что этот k -угольник простой. В случае простого многоугольника корректно определён порядок вершин.

Из условия сразу следует, что

любые $\ell \leq t$ овалов из семейства Φ
определяют ℓ -угольник. (1)

Тогда любые $\ell > t$ овалов $A_1, A_2, \dots, A_\ell$ из семейства Φ образуют простой t -угольник M . Действительно, если это не так, то какой-то из овалов-вершин, скажем A_1 , разбивает многоугольник M на две части. Так как овалы дизъюнкты, то овал, не являющийся вершиной, скажем овал A_{m+1} , содержится в одной из половин многоугольника M , что противоречит (1).

Пусть в семействе Φ содержится $t + 2$ овалов $A_1, A_2, \dots, A_{m+2}$, образующих t -угольник M с вершинами $A_1, \dots, A_m$. Обозначим $M_i = M \setminus A_i$, $1 \leq i \leq t$. Как мы проверили, M_i — простой t -угольник; одна из вершин этого многоугольника есть A_{m+1} или A_{m+2} . Так как $t \geq 3$, мы можем считать, что овал A_{m+1} является вершиной каких-то двух из многоугольников M_i , скажем, M_1 и M_j . При этом $A_{m+2} \in M_1 \cap M_j$.

Вершины A_1 и A_j должны быть соседними в многоугольнике M , так как иначе

$$M_1 \cap M_j = \text{conv} \left(\bigcup_{i \neq 1, i \neq j} A_i \right)$$

является $(m - 1)$ -угольником, хотя и содержит m овалов из семейства Φ , а это противоречит (1). Если же A_1 и A_j — соседние вершины в многоугольнике M , скажем, $j = 2$, то

$$M_1 \cap M_2 \subset \text{conv} \left(\bigcup_{i=3}^{m+1} A_i \right) \cup \text{conv} (A_1 \cup A_{m+1}) \cup \text{conv} (A_2 \cup A_{m+1}),$$

причём A_{m+2} содержится в одной из этих выпуклых оболочек, что опять-таки невозможно.

3.4. Индукция по n плюс теорема Рамсея с использованием утверждений задачи 3.3. Нам понадобится следующий вариант теоремы Рамсея.

Теорема (Рамсей). *Для всяких натуральных чисел n, k, ℓ существует натуральное число $R_n(k, \ell)$, обладающее следующим свойством: если в каком-либо множестве не меньше $R_n(k, \ell)$ точек и всевозможные n -наборы точек разбиты на два класса, то либо найдутся такие k точек, для которых все n -наборы принадлежат первому классу, либо найдутся ℓ точек, для которых все n -наборы принадлежат второму классу.*

База индукции ($n = 4$) — это утверждение задачи 3.3 а). Допустим, что мы уже установили конечность числа $G(n - 1)$. Докажем, что

$$G(n) \leq R_{n-1}(n + 1, G(n - 1) + 1).$$

Возьмём множество Ω , состоящее из $R_{n-1}(n + 1, G(n - 1) + 1)$ овалов, и разобьём все $(n - 1)$ -наборы овалов на два класса в зависимости от того, определяют эти овалы выпуклый $(n - 1)$ -угольник или нет. Тогда либо найдётся множество Ω_1 из $n + 1$ овалов, любые $n - 1$ из которых определяют $(n - 1)$ -угольник, либо найдутся $G(n - 1) + 1$ овалов, никакие $n - 1$ из которых не определяют $(n - 1)$ -угольника. Последнее невозможно по определению числа $G(n - 1)$, а первое также невозможно, если во множестве Ω никакие n овалов не определяют n -угольника. Действительно, в этом случае во множестве Ω_1 любые n овалов определяют $(n - 1)$ -угольник и, как легко сообразить, все $n + 1$ овалов множества Ω_1 тоже определяют лишь $(n - 1)$ -угольник. Теперь размеры множества Ω_1 противоречат утверждению задачи 3.3 б).

3.5. Утверждение задачи сразу следует из теоремы Эрдёша (задача 3.6). Действительно, точка $A(y_1, y_2, \dots, y_d)$ лежит между точками $B(x_1, x_2, \dots, x_d)$ и $C(z_1, z_2, \dots, z_d)$, если при всех k , $1 \leq k \leq d$, последовательность (x_k, y_k, z_k) монотонна.

Выпишем все наши $2^{2^{d-1}} + 1$ точек в порядке возрастания их первых координат. По теореме Эрдёша найдётся подпоследовательность

из $2^{d-2} + 1$ точек, в которой вторые координаты точек изменяются монотонно. Опять по теореме Эрдёша в этой подпоследовательности найдётся своя подпоследовательность, в которой монотонно упорядочены третьи координаты точек. И так далее. Процесс этого многократного применения теоремы Эрдёша закончится тем, что мы найдем на $(d-1)$ -м шаге последовательность из $2^{2^0} + 1 = 3$ точек с монотонно изменяющимися координатами. Тогда средняя в этой последовательности точка лежит между двумя крайними.

Чтобы показать, что оценка в утверждении задачи точная, заметим в дополнение к теореме Эрдёша, что для каждой пары чисел p и q нетрудно построить пример последовательности из pq членов, в которой нет ни возрастающей подпоследовательности из $p+1$ членов, ни убывающей подпоследовательности из $q+1$ членов. Например, разобьём числа от 1 до pq на q групп по p последовательных чисел в группе и расположим эти группы в порядке убывания их первых чисел. Пользуясь этим замечанием и отталкиваясь от проделанной в первой части решения декомпозиции, мы без труда сконструируем множество из 2^{d-1} точек, ни одна из которых не лежит между двумя другими.

3.6. Приведём коллекцию доказательств этой теоремы, никоим образом не претендуя на полноту этой коллекции.

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Для каждого числа a_k из нашей последовательности зададим пару натуральных чисел (x_k, y_k) по следующему правилу: x_k равно количеству членов в самой длинной возрастающей подпоследовательности, оканчивающейся числом a_k , а y_k равно количеству членов в самой длинной убывающей подпоследовательности, начинающейся с a_k . Если хотя бы одно из определённых таким образом чисел x_k превосходит p или хотя бы одно из чисел y_k превосходит q , то мы нашли требуемую подпоследовательность. Если же $x_k \leq p$, $y_k \leq q$ при всех k , то среди пар (x_k, y_k) не более pq различных пар, и для каких-то двух членов нашей последовательности a_i и a_j , $i < j$, $(x_i, y_i) = (x_j, y_j)$. Легко видеть, что этого не может быть. Например, если $a_i > a_j$, то $y_i \geq y_j + 1$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о 2. Его мы почерпнули из [5, задача 133].

Положим $a_1^1 = a_1$. Пусть a_2^1 — первое из оставшихся чисел, которое больше a_1^1 , a_3^1 — первое из следующих за a_2^1 чисел, которое больше a_2^1 , и т.д. Мы построили возрастающую подпоследовательность $\{a_k^1\}$. Вычеркнем все её члены из нашей последовательности, после чего аналогично, используя только оставшиеся числа, построим подпоследовательность $\{a_k^2\}$. Вычеркнем и её, после чего аналогично построим подпоследовательность $\{a_k^3\}$ и т.д. Если хоть одна из построен-

ных подпоследовательностей состоит более чем из p членов — задача решена. В противном случае каждая из подпоследовательностей содержит не более p членов и, значит, мы построили не менее $q + 1$ подпоследовательностей.

Построим тогда убывающую подпоследовательность из $q + 1$ членов. Пусть b_{q+1} — наибольшее (последнее) число в подпоследовательности $\{a_k^{q+1}\}$. Пусть b_q — наибольшее число в подпоследовательности $\{a_k^q\}$, расположенное левее b_{q+1} . Пусть b_{q-1} — наибольшее число в подпоследовательности $\{a_k^{q-1}\}$, расположенное левее b_q , и т. д. Пользуясь правилом построения последовательностей $\{a_k^i\}$, нетрудно показать, что правило построения подпоследовательности $\{b_k\}$ корректно и что эта последовательность убывает. $\square$

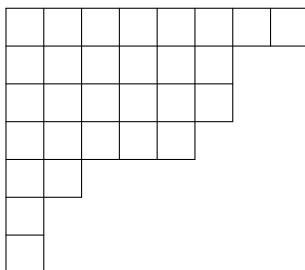
Д о к а з а т е л ь с т в о 3. Похоже на решение задачи 4.2. Индукция по $p + q$. Базу проигнорируем. Переход от $p + q - 1$ к $p + q$. Рассмотрим последовательность из $pq + 1$ членов. Поскольку число членов последовательности больше $(p - 1)q + 1$, то, по предположению индукции, найдётся либо возрастающая подпоследовательность длины p , либо убывающая подпоследовательность длины $q + 1$ (и тогда мы нашли то, что требуется). Среди всех возрастающих подпоследовательностей длины p рассмотрим ту, у которой максимальное число — обозначим его b_1 — расположено в исходной последовательности как можно левее. Вычеркнем число b_1 . У нас останется $pq > (p - 1)q + 1$ членов. Опять выберем подпоследовательность длины p , у которой максимальное число — обозначим его b_2 — расположено в исходной последовательности как можно левее. Очевидно, b_2 расположено правее b_1 , и при этом $b_1 > b_2$. Вычеркнем b_2 . Продолжая такие же построения дальше, мы получим убывающую подпоследовательность из $q + 1$ членов. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о 4. Загадочное, но очень симпатичное. Следующее рассуждение, использующее алгоритм Робинсона—Шенстеда—Кнута, мы взяли из [1]. Рассмотрим нашу последовательность. Напишем первое её число в левой верхней клетке клетчатого листа бумаги. Будем добавлять новые числа и переставлять имеющиеся по следующему алгоритму.

Шаг 1. Возьмём очередное число последовательности. Назовём его текущим числом. Верхнюю левую клетку листа назовём текущей клеткой.

Шаг 2. Если текущая клетка пуста, поставим в неё текущее число и перейдём к шагу 1, иначе перейдём к шагу 3.

Шаг 3. Если текущее число меньше числа в текущей клетке, передвинемся на одну клетку вправо, назовём эту клетку текущей и перейдём к шагу 2. Если же текущее число больше числа в текущей клетке, впишем в текущую клетку вместо имеющегося там числа текущее число, после чего назовём текущим число, только что удаленное из текущей клетки, сдвинемся на одну строку вниз, назовём её самую левую клетку текущей и перейдём к шагу 2.



В результате выполнения этого алгоритма числа нашей последовательности окажутся расположенными в клетках фигуры, которая называется диаграммой Юнга. Диаграмма Юнга состоит из нескольких горизонтальных рядов клеток, выровненных по левому краю, причём каждый следующий ряд содержит не больше клеток, чем предыдущий. Заметим, что если числа занимают $pq + 1$ клетку, то в полученной диаграмме либо первая строка содержит более q клеток, либо первый столбец — более p клеток (в противном случае диаграмма содержалась бы в прямоугольнике $q \times p$ и состояла бы из не более чем pq клеток). Оба случая означают наличие требуемой монотонной подпоследовательности. $\square$

Доказательство 5. Утверждение следует из теоремы Дилуорса: в частично упорядоченном множестве минимальное число цепей, содержащих все элементы, равно максимальному числу попарно несравнимых элементов. См., например, [4, п. 7.2]. $\square$

4.1. Нам понадобится следующая модификация теоремы Рамсея.

Теорема. Пусть дано счётное множество M и натуральное число k . Пусть все k -элементные подмножества множества M разбиты на два класса. Тогда существует такое бесконечное подмножество $L \subset M$, что все k -элементные подмножества множества L принадлежат одному классу.

Доказательство получается индукцией по k аналогично обычной теореме Рамсея.

Выберем в нашем множестве счётное подмножество M и пронумеруем его точки. Разобьём все треугольники с вершинами в точках множества M на два класса в соответствии с их ориентацией (как в задаче 1.2). По сформулированной теореме Рамсея для бесконечного подмножества $L \subset M$ все треугольники с вершинами из L будут ориентированы одинаково, откуда и следует утверждение задачи.

4.2. Мы приводим решение из [9], первоисточник — [8]. Неравенство следует из рекуррентного соотношения

$$f(k, \ell) \leq f(k-1, \ell) + f(k, \ell-1) - 1 \quad (2)$$

и начальных условий $f(k, 3) = f(3, k) = k$.

Докажем неравенство (2).

Пусть множество X состоит из $f(k-1, \ell) + f(k, \ell-1) - 1$ точек. Рассмотрим всевозможные $(k-1)$ -чашки из множества X . Пусть Y — множество крайних левых точек этих чашек. Тогда множество $X \setminus Y$ не содержит ни одной $(k-1)$ -чашки. Если бы в этом множестве было не меньше $f(k-1, \ell)$ точек, то тогда в нём обязательно нашлась бы ℓ -крышка. Пусть в множестве $X \setminus Y$ меньше $f(k-1, \ell)$ точек, тогда в множестве Y не меньше $f(k, \ell-1)$ точек. Если оно при этом не содержит k -чашек, то в нём обязательно найдётся $(\ell-1)$ -крышка, обозначим её

$$A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{\ell-1}, y_{\ell-1})\}.$$

Рассмотрим также $(k-1)$ -чашку

$$U = \{(x_{j_1}, y_{j_1}), (x_{j_2}, y_{j_2}), \dots, (x_{j_{k-1}}, y_{j_{k-1}})\}$$

в множестве X , для которой точка (x_ℓ, y_ℓ) является крайней левой точкой (так что в наших обозначениях $j_1 = \ell - 1$). Нетрудно видеть, что тогда либо $(x_{\ell-2}, y_{\ell-2}) \cup U$ — k -чашка, либо $A \cup (x_{j_2}, y_{j_2})$ — ℓ -крышка.

4.3. Формула очевидна при $k = 3$ или $\ell = 3$.

Утверждение будем доказывать по индукции. Допустим, что существует множество A из $C_{k+\ell-5}^{k-3}$ точек, не содержащее ни $(k-1)$ -чашек, ни ℓ -крышек, и множество B из $C_{k+\ell-5}^{k-2}$ точек, не содержащее ни k -чашек, ни $(\ell-1)$ -крышек. Выполним параллельный перенос этих множеств так, чтобы оказались верными следующие утверждения:

1) множество B лежит правее множества A , т. е. x -координата любой точки множества B больше x -координаты любой точки множества A ;

2) наклон любой прямой, соединяющей любую точку из A с любой точкой из B , больше наклона любой прямой, проходящей через две точки из A или две точки из B .

Ясно, что каждая чашка из множества $A \cup B$, содержащая точки обоих множеств A и B , содержит не более одной точки из B , поэтому множество $A \cup B$ не содержит k -чашек. Аналогично это множество не содержит ℓ -крышек. Таким образом,

$$f(k, \ell) \geq C_{k+\ell-5}^{k-3} + C_{k+\ell-5}^{k-2} + 1 = C_{k+\ell-4}^{k-2} + 1.$$

4.4. Результат задачи сразу следует из очевидного неравенства $N(n) \leq f(n, n)$.

Доказанное утверждение было получено Эрдёшем в [8] и в течение 63 лет было наилучшей известной оценкой сверху для чисел $N(n)$. Несколько лет назад появилось сразу несколько статей, где доказывались чуть более сильные оценки, самая сильная из них и при этом наиболее простая приводится в следующей задаче (первоисточник — [10]).

4.5. Пусть A — экстремальная точка множества X . Выберем точку B вне выпуклой оболочки множества X так, чтобы никакая прямая, проходящая через две точки множества $X \setminus A$, не пересекала отрезок AB . Проведем через точку B произвольную прямую p , не пересекающуюся с выпуклой оболочкой множества X . Выполним проективное преобразование T , отображающее прямую p в бесконечно удаленную прямую, а отрезок AB — в луч, идущий из точки $T(A)$ вертикально вниз.

Тогда очевидно, что

1) множество точек $Y \subset X$ находится в выпуклом положении тогда и только тогда, когда $T(Y)$ находится в выпуклом положении;

2) множество точек $Z \subset X$, содержащее точку A , находится в выпуклом положении тогда и только тогда, когда $T(Z \setminus A)$ — крышка.

Пусть множество X содержит $C_{2n-5}^{n-3} + 2$ точек. Тогда множество $T(X \setminus A)$ в силу утверждения задачи 4.2 содержит $(n-1)$ -крышку или n -чашку. Значит, X содержит n точек в выпуклом положении.

4.6. Ответ: нет, таких множеств не существует.

Действительно, если такие множества существуют, выберем произвольные десять точек множества A ; пусть S — множество, состоящее из этих десяти точек и тех точек множества A , которые лежат в их выпуклой оболочке. Тогда в силу равенства $H(5) = 10$ (намек на это имеется в утверждении задачи 2.3) в множестве S найдутся пять точек, образующих выпуклый пятиугольник, не содержащий других точек множества A . Пусть $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ — этот пятиугольник. Пусть C_1, C_2, C_3 — точки множества B , лежащие в треугольниках $B_1 B_2 B_3$,

$B_1B_3B_4, B_1B_4B_5$. Тогда в треугольнике $C_1C_2C_3$, а значит, и в пятиугольнике $B_1B_2B_3B_4B_5$, содержится точка множества A .

Вот похожее рассуждение, в котором не используются никакие специальные факты.

Лемма 2. *Если выполнено условие задачи, то в выпуклой оболочке любых пяти точек множества A содержится ещё хотя бы одна точка множества A .*

Доказательство. Если выпуклая оболочка S выбранных пяти точек является k -угольником ($k = 3, 4, 5$), т. е. $5 - k$ из выбранных точек лежит внутри S , то мы можем разбить этот k -угольник на $8 - k$ треугольников с вершинами в этих пяти точках (посчитайте сумму углов!). Значит, внутри многоугольника S содержится $8 - k$ точек множества B . Тогда можно найти $6 - k$ непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках, и значит, внутри S есть хотя бы одна «новая» точка из множества A . $\square$

Из утверждения леммы сразу следует решение задачи. Действительно, пусть такие множества существуют. Зафиксируем какой-нибудь не слишком маленький круг, отметим все точки множества A , лежащие внутри него, и выберем пять точек с наименьшей площадью выпуклой оболочки (это возможно, так как в силу отделённости точек друг от друга внутри круга находится лишь конечное число точек). По лемме внутри выпуклой оболочки этих точек найдётся ещё одна точка множества A . Удалив одну вершину выпуклой оболочки исходной пятёрки точек, мы получим пять точек с меньшей площадью выпуклой оболочки. Противоречие.

4.7. Пусть p и s — произвольные достаточно большие натуральные числа, выбор которых станет ясен позже. Пусть $n = pN(2s)$. Тогда в нашем множестве можно выбрать не менее $(p - 1)N(2s)/(2s)$ выпуклых $2s$ -угольников, не имеющих общих вершин. В каждом из этих $2s$ -угольников раскрасим вершины попеременно в красный и синий цвета. Нетрудно проверить, что в каждом $2s$ -угольнике нужно выбросить не менее $s - 1$ точек, чтобы выпуклые оболочки его красных и синих вершин не пересекались. Значит, для того чтобы выпуклые оболочки всех красных и синих точек не пересекались, необходимо выбросить не менее $(s - 1)(p - 1)N(2s)/(2s)$ точек. Поэтому

$$\frac{k}{n} \geq \frac{\frac{(s-1)(p-1)}{2s} \cdot N(2s)}{pN(2s)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s-1}{s} \cdot \frac{p-1}{p}.$$

Это выражение может быть сколь угодно близким к $1/2$.

Литература

1. Вершик А. М. Добавление редактора перевода // Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
2. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. М.: Просвещение, 1976.
3. Сендов Бл. Обязательные конфигурации точек на плоскости // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 2. С. 491—516.
4. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
5. Шклярский Д. О., Ченцов Г. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1977.
6. Bisztriczky T., Fejes Tóth G. A generalization of the Erdős — Szekeres convex n -gon theorem // J. Reine Angew. Math. 1989. Vol. 395. P. 167—170.
7. Erdős P., Szekeres G. On some extremum problems in elementary geometry // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1961. Vol. 3—4. P. 53—62; Ibid // Paul Erdős: The Art of Counting. Selected Writings / Ed.: J. Spencer. Cambridge, MA: MIT Press, 1973.
8. Erdős P., Szekeres G. A combinatorial problem in geometry // Compositio Math. 1935. Vol. 2. P. 463—470; Ibid // Paul Erdős: The Art of Counting. Selected Writings / Ed. J. Spencer. Cambridge, MA: MIT Press, 1973. P. 3—12; Ibid // Classic Papers in Combinatorics / Eds. I. Gessel, G.-C. Rota. Basel: Birkhäuser, 1987. P. 49—56.
9. Morris W., Soltan V. The Erdős—Szekeres problem on points in convex position — a survey // Bull. AMS. 2000. Vol. 37. № 4. P. 437—458.
10. Tóth G., Valtr P. Note on the Erdős—Szekeres theorem // Discrete Comput. Geom. 1998. Vol. 19. P. 457—459.
11. Valtr P. Convex independent sets and 7-holes in restricted planar point sets // Discrete Comput. Geom. 1992. Vol. 7. P. 135—152.

Семейство Фейербаха

Л. А. Емельянов, Т. Л. Емельянова

Внутри любого разностороннего треугольника есть точка, через которую проходят две замечательные его окружности — вписанная и окружность девяти точек. (Для нашего исследования случай равнобедренного треугольника является вырожденным.) Они, как известно, касаются друг друга в этой точке. Этот факт, а также факт касания окружностью девяти точек трёх внеписанных окружностей треугольника, был доказан немецким математиком XIX века К. Фейербахом, именем которого довольно часто и называют окружность девяти точек.

Нами были обнаружены новые замечательные свойства этой точки (будем называть её точкой Фейербаха), которые делают её не менее значительной, чем те девять, давших название известной окружности. *Окружность десяти точек* — такое название было более справедливым. В частности, через эту точку проходит ещё и окружность, проходящая через основания биссектрис, а также окружность, проходящая через точки касания внеписанных окружностей со сторонами треугольника.

Рассмотрим каждую из упомянутых выше окружностей как окружность, порождённую некоторым «чевианным» треугольником, около которого она описана. Чевианным для краткости будем называть треугольник с вершинами в основаниях чевиан исходного треугольника. Так, окружность девяти точек будем считать порождённой, например, ортотреугольником, а вписанную окружность — её точками касания. Будем называть треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольником Жергонна. (Точкой Жергонна называется точка пересечения соответствующих чевиан.) *Существуют ли ещё чевианные треугольники, у которых описанная окружность проходит через точку Фейербаха?*

Задача 1. Докажите, что окружность, проходящая через основания биссектрис, проходит через точку Фейербаха.

Впервые опубликовано: Математическое просвещение. Третья серия. М.: МЦНМО. 2002. Вып. 6. С. 78—92. Основано на проекте, представленном авторами на тринадцатой Летней конференции Турнира городов (см. <http://www.turgor.ru/1ktg/2001/index.php>).

Необходимые предварительные сведения можно найти в книге [1].

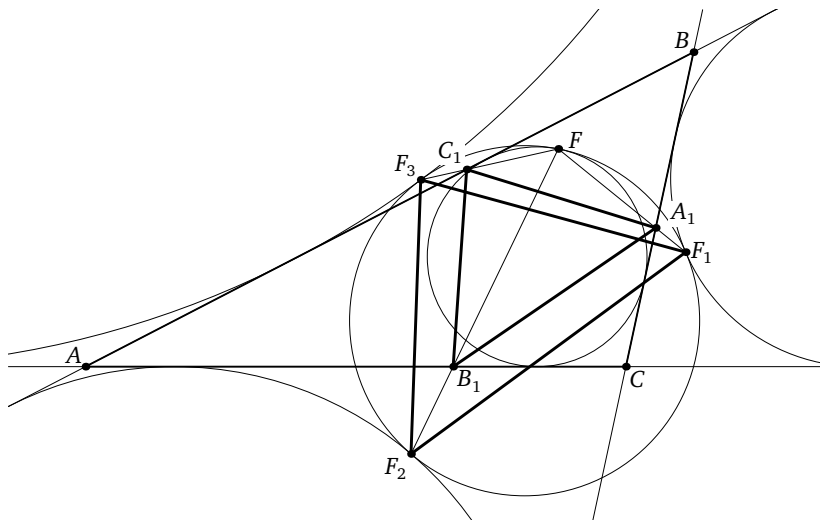


Рис. 1

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис $\triangle ABC$, F — точка Фейербаха, F_1, F_2, F_3 — точки касания внеписанных окружностей с окружностью девяти точек — внешние точки Фейербаха (см. рис. 1).

У вписанной и внеписанной окружностей есть два центра гомотетии. Например, для вписанной и внеписанной окружностей, расположенных внутри угла ABC , внешним центром гомотетии, то есть центром гомотетии с положительным коэффициентом, служит вершина угла B , а центром гомотетии с отрицательным коэффициентом служит основание биссектрисы B_1 , которое является точкой пересечения их общих внутренних касательных. Точка касания F_2 внеписанной окружности и окружности девяти точек является, в свою очередь, их центром гомотетии с отрицательным коэффициентом. Точка F — центр гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек. По теореме о трёх центрах гомотетии, точки F_2, B_1 и F лежат на одной прямой. Аналогично для троек F_3, C_1, F и F_1, A_1, F . Таким образом, треугольники $F_1F_2F_3$ и $A_1B_1C_1$ перспективны относительно точки Фейербаха, т. е. прямые F_1A_1, F_2B_1 и F_3C_1 пересекаются в этой точке. Кроме того, эти треугольники подобны¹ (Виктор Тебо). Поэтому угол

¹ Шарыгин И. Ф. Геометрия. 9—11 классы. От учебной задачи к творческой. М.: Дрофа, 1996. Задача № 586.

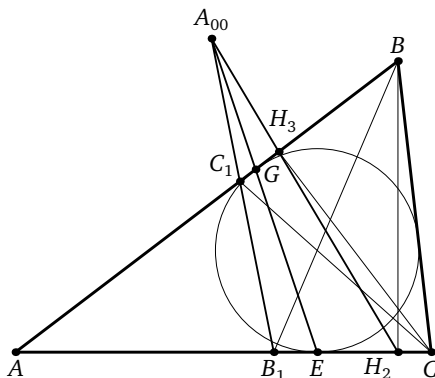


Рис. 2

$C_1B_1A_1$, равный углу $F_1F_2F_3$, составляет в сумме с углом C_1FA_1 180° , то есть точки A_1, B_1, C_1, F лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Итак, ещё одна известная окружность в треугольнике проходит через точку Фейербаха, то есть «семейство Фейербаха» состоит уже по крайней мере из трёх членов.

Что общего у треугольников, породивших эти три окружности? Иными словами, что общего у ортотреугольника, треугольника Жергонна и треугольника с вершинами в основаниях биссектрис? Оказывается, их соответствующие стороны (как прямые) пересекаются в одной точке. (Соответствующими будем считать стороны чевианых треугольников, концы которых лежат на сторонах одного угла $\triangle ABC$.)

Задача 2. Пусть H_2 и H_3 — основания высот на сторонах AC и AB соответственно, B_1 и C_1 — основания биссектрис, E и G — точки касания вписанной окружности на тех же сторонах. Доказать, что прямые H_2H_3 , B_1C_1 и EG пересекаются в одной точке (на рис. 2 точка A_{00}).

Предлагаем читателю решить эту задачу самостоятельно.

Точки пересечения соответствующих сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна, о которых идёт речь в задаче 2, играют важную роль в дальнейшем изложении. Будем называть эти точки *полюсами* треугольника. Каждая пара сторон треугольника имеет свой полюс.

Если стороны некоторого чевианного треугольника проходят через соответствующие полюсы, то не пройдет ли его описанная окруж-

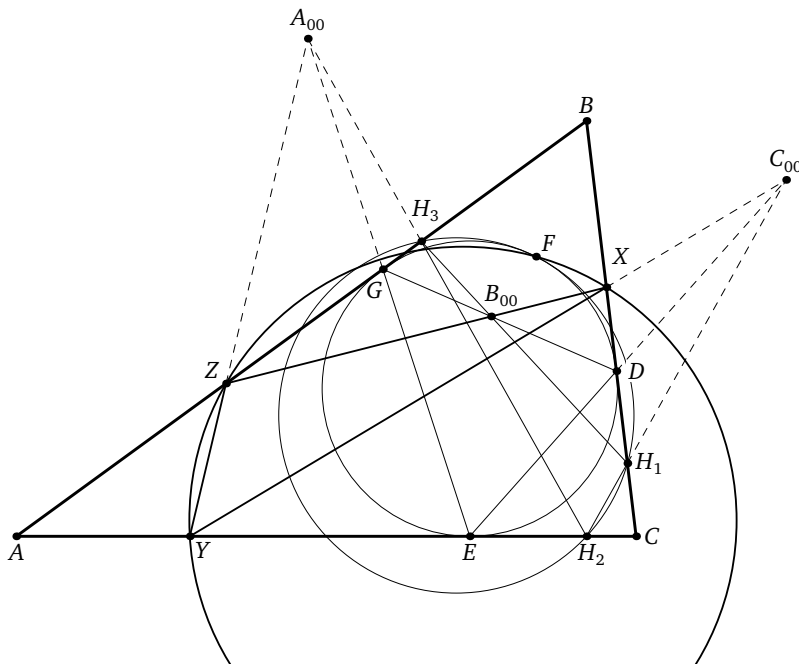


Рис. 3. $H_1H_2H_3$ — ортотреугольник, DEG — треугольник Жергонна

ность через точку Фейербаха? Положительный ответ на этот вопрос даёт следующая теорема, в которой и будет построено² всё «семейство Фейербаха».

Теорема 1. Дан $\triangle ABC$. Пусть точки A_{00} , B_{00} , C_{00} — его полюсы. Будем говорить, что A_{00} соответствует вершине A или паре сторон AB и AC , B_{00} соответствует вершине B , C_{00} — вершине C . Возьмём на прямой AC произвольную точку Y и соединим её с полюсами A_{00} и C_{00} . Прямые YA_{00} и YC_{00} пересекают прямые AB и BC соответственно в точках Z и X (рис. 3). Тогда

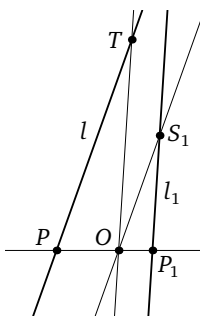
- а) прямая XZ проходит через полюс B_{00} ;
- б) точки X , Y , Z являются основаниями чевиан в $\triangle ABC$;
- в) окружность, описанная около $\triangle XYZ$, проходит через точку Фейербаха.

² Другой способ построения этого семейства сформулирован в виде задачи №15 в конце статьи.

В дальнейшем нам удобно будет пользоваться языком проективных и полярных преобразований. Поэтому введём некоторые понятия и перечислим их основные свойства.

Основные понятия и свойства

1. Пусть l и l_1 — две различные прямые. Спроектируем прямую l на прямую l_1 из центра O , не лежащего ни на одной из этих прямых, то есть сопоставим каждой точке P прямой l ту точку P_1 прямой l_1 , в которой её пересекает прямая OP . Точка T прямой l , такая что $OT \parallel l_1$, проектируется в бесконечно удалённую точку прямой l_1 . Прообразом точки S_1 прямой l_1 , для которой $OS_1 \parallel l$, будем считать бесконечно удалённую точку прямой l .



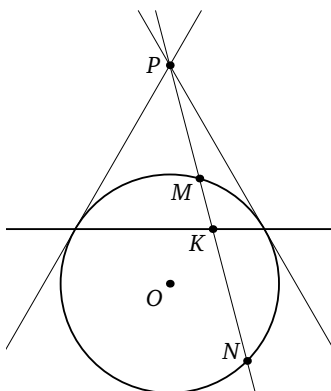
2. Пусть точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Выражение $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ называется *двойным* или *сложным отношением*, в котором две точки C и D делят отрезок AB , или двойным отношением четырёх точек A, B, C, D . Оно может быть положительным или отрицательным, так как простое отношение $\frac{AC}{BC}$ может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, лежит точка C внутри или вне отрезка AB .

3. Точки A, B, C, D образуют *гармоническую четвёрку*, если их двойное отношение равно -1 . В этом случае точки C и D делят отрезок AB в равных отношениях по абсолютной величине, но противоположных по знаку.

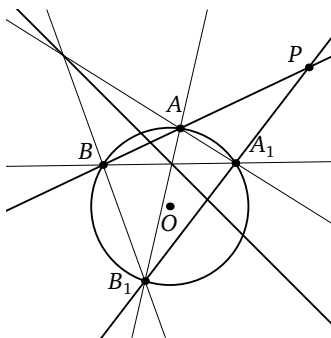
4. При центральном проектировании прямой сохраняется двойное отношение четырёх точек.

5. Прямые a, b, c, d , проходящие через одну точку, образуют *гармоническую четвёрку*, если точки их пересечения с некоторой прямой образуют гармоническую четвёрку.

6. Чтобы четвёрка прямых была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы на какой-либо прямой, параллельной одной из этих четырёх прямых, три других отсекали два равных отрезка.



Если через фиксированную точку P , не лежащую на окружности с центром O , провести произвольную прямую, пересекающую окружность в точках M и N , то геометрическое место точек K , которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая линия, называемая *полярной* точки P относительно этой окружности. Точка P называется *полюсом* этой прямой относительно окружности. Эта прямая перпендикулярна прямой OP . Если точка лежит вне окружности, то полярной этой точки является прямая, соединяющая точки касания этой окружности с двумя прямыми, проходящими через эту точку. Если точка лежит на окружности, то полярной считается касательная к окружности, проведённая в этой точке.



7. Если три прямые проходят через одну точку, то соответствующие им полюсы относительно окружности лежат на одной прямой, и наоборот.

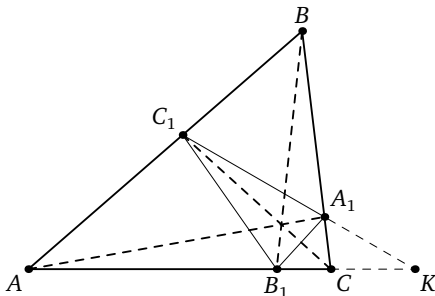


Рис. 4

8. Пусть две прямые, проходящие через точку P , пересекают некоторую окружность в точках A и B , A_1 и B_1 . Тогда пары прямых AA_1 и BB_1 , AB_1 и A_1B пересекаются на поляре точки P относительно окружности.

9. Если через фиксированную точку P провести произвольную прямую, пересекающую стороны данного угла в точках M и N , то геометрическое место точек K , которые вместе с точкой P делят отрезок MN гармонически, есть прямая, называемая поларой точки P относительно угла. Эта прямая проходит через вершину угла.

Подробнее о проективных и полярных преобразованиях можно прочитать, например, в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования» (М.: Гостехиздат, 1956. Т. 2) и в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия» (М.: ОГИЗ, 1948. Т. 1).

Задача 3. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания чевиан в $\triangle ABC$, K — точка пересечения прямых A_1C_1 и AC (рис. 4). Докажите, что точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четвёрку. Верно и обратное.

Решение. По теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прямой A_1C_1

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CK}{KA} = -1,$$

а по теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB_1}{B_1C}$. Следовательно, $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{AK}{KC} = -1$, что и требовалось доказать.

Ранее было введено понятие полюса $\triangle ABC$ как точки пересечения соответственных сторон ортотреугольника и треугольника Жергонна. Некоторые факты, излагаемые ниже, доказываются в общем виде, то есть для полюсов, порождённых двумя любыми чевианными треугольниками.

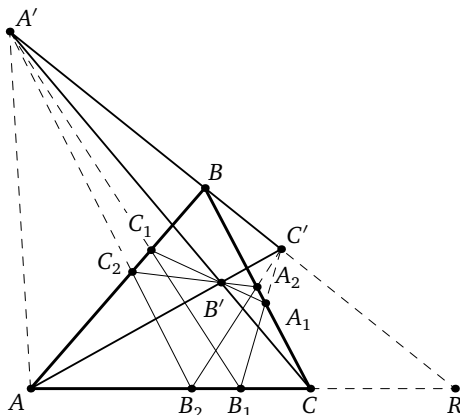


Рис. 5

Задача 4. Пусть точки A_1, B_1, C_1 , а также A_2, B_2, C_2 — основания чевиан в $\triangle ABC$. Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 (полюс, соответствующий вершине C), A' — точка пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2 (полюс, соответствующий вершине A), B' — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2 (полюс, соответствующий вершине B). Докажите, что прямые $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ проходят через точки C , A и B соответственно (рис. 5).

Решение. Пусть прямые $A'C'$ и AC пересекаются в точке R . Для доказательства того, что точка B лежит на прямой $A'C'$, достаточно показать, что двойные отношения точек A, C_2, B, C_1 и A, B_2, R, B_1 равны. По теореме Чевы

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, а также тем, что двойные отношения точек C, A_2, B, A_1 и C, B_2, R, B_1 равны (проектирование из точки C'), получим

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2R} \cdot \frac{B_1R}{B_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AB_2}{B_2R} \cdot \frac{AB_1}{B_1R}.$$

Требуемое равенство доказано.

Задача 5. Докажите, что определённая в условии задачи 4 прямая $B'C'$ является полярной точки A' относительно угла BAC .

Решение. Точки A, B_1, C, K — гармоническая четвёрка (рис. 6). Следовательно, прямые $B'A, B'B_1, B'C, B'K$ — гармоническая четвёр-

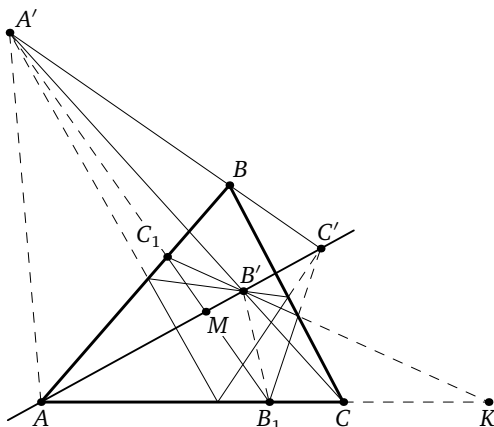


Рис. 6

ка. Эти прямые, в свою очередь, порождают гармоническую четвёрку точек M, B_1, A', C_1 , где M — точка пересечения прямых $B'C'$ и B_1C_1 . Следовательно, прямая $B'C'$ вместе с точкой A' делит отрезок B_1C_1 гармонически и, кроме того, проходит через вершину угла BAC . Значит, прямая $B'C'$ — полярная для точки A' .

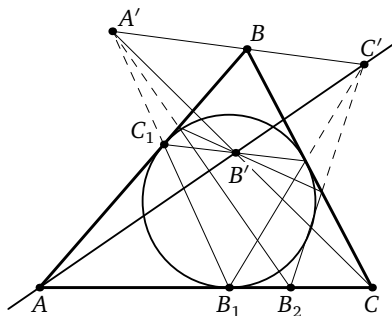


Рис. 7

Задача 6. Если одним из полюсообразующих треугольников, например $\triangle A_1B_1C_1$, является треугольник Жергонна, то прямая $B'C'$ является также полярной для точки A' относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Решение. Прямые AB и AC касаются вписанной окружности в точках C_1 и B_1 (рис. 7), значит, являются полярными для точек C_1 и B_1

относительно вписанной окружности, следовательно, пересекаются в одной точке с полярной точки A' . Поэтому точка A лежит на этой поляре. А поскольку прямая $B'C'$ проходит через точку A и, кроме того, вместе с точкой A' делит хорду B_1C_1 гармонически, она и является полярной точки A' относительно вписанной окружности.

Замечание. В $\triangle A'B'C'$ каждая вершина является полюсом противоположной стороны (относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности). Такой треугольник называется *автополярным*.

Доказательство первого и второго пунктов теоремы

Проведем доказательство пунктов а) и б) для общего случая, когда полюсообразующими треугольниками являются произвольные чевианные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

а) Обозначим через U и V точки пересечения прямых $A'B'$ с AB , $B'C'$ с DC соответственно (рис. 8). Двойные отношения точек A, Z, C_1, U и V, X, A_1, C равны, поскольку эти четвёрки получаются из четвёрки A, Y, B_1, C центральным проектированием соответственно из точек A' и C' . Следовательно, прямая ZX проходит через точку B' .

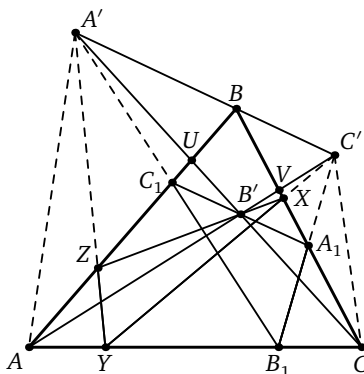


Рис. 8

б) Пусть Q — точка пересечения прямых YA' и AB' , P — точка пересечения прямых AC и ZX (рис. 9). Тогда A', Z, Q, Y — гармоническая четвёрка, так как A' — полюс, а AB' — соответствующая ему полярная относительно угла BAC . Значит, прямые $B'A', B'Z, B'A, B'Y$ образуют гармоническую четвёрку, а поскольку они пересекают прямую AC соответственно в точках C, P, A, Y , то и они тоже образуют гармоническую

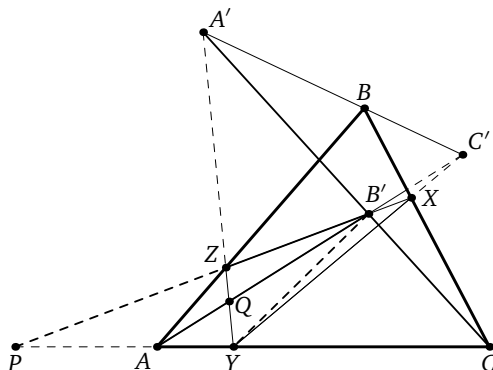


Рис. 9

ческую четвёрку. Следовательно, X, Y, Z — основания чевиан (задача 3), что и требовалось доказать.

Задача 7. Пусть точки B_1 и C_1 — основания биссектрис на сторонах AC и AB , E и G — точки касания вписанной окружности с этими сторонами. Точка E_1 симметрична точке E относительно биссектрисы BB_1 , точка G_1 симметрична точке G относительно биссектрисы CC_1 . Доказать, что прямая E_1G_1 проходит через полюс A_{00} . (Здесь и далее точки A_{00}, B_{00} и C_{00} — полюсы, порождённые треугольником Жергонна и ортотреугольником.)

Решение. Вторая касательная ко вписанной окружности из точки B_1 проходит через точку E_1 (рис. 10), следовательно, прямая EE_1 — полярная точки B_1 относительно вписанной окружности. Аналогично прямая GG_1 — полярная точки C_1 . Поскольку точки B_1, C_1 и A_{00} лежат на одной прямой (задача 2), то прямые EE_1 и GG_1 пересекаются на прямой $B_{00}C_{00}$. А так как прямая EG проходит через точку A_{00} , то и прямая E_1G_1 также проходит через точку A_{00} , что и требовалось доказать.

Задача 8. Доказать, что треугольник с вершинами в точках, симметричных точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно соответствующих биссектрис ($\triangle D_1E_1G_1$ на рис. 10), гомотетичен исходному $\triangle ABC$.

Решение. Докажем, что, например, $E_1G_1 \parallel BC$. Пусть R и T — точки пересечения прямых E_1B_1 и G_1C_1 с прямой BC . Тогда $\angle BRB_1 = \angle BAB_1 = \angle CTC_1$ (рис. 10). Следовательно, $G_1T = TD = RD = RE_1$ как отрезки касательных, попарно образующих равные углы. Значит, E_1G_1TR — трапеция, и $E_1G_1 \parallel BC$, что и требовалось доказать.

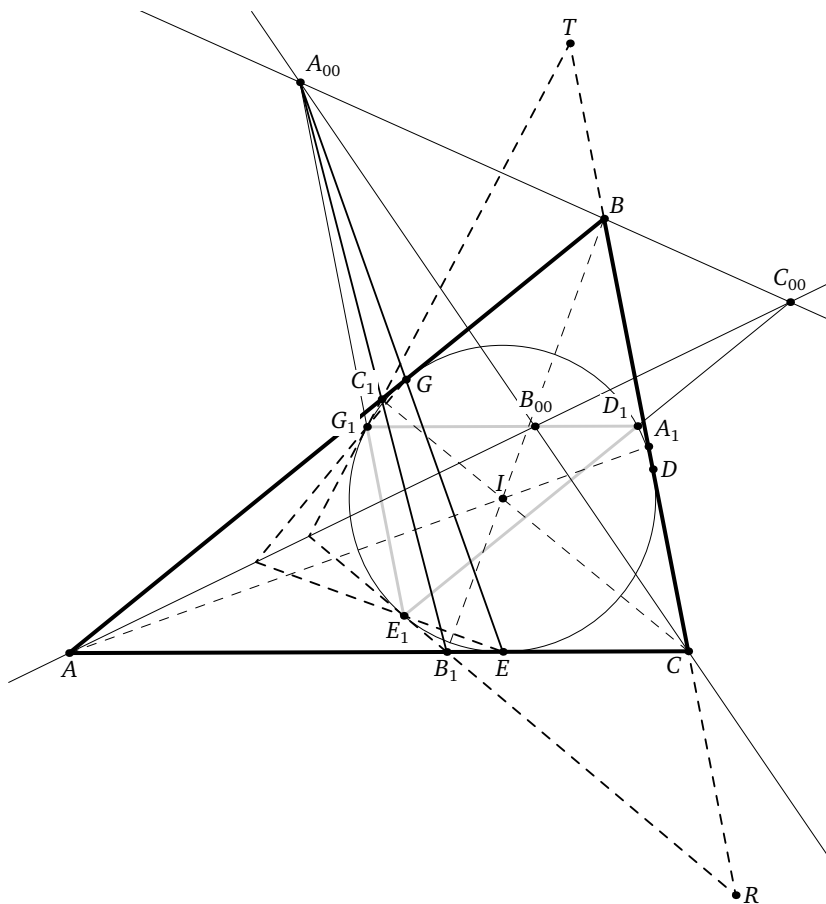


Рис. 10

Задача 9. Пусть точки A_0 , B_0 и C_0 — середины сторон BC , AC и AB . Докажите, что прямые A_0A_{00} , B_0B_{00} и C_0C_{00} проходят через точку Фейербаха (рис. 11).

Решение. Прямая $A_{00}E_1$ пересекает вписанную окружность в точках G_1 и E_1 , а прямую $B_{00}C_{00}$ в точке S . Тогда A_{00} , G_1 , S , E_1 — гармоническая четвёрка точек. Следовательно, прямые $B_{00}A_{00}$, $B_{00}G_1$, $B_{00}S$ и $B_{00}E_1$ также образуют гармоническую четвёрку. Одна из этих прямых — $B_{00}G_1$ — параллельна стороне AC (задача 8), а значит, три оставшиеся прямые высекают на прямой AC равные отрезки, то

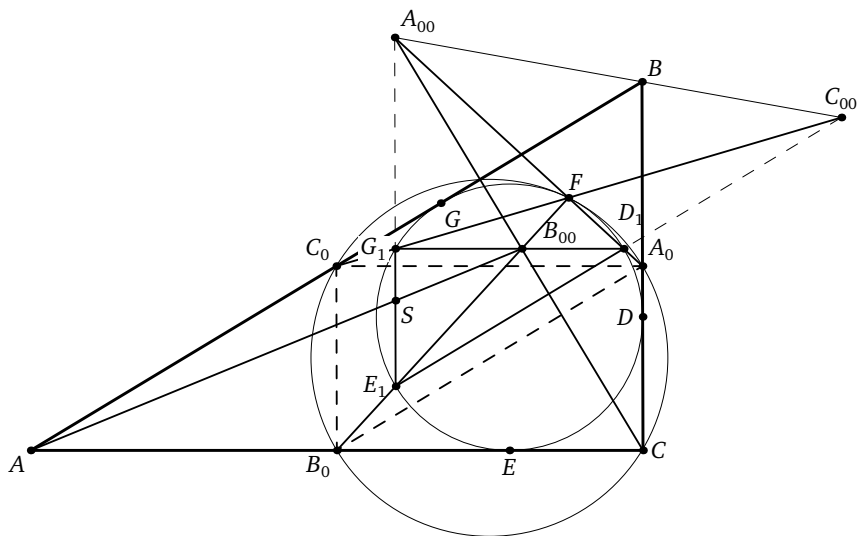


Рис. 11

есть прямая B_0E_1 проходит через середину отрезка AC — точку B_0 . Аналогично прямая A_0D_1 проходит через точку A_0 , прямая C_0G_1 — через точку C_0 . Треугольники $D_1E_1G_1$ и ABC гомотетичны с отрицательным коэффициентом (задача 8), серединный треугольник $A_0B_0C_0$ и треугольник ABC гомотетичны также с отрицательным коэффициентом. Следовательно, треугольники $D_1E_1G_1$ и $A_0B_0C_0$ гомотетичны с положительным коэффициентом, то есть гомотетичны с центром в точке F касания соответствующих им описанных окружностей (вписанной окружности и окружности девяти точек $\triangle ABC$). Следовательно, прямые A_0D_1 , B_0E_1 и C_0G_1 проходят через точку Фейербаха, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать последний пункт теоремы, достаточно показать, что семейство окружностей, описанных около $\triangle XYZ$, порождённого подвижной точкой Y указанным в теореме способом, имеет единственную общую точку. Это будет именно точка Фейербаха, так как в ней касаются две различные окружности этого семейства — вписанная и окружность девяти точек. Ближайшая наша цель — показать, что в это семейство входят ещё и три прямые, то есть подвижная окружность трижды «распрямляется», проходя все свои положения, и эти прямые заведомо проходят через точку Фейербаха.

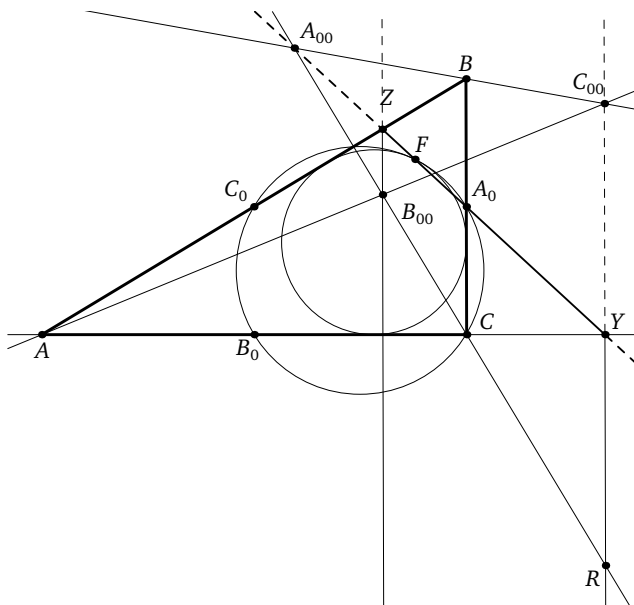


Рис. 12

Покажем, например, что прямая $A_{00}A_0$ — это «окружность» из нашего семейства. Действительно, если одно из оснований чевиан, например точка X , становится бесконечно удалённой точкой прямой BC , то стороны ZX и YX превращаются в параллельные BC прямые (рис. 12). Пусть R — точка пересечения прямых XY и $A_{00}B_{00}$. Так как точки C_{00} , Y , R , X составляют гармоническую четвёрку, а X — бесконечно удалённая точка, то $C_{00}Y = YR$. Но отрезок $C_{00}R$ параллелен отрезку BC . Следовательно, прямая $A_{00}Y$ делит пополам и отрезок BC , а значит, совпадает с прямой $A_{00}A_0$. Окружность же, проходящая через точки Y , Z и бесконечно удалённую точку X , имеет бесконечный радиус, то есть вырождается в прямую YZ (в данном случае — совпадающую с прямой $A_{00}A_0$).

Итак, «семейство Фейербаха» пополнилось тремя прямыми A_0A_{00} , B_0B_{00} и C_0C_{00} (прямыми, соединяющими полюсы с серединами сторон).

Доказательство третьего пункта теоремы

Эта часть доказательства сильно отличается от предыдущего изложения. Возможно, искушённый читатель придумает более изящное,

более геометрическое доказательство этого факта³. Приведём наше доказательство, избегая излишней детализации преобразований и опираясь на их геометрический смысл.

Введём на плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AC . Пусть точка Y имеет координаты $(t, 0)$. Тогда координаты точек Z и X имеют вид

$$\left(\frac{p_1 t + q_1}{a_1 t + b_1}, \frac{r_1 t + s_1}{a_1 t + b_1} \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{p_2 t + q_2}{a_2 t + b_2}, \frac{r_2 t + s_2}{a_2 t + b_2} \right),$$

то есть являются дробно-линейными функциями от t . (Предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно.)

Покажем, что семейство Фейербаха — однопараметрическое семейство, определяемое уравнением третьей степени.

Как известно, уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , задаётся с помощью определителя четвёртого порядка уравнением $\Delta(x, y) = 0$, где

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, преобразуем уравнение к виду

$$s(x^2 + y^2) + ax + by + c = 0,$$

где $s = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Геометрический смысл s — удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) .

Определим вид коэффициентов s, a, b, c при подстановке координат точек Y, Z и X . Так, например,

$$s = \begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ \frac{p_1 t + q_1}{a_1 t + b_1} & \frac{r_1 t + s_1}{a_1 t + b_1} & 1 \\ \frac{p_2 t + q_2}{a_2 t + b_2} & \frac{r_2 t + s_2}{a_2 t + b_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{P_3(t)}{(a_1 t + b_1)(a_2 t + b_2)},$$

где $P_3(t)$ — многочлен 3-й степени от t .

³ Такое доказательство было независимо найдено Е. Д. Куланиным [2] и А. В. Акопяном, А. А. Заславским [3]. См. ниже статью А. В. Акопяна и А. А. Заславского, с. 132—138.

Корни знаменателя, а также $t = \infty$ обращают s в бесконечность. Это соответствует бесконечной площади треугольника XYZ , когда одна из его вершин становится бесконечно удалённой. Корни числителя обращают s в нуль. Это происходит в тех случаях, когда две вершины $\triangle XYZ$ сливаются с одной из вершин $\triangle ABC$ (в определителе s две одинаковые строки).

Вычисляя таким же образом коэффициенты a , b и c , запишем наше уравнение в виде

$$\frac{P_3(t)}{(a_1t + b_1)(a_2t + b_2)}(x^2 + y^2) + \frac{P_3(t)Q_3(t)}{(a_1t + b_1)^2(a_2t + b_2)^2}x + \\ + \frac{P_3(t)R_3(t)}{(a_1t + b_1)^2(a_2t + b_2)^2}y + \frac{P_3(t)S_3(t)}{(a_1t + b_1)^2(a_2t + b_2)^2} = 0,$$

где $Q_3(t)$, $R_3(t)$ и $S_3(t)$ — многочлены 3-й степени от t , а многочлен $P_3(t)$ — общий множитель у всех коэффициентов, так как все они обращаются в нуль, когда сливаются две из трёх точек X , Y , Z (в определителе $\Delta(x, y)$ две одинаковые строки).

Умножим обе части уравнения на $\frac{(a_1t + b_1)^2(a_2t + b_2)^2}{P_3(t)}$ и покажем, что полученное таким образом уравнение

$$(a_1t + b_1)(a_2t + b_2)(x^2 + y^2) + Q_3(t)x + R_3(t)y + S_3(t) = 0$$

описывает всё наше семейство окружностей, за исключением одной линии (прямой $B_{00}B_0$).

Посмотрим, как ведёт себя окружность, проходящая через точки X , Y , Z , когда точка Y , двигаясь по прямой AC , проходит через точку A , то есть совпадает с точкой Z (рис. 13), и при этом многочлен $P_3(t)$ обращается в нуль. В этом случае окружность (по двум точкам), вообще говоря, определить нельзя. Но из соображений непрерывности коэффициентов последнего уравнения ясно, что при соответствующем значении t это тоже будет уравнение окружности, при этом секущая ZY превращается в касательную. Таким образом, это будет окружность, проходящая через точку X и касающаяся прямой AA_{00} . Далее, при двух конечных значениях t , когда коэффициент при $x^2 + y^2$ обращается в нуль, это уравнение определяет прямые $A_{00}A_0$ и $C_{00}C_0$. (Прямая $B_{00}B_0$ является предельной для нашего семейства при $t \rightarrow \infty$.) Эти прямые, а также вписанная окружность и окружность девяти точек — четыре линии, соответствующие различным значениям t , — имеют общую точку — точку Фейербаха. Подставив координаты этой точки в наше уравнение, мы получим уравнение от t степени не выше 3, имеющее четыре различных корня. Отсюда следует, что точка

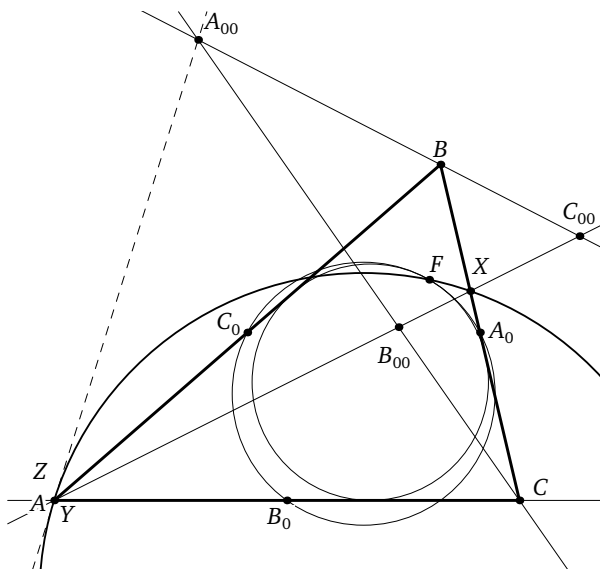


Рис. 13

Фейербаха является общей точкой этого семейства (и понятно, что единственной). На этом доказательство теоремы заканчивается. $\square$

Из теоремы следует: чтобы выяснить, проходит ли окружность, описанная около некоторого чевианного треугольника, через точку Фейербаха, достаточно проверить, проходит ли его сторона (как прямая) через соответствующий полюс.

Задача 10. Докажите, что окружность, описанная около треугольника с вершинами в точках касания вневписанных окружностей со сторонами $\triangle ABC$, проходит через точку Фейербаха.

Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу.

Вот ещё несколько интересных фактов, над которыми мы предлагаем подумать читателю. (Обозначения те же, что и в теореме.)

Задача 11. Докажите, что треугольники XYZ и $A_{00}B_{00}C_{00}$ перспективны.

Задача 12. Докажите, что три прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с одноимёнными полюсами, порождёнными треугольником Жергонна и серединным треугольником, параллельны.

Задача 13. Докажите, что окружность, проходящая через точку касания вневписанной окружности со стороной $\triangle ABC$, точку касания

этой же внеписанной окружности с окружностью девяти точек и точку касания вписанной окружности с этой стороной, проходит через точку Фейербаха.

Задача 14. Отразим прямые, на которых лежат стороны ортотреугольника, относительно соответствующих сторон треугольника Жергонна. Доказать, что три полученные таким образом прямые образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности⁴.

Задача 15 (другое описание семейства Фейербаха). Пусть $\triangle A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику Жергонна с центром гомотетии в центре вписанной окружности I . Известно, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим X , Y , Z точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC . Доказать, что семейство окружностей, описанных около треугольников XYZ , совпадает с семейством Фейербаха.

Литература

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.
2. Куланин Е. Д. Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005.
3. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007. С. 106.

⁴ Эта задача предлагалась на XLI Международной математической олимпиаде (Сеул, 2000 г.).

Геометрическое доказательство теоремы Емельяновых

А. В. Акопян, А. А. Заславский

Вначале напомним некоторые определения.

Чевианным треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник, вершины которого — точки пересечения прямых AP и BC , BP и AC , CP и AB . Описанная окружность чевианного треугольника называется *чевианной окружностью* точки P относительно треугольника ABC .

Педальным (подёрным) треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны треугольника ABC . Описанная окружность педального треугольника называется *педальной (подерной) окружностью* точки P относительно треугольника ABC .

Напомним также, что гипербола называется *равносторонней*, если её асимптоты взаимно перпендикулярны.

Теорема 1. *Коника, описанная около треугольника ABC , является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр H треугольника.*

Доказательство. Пусть X, Y — две точки бесконечно удалённой прямой, направления на которые перпендикулярны. Проведём через точки A и B прямые, параллельные направлению на X , а через C и H — прямые, параллельные направлению на Y . Пусть UV — диагональ образованного этими прямыми прямоугольника, а B' — основание высоты треугольника, опущенной из точки B (рис. 1).

Так как четырёхугольники $BB'CV$ и $AUB'H$ вписаны в окружности с диаметрами BC и AH , имеем $\angle AB'U = \angle ANU$, $\angle VB'C = \angle VBC$. Но $\angle ANU = \angle VBC$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, поэтому $\angle AB'U = \angle VB'C$ и точки U, B', V лежат на одной

По книге [1], с. 69, 76—77, 101—106, 126—127. По содержанию связано со статьёй Л. А. и Т. Л. Емельяновых, см. с. 114—131. Докладывалось авторами на семинаре МЦНМО по геометрии в начале 2005 г. — на первом заседании после перерыва, вызванного кончиной основателя семинара И. Ф. Шарыгина.

Необходимые предварительные сведения можно найти в книге [2].

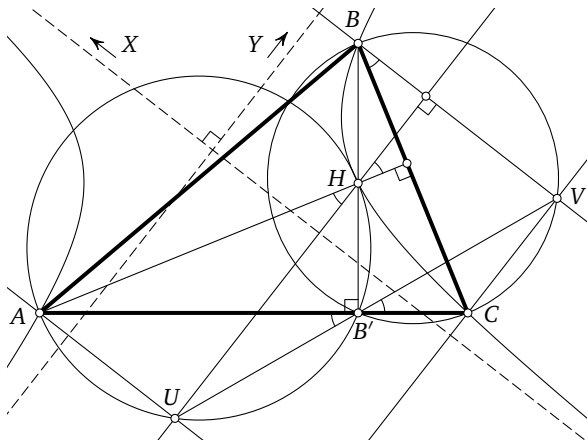


Рис. 1

прямой. По обратной теореме Паскаля ([1, с. 67—68]) шестиугольник $AХВНУС$ вписан в конику, т.е. равносторонняя гипербола $АВСХУ$ проходит через точку $Н$.

Обратно, пусть коника проходит через точки A, B, C, H . Так как A, B, C, H не являются вершинами выпуклого четырёхугольника, коника может быть только гиперболой. Если X — одна из точек её пересечения с бесконечно удалённой прямой, а Y — бесконечно удалённая точка, соответствующая перпендикулярному направлению, то Y тоже принадлежит конике. Следовательно, коника является равносторонней гиперболой. $\square$

Теорема 2. Пусть даны треугольник ABC и точка Z . Для произвольной проходящей через точку Z прямой найдём точки A', B' её пересечения с BC и AC . Тогда геометрическим местом точек пересечения прямых AA' и BB' является коника, проходящая через точки A, B, C и касающаяся прямых AZ и BZ .

Доказательство. Проведем проективное преобразование, переводящее треугольник ABC в равнобедренный прямоугольный треугольник ($AC = BC$), а точку Z — в бесконечно удалённую точку, направление на которую перпендикулярно AB . Тогда треугольники $AA'P$ и $B'BP$, где P — точка пересечения AB и $A'B'$, равны и, значит, прямые AA' и BB' перпендикулярны, т.е. точка их пересечения лежит на описанной окружности треугольника ABC . При этом прямые AZ, BZ касаются этой окружности в точках A, B . $\square$

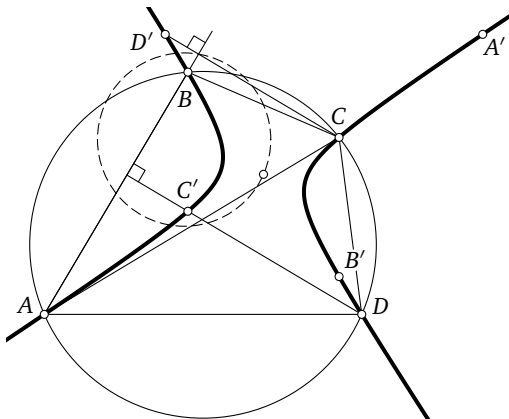


Рис. 2

Теорема 3. *Центры всех равносторонних гипербол, проходящих через вершины треугольника ABC , лежат на окружности Эйлера этого треугольника.*

Доказательство. Пусть D — четвёртая (отличная от A , B и C) точка пересечения гиперболы и описанной окружности треугольника ABC , а A' , B' , C' , D' — ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB , ABC соответственно (рис. 2).

Так как $CD' = 2R \cdot |\cos \angle BCA| = 2R \cdot |\cos \angle BDA| = DC'$ и $CD' \parallel DC'$, то $CDC'D'$ — параллелограмм, т. е. $C'D' \parallel CD$ и $C'D' = CD$.

Следовательно, четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ центрально-симметричны. Их центр симметрии является центром гиперболы, на которой, в силу основного свойства равносторонней гиперболы (теорема 1), лежат все 8 точек. При этом он совпадает с серединой отрезка DD' и, значит, лежит на окружности Эйлера треугольника ABC (а также треугольников BCD , CDA и DAB). $\square$

Теорема 4. *Пусть даны треугольник ABC и точка P , отличная от его ортоцентра. Тогда центры вписанной и невписанных окружностей чевианного треугольника точки P относительно треугольника ABC лежат на равносторонней гиперболе, проходящей через A , B , C , P .*

Доказательство. Это свойство является частным случаем следующего факта.

Лемма 1. *Пусть даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, и пусть A' , B' , C' — точки пересечения B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 , A_1B_1 и A_2B_2*

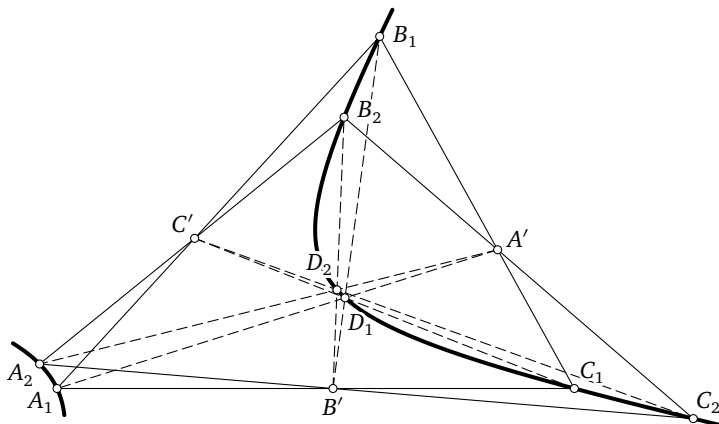


Рис. 3

соответственно. Если треугольник $A'B'C'$ перспективен как треугольнику $A_1B_1C_1$, так и треугольнику $A_2B_2C_2$ (с центрами перспективы D_1 и D_2), то точки $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ лежат на одной конике (рис. 3).

Доказательство леммы. Рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ в квадрат. Так как точки A', C' при этом преобразовании перейдут в бесконечно удалённые точки, соответствующие взаимно перпендикулярным направлениям, четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$ перейдёт в прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Кроме того, центром как квадрата, так и прямоугольника будет образ точки B' . Очевидно, что коника, проходящая через вершины квадрата и одну вершину прямоугольника, проходит и через три остальные вершины. $\square$

Пусть теперь $A'B'C'$ — чевианный треугольник точки P , I' — центр вписанной в него окружности, I'_a, I'_b, I'_c — центры внеписанных окружностей. Тогда треугольники ABC и $I'_aI'_bI'_c$ удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, точки $A, B, C, P, I'_a, I'_b, I'_c, I'$ лежат на одной конике. Поскольку I — ортоцентр треугольника $I'_aI'_bI'_c$, эта коника является равносторонней гиперболой. Теорема 4 доказана. $\square$

Теорема 5. Пусть точки A, B, C, D лежат на равносторонней гиперболы. Тогда чевианная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через центр гиперболы (рис. 4).

Доказательство. По теореме 4 центры внеписанных окружностей чевианного треугольника I'_a, I'_b, I'_c лежат на гиперболы. Так

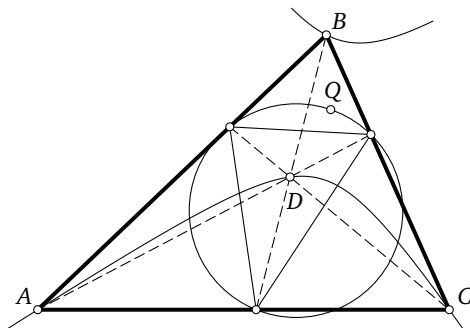


Рис. 4

как чевианная окружность является окружностью девяти точек треугольника $I'_a I'_b I'_c$, она проходит через центр гиперболы согласно теореме 3. $\square$

Теорема 6. Пусть точки A, B, C, D лежат на равносторонней гиперболе. Тогда педальная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через центр гиперболы.

Доказательство. Пусть $A'B'C'$ — педальный треугольник точки D , а B_1 и C_1 — середины отрезков BD и CD (рис. 5).

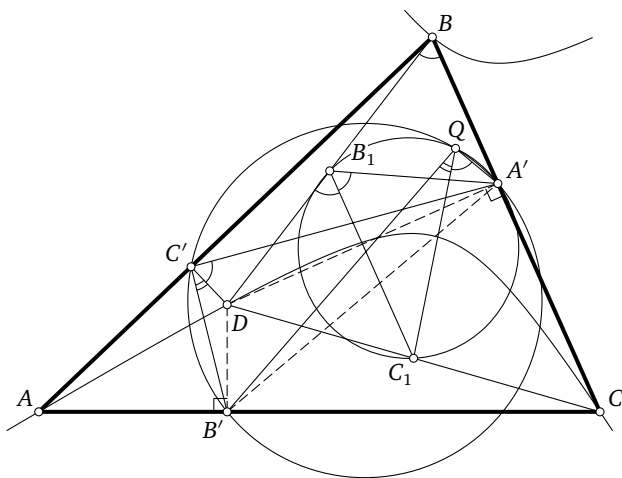


Рис. 5

Чтобы доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника $A'B'C'$, тоже проходит через центр гиперболы Q , достаточно убедиться в равенстве углов $A'C'B'$ и $A'QB'$.

Заметим, что $\angle DC'A' = \angle DBA'$, поскольку четырёхугольник $C'BA'D$ вписанный. Отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника DBC , а значит, $\angle DB_1C_1 = \angle DBA'$. Поскольку точки D и A' симметричны относительно B_1C_1 , углы DB_1C_1 и $A'B_1C_1$ равны. Теперь воспользуемся тем, что точка Q , как центр равносторонней гиперболы, лежит на окружности Эйлера треугольника BCD . Следовательно, $\angle A'B_1C_1 = \angle A'QC_1$. Таким образом, $\angle DC'A' = \angle DBA' = \angle DB_1C_1 = \angle A'B_1C_1 = \angle A'QC_1$. Аналогично $\angle DC'B' = \angle B'QC_1$. Следовательно, $\angle A'C'B' = \angle A'C'D + \angle DC'B' = \angle A'QC_1 + \angle C_1QB' = \angle A'QB'$. $\square$

Теорема 7 (Емельяновы). Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC , A_2, B_2, C_2 — основания его высот, C^*, B^*, A^* — точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , C_1A_1 и C_2A_2 , B_1C_1 и B_2C_2 (в дальнейшем такие точки будем называть полюсами), A', B' — точки пересечения произвольной прямой, проходящей через C^* , с BC и AC соответственно. Справедливы следующие утверждения.

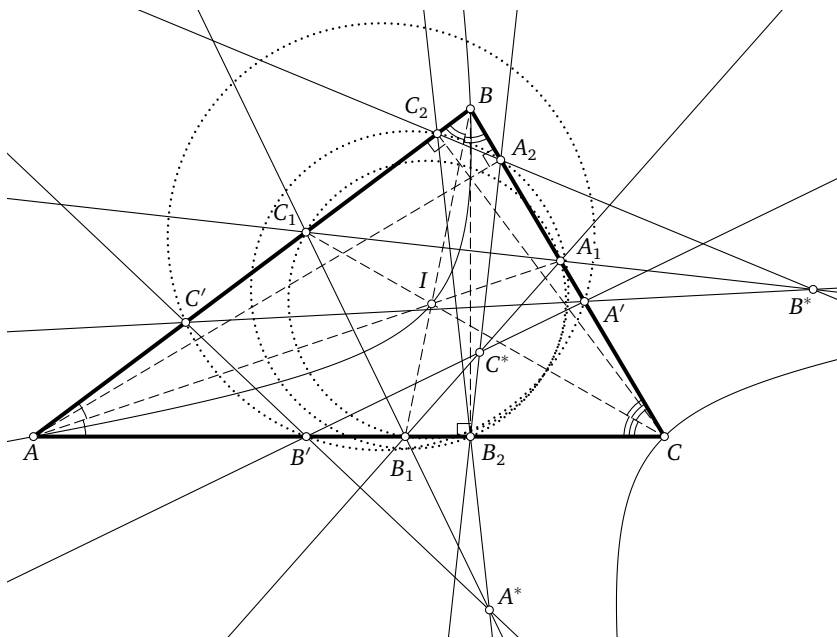


Рис. 6

1. Прямые $A'B^*$, $B'A^*$ и AB пересекаются в одной точке (назовём её C').
2. Прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.
3. Окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, проходит через точку Фейербаха треугольника ABC (рис. 6).

Доказательство. Пункты 1, 2 следуют из теоремы 2. Докажем п. 3. Так как множество центров перспективы треугольников из семейства Фейербаха лежит на равносторонней гиперболе (она называется *гиперболой Фейербаха*), их чевианные окружности проходят через центр гиперболы. Через этот центр проходят также их педальные окружности. Но педальные окружности точек I и H имеют единственную общую точку — точку Фейербаха. Следовательно, она и является центром гиперболы. $\square$

Обобщения теоремы Емельяновых см. [1, с. 106].

Литература

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

Числа Каталана и естественные отображения

В. В. Доценко

Числа Каталана встречаются в математике при подсчёте количества тех или иных комбинаторных объектов. Результатом этого являются теоремы вида: «Количество элементов в множестве A_n равно количеству элементов в множестве B_n ». Убедительным (разумеется, не единственно возможным) доказательством такой теоремы было бы построение явного взаимно однозначного соответствия (биекции) между множествами A_n и B_n . В большинстве предложенных задач надо как раз построить такое отображение. Задачи снабжены, для однозначной трактовки условий, списком исследуемых объектов для $n = 3$. Порядок, в котором они выписаны, является случайным и не несёт никакой дополнительной информации. Нумерация пунктов тоже сравнительно сумбурна. Впрочем, для пунктов, отличающихся лишь нижним индексом, эквивалентность соответствующих интерпретаций должна быть либо мгновенно очевидна, либо следовать из уже сделанного.

Определение 1. Числа Каталана c_n ($n \geq 0$) определяются (однозначно) рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \dots + c_n c_0 \quad (n \geq 0)$$

и «начальным условием» $c_0 = 1$.

Задача 1 (явная формула¹). Докажите, что

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

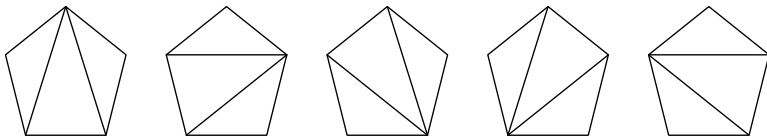
Как обычно, $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задача 2 (несколько стандартных интерпретаций). Докажите (по возможности, построив биекции), что в каждом из нижеперечисленных множеств c_n элементов.

Впервые опубликовано: Петербургские олимпиады школьников по математике. 2003—2005. СПб.: Невский диалект, 2007. С. 328—360. Проект представлен на XIV Летней конференции.

¹Знать явную формулу для построения отображений совершенно незначит, тем не менее узнать её не вредно. А можно и придумать комбинаторное доказательство.

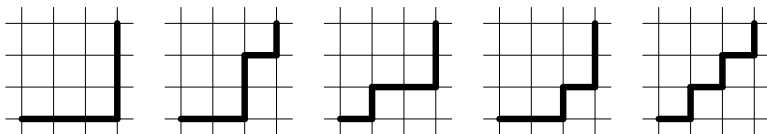
- (а) *Триангуляции* (разрезания на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$ -угольника:



- (б) Неассоциативные произведения $n+1$ букв (иначе говоря, способы расставить скобки, чтобы порядок умножений был однозначно определён):

$$\begin{array}{ccccc} a(b(cd)) & (ab)(cd) & ((ab)c)d & & \\ & a((bc)d) & (a(bc))d & & \end{array}$$

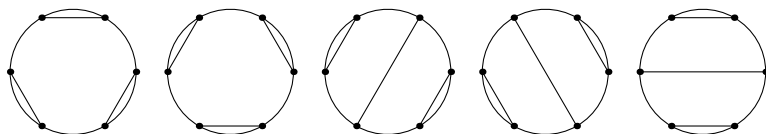
- (с₁) Пути из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущие вверх и вправо и не поднимающиеся выше прямой $y=x$:



- (с₂) Последовательности длины $2n$, в которых по n раз встречаются числа 1 и -1 и все частичные суммы² неотрицательны:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ & & & & & & & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

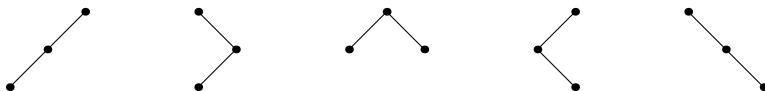
- (д) Способы соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами:



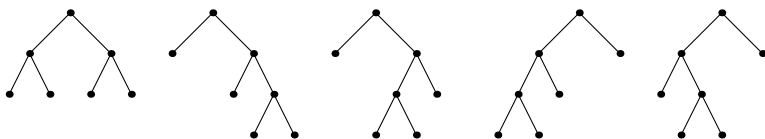
Задача 3 (ещё несколько интерпретаций). Докажите (по возможности, построив биекции), что в каждом из этих множеств c_n элементов.

² Мы называем k -й частичной суммой последовательности $a_1, \dots, a_p$ ($k \leq p$) сумму $a_1 + \dots + a_k$.

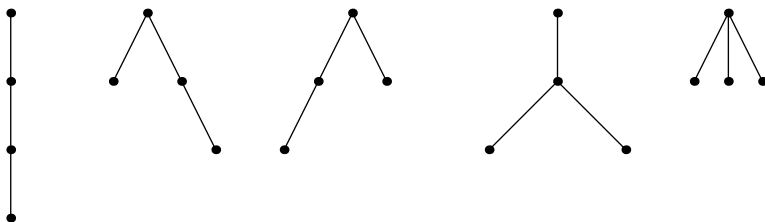
- (a) *Плоские корневые двоичные деревья* (у каждой вершины не более двух сыновей [«правый» или «левый»] и один предок [кроме корня, у которого нет предков]) с n вершинами:



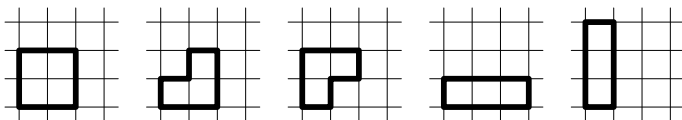
- (b) *Плоские корневые строго двоичные деревья* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n + 1$ листьями:



- (c) *Плоские корневые деревья* с $n + 1$ вершинами:

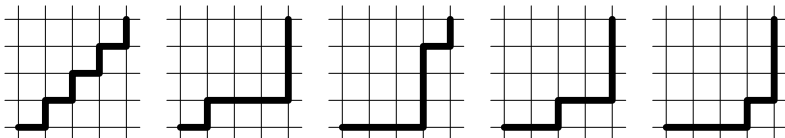


- (d) *Параллеломино* (пары путей на клетчатой бумаге с началом в точке $(0, 0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n + 2$:

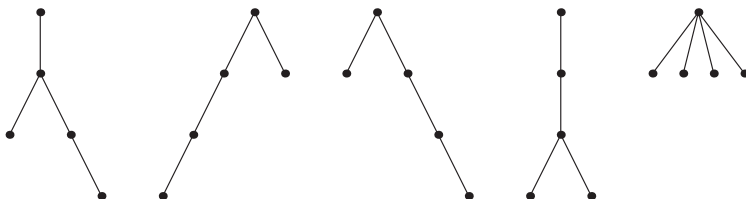


- (e₁) Множество путей по линиям клетчатой бумаги из точки $(0, 0)$ в точку $(n + 1, n + 1)$, идущих только вправо или вверх, не поднима-

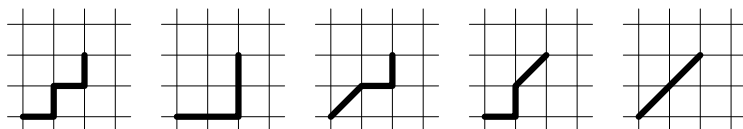
ющихся выше прямой $y = x$ и таких, что любая вертикальная сторона с концом на этой прямой имеет нечётную длину:



- (e₂) Плоские корневые деревья с $n + 2$ вершинами, такие что для любого поддереза корня (т. е. поддерева, корень которого — непосредственный потомок корня исходного дерева) «самый правый путь» из корня этого поддерева (в каждой вершине выбирающий самое правое ребро вниз) имеет чётную длину:



- (f) Пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n - 1, n - 1)$, идущие вправо, вверх или по диагонали вправо вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$ и такие, что идти по диагонали можно только вдоль прямой $y = x$:



- (g) Способы соединить $n + 1$ точек на прямой n непересекающимися дугами так, чтобы не было циклов и из каждой точки дуги выходили только влево или только вправо:



- (h) Последовательности натуральных чисел $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, где $a_i \leq i$:

1 1 1 1 1 2 1 1 3 1 2 2 1 2 3

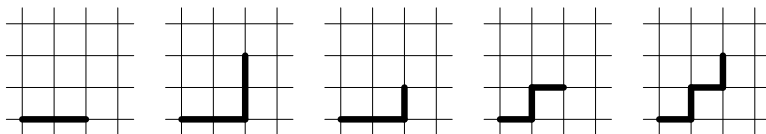
- (i₁) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_{n-1}$, такие что $a_i \leq 1$ и все частичные суммы неотрицательны:

0 0 0 1 1 0 1 1 1 -1

- (i₂) Последовательности целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, такие что $a_i \geq -1$, все частичные суммы неотрицательны и $a_1 + \dots + a_n = 0$:

0 0 0 0 1 -1 1 0 -1 1 -1 0 2 -1 -1

- (j) Пути на клетчатой бумаге с началом в точке $(0, 0)$, идущие вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$, причём единичных шагов вправо должно быть $n - 1$:



- (k) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_n$, для которых выполняются условия $a_1 = 0$ и $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$:

0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 2

- (l) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_{2n}$, такие что $a_1 = 1$, $a_{2n} = 0$ и $|a_i - a_{i+1}| = 1$:

1 2 3 2 1 0 1 2 1 2 1 0 1 2 1 0 1 0
1 0 1 2 1 0 1 0 1 0 1 0

- (m) Перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, у которых длина каждой убывающей подпоследовательности не превышает 2:

1 2 3 2 1 3 1 3 2 3 1 2 2 3 1

- (n) Перестановки чисел $1, 2, \dots, 2n$, такие что все чётные числа встречаются в порядке возрастания, все нечётные числа встречаются

в порядке возрастания и для каждого k число $2k - 1$ встречается раньше, чем $2k$:

1 2 3 4 5 6 1 2 3 5 4 6 1 3 2 4 5 6
1 3 2 5 4 6 1 3 5 2 4 6

- (o) Способы разбить все натуральные числа от 1 до n на несколько *незацепленных* групп (нельзя при $a < b < c < d$ отнести a и c к одной группе, а b и d — к другой):

123 12-3 13-2 23-1 1-2-3

- (p) Способы разбить все натуральные числа от 1 до $2n + 1$ на $n + 1$ незацепленных групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел:

137-46-2-5 1357-2-4-6 157-24-3-6
17-246-3-5 17-26-35-4

Определение 2. Стандартная n -таблица Юнга — это таблица с невозрастающими длинами строк, заполненная числами $1, \dots, n$ (каждое встречается один раз), причём числа в строках и столбцах возрастают. Форма таблицы — это набор её строк, перечисленных в порядке убывания.

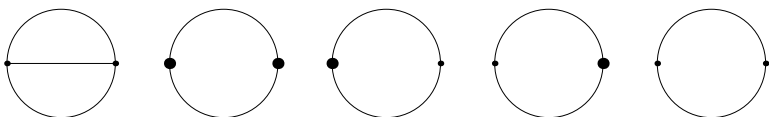
Примеры стандартных 6-таблиц Юнга (форм $(3, 2, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 2, 2)$ соответственно):

1	2	3	1	2	4	5	1	2
4	5	3	6	3	5			
6					4	6		

- (q) Стандартные $(2n)$ -таблицы Юнга формы (n, n) :

1 2 3 1 2 4 1 3 4 1 2 5 1 3 5
4 5 6 3 5 6 2 5 6 3 4 6 2 4 6

- (r) Способы соединить некоторые из $n - 1$ точек на окружности непесекающимися хордами и объявить некоторые из оставшихся точек отмеченными:



- (s) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе неважен³):

0 0 0 0 1 3 0 2 2 1 1 2 2 3 3

- (t) Последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_k \geq 2$), такие что в строке

$$1, a_1, \dots, a_n, 1$$

любое a_i является делителем суммы двух соседей:

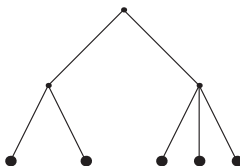
4 3 2 3 5 2 3 2 3 2 5 3 2 3 4

- (u) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_n$, такие что a_i равно количеству $j < i$, для которых $a_j < a_i$:

0 0 0 0 0 2 0 1 0 0 1 1 0 1 2

- (v) Вершины на уровне $n - 1$ у дерева, определяемого (по индукции) так:

- у корневой вершины (единственной вершины на уровне 0) два сына;
- если у вершины (на уровне q) k сыновей, то у её сыновей (на уровне $q + 1$) 2, 3, ..., $k + 1$ сыновей соответственно:



- (w) Последовательности целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $0 \leq a_i \leq n - i$ и из $a_i > 0, a_j > 0$ ($i < j$), $a_{i+1} = \dots = a_{j-1} = 0$ следует $a_i + i < a_j + j$:

0 0 0 0 1 0 1 0 0 2 0 0 1 1 0

- (x) Последовательности целых чисел $a_1, \dots, a_n$, где $1 \leq a_i \leq i$ и если $a_i = j$, то $a_{i-p} \leq j - p$ при $1 \leq p \leq j - 1$:

1 1 1 1 1 2 1 1 3 1 2 1 1 2 3

³ Такие наборы часто называют мультимножествами.

Задача 5. Докажите, что если существует способ разбить числа $1, 2, \dots, k$ на $n + 1$ незацепленных групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел⁴, то $k \leq 2n + 1$.

Определение 3. Числа Нараяны $N_{n,k}$ определяются формулой

$$N_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Задача 6. Докажите, что количество последовательностей из задачи $2c_2$, в которых фрагмент '1 - 1' встречается ровно k раз, состоит из $N_{n,k}$ элементов.

Задача 7. Из предыдущей задачи ясно, что для каждого n

$$\frac{1}{n} \binom{n}{1} \binom{n}{0} + \frac{1}{n} \binom{n}{2} \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n} \binom{n}{n} \binom{n}{n-1} = c_n.$$

Выведите из построенных биекций ещё какие-нибудь тождества про числа $\binom{n}{k}$, c_n , ...

РЕШЕНИЯ

Явная формула

1. (Эйлер.) Получим ещё одно рекуррентное соотношение для чисел c_n . (В качестве интерпретации удобно выбрать количество триангуляций.) Рассмотрим множество пар вида $\langle \text{триангуляция, диагональ из этой триангуляции} \rangle$. Ясно, что в этом множестве $c_n \cdot (n - 1)$ элементов. С другой стороны, есть ровно $n + 2$ диагонали, отсекающие от нашего многоугольника $(i + 2)$ -угольник. Для такой диагонали существует $c_i c_{n-i}$ триангуляций, её содержащих. При этом каждая пара посчитана дважды (для $(i + 2)$ -угольника и для $(n - i + 2)$ -угольника). Отсюда

$$(n - 1)c_n = \frac{1}{2}(n + 2)(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1).$$

Легко видеть, что

$$c_1 c_{n-1} + \dots + c_{n-1} c_1 = c_{n+1} - 2c_n,$$

поэтому $(n - 1)c_n = \frac{1}{2}(n + 2)(c_{n+1} - 2c_n)$ и $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n + 1)}{n + 2}$, откуда немедленно следует явная формула.

⁴ Как в задаче 3р).

Это решение не является ни наиболее коротким из известных, ни наиболее «естественным». Решение, основанное на так называемом «принципе отражений», можно найти в [1]; решение, использующее лемму Рени, приведено ниже. В работе [ЕК]⁵ явная формула доказана по индукции с использованием рекуррентного соотношения (легко получаемого из интерпретации $2c_2$)

$$c_n + \binom{1}{1}c_{n-1} + \binom{3}{2}c_{n-2} + \dots + \binom{2n-1}{n}c_0 = \binom{2n}{n}.$$

Отображения

Ниже приводятся несколько отображений. Большинство из них довольно «естественные»; более того, они оказываются биекциями. (Как правило, доказательства оставлены читателю.)

Несколько наивных биекций

$2c_1 \rightarrow 2c_2$ Очевидно.

$2d \rightarrow 2c_2$ Зафиксируем вершину v . Начнём двигаться из неё по часовой стрелке, записывая в каждой вершине единицу, если мы встречаем выходящую из неё хорду впервые, и минус единицу в противном случае.

$2c_2 \rightarrow 3l$ Вычислим все частичные суммы.

$2c_2 \rightarrow 3n$ Заменим k -ю по счету единицу на число $2k - 1$, а k -ю минус единицу — на число $2k$.

$3e_1 \rightarrow 3e_2$ Очевидность здесь хлипкая: ясно, что есть шанс, что ограничение композиции отображений $3c \rightarrow 2c_2 \rightarrow 2c_1$ на рассматриваемые деревья может подойти. После построения той из этих двух биекций, которая пока не описана, так и выйдет.

$3k \rightarrow 3i_1$ Вычислим разности: $a_i \mapsto a_{i+1} - a_i$.

$3k \rightarrow 3i_2$ Тоже несложно:

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_n, a_{n-1} - a_n, a_{n-2} - a_{n-1}, \dots, a_2 - a_1).$$

$3j \rightarrow 2c_1$ Добавим в конец пути одно горизонтальное ребро и необходимое количество вертикальных, чтобы попасть в точку (n, n) .

$3f \rightarrow 3j$ Заменим каждый шаг по диагонали на шаг вправо.

⁵ Расшифровку обозначений для команд, образованных участниками конференции при решении задач этого цикла, см. в разделе «Библиографические указания».

Классические биекции с деревьями

Начнём с нескольких стандартных определений. Рассмотрим дерево T и его вершины v и w . Будем говорить, что v — *брат* w , если они являются сыновьями одной и той же вершины. *Алгоритмом поиска глубины один DFS(T)*, применяемым к (плоскому) дереву T , назовём выбор пути (последовательности вершин) в дереве T , начинающегося и заканчивающегося в корневой вершине, причём обход (порядок вершин в последовательности) происходит по следующим правилам:

- если T состоит из одной вершины, то обход прекращается;
- пусть v — самый левый сын корневой вершины (соединённый с ней ребром e), T_v — поддерево с корнем v . Тогда пройдем в v [по ребру e], выполним *DFS(T_v)*, затем поднимемся в корень по ребру e и применим *DFS* к дереву, полученному удалением из дерева T поддерева T_v (вместе с ребром e).

Стандартной нумерацией вершин дерева назовём их нумерацию в порядке первого появления при выполнении алгоритма *DFS*.

3b $\rightarrow$ 2b Двигаясь слева направо по листьям дерева, расставим на них метки — буквы, которые мы хотим перемножить. Каждую вершину, сыновья которой уже помечены, будем помечать произведением меток её сыновей. Метка корня дерева будет соответствовать способу расстановки скобок.

3b $\rightarrow$ 2c₂ Будем выполнять алгоритм *DFS*, записывая единицу при первом проходе по каждому левому ребру и минус единицу при первом проходе по каждому правому ребру.

3c $\rightarrow$ 2c₂ Будем выполнять алгоритм *DFS*, записывая единицу при каждом проходе вниз по ребру и минус единицу при каждом проходе вверх по ребру.

3b $\rightarrow$ 3a Сотрём все листья (вместе с идущими в них рёбрами).

2a $\rightarrow$ 3a Выберем произвольную сторону ℓ многоугольника. Построим *дерево*, вершины которого соответствуют треугольникам триангуляции (причём корень соответствует треугольнику со стороной ℓ), а две вершины соединены ребром, если соответствующие треугольники имеют общую сторону.

3c $\rightarrow$ 2d Фиксируем одну из $2n$ «коротких» дуг ω . Вершинами дерева будут области, на которые круг разбит хордами, корнем — та из областей, у которой ω — часть границы. Две вершины соединены, если соответствующие области граничат.

$3b \rightarrow 3c$ Склеим вершины v и w (удалив соединяющее их ребро), если v является правым сыном w .

$3e_2 \rightarrow 3c$ Склеим корневую вершину с самым левым её сыном (удалив соединяющее их ребро).

Триангуляции, скобочные структуры и таблицы Юнга

$2a \rightarrow 2b$ Пусть ℓ — произвольная сторона многоугольника. Двигаясь от ℓ против часовой стрелки, расставим на всех сторонах многоугольника, кроме ℓ , метки — буквы, которые мы хотим перемножать. Для данной триангуляции найдем треугольник ABC , на сторонах AB и BC которого стоят метки p и q соответственно. Удалим этот треугольник, а на стороне CA поставим метку (pq) . Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на стороне ℓ не появится метка. Эта метка и есть соответствующий способ расстановки скобок.

Замечание. Классическая биекция с $3b$, являющаяся и композицией отображений $3b \rightarrow 3a \rightarrow 2a$, и композицией отображений $3b \rightarrow 2b \rightarrow 2a$, приведена в книжке [5], которая выдавалась в подарок участникам конференции.

$2b \rightarrow 2c_2$ Приведём сразу два отображения.

Менее Научное Отображение: сотрём все правые скобки и заменим каждую левую скобку на единицу, а каждую букву (кроме последней) — на минус единицу.

Более Научное Отображение: заменим каждый знак умножения на единицу, а каждую правую скобку на минус единицу. (Это соответствует выполнению умножений на «стековом калькуляторе».)

Пример 1. Композиция первого из этих отображений и обратного ко второму (или наоборот) даёт некоторое отображение, переставляющее объекты одной и той же интерпретации. Для каких интерпретаций это отображение допускает «естественное» описание?

$2a \rightarrow 2c_2 \rightarrow 3q$ Построим целую серию биекций. Обозначим через $A_{n,k}$ множество способов провести k непересекающихся диагоналей в $(n+2)$ -угольнике. Обозначим через $B_{n,k}$ множество стандартных $(n+k+1)$ -таблиц Юнга формы

$$(k+1, k+1, 1^{n-1-k}),$$

где 1^{n-1-k} символизирует единицу, повторенную $n-1-k$ раз. Наконец, обозначим через $C_{n,k}$ множество последовательностей целых чисел $a_1, \dots, a_{n+k+1}$, таких что:

- каждый из членов последовательности либо равен минус единице, либо положителен;
- количество минус единиц равно n ;
- все частичные суммы неотрицательны, а сумма всех членов последовательности равна нулю.

Мы построим биекции $A_{n,k} \rightarrow B_{n,k} \rightarrow C_{n,k}$. (Заметим, что множества с параметром k , равным $n - 1$, совпадают с множествами, перечисленными в заголовке этого фрагмента.)

$A_{n,k} \rightarrow B_{n,k}$ Сотрём нижнюю сторону многоугольника. В результате образуются отдельные отрезки и многоугольники, в которых проведены диагонали. Пусть всего тех и других m штук. Можно считать, что им уже сопоставлены некоторые последовательности (отрезку сопоставляем пустую последовательность). Построим последовательность так: запишем число $m - 1$, после чего обойдем получившиеся многоугольники и отрезки по часовой стрелке, записывая для каждого сопоставленную ему последовательность и ставя после неё минус единицу. Закончив, уберём последнюю минус единицу.

$B_{n,k} \rightarrow C_{n,k}$ Обозначим через $b_1, \dots, b_{d+1}$ подпоследовательность всех положительных членов нашей последовательности. Теперь для каждого числа i от единицы до $n + d + 1$ выполним следующее предписание:

- если $a_i \geq 1$, дописываем число i в первую строку таблицы;
- если $a_i = -1$ и при этом число минус единиц с меньшими номерами равно некоторой частичной сумме последовательности $b_1, \dots, b_{d+1}$, дописываем число i во вторую строку таблицы;
- иначе дописываем число i в первый столбец (начиная с третьей строки).

Пример 2. Изучите, как устроено последнее отображение при $k = n - 1$. Очень просто, не правда ли?

Пример 3. Докажите, что число элементов в множестве $A_{n,k}$ равно $\frac{1}{n+k+2} \binom{n+k+2}{k+1} \binom{n-1}{k}$.

$3q \rightarrow 3z$ Рассмотрим таблицу из задачи $3q$. Вычеркнув из неё числа от $n + 1$ до $2n$, получим первую таблицу из задачи $3z$. Если вычеркнуть, наоборот, числа от 1 до n , повернуть таблицу на 180° и заменить каждое число i на $2n + 1 - i$, то получим вторую таблицу.

Замечание 1. С помощью принципа отражений (см. [1]) и биекции с путями, аналогичной $3q \rightarrow 2c_1$, можно доказать, что количество

стандартных таблиц формы $(n - k, k)$ равно $c_{n,k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$. Числа $c_{n,k}$ образуют *треугольник Каталана*, который многим похож на треугольник Паскаля и в последнее время нередко встречается в математических сюжетах. Некоторые тождества из приводимого ниже решения задачи 7 естественно выписывать именно в терминах этого треугольника.

Перестановки, избегающие данную: теорема Дилуорса, RSK и всё такое

$3m \rightarrow 2c_1$ Рассмотрим перестановку $a_1, a_2, \dots, a_n$, удовлетворяющую условию задачи (такие перестановки по понятной причине называют 321-избегающими). Обозначим через b_i количество пар $a_j < a_i$, таких что $j > i$. Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ — это все такие p , что $b_p \neq 0$. Построим путь на клетчатой бумаге следующим образом: двигаемся направо в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, 0)$, затем вверх в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, p_1)$, затем направо в точку $(b_{p_2} + p_2 - 1, p_1)$, затем вверх в точку $(b_{p_2} + p_2 - 1, p_2)$ и т. д. Окончание этого пути выглядит так: из точки $(b_{p_k} + p_k - 1, p_{k-1})$ вверх до точки $(b_{p_k} + p_k - 1, p_k)$, затем направо в точку (n, p_k) и, наконец, вверх в точку (n, n) .

Замечание 2. На самом деле описанное отображение является композицией отображений $3m \rightarrow 3w \rightarrow 2c_1$, где первое отображение есть $a_1, \dots, a_n \mapsto b_1, \dots, b_n$. Хотя это отображение — способ получить из любой перестановки последовательность $b_1, b_2, \dots, b_n$ с $0 \leq b_i \leq n - i$ («код перестановки») — было описано при представлении задач, некоторые участники ([ГК, П, Т]) предпочли решать задачу $3m$ другим, более простым способом. Они предложили следующее отображение $3m \rightarrow 3h$:

$$a_1, \dots, a_n \mapsto a'_1, \dots, a'_n,$$

где $a'_k = \min_{i \geq k} a_i$. Это отображение имеет смысл для любой перестановки, но оказывается, что если так кодировалась 321-избегающая перестановка, то её можно восстановить однозначно. Причина этого кроется в теореме Дилуорса: в частично упорядоченном множестве длина максимальной *антицепи* (куска из попарно несравнимых элементов) равна числу *цепей* (кусков из попарно сравнимых элементов). Перестановка индуцирует частичный порядок на числах от 1 до n : $a \prec b$, если $a < b$ и a стоит правее b в перестановке. Изучаемые перестановки суть те, для которых в соответствующем частично упорядоченном множестве нет антицепей длины три. Из теоремы Дилуорса следует,

что такую перестановку можно разбить на не более чем две возрастающие подпоследовательности. После этого уже легко построить обратное отображение.

Замечание 3. Наметим построение биекции $3m \rightarrow 3z$. Для этого удобно описать несколько более общую биекцию: алгоритм Робинсона—Шенстеда—Кнута (алгоритм RSK), сопоставляющий перестановке чисел $1, 2, \dots, n$ пару стандартных n -таблиц Юнга одинаковой формы. При этом оказывается, что количество строк в соответствующей диаграмме Юнга равно наибольшей из длин убывающих подпоследовательностей, что нам и требуется.

Будем читать нашу перестановку слева направо, корректируя таблицы. Инвариант: на ℓ -м шаге есть две таблицы одинаковой формы, причём если занумеровать первые ℓ чисел в перестановке в порядке возрастания числами от единицы до ℓ , то алгоритм изготовит как раз имеющуюся у нас пару таблиц. Опишем способ найти в первой таблице место для очередного числа a_k (процедура «выпихивания»). Если оно больше всех чисел первой строки таблицы, запишем его в конец этой строки. В противном случае найдем первое число a , которого оно меньше, запишем число a_k на его место и применим процедуру выпихивания к оставшейся части таблицы (без первой строки) для поиска места числу a .

Построение второй таблицы значительно проще. Просто в каждую клеточку надо вписать номер шага, на котором она появилась.

Замечание 4. Постройте обратное отображение и докажите свойство этой биекции, анонсированное выше.

$3m \rightarrow 3v$ Построим дерево T_0 следующим образом. Вершины уровня $n - 1$ соответствуют перестановкам из задачи $3m$. Две вершины (на j -м и $(j + 1)$ -м уровнях) соединены ребром, если первая из соответствующих перестановок является подпоследовательностью второй (т. е. получается выбрасыванием числа $j + 2$). Тогда T_0 совпадает с деревом из задачи $3v$.

$3y \rightarrow 2b$ Определим алгоритм *стековой сортировки* (SS) последовательности A :

- $SS(\emptyset) = \emptyset$;
- $SS(A_1 x A_2) = x SS(A_1) SS(A_2)$, если x — наименьший элемент в последовательности $A_1 x A_2$.

Перестановку A (рассматриваемую как последовательность) назовём *поддающейся сортировке*, если $SS(A) = 1, 2, \dots, n$. Тогда 312-избегаю-

шие перестановки оказываются поддающимися сортировке, и наоборот. Изоморфизм же стековой сортировки с выполнением умножений очевиден.

Замечание 5. Отметим, что для любой перестановки σ чисел 1, 2, 3 множество σ -избегающих перестановок чисел 1, ..., n состоит из c_n элементов. Действительно, отображение

$$a_1, \dots, a_n \mapsto a_n, \dots, a_1$$

отождествляет 123-избегающие перестановки с 321-избегающими, 213-избегающие — с 312-избегающими, а 231-избегающие — с 132-избегающими. А отображение

$$a_1, \dots, a_n \mapsto n+1-a_n, \dots, n+1-a_1$$

отождествляет 213-избегающие перестановки с 132-избегающими, а 231-избегающие — с 312-избегающими. Наконец, композицией наших биекций можно отождествить 123-избегающие перестановки с 312-избегающими. Если σ — перестановка четырёх элементов, то такого эффекта уже не наблюдается. Например, отношение количества 2143-избегающих перестановок чисел 1, 2, ..., n к количеству 1234-избегающих перестановок стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (это не очень просто доказать...).

$3y \rightarrow 3x$ Последовательности $a_n - 1, \dots, a_1 - 1$ — это просто коды 312-избегающих перестановок из задачи $3y$.

Разбиения на группы: метод «инструкций сверху»

Этот раздел посвящён изложению идей работы [П].

$3c_2 \rightarrow 3\wp$ Заменим в последовательности из $2c_2$ все фрагменты '1 -1' на '0' (одновременно). Получившаяся последовательность из единиц, минус единиц и нулей обладает следующими свойствами:

- количество единиц равно количеству минус единиц;
- общее количество единиц и нулей равно n ;
- все частичные суммы неотрицательны;
- отсутствуют фрагменты '1 -1'.

(Приведённое отображение — биекция между множеством из задачи $2c_2$ и множеством таких последовательностей.)

Объясним, как построить из такой последовательности разбиение из задачи $3\wp$. Сначала откроем новую группу (здесь и далее 'откроем' означает 'создадим', 'закроем' — 'перестанем добавлять элементы'; группа, открытая последней и ещё не закрытая, называется текущей) и запишем в эту группу 1. Далее будем действовать так. Рассмотрим очередной элемент a_i :

- если $a_i = 0$, закроем текущую группу и откроем новую группу с первым элементом $i + 1$;
- если $a_i = 1$, откроем новую группу с первым элементом $i + 1$;
- если $a_i = -1$, закроем текущую группу и запишем $i + 1$ в ту группу, которая стала текущей.

Это решение интересно тем, что идея сопоставления последовательности процесса построения разбиения на группы может быть прекрасно реализована в каждой из предложенных задач о разбиениях на группы. Для полноты картины приведём соответствующие отображения для задач $3o$ и $3r$. Для задачи $3o$ возьмём в качестве управляющей последовательности последовательность из задачи $2c_2$ без малейших изменений. Рассмотрим очередной элемент a_i :

- если $a_i = 1$ и i нечётно, то откроем новую группу (пока не помещая туда ничего);
- если $a_i = 1$ и i чётно, то положим в текущую группу $i/2$;
- если $a_i = -1$ и i нечётно, то ничего не делаем;
- если $a_i = -1$ и i чётно, то положим в текущую группу $i/2$ и закроем эту группу.

В случае задачи $3r$ заменим последовательность $a_1, \dots, a_{2n}$ из задачи $2c_2$ на последовательность длины $4n + 2$:

$$b_1 = 1, \quad b_{2k} = b_{2k+1} = a_k, \quad b_{4n+2} = -1$$

и будем выполнять инструкции, описанные выше.

Разбиения на группы: биекции с хордовыми диаграммами

Отображения из этого раздела предложены в работе [Т]. Здесь тоже налицо преимущество единообразия подхода.

$3r \rightarrow 3o$ Разрежем окружность в произвольной точке, не совпадающей ни с одной из данных, и развернём её в отрезок. Хорды станут дугами, расположенными в одной полуплоскости. Они разбивают эту полуплоскость на несколько частей. Отрезок разбит концами дуг и отмеченными точками на n отрезков. Разбивка этих отрезков на группы осуществляется так: то, в какую часть полуплоскости, определяемую проведенными дугами, попал отрезок, даёт «первичную разбивку» (два отрезка из разных частей полуплоскости заведомо в разных

группах), а отмеченные точки определяют окончательную разбивку (два отрезка в одной части полуплоскости в одной группе, если между ними нет отмеченных точек). Незацепленность групп очевидна.

$2d \rightarrow 3p$ Прделаем ту же операцию, что и выше. Здесь отрезков получится как раз $2n + 1$, а «первичная разбивка» является окончательной. Выполнение нужных условий очевидно.

$2d \rightarrow 3p$ Для каждой пары соседних точек, соединённых хордой, стянем дугу, соединяющую эти точки, в одну отмеченную точку, получив конфигурацию из задачи $3g$ (для некоторого количества точек). По каждой такой конфигурации построим разбивку на группы, как сказано выше. Выполнение нужных условий очевидно.

Разбиения на группы: древесные вариации

В работе [ГК] для решения задачи 5 была предложена конструкция, которая в качестве побочного продукта даёт биекцию $3p \rightarrow 3s$. А именно, назовём *выпуклой оболочкой* данной группы множество всех чисел, не меньших её наименьшего элемента и не больших наибольшего. Для любой группы A числа, остающиеся после выбрасывания из выпуклой оболочки этой группы всех элементов этой группы, можно единственным образом разбить в объединение непесекающихся выпуклых оболочек некоторых групп $A_1, \dots, A_{n(A)}$. Теперь построим дерево так: его вершинами будут группы, причём сыновья вершины, соответствующей группе A , — это в точности определённые выше группы $A_1, \dots, A_{n(A)}$. Корень дерева — это группа, содержащая числа 1 и $2n + 1$ (про которые легко доказать, что они в одной группе — см. решение задачи 5).

Замечание 6. Аналогичное отображение на языке скобочных структур предложено в работе [БС]: нужно выписать числа в строчку и поставить открывающую скобку перед наименьшим числом каждой группы и закрывающую — после наибольшего.

Пример 4. Если применить это отображение в других задачах про разбивку на группы, то получится некая древесная структура. Можно ли её явно описать?

Лемма Рени: явная формула для чисел Нараяны и другие применения

В этом разделе будет доказано классическое утверждение, называемое обычно леммой Рени, и объяснено его применение в задачах

о путях на клетчатой бумаге. Сходные рассуждения имеются в книгах [1], [3].

Лемма (Рени). Пусть $a_1, \dots, a_{2n+1}$ — последовательность единиц и минус единиц, причём сумма её членов равна единице. Тогда среди её циклических сдвигов, т. е. последовательностей вида

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n+1}, a_1, \dots, a_{k-1},$$

найдётся ровно один, все частичные суммы которого положительны.

Доказательство. В самом деле, по крайней мере один найдётся: достаточно взять сдвиг, при котором первым окажется такое число a_k , что $(k-1)$ -я частичная сумма исходной последовательности — наименьшая. (Сравните с известной задачей про кольцевую дорогу и бензоколонки: если суммарного запаса бензина достаточно, чтобы проехать круг, то машина с пустым баком может выбрать бензоколонку, стартовав с которой, она сможет проехать круг. Решение идентично: устроим репетицию автопробега с достаточным запасом горючего, после чего стартуем там, где бак был меньше всего заполнен.) Если же таких сдвигов два, то последовательность можно сложить из двух кусков с положительными суммами, что противоречит условию про общую сумму. $\square$

Приведём несколько примеров применения этого утверждения.

Выведем другим способом явную формулу для чисел Каталана. Рассмотрим последовательность из задачи $2c_2$. Добавим к ней единицу в начало. Получим последовательность с положительными частичными суммами, которых, как мы теперь знаем, в $2n+1$ раз меньше, чем всех последовательностей из $n+1$ единиц и n минус единиц (все циклические сдвиги такой последовательности различны, ибо в противном случае числа n и $n+1$ имели бы нетривиальный общий делитель), а таковых ровно $\binom{2n+1}{n}$. Осталось заметить, что $\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Сходным образом можно вывести явную формулу для чисел Нараяны из задачи б. А именно, пусть последовательность $A = (a_1, \dots, a_{2n})$ удовлетворяет условиям задачи $2c_2$. Рассмотрим последовательность $1, a_1, \dots, a_{2n}$. Обозначим через b_i количество единиц между $(i-1)$ -й и i -й минус единицей ($1 \leq i \leq n$). Лемма Рени показывает, что соответствие $A \leftrightarrow A'$ устанавливает биекцию между множеством последовательностей из задачи $2c_2$ и множеством последовательностей из $n+1$ единиц и n минус единиц с точностью до циклических сдвигов; ясно также, что соответствие $A' \leftrightarrow B$ устанавливает биек-

цию между последним множеством и множеством последовательностей из n неотрицательных целых чисел с суммой $n + 1$ (тоже с точностью до циклических сдвигов). Вновь отсутствие общих делителей у чисел n и $n + 1$ гарантирует, что все циклические сдвиги такой последовательности различны. Таким образом, количество этих последовательностей с точностью до сдвигов равно N/n , где N — общее число таких последовательностей. Рассмотрим только пути с k фрагментами ‘1 -1’. Для таких последовательностей среди чисел $b_1, \dots, b_n$ найдётся ровно k ненулевых. Таким образом, нам нужно подсчитать количество целочисленных последовательностей $c_1, \dots, c_n$, где $c_1 + \dots + c_n = n + 1$, $c_i \geq 0$ и ровно k элементов отлично от нуля. Это число равно $\binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$ (первый множитель отвечает за выбор мест для ненулевых элементов, а второй — за разбиения числа $n + 1$ в упорядоченную сумму k ненулевых слагаемых), откуда и получается требуемая формула.

Другой способ доказательства формулы для чисел Нараяны состоит в получении рекуррентного соотношения на количество рассматриваемых путей. А именно, если обозначить это количество $N'_{n,k}$, то верны равенства

$$N'_{n,1} = 1, \quad N'_{n,n-1} = 1, \quad kN'_{n,k} = (2n - k)N_{n-1,k-1} + kN_{n-1,k}.$$

Первые два равенства очевидны, для доказательства третьего удалите из последовательности всеми способами (их k) фрагмент ‘1 -1’. Теперь равенство $N_{n,k} = N'_{n,k}$ легко доказать по индукции.

Наконец, лемма Рени полезна для изучения интерпретации чисел Каталана из задачи 3s. Приводимое ниже рассуждение не претендует на полное раскрытие комбинаторной природы этой интерпретации. Вообще, эта задача имеет особый статус: единственное «биективное» решение, известное мне (и не улучшенное во время конференции), является весьма косвенным. По сути, вся его биективность израсходована на доказательство того, что число таких наборов равно c_n ; хорошей же биекции с другой интерпретацией не видно, поэтому завершается рассуждение весьма расплывчатыми объяснениями. Впрочем, придирчивый читатель может отметить, что в ряде случаев, когда биекция была неявной, — например, когда построение ведется по индукции (а такие биекции встречаются в этом тексте), — никаких сожалений по этому поводу не встречалось.

Для краткости обозначим через M_n множество всех рассматриваемых наборов. Для каждого набора $A = [a_1, \dots, a_n] \in M_n$ определим его

сдвиги

$$s_i(a) = [(a_1 + i) \bmod (n + 1), \dots, (a_n + i) \bmod (n + 1)] \quad (1 \leq i \leq n).$$

Поскольку сумма элементов в $s_i(a)$ сравнима с $-i$ по модулю $n + 1$, мы видим, что каждый набор $[b_1, \dots, b_n]$, где $0 \leq b_i \leq n$, либо принадлежит множеству M_n , либо является сдвигом одного из элементов множества M_n . Таким образом, установлена биекция между $n + 1$ копиями множества M_n и множеством всех наборов $[b_1, \dots, b_n]$ длины n , где $0 \leq b_i \leq n$. Поскольку мы рассматривали неупорядоченные наборы, можно считать, что $b_1 \leq \dots \leq b_n$. С использованием обратного отображения к отображению $2c_1 \rightarrow 3h$ мы можем построить путь на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) (использующий шаги $(1, 0)$ и $(0, 1)$), т. е. последовательность из единиц и минус единиц. Как получить теперь последовательность из задачи $2c_2$? Надо к нашей последовательности дописать единицу и выбрать её единственный циклический сдвиг с положительными частичными суммами. После этого начальную единицу надо отбросить и объявить, что полученная последовательность из задачи $2c_2$ и есть результат нашей деятельности.

Смесь: бесхозные отображения, комбинаторные тождества и всё такое

$3f \rightarrow 2c_1$ ([БС, П, Т]) Заменяем каждый шаг по диагонали на пару шагов «вверх—вправо» и добавим шаг вправо в начало пути и шаг вверх в конец пути.

$3b \rightarrow 3r$ Рассмотрим стандартную нумерацию вершин. Отнесём две вершины к одной группе, если одна из них является правым сыном другой.

$3k \rightarrow 2c_2$ Пусть $b_i = a_i - a_{i+1} + 1$ (положим $a_{n+1} = 0$). Заменяем a_i на фрагмент $'1 \ -1^{b_i}'$ (где через a^n обозначено a , повторенное n раз).

$3c \rightarrow 3i_2$ Будем выполнять алгоритм *DFS*, записывая при первом проходе через вершину v число, на 1 меньшее числа её сыновей (для каждой вершины, кроме последней).

$3d \rightarrow 2c_2$ Для параллеломино со столбцами высоты $C_1, C_2, \dots, C_k$ обозначим через a_i число (единичных) квадратов в C_i , а через b_i — число строк, пересекающихся и с C_i , и с C_{i+1} . Пусть соответствующая этому параллеломино последовательность состоит из k фрагментов, i -й из которых имеет вид

$$'1^{a_i - b_{i-1} + 1} \ -1^{a_i - b_i + 1}'.$$

(Мы считаем, что $b_0 = 0$.)

Участники конференции нашли другой способ описать биекцию между этими множествами. Будем рисовать параллеломино следующим образом: первое ребро нижнего пути, первое ребро верхнего пути, второе ребро нижнего пути, второе ребро верхнего пути и т.д., записывая каждый раз для шага вверх (вправо) верхнего пути $1(-1)$, а для нижнего пути — наоборот. Нарисовав параллеломино, удалим первую единицу и последнюю минус единицу.

$3g \rightarrow 2c_2$ Занумеруем точки числами $1, 2, \dots, n+1$ слева направо. Пусть точка с номером i соединена с a_i точками, номера которых больше, чем i . Рассмотрим последовательность из $n+1$ фрагментов, i -й из которых имеет вид ' $1^{a_i} -1$ '.

Пример 5 (ещё одна интерпретация чисел Каталана). Перестановка $a_1, \dots, a_k$ чисел $1, \dots, k$ называется *up-down перестановкой*, если $a_k < a_{k-1} > a_{k-2} < \dots$. Докажите, что множество тех up-down перестановок чисел $1, \dots, 2n+1$, в которых локальные минимумы (числа на нечётных местах) возрастают (слева направо) и локальные максимумы (числа на чётных местах) возрастают, состоит из c_n элементов.

$2c_1 \rightarrow 3h$ Рассмотрим путь L на клетчатой бумаге. Пусть очередной член последовательности a_i равен площади фигуры, ограниченной прямыми $y = -1$, $x = i-1$, $x = i$ и путем L .

$3v \rightarrow 3h$ Для данной вершины v рассмотрим единственный путь длины $n-1$ (т.е. проходящий через n вершин $v_1, \dots, v_n = v$) из корня в вершину v . Обозначим через b_i число сыновей вершины v_i . Положим $a_i = i + 2 - b_i$.

$3v \rightarrow 3u$ Пометим корень числом 0, а двух его сыновей — числами 0 и 1. Затем пометим все остальные вершины, руководствуясь следующим правилом. Пусть v — вершина на уровне n , уже помеченная числом j . Пусть братья вершины v , помеченные числами, меньшими j , имеют метки $\ell_1, \dots, \ell_i$. Тогда вершина v имеет $i+2$ сыновей, и мы помечаем их числами $\ell_1, \dots, \ell_i, j, n$. Каждой вершине уровня $n-1$ сопоставим последовательность меток на единственном пути длины $n-1$ из корня в эту вершину.

Пример 6 (выполнено в работе [К]). Докажите, что при таком способе расстановки меток количество вершин на уровне n , помеченных числом j , равно $c_j c_{n-j}$.

Замечание 7. Для большинства целочисленных последовательностей, рассматриваемых в задаче 3 (и некоторых других интерпретаций, например $3g$), можно проверить, что при попытке организовать

разумный перебор всех объектов данной интерпретации, дерево перебора совпадает с деревом из 3v. Наиболее последовательно это проверялось в работе [K].

$3t \rightarrow 2s_2$ Рассмотрим последовательность $1, a_1, \dots, a_n, 1$. (Положим $a_0 = a_{n+1} = 1$.) Ясно, что равенство $a_i = a_{i+1}$ никогда не выполняется (иначе все a_j , в том числе единица, должны быть кратными a_i). Поэтому найдётся хотя бы одно такое i , что $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$. Поскольку число $a_{i-1} + a_{i+1}$ кратно a_i и меньше, чем $2a_i$, оно должно быть равно a_i . Когда мы удалим из последовательности число a_i , получится последовательность на один элемент короче, которая тоже удовлетворяет исходному условию делимости. И наоборот, всякую последовательность можно удлинить, добавив число $a_i + a_{i+1}$ между числами a_i и a_{i+1} . Будем повторять эту операцию (стартовав с последовательности $1, 1$), но при добавлении $a_i + a_{i+1}$ между a_i и a_{i+1} будем вставлять флажок перед a_i и после этого изменять последовательность только справа от последнего флажка. Расположение n флажков полностью определяет последовательность $a_1, \dots, a_n$, и флажки предшествуют соответствующим числам. Заменим каждый флажок на единицу, а каждое число a_j ($1 \leq j \leq n$) — на минус единицу.

$2a \rightarrow 3t$ (Эта материализация рассуждения из предыдущего решения предложена в работе [T].) Выберем сторону AB данного многоугольника. Пометим вершины A и B числом 1. Рассмотрим некоторую триангуляцию. Если в треугольнике PQR вершины P и Q помечены числами x и y соответственно, пометим вершину R числом $x + y$. Будем действовать таким образом, пока не пометим все вершины. Прочитаем метки по кругу начиная с вершины A , чтобы получить последовательность из $3t$.

$3r \rightarrow 3i_1$ Выберем произвольную вершину v . Начнём двигаться из неё по часовой стрелке, записывая в каждой вершине:

- 1, если она помечена или является концом ранее не встречавшейся хорды;
- $-1 - p$, если это второй конец некоторой хорды и на стягиваемой этой хордой дуге ω отмечено ровно p точек, не принадлежащих другим дугам, содержащимся в ω ;
- 0 иначе.

$3s_2 \rightarrow 3r$ Начнём с одной Очень Полезной Биекции: мы отождествим множество из задачи $3s_2$ с множеством последовательностей

длины $n - 1$ из чисел ± 2 и « ± 0 » с неотрицательными частичными суммами. А именно: удалим первую единицу и последнюю минус единицу, разрежем последовательность на куски длины 2 и заменим каждый кусок на сумму чисел в нём. (Чтобы различать ' $1 - 1$ ' и ' $-1 1$ ', мы должны иметь нули двух сортов.) Это отображение является биекцией (чтобы убедиться, что частичные суммы неотрицательны, заметим, что частичные суммы с нечётными номерами для последовательности из задачи $2c_2$ положительны). Теперь отметим точки, помеченные нулём «первого сорта», и соединим точки, помеченные числами ± 2 , в соответствии с отображением $2d \rightarrow 2c_2$. (С точками, помеченными нулём «второго сорта», ничего делать не нужно.)

$3a \rightarrow 3o$ Указание. Придумайте модификацию отображения $3b \rightarrow 3p$.

$3p \rightarrow 3o$ ([КЛП]; сравните с предыдущим отображением.) Выбросим нечётные числа и поделим чётные на 2.

$3u \rightarrow 3o$ ([БС, КЛП].) Отнесем числа i и j в одну группу, если $a_i = a_j$.

$3u \rightarrow 3h$ ([ГК, Т].) Переставим числа в неубывающем порядке и прибавим к каждому числу 1.

$3x \rightarrow 3a$ Построим двоичное дерево $T(a_1, \dots, a_n)$ по следующим правилам. Положим $T(\emptyset) = \emptyset$. Если $n > 0$, определим *левое корневое поддерев* дерева $T(a_1, \dots, a_n)$ как $T(a_1, \dots, a_{n-a_n})$, а *правое* — как $T(a_{n-a_n+1}, \dots, a_n)$.

$3x \rightarrow 3u$ (Это замечательно простое⁶ отображение взято из работы [БС].)

$$a_1, \dots, a_n \mapsto 1 - a_1, 2 - a_2, \dots, n - a_n.$$

$3h \rightarrow 2c_1$ Будем использовать терминологию последовательностей из единиц и минус единиц (вспомните биекцию $2c_1 \rightarrow 2c_2$). Заменим одновременно все пары шагов ' $-1 1$ ', для которых частичная сумма, заканчивающаяся на минус единице, равна нулю, на ' $1 - 1$ ' и удалим единицу в начале и минус единицу в конце.

$3h \rightarrow 3e_1$ ([КЛП].) Для каждой горизонтальной стороны чётной длины (не менее 4, ибо иначе она заканчивается на прямой $y = x - 2$), которая пересекает прямую $y = x - 2$ в точке A , найдем предыдущую точку B пересечения нашего пути с прямой $y = x - 2$ и сдвинем часть пути от точки A до точки B , убрав один вертикальный шаг после точ-

⁶ Особенно разителен контраст со сложностью формулировки.

ки A и добавив один такой шаг до точки B . В результате получится путь без сторон чётной длины.

$3s_2 \rightarrow 3\check{\nu}$ Вспомним Очень Полезную Биекцию, использованную в биекции $3s_2 \rightarrow 3r$. Заменяем каждый ноль «первого сорта» на '1 -1', каждый ноль «второго сорта» на '1 1 -1 -1', каждую двойку на '1 1 -1' и каждую минус двойку на '1 -1 -1'. Теперь последовательности из единиц и минус единиц отождествим с путями на клетчатой бумаге обычным образом.

Решения задач 4—7

Определим по пути L (который мы обычным образом отождествляем с последовательностью из единиц и минус единиц) новый путь следующим образом:

- $s(\emptyset) = \emptyset$;
- $s(L_1 X) = L_1 s(X)$;
- $s(\bar{L}_1 X) = 1s(X) - 1L_1^*$,

где L_1 — это путь положительной длины с концами на диагонали, все остальные точки которого лежат строго ниже диагонали; $\bar{L}_1$ — путь, полученный из L_1 заменой $1 \leftrightarrow -1$; L_1^* — это L_1 без первой единицы и последней минус единицы; X — произвольный путь. Тогда отображение s устанавливает биекцию между рассматриваемыми путями и путями из задачи $2c_1$ (где число n заменено на $2n$).

5. (Такой план предложен в работе [К].)

Указание. Обозначим через A_n и B_n соответственно утверждения: «Для $k = 2n + 1$ первое и последнее числа принадлежат одной группе» и «Не существует разбиения чисел $1, 2, \dots, 2n + 2$ на $n + 1$ группу, удовлетворяющего нашим условиям». (Утверждение задачи следует из B_n .) А дальше по индукции:

$$A_1 \Rightarrow B_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots$$

6. Решение этой задачи внимательный читатель уже прочитал в разделе, посвящённом лемме Рени.

7. Приведём несколько тождеств. Из задачи $3r$ можно извлечь тождество Тушара⁷

$$\sum_{k \leq n/2} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} c_k = c_{n+1}.$$

⁷ Оно было известно уже в 20-е гг. XX века, биективное доказательство было получено Л. Шапиро в середине 1970-х гг.

Соответствие RSK (см. с. 153, замечание 3) объясняет, что верно тождество

$$\sum_{k \leq n/2} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right)^2 = c_n.$$

Из задачи 3j можно получить (очевидное) тождество

$$\sum_{k \leq n-1} \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} = c_n.$$

Замечание. Приведём здесь ещё одну материализацию тождества Тушара. Рассмотрим последовательности длины n из чисел $0, 1, 2$, причём k -я частичная сумма не меньше k для любого натурального числа k от единицы до $n-1$ и сумма всех членов последовательности равна n . Построим мультимножество, в котором каждая такая последовательность встречается с кратностью, равной 2^{N_1} , где N_1 — количество единиц в ней. Тогда количество элементов в этом мультимножестве равно n -му числу Каталана. Легко построить биекцию между этой интерпретацией и интерпретациями $2c_2$, $3c_1$. Кроме того, очевидное рекуррентное соотношение даёт тождество Тушара.

Как появился этот текст?

Этот цикл задач был подготовлен специально для 14-й Летней конференции Турнира городов (Белорецк, август 2002 г.). Я благодарен С. Дориченко, пригласившему меня в жюри конференции и предложившему составить цикл задач для возможного использования на конференции.

Изначально задач было меньше: считалось, что вряд ли участники Летней конференции Турнира городов успеют столько за неделю. Тем более, что ситуация не очень привычна, — происходит движение не вглубь, а вширь: мало задач, связанных цепочкой следствий. Однако те участники конференции, кого заинтересовал этот сюжет, стали решать задачи очень бодро, придумывая при этом иногда более естественные и внятно описываемые биекции, чем известные автору. Как следствие этого, к промежуточному финишу пришлось дополнить список интерпретаций чисел Каталана. К окончательному финишу некоторые участники построили биекции, композициями которых можно получить биекцию между любыми двумя интерпретациями.

Я благодарен всем перечисленным участникам конференции: если бы я не наблюдал явный интерес к этому сюжету, вряд ли этот текст был бы написан.

Библиографические указания

Все интерпретации чисел Каталана из задачи 3 были известны и ранее. Как выяснилось, они содержатся либо в [4], либо в приложении к этому тому «Catalan Addendum» (пока, насколько я знаю, не опубликованном даже в оригинале)⁸.

Ссылки на web-страницы, где содержатся английские тексты этих и других текстов про числа Каталана, имеются, например, в замечательной электронной энциклопедии целочисленных последовательностей Нила Слоуна [2]. В книге [1], содержащей огромное количество захватывающих комбинаторных сюжетов, про числа Каталана написано на удивление мало. Впрочем, там можно прочесть про обобщение леммы Рени, связанное с p -деревьями (очевидным обобщением строго двоичных деревьев), и применение производящих функций к выводу явной формулы для чисел Каталана.

Тексты решений во многом основаны на работах участников конференции. В большинстве случаев это специально оговорено, причём использованы следующие обозначения:

- [БС] Дмитрий Бугаев (Омск), Иван Семушин (Киров);
- [ГК] Сергей Гайфуллин (Жуковский),
Каринэ Куюмжиян (Ростов-на-Дону);
- [ЕК] Георгий Есебуа, Антон Ковтун (Харьков);
- [К] Андрей Каменов (Москва);
- [КЛП] Алексей Кислицын, Евгений Лазарев,
Артём Помелов (Киров);
- [П] Евгений Поршнев (Москва);
- [Т] Роман Травкин (Липецк).

Литература

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
2. Sloane N. On-line encyclopedia of integer sequences // www.research.att.com/~njas/sequences
3. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005.
5. Студенческие чтения МК НМУ / Под общей ред. В. Прасолова. Вып. 2. М.: МЦНМО, 2001.

⁸ Доступно на <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>

Алгебра паркетов

И. И. Богданов, Г. Р. Челноков

Задачи о существовании на прямой (в плоскости, в пространстве и т. д.) паркета из транслятов данной фигурки широко представлены как в олимпиадной субкультуре, так и в сфере интересов современной науки. Так, следующая известная проблема, сформулированная неявно Цассенхаузом в 1961 году и затем Штейном (см. [7], [6]), до сих пор не имеет решения. Дана фигурка из конечного числа клеток, транслятами которой можно выложить паркет на плоскости¹. Правда ли, что тогда найдётся (двух)периодический² паркет, состоящий из транслятов этой фигурки?

Этот вопрос интересен ещё и тем, что ответы на близкие вопросы известны. Так, если мы «расширим» свои возможности, разрешив рассматривать паркеты из нескольких разных фигурок, то ответ становится отрицательным (первый пример был построен Р. Берджем [1] в 1964 г.; несколько более простых примеров можно найти в книге [10]). С другой стороны, если мы «сузим» возможности, рассматривая однопериодические паркеты на плоскости, то ответ становится положительным: если фигурка допускает однопериодический паркет, то она допускает и двухпериодический.

С другой стороны, паркеты оказываются тесно связаны с другими областями науки. Так, например, одна из проблем Минковского о приближении вещественных чисел рациональными [4] была решена Хайошем [3] после переформулировки её на язык периодичности паркета для фигурки специального вида (в абелевой группе).

В данной серии рассматриваются в основном паркеты на одномерной полоске. Здесь интерес представляют следующие типы вопросов. Нетрудно понять, что выяснение про любую фиксированную фигурку, является ли она паркетной, можно решить перебором. Однако если мы зададим вопрос про некоторый бесконечный класс фигурок (на-

На основе проекта авторов на XV Летней конференции.

¹ Определения используемых понятий даны непосредственно перед текстом задач.

² Паркет называется однопериодическим, если он переходит в себя при сдвиге на ненулевой вектор; двухпериодическим, если существуют два таких неколлинеарных вектора.

пример, про фигурки фиксированной площади), то уже не так просто понять, как описать все паркетные фигурки этого класса. Такое описание для фигурок, площадь которых является степенью простого числа, было найдено [5] Д. Ньюманом в 1974 г., для других же значений площади этот вопрос ещё более сложен и до конца не изучен. Более того, описание паркетных фигурок площади pq (где p, q — простые числа) было получено только в самом конце XX века (см. [2]).

Данная подборка задач посвящена описанию паркетности фигурки на языке производящих многочленов; этот язык оказывается очень эффективным. В частности, он позволяет доказать критерий паркетности одномерной фигурки простой площади и описать все паркеты таких фигурок; это и есть основные результаты данной серии. Вышеупомянутые результаты, связанные с описанием более общих классов паркетных фигурок, также были получены на том же языке; более того, современные исследования паркетных фигурок основаны в большой степени на развитии этих же идей. Ознакомление с языком производящих многочленов и является одной из главных целей этой статьи, наряду с перечисленными выше самоценными результатами.

Исследование этих же вопросов чисто комбинаторными методами существенно более трудоёмко; так, комбинаторное доказательство частного случая одного из доказанных здесь результатов (а именно — описания одномерных паркетных фигурок площади 3) было одним из основных результатов задачи с X конференции Турнира городов (1999). При этом до сих пор неизвестно, как получить общий результат про фигурки простой площади чисто комбинаторными соображениями; сложность состоит в том, что непонятно, как использовать в подобных рассуждениях простоту площади.

Задачи

Пункты, не являющиеся необходимыми для продвижения по главной линии задачи, отмечены знаком $\S$. Если условие задачи является утверждением, то его и надо доказать.

Мы рассматриваем бесконечную в обе стороны клетчатую полосу ширины 1 (а в задачах 1 и 2 — также клетчатая плоскость и пространство).

Определение. *Фигурка* есть произвольное конечное множество клеток (не обязательно связаное!). *Площадь* фигурки — это количество её клеток. *Транслятом* фигурки называется её образ при параллель-

ном переносе (на целочисленный вектор). *Паркет* — это замощение полосы (плоскости, пространства) транслятами одной фигурки (так, что любая клетка покрыта ровно один раз). Если существует паркет из транслятов данной фигурки, то фигурка называется *паркетной*.

Трансверсалью фигурки $\mathcal{F}$ называется такое множество клеток, что в любом её трансляте содержится ровно одна клетка этого множества. *Барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$* называется такая расстановка (комплексных) чисел в клетках, что сумма чисел в любом трансляте равна нулю. Расстановка чисел называется ограниченной, если существует такое M , что все числа не превосходят M по модулю.

Трансляты, трансверсали и паркеты фигурки $\mathcal{F}$ мы часто будем называть $\mathcal{F}$ -транслятами, $\mathcal{F}$ -трансверсалими и $\mathcal{F}$ -паркетами.

1. В этом пункте мы рассматриваем паркеты на клетчатом пространстве произвольной размерности.

а) Фигурка паркетна тогда и только тогда, когда у неё есть трансверсаль; более того, у неё столько же различных паркетов (может быть, бесконечное число!), сколько различных трансверсалей.

б) Если неодноклеточная фигурка паркетна, то у неё есть нетривиальная (т. е. ненулевая) ограниченная барьерная функция.

с) На одномерной полоске любой паркет периодичен.

д) На одномерной полоске любая барьерная функция фигурки, принимающая конечное множество значений, периодична.

Обозначим через $\bar{\mathcal{F}}$ фигурку, полученную из $\mathcal{F}$ центральной симметрией (относительно точки с целыми или полуцелыми координатами).

е)[‡] Трансверсаль для фигурки $\mathcal{F}$ является также трансверсалью для $\bar{\mathcal{F}}$.

ф)[‡] (По мотивам задачи А. Я. Канеля-Белова с XIX Турнира городов.) Салфетка имеет форму многоугольника. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) как ни положить несколько транслятов такой салфетки на стол, всегда можно вбить несколько гвоздей так, что каждая салфетка прибита ровно одним гвоздем;

(ii) из транслятов салфетки можно выложить паркет.

В начале следующей задачи вводится алгебраический язык, на котором будут проводиться дальнейшие исследования; пункты этой задачи посвящены первоначальному освоению этого языка.

2. Занумеруем клетки полосы целыми числами по порядку так, чтобы самая левая клетка фигурки имела номер 0. Сопоставим фи-

гурке $\mathcal{F}$ многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\substack{i: i\text{-я клетка} \\ \text{принадлежит } \mathcal{F}}} x^i.$$

а) Пусть ε — корень многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$ (заметим, что $\varepsilon \neq 0$). Расставим в клетки числа так: в i -ю клетку поставим ε^i . Докажите, что полученная расстановка является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$, будем называть эту функцию *корневой*. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для клетчатой плоскости.

б)[‡] Фигурка называется *n-паркетной*, если её непересекающимися транслятами можно покрыть полосу длины n . Докажите, что количество *n-паркетных* фигурок не больше, чем $2^{d(n)}$ (здесь $d(n)$ — количество натуральных делителей n , меньших n).

в)[‡] Рассматривается клетчатая плоскость. Фигурка $\mathcal{F}$ (рис. 1) состоит из всех клеток (a, b) : $0 \leq a, b \leq 2k$; фигурка $\mathcal{G}$ (рис. 2) состоит из всех клеток $(2a, 2b)$: $0 \leq a, b \leq 2k$. Докажите, что любая барьерная функция для $\mathcal{F}$ является также барьерной функцией для $\mathcal{G}$.

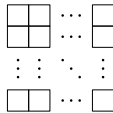


Рис. 1

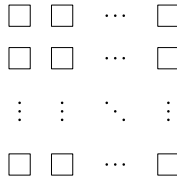


Рис. 2

д)[‡] Рассмотрим расстановки в клетках плоскости остатков по модулю 2. Найдите все такие n , что любая расстановка, являющаяся барьерной для «уголка» (рис. 3), является также барьерной для «треугольника» (рис. 4) со стороной n .

Далее во всех задачах рассматриваются замощения *только* одномерной полосы. Как понятно из первой задачи, одномерным паркетам соответствуют периодические барьерные функции фигурки. Цель следующей задачи — описание всех таких барьерных функций.

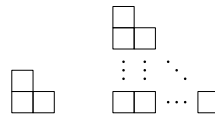


Рис. 3

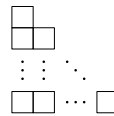


Рис. 4

3. Комплексное число ε называются *корнем n-й степени из единицы*, если $\varepsilon^n = 1$. При этом, если n — наименьшее число такое, что $\varepsilon^n = 1$, то ε называется *примитивным* корнем n -й степени из единицы,

а n — степень этого корня. Множество всех примитивных корней n -й степени из 1 будем обозначать R_n .

а) Пусть последовательность (a_k) периодична с периодом длины n . Докажите, что она представляется в виде

$$a_k = \alpha_1 \varepsilon_1^k + \alpha_2 \varepsilon_2^k + \dots + \alpha_n \varepsilon_n^k, \quad (1)$$

где числа ε_i — это все корни n -й степени из единицы, α_i — фиксированные (комплексные) числа.

б) Докажите, что любая периодическая барьерная функция фигурки $\mathcal{F}$ представляется в виде (1), где ε_i пробегают множество корней из единицы, являющихся корнями многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$.

с) Пусть n_i — степени корней из единицы, являющихся корнями многочлена фигурки. Докажите, что период любого паркета делит НОК(n_i) и делится на площадь фигурки.

д) Как при помощи этой техники доказать задачу 1е) (для полоски)?

Из предыдущей задачи ясно, что периодические барьерные функции (а стало быть, и паркет) фигурки тесно связаны с наличием у её характеристического многочлена корня, являющегося корнем из единицы. При решении дальнейших задач могут потребоваться следующие стандартные сведения о многочленах с такими корнями; ими можно пользоваться без доказательства. Доказательства всех этих фактов можно найти, например, в [8, § 30, 60].

Факты. а) Многочлен с целыми коэффициентами единственным образом раскладывается на неприводимые³ множители с целыми коэффициентами (с точностью до умножения на ± 1 и перестановки сомножителей). Многочлен с комплексными коэффициентами имеет единственное представление вида $a(x - x_1) \dots (x - x_n)$ (с точностью до перестановки сомножителей).

б) Корнями многочлена

$$F_{p^k}(x) = 1 + x^{p^{k-1}} + x^{2p^{k-1}} + \dots + x^{(p-1)p^{k-1}}$$

являются все элементы из R_{p^k} (т.е. все примитивные корни степени p^k из единицы) и только они. Этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$; поэтому, если у многочлена с целыми коэффициентами есть корень, принадлежащий R_{p^k} , то он делится на F_{p^k} .

³ Многочлен с целыми коэффициентами называется *неприводимым* (над $\mathbb{Z}$), если его нельзя представить в виде произведения двух, отличных от ± 1 , многочленов с целыми коэффициентами.

с) Многочлен $F_n(x) = \prod_{\varepsilon \in R_n} (x - \varepsilon)$ неприводим (над $\mathbb{Z}$).

Цель следующей задачи — доказательство критерия паркетности фигурки из p клеток. Фигурки из p клеток мы в дальнейшем будем называть p -фигурками.

Определение. Фигурка называется *несжимаемой*, если попарные расстояния между её клетками взаимно просты в совокупности (т. е. если нельзя выбрать «разрежение» нашей полосы, в котором фигурка целиком лежит). Понятно, что достаточно исследовать паркетность лишь несжимаемых фигурок.

4. Напомним, что R_n — множество всех примитивных корней степени n из 1.

а) У многочлена p -фигурки есть корни $\in R_{p^k}$ при не более чем одном значении k .

б) Если у p -фигурки есть корень $\in R_{p^k}$ при $k > 1$, то она сжимаема.

с) Пусть $\mathcal{F}$ — паркетная фигурка площади n , простое число p делит n . Сколько существует таких k , что у многочлена $\mathcal{F}$ есть корни $\in R_{p^k}$?

д) Несжимаемая p -фигурка паркетна тогда и только тогда, когда номера всех её клеток имеют разные остатки от деления на p .

Для получения дальнейших результатов нужно более подробное исследование многочленов с корнями, являющимися корнями из 1. Следующая задача посвящена этому исследованию. Нетрудно понять, что при исследовании общего вида многочленов, корнем которых является примитивный корень n -й степени из единицы, достаточно ограничиться многочленами степени, не превосходящей $n - 1$.

5. Основным объектом в этой задаче является многочлен вида $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является примитивный корень n -й степени из 1. Такие многочлены мы будем называть n -корневыми.

Пусть n делится на простое p , $n = pt$. Будем называть p -угольным многочленом многочлен вида

$$x^i + x^{i+m} + \dots + x^{i+(p-1)m}, \quad i < m.$$

Определение. *Линейной комбинацией* с рациональными (комплексными и т. п.) коэффициентами выражений $X_1, \dots, X_n$ называется выражение вида $a_1X_1 + \dots + a_nX_n$, где a_i — рациональные (комплексные и т. п.) числа.

а) p -угольный многочлен является n -корневым.

б) Любой n -корневой многочлен представляется как рациональная линейная комбинация p -угольных (при различных p , делящих n).

с) Если все коэффициенты n -корневого многочлена целые, то его можно представить как линейную комбинацию p -угольных многочленов с целыми коэффициентами.

д) Если многочлен, у которого лишь k коэффициентов отличны от нуля, является n -корневым, то он представляется в виде комбинации p -угольных при различных $p \leq k$.

е)[‡] Если сумма пяти корней из 1 равна нулю, то это либо вершины правильного 5-угольника, либо вершины правильного 3-угольника и концы диаметра окружности $|z| = 1$.

ф)[‡] (Сформулирована К. А. Кнопом.) Дан правильный n -угольник. Опишите все пары треугольников, вершины которых являются вершинами n -угольника, а точки пересечения медиан совпадают.

6. Цель данной задачи — доказательство того, что для несжимаемой паркетной p -фигурки существует ровно один паркет (с точностью до параллельного переноса).

а) Для любого составного n есть несжимаемая фигурка площади n , для которой существует более одного паркета.

б) Докажите, что если у p -фигурки есть более одного паркета, то у её многочлена есть корень порядка, делящегося на p и большего p . Обозначим этот порядок n .

с) Докажите, что в этом случае фигурка сжимаема либо в p раз, либо в n/p раз.

Задача, добавленная на промежуточном финише

7. Рассматриваются паркеты на клетчатом квадрате размера $p \times p$, противоположные стороны которого отождествлены (p — простое; такое клеточное множество мы в дальнейшем будем называть *тором* $p \times p$). Эквивалентная переформулировка: рассматриваются покрытия клетчатой плоскости, самосовмещающиеся как при переносе на p клеток вверх, так и при переносе на p клеток влево.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторая p -фигурка на этом торе. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) на тор можно положить несколько транслятов $\mathcal{F}$ так, что каждая клетка покрыта ровно k транслятами ($k < p$);

(ii) на торе существует $\mathcal{F}$ -паркет;

(iii) клетки тора можно так раскрасить в p цветов, что в каждом $\mathcal{F}$ -трансляте все цвета различны.

РЕШЕНИЯ

1. Паркеты, трансверсали и барьерные функции

В этом разделе содержатся решения задач 1a)–1e). Решение задачи 1f) перенесено в приложение.

Ниже для любой фигурки $\mathcal{F}$ мы находим связи между её паркетами, трансверсалими и барьерными функциями, а также аналогичными понятиями для симметричной ей фигурки $\bar{\mathcal{F}}$.

Лемма 1. Отметим в фигурке некоторую клетку и выберем на плоскости клетку A . Рассмотрим множество таких клеток плоскости v , что если $\mathcal{F}$ -транслят лежит отмеченной клеткой на v , то он покрывает клетку A . Тогда это множество есть транслят фигурки $\bar{\mathcal{F}}$, у которого отмеченная клетка лежит на A .

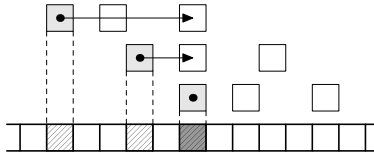


Рис. 5

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов, соединяющих отмеченную клетку фигурки со всеми её клетками. Тогда оба описанных множества клеток, очевидно, совпадают с множеством таких клеток X , что вектор $\overrightarrow{XA}$ лежит в V (см. рис. 5). $\square$

Из этой леммы вытекает, что трансверсали фигурки $\bar{\mathcal{F}}$ находятся в биективном соответствии с паркетами фигурки $\mathcal{F}$. Действительно, рассмотрим произвольное множество клеток T . Положим на каждую его клетку фигурку $\mathcal{F}$ отмеченной клеткой. Согласно лемме 1, произвольная клетка A покрыта столько раз, сколько клеток множества T попадает в соответствующий транслят фигурки $\bar{\mathcal{F}}$. Таким образом, мы получим $\mathcal{F}$ -паркет тогда и только тогда, когда T было $\bar{\mathcal{F}}$ -трансверсалью.

Покажем, что верно большее.

Утверждение. Каждая $\overline{\mathcal{F}}$ -трансверсаль является также $\mathcal{F}$ -трансверсалью.

Иными словами, можно таким же образом строить $\mathcal{F}$ -паркет не по $\overline{\mathcal{F}}$ -трансверсальям, а по $\mathcal{F}$ -трансверсальям!

Доказательство. С учётом построенной биекции достаточно показать, что если в каждом трансляте из $\mathcal{F}$ -паркета выделить одну и ту же клетку, то получится трансверсаль для $\mathcal{F}$.

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

Рис. 6

Обозначим площадь фигурки через n и пронумеруем клетки фигурки $\mathcal{F}$ числами от 1 до n ; точно так же занумеруем клетки любого транслята. Рассмотрим $\mathcal{F}$ -паркет. Поставим в клетки пространства числа от 1 до n : в каждую клетку поставим номер попавшей на неё клетки транслята (см. рис. 6). Покажем, что в любом $\mathcal{F}$ -трансляте все числа различны; отсюда, очевидно, будет следовать требуемое.

Предположим, что в некоторый транслят на клетки A и B попали два одинаковых числа (без ограничения общности — единицы). Пусть A и B являются i -й и j -й клетками этого транслята. Рассмотрим трансляты паркета $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$, первыми клетками которых являются A и B (см. рис. 7). Пусть A_i, B_i — их i -е клетки, а A_j — j -я клетка транслята $\mathcal{F}_A$. Тогда $\overrightarrow{A_i A_j} = \overrightarrow{AB}$, так как это — векторы между i -й и j -й клетками некоторых транслятов; с другой стороны, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_i B_i}$, так как при переносе на этот вектор $\mathcal{F}_A$ совмещается с $\mathcal{F}_B$. Значит, $B_i = A_j$, и трансляты паркета пересекаются; противоречие. Утверждение доказано. $\square$

Рисунки ниже демонстрируют забавное следствие доказанного утверждения: если в $\mathcal{F}$ -паркете (см. рис. 8) каждый транслят отра-

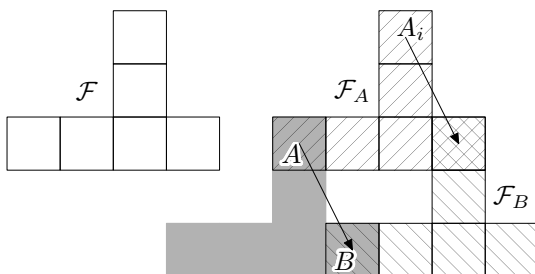


Рис. 7

зять относительно отмеченной в нём точки, то получится $\mathcal{F}$ -паркет (см. рис. 9).

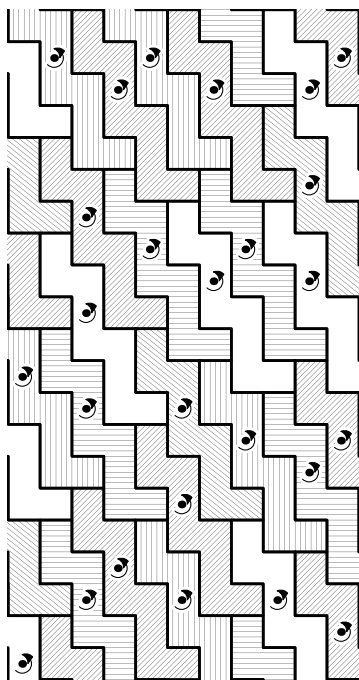


Рис. 8

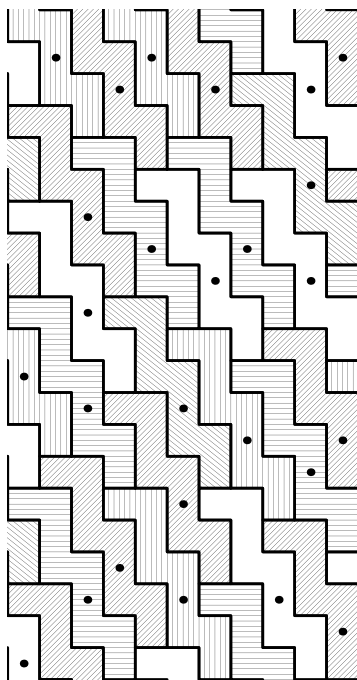


Рис. 9

Для перевода на алгебраический язык нам будет удобнее пользоваться не трансверсалими, а *барьерными функциями*. Мы часто будем сокращать слова «барьерная функция» до БФ.

Как мы вскоре увидим, это понятие лучше для изучения, чем трансверсаль; с другой стороны, по любой трансверсали (а значит, и по любому паркету!) можно построить БФ: в клетки трансверсали поставим числа $n - 1$, а в остальные — по -1 . В каждый транслят попало ровно одно число $n - 1$, поэтому сумма чисел в нём будет равна нулю.

Замечание 1. Заметим, что у нас получается ненулевая БФ только в том случае, когда площадь $\mathcal{F}$ больше единицы. Поэтому далее мы *исключаем* из рассмотрения фигурки площади 1.

Замечание 2. Можно рассматривать также покрытия не в один, а в два слоя (то есть такой набор транслятов, что каждая клетка при-

надлежит ровно двум из них). Нетрудно понять, что таким же образом можно построить БФ по покрытию в два слоя (если площадь фигурки больше двух). Предлагаем читателю понять самостоятельно, сколько различных значений может иметь эта БФ.

В завершение покажем, что любой паркет на одномерной полоске периодичен. Это можно сделать непосредственно, однако нам удобнее получить это как частный случай более общего утверждения: любая барьерная функция, принимающая конечное число значений, периодична.

Докажем это. Пусть расстояние между крайними клетками фигурки равно d . Тогда легко понять, что по значениям БФ на отрезке длины d однозначно восстанавливаются все значения функции. Поскольку наборов значений БФ на конечном отрезке есть лишь конечное число, наборы значений на каких-то двух отрезках совпадут. Параллельный перенос, совмещающий эти отрезки, самосовмещает функцию, то есть она периодична.

Замечание. У фигурки может существовать барьерная функция, принимающая бесконечное число значений; она даже может быть ограниченной. Такие БФ могут пригодиться в исследовании многомерных паркетов; однако для одномерных достаточно ограничиться рассмотрением периодических БФ.

2. Перевод на язык многочленов

В этом разделе содержатся решения пунктов 2b)—2d).

В этом и следующем разделах мы вводим алгебраический язык, на котором удобно говорить о барьерных функциях (и, следовательно, о паркетах). Данный раздел посвящён первоначальному освоению языка производящих многочленов.

Определение. Рассмотрим произвольную фигурку $\mathcal{F}$ на полоске. Занумеруем клетки полоски целыми числами по порядку так, чтобы самая левая клетка фигурки имела номер 0. *Производящим многочленом* фигурки $\mathcal{F}$ назовём многочлен

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\substack{i: i\text{-я клетка} \\ \text{принадлежит } \mathcal{F}}} x^i.$$

Мы часто будем просто называть $P_{\mathcal{F}}(x)$ *многочленом* фигурки $\mathcal{F}$.

Аналогично в двумерном случае, введя на плоскости декартову систему координат, можно сопоставить двумерной фигурке $\mathcal{F}$ много-

член

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{\substack{(i,j): \text{ клетка с координатами } (i,j) \\ \text{принадлежит } \mathcal{F}}} x^i y^j.$$

Введение языка многочленов обусловлено двумя причинами: во-первых, на этом языке удобно записывается паркетность фигурки; во-вторых, это даёт возможность применить хорошо развитый аппарат теории многочленов. В данном разделе мы обсуждаем первую из этих причин; все последующие разделы посвящены второй.

Итак, покажем, как записываются свойства, связанные с паркетностью, на этом языке.

1. Паркет на отрезке. Пусть $\mathcal{F}$ допускает паркет на отрезке длины n (такую фигурку мы называем n -паркетной). Отметим на этом отрезке клетки, на которых лежат левые клетки фигурок паркета, и назовём это множество клеток *характером* $\mathcal{G}$ паркета. Тогда условие, что данное множество $\mathcal{F}$ -транслятов образует паркет, равносильно следующему: для любого m , $0 \leq m \leq n-1$, найдутся единственные k, ℓ такие, что k -я и ℓ -я клетки принадлежат соответственно фигуркам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, причём $k + \ell = m$; при остальных же m такой пары не существует. На языке многочленов это утверждение записывается так: $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$.

Из этого представления сразу вытекает, что такой паркет не более чем единствен: по фигурке $\mathcal{F}$ и длине отрезка однозначно восстанавливается

$$P_{\mathcal{G}}(x) = \frac{1 + x + \dots + x^{n-1}}{P_{\mathcal{F}}(x)} = \frac{x^n - 1}{(x-1)P_{\mathcal{F}}(x)}.$$

Далее, известно, что

$$1 + x + \dots + x^{n-1} = \prod_{d|n, d>1} F_d(x),$$

где все множители неприводимы и их ровно $d(n)$ (где $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n). Тогда характеристический многочлен любой n -паркетной фигурки является произведением нескольких таких многочленов, и поэтому таких фигурок не больше, чем $2^{d(n)}$.

Из этого рассуждения также следует, что любая n -паркетная фигурка симметрична (ибо все множители симметричны, то есть переходят в себя при замене $P(x) \rightarrow x^k P(x^{-1})$, где k — степень многочлена $P(x)$).

2. Паркет на клетчатой полоске. Мы уже знаем, что любой паркет на полоске периодичен. Рассмотрим $\mathcal{F}$ -паркет (на бесконечной

полоске); пусть он имеет период n . Рассмотрим отрезок длины n , отметим на нём клетки, на которых лежат левые клетки фигурок паркета, и назовём это множество клеток *характером* $\mathcal{G}$ *паркета* (сдвинув паркет и отрезок, можно считать, что нулевая клетка принадлежит $\mathcal{G}$).

Рассмотрим все фигурки, лежащие на клетках характера. При сдвиге на все расстояния, кратные n , они заметают всю полосу. Значит, для каждого остатка от деления на n в выбранных фигурках присутствует ровно одна клетка, номер которой имеет этот остаток; следовательно, в многочлене $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)$ присутствует ровно один моном со степенью, дающей этот остаток. Таким образом, если мы в этом многочлене каждый моном вида x^i заменим на моном $x^{i \bmod n}$, то получится многочлен $1 + x + \dots + x^{n-1}$. Заметим, что при такой замене мы по сути вычитаем из $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)$ многочлен, кратный $x^n - 1$ (так как $x^i - x^{i \bmod n}$ делится на $x^n - 1$). Таким образом, остаток от деления нашего многочлена на $x^n - 1$ не изменяется, то есть

$$P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1}.$$

Заметим, что это условие является критерием того, что $\mathcal{G}$ — характер $\mathcal{F}$ -паркета.

3. Двухпериодический паркет на плоскости, он же паркет на торе. Напомним, что паркет называется *однопериодическим*, если он переходит в себя при сдвиге на ненулевой вектор; *двухпериодическим*, если существуют два таких неколлинеарных вектора. Нетрудно понять, что если паркет на плоскости двухпериодичен, то существуют такие числа m, n , что он переходит в себя при сдвиге на m вправо, а также при сдвиге на n вверх. Таким образом, мы можем считать, что покрывается «тор $m \times n$ », то есть прямоугольник $m \times n$, у которого склеены верхняя и нижняя стороны, а также правая и левая. В этом случае фигурка $\mathcal{F}$ допускает двухпериодический паркет с характером $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда в многочлене $P_{\mathcal{F}}(x, y)P_{\mathcal{G}}(x, y)$ для любых остатков $i \pmod{m}$ и $j \pmod{n}$ есть ровно один моном, показатели степеней в котором имеют ровно эти остатки. Нетрудно понять, что это эквивалентно следующей формуле:

$$P_{\mathcal{F}}(x, y)P_{\mathcal{G}}(x, y) = (1 + x + \dots + x^{m-1})(1 + y + \dots + y^{n-1}) + Q_1(x, y)(x^m - 1) + Q_2(x, y)(y^n - 1).$$

Обычно это записывается в виде

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{F}}(x, y)P_{\mathcal{G}}(x, y) &\equiv \\ &\equiv (1 + x + \dots + x^{m-1})(1 + y + \dots + y^{n-1}) \pmod{x^m - 1, y^n - 1}. \end{aligned}$$

Замечание. Поскольку дальше мы будем часто использовать сравнение многочленов по модулю некоторого многочлена (или даже нескольких многочленов, как в предыдущем абзаце), отметим сразу несколько свойств этих сравнений.

а) Многочлены можно по модулю складывать, вычитать и перемножать; корректность этих операций проверяется точно так же, как и для чисел. Однако делить их можно уже не всегда: например, многочлен 1 нельзя разделить на $x - 1$ по модулю $x^2 - 1$ (проверьте!). Говоря чуть более научным языком, многочлены по модулю образуют кольцо, но (чаще всего) не поле.

б) Нам часто будет нужно рассматривать значение многочлена в некоторой точке; если нам известен лишь остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, то мы будем брать значения первого лишь в таких точках x_0 , что $Q(x_0) = 0$. (Например, если $Q(x) = x^m - 1$, то эти точки — корни m -й степени из единицы.) Нетрудно видеть, что ровно в этом случае все многочлены, дающие фиксированный остаток при делении на $Q(x)$, имеют одинаковые значения в точке x_0 .

Аналогично, если мы рассматриваем многочлены от двух переменных по модулю, скажем, многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$, то мы будем рассматривать их значения только в точках (x_0, y_0) , для которых $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Пусть одномерная фигурка $\mathcal{F}$ паркетна, то есть $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{m-1} \pmod{x^m - 1}$. Рассмотрев значение в точке $x_0 = 1$ (это возможно, ибо $x_0^m - 1 = 0$), убеждаемся в том, что $|\mathcal{F}||\mathcal{G}| = m$, то есть период паркета делится на площадь фигурки⁴.

В завершение этого раздела поговорим немного о барьерных функциях фигурки и их связях с многочленами (в частности, это позволит решить задачи 2с) и 2d)). Вообще говоря, можно определить БФ для произвольного многочлена. Мы просто будем называть барьерную функцию фигурки барьерной функцией её производящего многочлена. Читателю предоставляется подумать, как определить барьерную функцию для произвольного многочлена⁵.

Отметим, что если некоторая расстановка чисел является БФ для многочлена $P(x, y)$, то она является барьерной и для многочлена $P(x, y)Q(x, y)$ при произвольном многочлене $Q(x, y)$. В самом деле, при произвольном положении фигурки, соответствующей многочлену $P(x, y)Q(x, y)$, сумма по ней является суммой (с коэффициентами,

⁴ Естественно, это можно доказать и без такой техники.

⁵ Произвольному многочлену можно сопоставить «фигурку», в которой клетки могут появляться с кратностью — возможно, с отрицательной или нецелой.

равными коэффициентам многочлена $Q(x, y)$ нескольких сумм для фигурки, соответствующей $P(x, y)$; каждое из слагаемых равно нулю. Отсюда сразу следует решение задачи 2с), так как многочлен

$$P_g(x, y) = (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{4k})(1 + y^2 + y^4 + \dots + y^{4k})$$

делится на многочлен $P_{\mathcal{F}}(x, y) = (1 + x + \dots + x^{2k})(1 + y + \dots + y^{2k})$:

$$P_g(x, y) = P_{\mathcal{F}}(x, y)(1 - x + x^2 - \dots + x^{2k})(1 - y + y^2 - \dots + y^{2k}).$$

С другой стороны, можно показать, что если многочлен $P_g(x, y)$ не делится на многочлен $P_{\mathcal{F}}(x, y)$, то существует БФ многочлена $P_{\mathcal{F}}(x, y)$, не являющаяся БФ многочлена $P_g(x, y)$. Мы покажем это на примере задачи 2д); читателю предоставляется возможность самостоятельно обобщить это рассуждение на случай произвольных фигурок.

В задаче 2д) надо найти все такие n , что любая расстановка в клетках плоскости остатков по модулю 2, являющаяся барьерной для «уголка» (рис. 3), является также барьерной для «треугольника» (рис. 4) со стороной n .

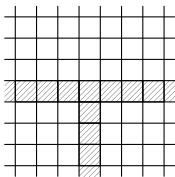
Годится любое n , имеющее вид $n = 2^k - 2$ при $k > 1$.

Докажем это.

Покажем сначала, что n подходит тогда и только тогда, когда многочлен «треугольника»

$$Q_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n-1} x^i y^j$$

делится на многочлен «уголка» $P(x, y) = 1 + x + y$ (мы считаем, что коэффициенты многочленов также лежат в $\mathbb{Z}_2$). В одну сторону утверждение уже доказано. Пусть $Q_n(x, y)$ не делится на $P(x, y)$. Легко



видеть, что вычитанием многочлена, кратного $P(x, y)$, можно понизить степень $Q(x, y)$ по y до нуля. В результате получим, что

$$Q_n(x, y) = P(x, y)R(x, y) + T(x),$$

причём $T(x) \neq 0$. Осталось заметить, что можно найти БФ «уголка», у которой в данной строчке стоят любые наперёд заданные числа (на самом деле,

Рис. 10

БФ «уголка» однозначно задается значениями в клетках, отмеченных на рис. 10). Легко подобрать эти числа так, что уже эта строчка не будет барьерной для $T(x)$, а, следовательно, вся расстановка не является барьерной для $Q_n(x, y)$.

Выясним теперь, при каких n многочлен $Q_n(x, y)$ делится на $P(x, y)$. Заметим, что при нечётном n он на $P(x, y)$ не делится (достаточно подставить $x = 1, y = 0$). Пусть n чётно. Тогда

$$Q_n(x, y) = Q_{n/2}(x^2, y^2)P(x, y) + xyQ_{n/2-1}(x^2, y^2).$$

Заметим также, что $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 \pmod{2}$, поэтому $Q_{n/2-1}(x^2, y^2) = (Q_{n/2-1}(x, y))^2$. Значит, если n подходит, то и $n/2 - 1$ подходит; учитывая, что минимальное подходящее n равно 2, легко получить по индукции, что все подходящие n имеют указанный вид.

3. Разложения периодических барьерных функций

В этом разделе содержатся решения задачи 2а), а также всех пунктов задач 3 и 7.

В данном разделе мы исследуем периодические БФ (в основном одномерных) фигурок. Наша цель — описание их в терминах корней многочлена $P_{\mathcal{F}}$. Сначала мы предъявим для каждой фигурки несколько особенных БФ, а затем покажем, как через них выразить все периодические БФ.

Замечание для знающего читателя. Бóльшая часть этого раздела легко следует из широко известных фактов о возвратных последовательностях (см., например, [11]). В конце абзаца вкратце описано, как из теоремы, описывающей все возвратные последовательности, получить все эти результаты. Тем не менее для полноты изложения мы приводим доказательства, не использующие эту теорему. Заметим, что теми же методами может быть доказана и общая теорема о возвратных последовательностях (хотя и иначе, чем в указанной книге).

Итак, пусть у нас есть одномерная фигурка $\mathcal{F}$, и пусть ε — (комплексный) корень многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$ (заметим, что $\varepsilon \neq 0$). Расставим в клетки числа так: в i -ю клетку поставим ε^i . Покажем, что получилась БФ фигурки $\mathcal{F}$ (такую барьерную функцию мы будем называть *корневой*). Действительно, сумма в самой фигурке $\mathcal{F}$ равна нулю в силу того, что ε — корень $P_{\mathcal{F}}(x)$. Сумма же в трансляте, полученном сдвигом на k клеток вправо (k может быть отрицательным), получается из суммы в $\mathcal{F}$ домножением на ε^k , то есть тоже равна нулю.

Аналогичный факт верен для фигурки на плоскости. Рассмотрим любую такую пару комплексных чисел $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, что $P_{\mathcal{F}}(x_0, y_0) = 0$ (это условие сохраняется при домножении $P_{\mathcal{F}}(x, y)$ на целую степень x или y). Расставим в клетки плоскости числа так: в клетку

(i, j) поставим число $x_0^i y_0^j$. Тогда по аналогичным соображениям мы получаем барьерную функцию фигурки $\mathcal{F}$.

Далее мы рассматриваем только одномерные фигурки. Для описания всех их периодических БФ нам потребуется следующее определение линейной комбинации последовательностей.

Последовательность (a_k) является линейной комбинацией последовательностей (b_k) и (c_k) (с коэффициентами λ и μ), если для любого k выполняется равенство $a_k = \lambda b_k + \mu c_k$.

Заметим, что линейная комбинация барьерных функций какой-то фигурки также является БФ для этой фигурки.

Прежде чем описывать все периодические БФ, опишем вообще все n -периодические последовательности. Далее через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ мы обозначаем все комплексные корни n -й степени из единицы:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \varepsilon_1^k.$$

Сразу отметим следующее их свойство.

Лемма 2. При любом k , $1 \leq k \leq n-1$, имеем:

$$\varepsilon_1^k + \dots + \varepsilon_n^k = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_k^0 + \varepsilon_k^1 + \varepsilon_k^2 + \dots + \varepsilon_k^{n-1} = 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_1^{ki} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_k^i = \frac{\varepsilon_k^{n+1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_k - 1},$$

что равно нулю, т. к. $\varepsilon_k^n = 1$, но $\varepsilon_k \neq 1$. □

Пусть (a_k) — произвольная n -периодическая последовательность. Покажем, что её можно представить в виде линейной комбинации последовательностей вида (ε_i^k) , то есть

$$a_k = \beta_1 \varepsilon_1^k + \beta_2 \varepsilon_2^k + \dots + \beta_n \varepsilon_n^k. \quad (1)$$

Ясно, что последовательность (a_k) представляется в виде линейной комбинации k последовательностей вида

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{если } (k-s) : n, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(при всех $s = 0, 1, \dots, n-1$); поэтому достаточно уметь выражать только такие последовательности. Требуемое представление имеет вид

$$b_k = \frac{1}{n} (\varepsilon_1^{-s} \varepsilon_1^k + \dots + \varepsilon_n^{-s} \varepsilon_n^k)$$

согласно лемме 2.

Предположим теперь вдобавок, что последовательность (a_k) является БФ фигурки $\mathcal{F}$. Покажем, что тогда в её представлении в виде (1) ненулевые коэффициенты будут только при степенях тех ε_i , которые являются корнями многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$; иначе говоря,

$$a_k = \sum_i \beta_i \delta_i^k, \quad P_{\mathcal{F}}(\delta_i) = \delta_i^n - 1 = 0. \quad (2)$$

Для этого мы покажем, что если $\beta_i \neq 0$ в представлении (1), то последовательность (ε_i^k) также является БФ для фигурки $\mathcal{F}$; из этого, очевидно, следует требуемое.

Итак, пусть $\beta_i \neq 0$. Обозначим через $(a_k^{(s)})$ расстановку, полученную из нашей последовательности сдвигом на s вправо: $a_k^{(s)} = a_{k-s}$; понятно, что она также является барьерной функцией фигурки $\mathcal{F}$. Покажем, что последовательность (ε_i^k) является линейной комбинацией построенных БФ (тогда она тоже БФ). Действительно, рассмотрим последовательность

$$c_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)} \varepsilon_i + a_k^{(2)} \varepsilon_i^2 + \dots + a_k^{(n-1)} \varepsilon_i^{n-1}.$$

Подставляя явный вид последовательности (a_k) из предыдущей задачи, получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{s=0}^{n-1} a_{k-s} \varepsilon_i^s = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{w=1}^n \beta_w \varepsilon_w^{k-s} \varepsilon_i^s = \sum_{w=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \beta_w \varepsilon_1^{w(k-s)+is} = \\ &= \sum_{w=1}^n \beta_w \varepsilon_w^k \left(\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_{i-w}^s \right). \end{aligned}$$

Сумма в скобках равна нулю при $i \neq w$ согласно лемме 2 и равна n при $i = w$. Значит, $c_k = n\beta_i \varepsilon_i^k$, откуда и следует требуемое.

Замечание для знающего читателя. Покажем, как те же результаты получить из следующего описания всех возвратных последовательностей.

Теорема. Пусть последовательность (a_k) удовлетворяет соотношению

$$\mu_t a_{k+t} + \mu_{t-1} a_{k+t-1} + \dots + \mu_0 a_k = 0.$$

Рассмотрим характеристический многочлен этого соотношения

$$P(x) = \mu_t x^t + \mu_{t-1} x^{t-1} + \dots + \mu_0.$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — его корни, а m_i — кратность корня λ_i . Тогда

$$a_k = Q_1(k) \lambda_1^k + \dots + Q_s(k) \lambda_s^k,$$

где $Q_i(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $m_i - 1$. В частности, если кратности корней равны 1, то $Q_i(x) = \text{const}$.

Пусть теперь (a_k) — n -периодическая БФ фигурки $\mathcal{F}$. Тогда она является возвратной последовательностью как с характеристическим многочленом $P_{\mathcal{F}}(x)$ (так как она — БФ), так и с характеристическим многочленом $x^n - 1$ (так как она периодична). Можно показать, что в этом случае она является также возвратной последовательностью с характеристическим многочленом $\text{НОД}(P_{\mathcal{F}}(x), x^n - 1)$. Все корни последнего многочлена имеют кратность 1; поэтому из теоремы мы сразу получаем представление (a_k) в виде (2).

В оставшейся части раздела мы приводим несколько следствий полученного описания периодических БФ.

Рассмотрим произвольную паркетную фигурку $\mathcal{F}$. Пусть n_i — степени корней из единицы, являющихся корнями многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$. Обозначим $N = \text{НОК}(n_i)$. Тогда барьерная функция, соответствующая любому $\mathcal{F}$ -паркету, представляется в виде (2); при этом любая корневая функция, участвующая в этом разложении, N -периодична. Значит, и паркет N -периодичен. Таким образом, период паркета делит N ; в частности, зная корни многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$, мы умеем ограничивать периоды всех паркетов фигурки $\mathcal{F}$.

Далее покажем, как с помощью этой техники доказать одно из утверждений раздела 1; именно, покажем, что любая БФ фигурки $\mathcal{F}$ является также БФ для симметричной фигурки $\bar{\mathcal{F}}$ (из этого непосредственно следует такое же утверждение про трансверсали!). Действительно, наша БФ представляется в виде (2). Тогда числа $\bar{\delta}_i = \delta_i^{-1}$, комплексно сопряженные к δ_i , являются, очевидно, как корнями $P_{\mathcal{F}}(x)$, так и корнями $P_{\bar{\mathcal{F}}}(x)$. Поэтому наша функция является линейной комбинацией барьерных для $\bar{\mathcal{F}}$, а значит, и сама является барьерной.

Паркеты на торе $p \times p$

Пусть p — простое число. Покажем, как применить подобную технику к паркетам на торе $p \times p$ (или, эквивалентно, к паркетам на плоскости, самосовмещающимся при сдвиге на p в любую сторону). Мы докажем, что для p -фигурки⁶ $\mathcal{F}$ равносильны следующие утверждения:

- (i) на тор можно положить несколько транслятов фигурки $\mathcal{F}$ так, что каждая клетка покрыта ровно k транслятами ($k < p$);
- (ii) на торе существует $\mathcal{F}$ -паркет;
- (iii) клетки тора можно так раскрасить в p цветов, что в каждом $\mathcal{F}$ -трансляте все цвета различны.

⁶ Напомним, что p -фигурка — это фигурка из p клеток.

Очевидно, что из (ii) следует (i). Далее, утверждения (ii) и (iii) равносильны согласно описанной в разделе 1 биекции между трансверсальями и паркетами. Действительно, любой цвет раскраски является трансверсалью; наоборот, пусть у нас имеется $\overline{\mathcal{F}}$ -паркет (ясно, что его существование равносильно существованию $\mathcal{F}$ -паркета). Рассмотрим любую клетку фигурки $\overline{\mathcal{F}}$; тогда, покрасив все соответствующие ей клетки в транслятах паркета, мы получим $\mathcal{F}$ -трансверсаль. Сделав так с каждой клеткой фигурки $\overline{\mathcal{F}}$, получим требуемую раскраску.

Для завершения достаточно доказать, что (i) $\Rightarrow$ (iii). Нам потребуется следующее

Предложение. Если сумма нескольких корней p -й степени из единицы равна нулю, то среди них присутствуют все корни p -й степени. Более того, они все встречаются одинаковое число раз.

Доказательство. Пусть среди наших корней нет ε_i . Умножив их на ε_{p-i-1} , получим новый набор корней с нулевой суммой, среди которых нет ε_{p-1} ; тогда все они имеют вид ε_1^t , где $0 \leq t \leq p-2$. Так как их сумма равна нулю, то ε_1 является корнем многочлена степени, не превосходящей $p-2$; это невозможно (см. Факт b)).

Далее, если даже все корни встречаются, то получился многочлен $(p-1)$ -й степени с корнем ε_1 ; это возможно только тогда, когда он кратен $F_p(x)$, то есть когда все его коэффициенты равны. Это и требовалось. $\square$

Рассмотрим покрытие тора в k , $k < p$, слоёв. Как уже отмечалось, оперируя многочленами для фигурки $\mathcal{F}$ и «характера покрытия» $\mathcal{G}$, все сравнения мы записываем по модулю многочленов $x^p - 1$ и $y^p - 1$. Тогда, говоря о корнях многочлена по этому модулю, мы можем рассматривать в точности такие корни (ε, δ) , что $\varepsilon^p = \delta^p = 1$. При этом мы знаем, что $P_{\mathcal{F}}(x, y)P_{\mathcal{G}}(x, y) \equiv kF_p(x)F_p(y)$, ибо каждая клетка покрыта k раз; с другой стороны, очевидно, что

$$P_{\mathcal{F}}(x, y)F_p(x)F_p(y) \equiv pF_p(x)F_p(y).$$

Заметим, что многочлены $pP_{\mathcal{G}}(x, y)$ и $kF_p(x)F_p(y)$ не равны (в первом есть нулевые коэффициенты!); отсюда получаем, что существует такой ненулевой многочлен

$$Q(x, y) = pP_{\mathcal{G}}(x, y) - kF_p(x)F_p(y),$$

что $P_{\mathcal{F}}(x, y)Q(x, y) = 0$; при этом степени $Q(x, y)$ по x и по y не превосходят $p-1$.

Покажем, что у многочлена $P_{\mathcal{F}}(x, y)$ существует корень (ε, δ) такой, что $\varepsilon^p = \delta^p = 1$. Из этого будет следовать требуемое: барьерная функция, получающаяся из этого корня, имеет p различных значений;

при этом, согласно предложению, сумма p таких чисел равна нулю тогда и только тогда, когда они все различны. Поэтому, покрасив все клетки, содержащие одно и то же значение, в один цвет, мы получим требуемую раскраску.

Пусть у многочлена $P_{\mathcal{F}}(x, y)$ нет корня требуемого вида; тогда они все есть у $Q(x, y)$. Рассмотрим представление

$$Q(x, y) = Q_0(x) + Q_1(x)y + \dots + Q_{p-1}(x)y^{p-1}.$$

При подстановке любого ε вместо x получается многочлен от y степени $\leq p-1$, имеющий p корней (все возможные δ); поэтому этот многочлен — тождественный нуль, и коэффициенты его (т. е. значения многочленов $Q_i(x)$) — нули. Поэтому каждый из этих многочленов (степень которых $\leq p-1$) имеет по p корней и, следовательно, также тождественный нуль. Отсюда $Q(x, y) = 0$ — противоречие. Утверждение доказано.

4. Паркетные p -фигурки

В этом разделе содержатся решения всех пунктов задачи 4.

Из предыдущих разделов становится ясно, что при исследовании паркетных фигурок особое внимание стоит уделять корням многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$, являющимся корнями из единицы. Если фигурка паркетна, то такие корни явно должны быть; более того, ясно, что паркетность фигурки напрямую зависит от множества таких корней. В данном разделе этот вопрос решается для p -фигурок при простом p . Напомним, что n -фигурка — это фигурка из n клеток.

Напомним также, что через R_n мы обозначаем множество всех примитивных корней n -й степени из единицы, а через $F_n(x)$ — многочлен, (однократными) корнями которого являются в точности элементы R_n . Рассмотрим произвольную n -фигурку $\mathcal{F}$ и простое число p . Выясним, на сколько многочленов вида $F_{p^k}(x)$ может делиться многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$.

Заметим, что многочлены $F_{p^k}(x)$ при разных значениях k не имеют общих корней и поэтому взаимно просты. Поэтому если многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$ делится на d таких многочленов, то он делится на их произведение, а частное имеет целые коэффициенты. Но тогда при подстановке любого целого x_0 значение $P_{\mathcal{F}}(x_0)$ должно делиться на произведение значений $F_{p^k}(x_0)$; в частности, $P_{\mathcal{F}}(1) = n$ должно делиться на произведение d чисел вида $F_{p^k}(1) = p$, то есть на p^d . Таким образом, $n : p^d$, то есть $d \leq \text{ord}_p n$ (через $\text{ord}_p n$ обозначается максимальная степень p , на которую делится n).

Уточним этот результат для паркетной фигурки: покажем, что в этом случае обязательно $d = \text{ord}_p(n)$. Пусть паркет имеет период m , а $\mathcal{G}$ — характер паркета, $|\mathcal{G}| = P_{\mathcal{G}}(1) = \ell$; тогда $n\ell = m$. Далее,

$$P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x) \equiv 1 + x + \dots + x^{m-1} \pmod{x^m - 1}.$$

Заметим, что это утверждение симметрично относительно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, поэтому можно также считать $\mathcal{G}$ паркетной фигуркой, а $\mathcal{F}$ — характером паркета. Тогда аналогично получаем, что количество значений k , для которых $P_{\mathcal{G}}(x)$ делится на $F_{p^k}(x)$, не превышает $\text{ord}_p \ell$. Однако заметим, что многочлены $1 + x + \dots + x^{m-1}$ и $x^m - 1$ делятся на все $F_{p^k}(x)$ при $1 \leq k \leq \text{ord}_p m$, поэтому многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)P_{\mathcal{G}}(x)$ должен делиться на $\text{ord}_p m = \text{ord}_p n + \text{ord}_p \ell$ таких многочленов. Следовательно, оба упомянутых неравенства обращаются в равенство, т. е. соответствующее количество для $P_{\mathcal{F}}(x)$ равно $\text{ord}_p n$, а для $P_{\mathcal{G}}(x)$ равно $\text{ord}_p \ell$.

В частности, если $\mathcal{F}$ является паркетной p -фигуркой (для простого p), мы получаем, что $P_{\mathcal{F}}(x)$ делится на некоторый многочлен $F_{p^k}(x)$. При этом возможны два случая: $k = 1$ и $k > 1$.

1. Пусть $k = 1$, то есть $P_{\mathcal{F}}(x) = x^{a_1} + \dots + x^{a_p}$ делится на $F_p(x)$. Рассмотрим выражение $P_{\mathcal{F}}(\varepsilon)$, где ε — примитивный корень p -й степени из единицы. С одной стороны, оно равно нулю; с другой — оно есть сумма некоторых p корней p -й степени из единицы. По предположению из предыдущего раздела это означает, что все такие корни встречаются по одному разу; тогда все числа a_i имеют разные остатки от деления на p .

Заметим, что это условие является также достаточным: если все номера клеток фигурки различны по модулю p , то, сдвигая фигурку на векторы, кратные p , мы получим паркет.

2. Пусть теперь $k > 1$. Мы покажем, что в этом случае фигурка сжимаема (таким образом, в предыдущем пункте приведён критерий паркетности несжимаемой p -фигурки).

Итак, пусть $P_{\mathcal{F}}(x) = F_{p^k}(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Выделив степени, дающие фиксированный остаток от деления на p^{k-1} , представим многочлен $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = Q_0(x^{p^{k-1}}) + xQ_1(x^{p^{k-1}}) + \dots + x^{p^{k-1}-1}Q_{p^{k-1}-1}(x^{p^{k-1}}).$$

Тогда

$$P_{\mathcal{F}}(x) = \sum_{i=0}^{p^{k-1}-1} P_i(x), \quad \text{где } P_i(x) = x^i Q_i(x^{p^{k-1}}) F_{p^k}(x),$$

причём в разных многочленах $P_i(x)$ степени x , при которых стоят ненулевые коэффициенты, различны (так как все степени мономов

в $F_{p^k}(x)$ делятся на p^{k-1} ; поэтому все коэффициенты многочленов $P_i(x)$ неотрицательны. Кроме того, $P_i(1)$ делится на p , поскольку $F_{p^k}(1) = p$. Отсюда, поскольку $P_{\mathcal{F}}(1) = p$, получаем, что только одно из слагаемых ненулевое. Но свободный член в $P_{\mathcal{F}}(x)$ равен единице, поэтому

$$P_{\mathcal{F}}(x) = P_0(x) = Q_0(x^{p^{k-1}})F_{p^k}(x) = Q_0(x^{p^{k-1}})F_p(x^{p^{k-1}}),$$

и фигурка сократима в p^{k-1} раз.

Замечание. Из вышесказанного нетрудно получить также критерий паркетности произвольной p -фигурки. Именно, p -фигурка является паркетной, если существует такое натуральное k , что номера всех клеток сравнимы по модулю p^{k-1} , но различны по модулю p^k .

Действительно, если фигурка не сжимаема в p раз, то, по доказанному, её паркетность равносильна тому, что $P_{\mathcal{F}}(x) : F_p(x)$. Если же она сжимаема в p раз, то её паркетность равносильна паркетности сжатой фигурки; отсюда по индукции легко получается доказательство критерия.

5. Единствен ли паркет?

В этом разделе решаются задачи 6а) и 6б).

В предыдущем разделе мы описали несжимаемые паркетные p -фигурки, причём у всех у них есть общая трансверсаль: все клетки с номерами, имеющими фиксированный остаток от деления на p . После этого естественно задаться вопросом, есть ли у них другие трансверсали; иначе говоря, единствен⁷ ли паркет для данной несжимаемой паркетной p -фигурки. Мы увидим, что ответ положителен.

Для начала заметим, что условия несжимаемости и простоты площади существенны.

Утверждение 1, которое могло бы стать задачей. Любая паркетная сжимаемая фигурка, кроме фигурки с производящим многочленом $x^2 + 1$, имеет больше одного паркета.

Доказательство. Пусть фигурка сжимаема в k раз, то есть номера всех её клеток кратны k . Это значит, что любой её паркет разбивается на k «подпаркетов»: если мы рассмотрим клетки, дающие фиксированный остаток при делении на k , то фигурки, лежащие на них, не задевают клеток с другими остатками, то есть на такой «разреженной» полоске получился паркет.

⁷ Естественно, с точностью до сдвига.

Рассмотрим один такой подпаркет и попытаемся из k его копий сложить паркет двумя способами. Вместо подпаркета мы будем работать с соответствующей ему «подтрансверсалью» — то есть с множеством первых клеток транслятов этого подпаркета. Первый способ ясен: возьмём сдвиги нашей подтрансверсали на $0, 1, \dots, k-1$ клетку (назовём эти сдвиги $S_0, \dots, S_{k-1}$). В качестве второго способа рассмотрим те же сдвиги, но вместо сдвига на 1 клетку возьмём сдвиг на $k+1$ клетку (его, естественно, назовём S_{k+1}). Предположим, что получилась та же трансверсаль (с точностью до сдвига); иначе говоря, первую трансверсаль можно сдвинуть так, чтобы получилась вторая.

Пусть период нашей подтрансверсали S_0 равен x (то есть она переходит в себя при сдвиге на xk клеток, но не меньше). Тогда существует сдвиг вправо на t ($0 < t < xk$) клеток, переводящий первую трансверсаль во вторую. Пусть при этом S_0 переходит в S_i (ясно, что $i > 0$). При этом либо $2 \leq i \leq k-1$, либо $i = k+1$.

В первом случае $t = i$ (потому что только такой сдвиг совмещает S_0 с S_i). Тогда этот же сдвиг должен переводить S_{k-i} в S_0 ; таким образом, S_0 переходит в себя при сдвиге на $(k-i) + i = k$, что невозможно (иначе наша фигурка одноклеточна).

Во втором случае аналогично $t = k+1$, и этот же сдвиг переводит S_1 (из первого паркета) в S_2 (или в S_0 , если $k=2$). Если S_1 переходит в S_2 , то это опять же невозможно, ибо тогда S_2 переходит в себя при сдвиге на $(k+1) - 1 = k$. Иначе мы получаем, что $k=2$, и S_1 переходит в S_0 при сдвиге на $k+1=3$. Тогда S_0 переходит в себя при сдвиге на 4, то есть период подтрансверсали равен 4, и фигурка — двухклеточная. Значит, она является единственным исключением, указанным в утверждении. $\square$

Утверждение 2. Для любого составного n существует несжимаемая фигурка площади n , для которой имеется более одного паркета.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = dk$, $d, k > 1$. Тогда рассмотрим фигурку на рис. 11 (количество блоков по d клеток равно k).

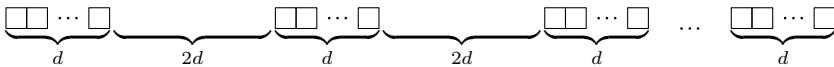


Рис. 11

Нетрудно понять, что любой паркет этой фигурки разбивается на блоки из d клеток. Рассмотрим каждый блок как одну клетку; тогда у нас получается паркет сжимаемой фигурки (все её клетки находятся на расстояниях, кратных 3), который неединствен по предыдущему утверждению. $\square$

Замечание. Можно потребовать, чтобы фигурка была несжимаема и в смысле такого «укрупнения клеток». Утверждение остается верным и после такого запрета. Для того чтобы построить несократимую и неукрупняемую фигурку, достаточно одну из клеток нашей фигурки перенести на расстояние, кратное НОК периодов обоих паркетов.

Далее мы будем исследовать паркеты несжимаемой паркетной p -фигурки $\mathcal{F}$. Рассмотрим произвольный её паркет. Во-первых, его период должен делиться на p . Если период равен p , то характер паркета одноэлементен, поэтому он единствен с точностью до параллельного переноса. Значит, если паркетов более одного, то один из них имеет период, больший p и делящийся на p . Обозначим этот период через n .

Рассмотрим представление БФ (a_i) , соответствующей нашему второму паркету, в виде (2). Сгруппируем отдельно члены представления, период которых не делится на p , и те, период которых делится на p (пусть мы получили соответственно последовательности (b_i) и (c_i)). Докажем, что среди периодов, делящихся на p , есть строго большие, чем p .

Предположим противное. Заметим, что последовательность (c_i) неконстантна, ибо иначе период (a_i) не кратен p . Из предположения вытекает, что период (c_i) равен p ; период же (b_i) взаимно прост с p . Тогда и (b_k) неконстантна, ибо иначе период паркета равен p ; пусть период (b_i) равен d . Таким образом, найдутся такие s и t , что $b_s \neq b_0$, $c_t \neq c_0$. По китайской теореме об остатках найдутся такие числа r_{s0} , r_{0t} , r_{st} , что

$$\begin{cases} r_{s0} \equiv s \pmod{d}, \\ r_{s0} \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases} \quad \begin{cases} r_{0t} \equiv 0 \pmod{d}, \\ r_{0t} \equiv t \pmod{p}, \end{cases} \quad \begin{cases} r_{st} \equiv s \pmod{d}, \\ r_{st} \equiv t \pmod{p}. \end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, среди чисел

$$a_0 = b_0 + c_0, \quad a_{r_{s0}} = b_s + c_0, \quad a_{r_{0t}} = b_0 + c_t, \quad a_{r_{st}} = b_s + c_t$$

есть хотя бы три различных — противоречие.

Итак, мы получили, что если паркет не единствен, то многочлен $P_{\mathcal{F}}(x)$ имеет своими корнями как корень из единицы степени p , так и корень из единицы степени, кратной p и строго большей p . Мы покажем, что в этом случае фигурка сжимаема. Но для начала нам потребуется доказать один факт об n -корневых многочленах. Мы докажем, что их, как и барьерные функции, можно представить в виде линейной комбинации нескольких многочленов специального вида.

6. Разложения n -корневых многочленов и единственность паркетов

В этом разделе приведены решения задач 5а), 5б) и 6с).

Напомним, что n -корневым многочленом называется многочлен степени $\leq n - 1$ (с рациональными коэффициентами), одним из корней которого является корень n -й степени из 1 (согласно факту с), это эквивалентно тому, что наш многочлен делится на круговой многочлен $F_n(x)$). Если n делится на простое p , $n = pm$, то p -угольным многочленом мы будем называть многочлен вида $x^i + x^{i+m} + \dots + x^{i+(p-1)m}$, $i < m$.

Покажем, что p -угольный многочлен является n -корневым. Действительно, пусть ε — примитивный корень из 1 степени n . Тогда $\varepsilon^i + \varepsilon^{i+m} + \dots + \varepsilon^{i+(p-1)m} = \varepsilon^i (1 + \varepsilon^m + \dots + \varepsilon^{(p-1)m})$, при этом в скобках стоит сумма всех корней из 1 степени p , равная нулю.

Линейная комбинация n -корневых (в частности, p -угольных) многочленов также является n -корневой. Мы утверждаем, что верно и обратное: *любой n -корневой многочлен представляется как рациональная линейная комбинация p -угольных (при различных p , делящих n).* Заметим, что НОД всех таких многочленов равен $F_n(x)$. Действительно, (некратными!) корнями p -угольного многочлена

$$1 + x^m + \dots + x^{(p-1)m} = \frac{x^n - 1}{x^{n/p} - 1}$$

являются те корни степени n , которые не являются корнями степени n/p . Тогда корни НОД — это в точности корни n -й степени, не являющиеся корнями (n/p) -й при любом $p \mid n$, т.е. как раз все корни $F_n(x)$.

Известно, что НОД любых двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации (в которой коэффициенты — также многочлены!). Легко показать по индукции, что это верно и для НОД конечного числа многочленов. Значит, так как n -корневой многочлен делится на $F_n(x)$, он представляется в виде

$$P(x) = \sum_{p \mid n} Q_p(x) (1 + x^{n/p} + \dots + x^{(p-1)n/p}).$$

Вообще говоря, многочлены $Q_p(x)$ могут иметь довольно большую степень; однако если мы заменим многочлен $Q_p(x)$ его остатком от деления на $x^{n/p} - 1$, то произведение $Q_p(x)(1 + x^{n/p} + \dots + x^{(p-1)n/p})$ заменится его остатком по модулю $(x^{n/p} - 1)(1 + x^{n/p} + \dots + x^{(p-1)n/p}) = x^n - 1$; значит, при такой замене многочлен $P(x)$ не изменится (ибо

его степень не превосходит $n - 1$). Разложив каждый многочлен $Q_i(x)$ по мономам, мы получим требуемое представление $P(x)$ в виде линейной комбинации p -угольных.

Далее p -угольные многочлены мы часто будем называть просто p -угольниками.

Теперь мы можем завершить доказательство единственности паркета для несжимаемой паркетной p -фигурки. Мы уже поняли, что если он неединствен, то у многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$ есть корень φ , являющийся примитивным корнем из 1 степени $n = pm > p$. Рассмотрим многочлен фигурки $P_{\mathcal{F}}(x)$ по модулю $x^n - 1$ (ниже все равенства понимаются по этому модулю⁸). Многочлен $(x^m - 1)P_{\mathcal{F}}(x)$ является n -корневым, ибо $P_{\mathcal{F}}(x)$ им является. Заметим, что $(x^m - 1)P_{\mathcal{F}}(x)$ можно представить в виде линейной комбинации q -угольников для q , делящих m . Действительно, представим $P_{\mathcal{F}}(x)$ в виде линейной комбинации q -угольников при q , делящих n , и домножим это представление на $x^m - 1$. Поскольку произведение p -угольника с $x^m - 1$ равно нулю, p -угольники из полученного представления можно выбросить.

Очевидно, все степени мономов q -угольника при $q \neq p$ имеют одинаковый остаток от деления на p ; сгруппируем все q -угольники с одинаковыми остатками (пусть для i -го остатка получился многочлен $P_i(x)$). Мы нашли представление

$$(x^m - 1)P_{\mathcal{F}}(x) = P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_{p-1}(x),$$

где каждый многочлен $P_i(x)$ является n -корневым (так как он есть линейная комбинация q -угольников). Поскольку $\mathcal{F}$ паркетна и несжимаема, у $P_{\mathcal{F}}(x)$ степени мономов дают разные остатки по модулю p (причём все остатки присутствуют). Тогда $(x^m - 1)P_{\mathcal{F}}(x)$ включает два монома с таким остатком: один с коэффициентом 1 и один — с коэффициентом -1 ; они принадлежат $P_i(x)$ (возможно, это один и тот же моном; тогда $P_i(x) = 0$).

Осталось заметить, что если $P_i(x) \neq 0$ при некотором i , то этот многочлен не может быть n -корневым. Действительно, он имеет вид $x^s(x^t - 1)$, причём его степень меньше n . Значит, его (ненулевой) корень удовлетворяет уравнению $x^t = 1$, т. е. не является примитивным корнем n -й степени из 1. Таким образом, все $P_i(x)$ оказались тождественно равными нулю, то есть любой моном многочлена $P_{\mathcal{F}}(x)$ при домножении на x^m переходит в другой моном этого же многочлена. Так как этих мономов всего p , то все они имеют степени, делящиеся

⁸ Напомним, что при этом мы можем рассматривать значение многочлена в точке φ , ибо φ является корнем многочлена $x^n - 1$.

на m , а значит, $\mathcal{F}$ сократима в m раз. Мы получили противоречие, так как $\mathcal{F}$ была несжимаемой.

7. Разложения корневых многочленов (продолжение)

В этом разделе содержатся решения задач 5c) и 5d).

Мы уже получили все результаты, касающиеся паркетных p -фигурок. Тем не менее описание n -корневых многочленов, начатое в предыдущем пункте, можно усилить; такое усиление позволяет описать все наборы из n корней из единицы, сумма которых равна нулю. Нахождению таких систем была посвящена задача M1618* задачника «Кванта»; наше описание позволяет ответить на вопросы, сформулированные в её решении [9].

Этот результат тесно примыкает к нашему исследованию: на его основе можно составить алгоритм, описывающий все паркетные фигурки площади n (в виде нескольких бесконечных серий). Раздел 8 будет посвящён этому описанию (при небольших n).

В доказательстве единственности паркета мы в некоторый момент очень удачно домножили многочлен фигурки на $x^{n/p} - 1$, где p — простой делитель числа n . Посмотрим на это домножение с несколько другой точки зрения (и повторим часть этого доказательства в других терминах).

Пусть дан многочлен $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ (мы можем записать так любой многочлен, так как действие происходит по модулю $x^n - 1$). Запишем коэффициенты $a_0, \dots, a_{n-1}$ по кругу. Тогда при сложении многочленов их круги складываются покомпонентно, а при умножении на x^i наш круг коэффициентов просто поворачивается на i позиций. Поэтому при домножении на $x^{n/p} - 1$ мы поворачиваем круг и вычитаем его из исходного.

Теперь, если многочлен $P(x)$ является n -корневым, он представляется в виде линейной комбинации q -угольных многочленов (на круге q -угольный многочлен выглядит как q единиц, расставленных в вершинах правильного q -угольника, что оправдывает его название). Заметим, что при нашем домножении p -угольник вычитается из самого себя; таким образом, в представлении многочлена $Q(x) = (x^{n/p} - 1)P(x)$ остались только q -угольники при $q \neq p$.

Замечание. Верно (хотя и не используется ниже) и обратное утверждение: если многочлен $Q(x)$ может быть представлен в виде линейной комбинации q -угольников при $q \neq p$, то $Q(x) = (x^{n/p} - 1)P(x)$

для некоторого n -корневого $P(x)$ (равенство, как обычно, понимается по модулю $x^n - 1$).

Пусть теперь n_0 — произведение всех простых чисел, на которые делится n (иными словами, n_0 — максимальное бесквадратное число, на которое делится n), $n = n_0 d$. Разделим весь наш круг на d частей, которые назовём d -разрежениями: каждая состоит из мест, отстоящих друг от друга на расстояния, кратные d . В любом p -угольнике расстояние между соседними местами равно n/p и кратно d , поэтому он лежит полностью в одном разрежении. Разложим наш корневой многочлен $P(x)$ в линейную комбинацию p -угольников и сгруппируем в этом разложении все p -угольники, лежащие в одном разрежении. Мы получим n -корневой многочлен, у которого все ненулевые коэффициенты лежат в этом разрежении (и равны соответствующим коэффициентам многочлена $P(x)$, так как остальные p -угольники не задевают этого разрежения). Эти многочлены мы будем называть d -следами многочлена $P(x)$.

Аналогично, пусть $n:k$. Тогда определим k -разрежение круга (как набор мест, отстоящих друг от друга на расстояния, кратные k) и k -след многочлена $P(x)$ на этом разрежении (как многочлен, получающийся из $P(x)$ обнулением всех коэффициентов, не лежащих в этом разрежении). Вообще говоря, k -след не обязан быть корневым; мы увидим, что свойства разложений на p -угольники как раз зависят от того, какие следы являются корневыми.

Рассмотрим любой n -корневой многочлен $Q(x)$, все коэффициенты которого лежат в k -разрежении (то есть он имеет вид $x^i Q_i(x^k)$). Тогда $Q_i(\varphi^k) = 0$, где φ — примитивный корень n -й степени из 1. Но φ^k является примитивным корнем (n/k) -й степени; стало быть, многочлен $Q_i(x)$ является (n/k) -корневым! (Конечно, верно и обратное: если $Q_i(x)$ является (n/k) -корневым, то $x^i Q_i(x^k)$ — n -корневой.) Таким образом, говоря о k -следе многочлена, мы можем считать, что его коэффициенты стоят на (n/k) -круге (корневые многочлены при таком переходе остаются корневыми). Далее под k -следами мы будем понимать именно многочлены на таком круге.

Выше мы выяснили, что если многочлен корневой, то все его d -следы корневые. Тогда мы можем изучать каждый из них по отдельности; при этом «длина» круга n_0 будет бесквадратной. *Далее мы предполагаем, что n бесквадратно.*

Пусть теперь $Q(x)$ — произвольный n -корневой многочлен, в разложении которого на q -угольники отсутствуют p -угольники (при простом p , делящем n). Заметим, что каждый q -угольник (при $q \neq p$)

полностью лежит в одном из p -разрежений; тогда, раскладывая $Q(x)$ в сумму p -следов, мы аналогично получим, что каждый из этих p -следов является корневым. Наоборот, если каждый из p -следов многочлена $Q(x)$ является корневым, то он представляется в виде линейной комбинации q -угольников при $q \neq p$ (так как это — многочлен на (n/p) -круге, а n/p не делится на p ; здесь мы как раз пользуемся бесквадратностью числа n). Значит, и $Q(x)$ также представляется в таком виде.

Замечание 1. Заметим, что все вершины p -угольника, наоборот, лежат в разных p -разрежениях; здесь мы тоже пользуемся тем, что n бесквадратно.

Замечание 2. Пусть в некотором представлении многочлена $P(x)$ присутствуют только p_1 -, ..., p_s -угольники, $t = p_1 \cdot \dots \cdot p_s$. Тогда аналогично получаем, что все (n/t) -следы являются корневыми.

Уточним структуру p -следов. Рассмотрим произвольный n -корневой многочлен $Q(x)$. Зафиксируем некоторое разложение $Q(x)$ на q -угольники; пусть $A(x)$ — это сумма (с теми же коэффициентами) всех p -угольников этой линейной комбинации, а $B(x) = Q(x) - A(x)$ — сумма всех её q -угольников при $q \neq p$. Тогда каждый из p -следов представляется в виде

$$Q_i(x) = A_i(x) + B_i(x),$$

где $A_i(x)$ и $B_i(x)$ — это следы многочленов $A(x)$ и $B(x)$. Ясно, что многочлен $B_i(x)$ корневой; поэтому при любом i многочлены $Q_i(x)$ и $A_i(x)$ одновременно либо корневые, либо некорневые. Заметим, что следы p -угольников в p -разрежениях переходят друг в друга при повороте на n/p ; значит, все многочлены $A_i(x)$ получаются друг из друга домножением на моном, а потому и они либо все корневые, либо все некорневые. Значит, то же верно и для следов $Q_i(x)$.

В итоге мы доказали (с учётом сказанного перед замечанием 1) следующую лемму.

Лемма 3. Все p -следы n -корневого многочлена либо одновременно корневые, либо одновременно некорневые. При этом если в (каком-то) его разложении на q -угольники не присутствуют p -угольники, то все p -следы корневые; наоборот, если p -следы корневые, то существует представление, в котором отсутствуют p -угольники.

Замечание. Многочлен $\frac{x^{pq} - 1}{x - 1}$ является pq -корневым, причём все его p - и q -следы корневые. Конечно же, его можно представить в виде линейной комбинации как p -угольников, так и q -угольников; заме-

тим, однако, что в этом представлении не могут одновременно отсутствовать как p -угольники, так и q -угольники (ибо больше присутствовать некому...).

Теперь уже несложно уточнить наше описание n -корневых многочленов.

Лемма 4. *Любой n -корневой многочлен $P(x)$ представляется в виде линейной комбинации p -угольников с целыми коэффициентами; если при этом у многочлена $P(x)$ лишь k ненулевых коэффициентов, то можно ограничиться лишь p -угольниками при $p \leq k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по n . Если n — простое, то оба утверждения очевидны (все n -корневые многочлены пропорциональны $F_n(x)$).

В противном случае пусть p — наибольший простой делитель n . Если все p -следы многочлена $P(x)$ корневые, то для каждого из них наши утверждения верны по предположению индукции; значит, они верны и для $P(x)$ (для второго утверждения надо заметить, что ненулевых коэффициентов у следа не больше, чем у исходного многочлена). Иначе все следы некорневые, а значит, ненулевые; тогда в каждом из них есть по ненулевому коэффициенту, откуда $k \geq p$. Заметим, что тогда любой простой делитель n не превосходит k , поэтому уже для всех q -угольников в разложении мы будем иметь $q \leq k$.

Пусть $P_0(x)$ — «нулевой» p -след многочлена $P(x)$ (то есть p -след, включающий свободный член). Пусть

$$R(x) = P(x) - P_0(x^{n/p})(1 + x^{n/p} + \dots + x^{n(p-1)/p})$$

(опять же, все вычисления ведутся $\bmod x^n - 1$). Мы вычли из многочлена $P(x)$ линейную комбинацию p -угольников (с целыми коэффициентами), поэтому $R(x)$ также корневой; заметим, что его «нулевой» p -след равен нулю. Значит, все его p -следы — корневые по лемме 3. Но эти следы являются (n/p) -корневыми и, по предположению индукции, представляются в виде целочисленной комбинации q -угольников, что и требовалось. $\square$

В завершение этого раздела ответим на один из вопросов, заданных в решении вышеупомянутой задачи M1618* задачника «Кванта». Вопрос был в том, чтобы описать все нулевые суммы корней n -й степени из единицы, если число n имеет только два простых делителя (обозначим их через p и q). Ясно, что любая сумма нескольких p - и q -угольников имеет требуемый вид. Спрашивалось, верно ли, что любая нулевая сумма раскладывается в сумму нескольких p - и q -угольников.

Ответ на этот вопрос положителен. Пусть имеется некоторая нулевая сумма таких корней. Напомним, что каждый из этих корней является степенью некоторого (на самом деле, любого) примитивного корня n -й степени из 1 (обозначим его ε). Подставив такие представления корней в нашу сумму, получим такой многочлен $Q(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, что $Q(\varepsilon) = 0$, то есть n -корневой. Так как его (n/pq) -следы также являются корневыми, то можно рассматривать их по отдельности; таким образом, можно считать, что $n = pq$.

Рассмотрим разложение $Q(x)$ в линейную комбинацию p - и q -угольников с целыми коэффициентами. Мы можем считать, что в нём присутствуют все p - и q -угольники (при отсутствующих просто поставим коэффициент 0). Заметим, что номера всех вершин q -угольника дают разный остаток от деления на q , а p -угольник, наоборот, состоит из всех вершин фиксированного остатка. Значит, любой p -угольник пересекается по вершине с любым q -угольником.

Пусть один из коэффициентов разложения (скажем, при p -угольнике) отрицателен; если коэффициент при каком-то q -угольнике не положителен, то коэффициент многочлена $Q(x)$, находящийся в пересечении этих многоугольников, также отрицателен (ибо он складывается только из этих двух); это невозможно. Значит, коэффициенты при всех q -угольниках не меньше 1. Теперь, так как сумма всех q -угольников равна сумме всех p -угольников, мы можем из всех коэффициентов при q -угольниках вычесть 1, а ко всем коэффициентам при p -угольниках — прибавить. При этом мы получили новое представление многочлена $Q(x)$, в нём новых отрицательных коэффициентов не появилось, а все старые отрицательные увеличились на 1. Продолжая этот процесс, мы в результате придём к представлению с неотрицательными коэффициентами, что и требовалось.

8. n -корневые малочлены

В этом разделе приведены решения задач 5e) и 5f).

В предыдущем разделе мы получили достаточный аппарат для того, чтобы придумать алгоритм, описывающий все наборы из k корней из единицы с нулевой суммой: лемма 4 уже даёт возможность свести это описание к конечному перебору. Действительно, сумме k корней из 1 соответствует n -корневой многочлен $P(x)$ при некотором n ; при этом в разложении этого многочлена будут присутствовать лишь p -угольники при $p \leq k$. Пусть n_0 — произведение всех простых делителей числа n , не превосходящих k (тогда $k! : n_0$; более того, на n_0 делит-

ся произведение всех простых, не превосходящих k , — обозначим его через $v(k)$). Все (n/n_0) -следы многочлена $P(x)$ также корневые, и в каждом не более k ненулевых коэффициентов; значит, нам достаточно описать все n_0 -корневые многочлены с суммой коэффициентов не более k (все следы нашего многочлена будут таковыми). Более того, поскольку $v(k) : n_0$, то достаточно это сделать с $v(k)$ -корневыми многочленами. Это можно сделать, например, полным перебором; в этом разделе мы показываем, как убыстрить этот метод для $k \leq 6$ (теми же методами это можно сделать и для больших значений k , но это всё равно приведёт к большому перебору).

Итак, мы описываем все корневые многочлены с неотрицательными целыми коэффициентами, у которых сумма коэффициентов не превосходит 6. При $k \leq 3$ мы даже опишем все корневые многочлены с целыми коэффициентами, сумма модулей которых равна $k' \leq 6$, это поможет в разборе больших значений k . Мы будем называть сумму модулей коэффициентов многочлена его *нормой*.

Замечание. При $k \leq 4$ описание таких сумм легко получить и из чисто геометрических соображений, используя только то, что коэффициенты имеют модуль 1. Ситуация резко меняется для $k \geq 5$, однако для единообразия изложения мы разберём все случаи на языке многочленов.

$k = 1$. Нужных многочленов, очевидно, нет.

$k = 2$. По лемме 4 любой многочлен есть линейная комбинация 2-угольников. Поскольку различные 2-угольники не пересекаются, только при одном из них может быть ненулевой коэффициент. Итак, наш многочлен является 2-угольником (с коэффициентом ± 1), то есть представляется в виде $\pm x^i(1 + x^{n/2})$ (соответственно, n должно быть чётным).

$k = 3$. Здесь мы впервые столкнемся с трудностью, которую пока (для наглядности) преодолеем «кустарными методами»; ниже будет сформулировано утверждение (лемма 5), позволяющее сделать это быстрее.

Наш многочлен есть комбинация 2-угольников и 3-угольников, то есть все его $(n/6)$ -следы корневые. Если хотя бы два таких следа ненулевые, то описание сводится к предыдущим значениям k ; в нашем случае норма одного из этих следов равна 1, что невозможно. Значит, только один $(n/6)$ -след ненулевой, то есть можно считать, что $n = 6$.

Заметим, что разложение на p -угольники не единственно, так как сумма двух различных 3-угольников равна сумме трёх различных 2-угольников. Пользуясь этим соотношением, мы можем добиться того,

чтобы при одном 3-угольнике коэффициент был нулевым. Посмотрим на коэффициент при другом. Если он тоже нулевой, то норма исходного многочлена чётна, что невозможно. Если же его модуль хотя бы 2, то нетрудно видеть, что добавление 2-угольников не уменьшает нормы многочлена; тогда она будет не меньше 6, что не так. Итого, коэффициент при одном 3-угольнике равен 0, а при другом ± 1 . Разберём случай, когда он равен 1 (во втором случае получатся те же ответы).

При однократном вычитании 2-угольника коэффициент 1 убирается и появляется коэффициент -1 . Если же мы прибавим 2-угольник с коэффициентом, отличным от -1 , то норма вырастет хотя бы на 2, то есть так делать нельзя. Поэтому все ответы таковы:

3-угольник $x^i(1 + x^{n/3} + x^{2n/3})$ (если 2-угольники не вычитаются, при этом $n \div 3$);

многочлен $x^i(x^{n/3} - x^{n/6} + 1)$ (если вычитается один 2-угольник, при этом $n \div 6$);

тот же самый многочлен, умноженный на -1 (если вычитаются два различных 2-угольника)

и минус 3-угольник (если вычитаются все три).

При $k \geq 4$ мы разберём только нулевые суммы корней из 1; иначе говоря, мы ограничимся только многочленами с неотрицательными коэффициентами. Описание всех многочленов проводится ровно так же, но получается гораздо больше серий ответов.

$k = 4$. Если хотя бы два $(n/6)$ -следа ненулевые, то они являются 2-угольниками. Пусть теперь только один след ненулевой. Аналогично предыдущему один 3-угольник можно не использовать. Далее, если коэффициент при другом равен ± 1 , то норма исходного многочлена нечётна, что неверно; если же его модуль хотя бы 2, то норма не меньше 6. Значит, 3-угольники не участвуют в нашем разложении, и наш многочлен есть линейная комбинация двух 2-угольников (или один удвоенный). Таким образом, ответ здесь $(x^i + x^j)(1 + x^{n/2})$ (здесь n чётно; возможно, что $i = j$).

$k = 5$ и $k = 6$. В этих случаях все $(n/30)$ -следы корневые; если ненулевых следов хотя бы два, то разбор сводится к предыдущим значениям k , а значит, наш многочлен есть комбинация 2- и 3-угольников. Этот случай будет разобран позже. Иначе есть лишь один ненулевой $(n/30)$ -след (то есть далее мы считаем, что $n = 30$).

Лемма 5. Пусть s — минимальная из норм 5-следов 30-корневого многочлена. Тогда существует его представление в виде линейной комбинации 2-, 3- и 5-угольников, в котором сумма модулей коэффициентов при пятиугольниках не больше s .

Доказательство. Как в доказательстве леммы 4, можно вычесть из нашего многочлена комбинацию 5-угольников (с суммой модулей коэффициентов s) так, чтобы 5-след с нормой s обнулится. Тогда все остальные 5-следы станут корневыми, то есть будут представляться в виде комбинации 2- и 3-угольников. Прибавляя к этим представлениям вычтенную комбинацию 5-угольников, получаем требуемое. $\square$

Из леммы следует, что в наших случаях сумму модулей коэффициентов при пятиугольниках можно считать равной либо 1, либо 0.

(i) Пусть она равна 1; можно считать, что коэффициент при 5-угольнике равен 1 (случай, когда он равен -1 , можно свести к нашему прибавлением двух 5-угольников и вычитанием пяти 2-угольников). Значит, все 5-следы некорневые, но становятся корневыми при вычитании одного монома (а именно, следа нашего 5-угольника на этом разрезении).

Если $k=5$, то каждый такой след должен иметь норму 1; после вычитания монома такой след либо обнуляется, либо имеет один коэффициент 1 и один коэффициент -1 . Но во втором случае, как мы видели при $k=2$, многочлен не может быть корневым. Значит, после вычитания 5-угольника наш многочлен обнуляется, то есть 5-угольником он и был.

Если же $k=6$, то один след имеет норму 2, а все остальные — по 1. Тогда после вычитания 5-угольника последние аналогично обнуляются, а первый должен иметь норму 3 (или 1, что невозможно); при этом один из его коэффициентов должен быть -1 , а остальные положительны. Такой многочлен только один: это разность 3-угольника и 2-угольника (при этом его коэффициент -1 должен уничтожиться с коэффициентом 5-угольника). Таким образом, наш многочлен (с точностью до домножения на $x^i \bmod x^n - 1$) имеет вид

$$(1 + x^{n/5} + x^{2n/5} + x^{3n/5} + x^{4n/5}) + (x^{n/6} + x^{n/2} + x^{5n/6}) - (1 + x^{n/2}) = \\ = x^{n/6} + x^{n/5} + x^{2n/5} + x^{3n/5} + x^{4n/5} + x^{5n/6}$$

(при $n \div 30$).

(ii) Пусть теперь 5-угольников в разложении нет, то есть в разложении участвуют только 2- и 3-угольники (здесь также будет разобран отложенный случай, когда есть более одного ненулевого $(n/30)$ -следа исходного многочлена). Тогда все $(n/6)$ -следы корневые. Если их больше одного, то задача свелась к предыдущим значениям k , и многочлен есть либо сумма трёх 2-угольников (будем её обозначать $2+2+2$), либо $3+3$, либо $2+3$ (обозначения аналогичны). Если же

ненулевой $(n/6)$ -след один, то аналогичными рассуждениями получаем, что при $k = 5$ коэффициент при 3-угольнике равен 1 (и к нему должен добавиться ровно один 2-угольник), а при $k = 6$ он равен либо 0 (тогда наш многочлен есть сумма трёх 2-угольников), либо 2 (тогда он есть удвоенный 3-угольник). Итак, получаем ответ.

$k = 5$: $x^i(1+x^{n/5}+x^{2n/5}+x^{3n/5}+x^{4n/5})$ (т. е. 5-угольник, $n : 5$) или

$x^j(1+x^{n/2})+x^i(1+x^{n/3}+x^{2n/3})$ (т. е. $2+3$, $n : 6$).

$k = 6$: $(x^i+x^j+x^\ell)(1+x^{n/2})$ (т. е. $2+2+2$, $n : 2$),

$(x^i+x^j)(1+x^{n/3}+x^{2n/3})$ (т. е. $3+3$, $n : 3$) или

$x^i(x^{n/6}+x^{n/5}+x^{2n/5}+x^{3n/5}+x^{4n/5}+x^{5n/6})$ (т. е. $5+3-2$, $n : 30$).

Замечание 1. Нетрудно из этого описания получить и все корневые многочлены нормы $k \leq 6$. Действительно, они соответствуют алгебраическим суммам не более чем 6 корней. Однако если ε является корнем из 1, то и $-\varepsilon$ тоже; поэтому все такие алгебраические суммы легко преобразовать в обычные.

Замечание 2. Нетрудно понять, что теми же методами можно описывать нулевые суммы и при больших значениях k . Читатель, желающий до конца это осознать, приглашается к самостоятельному разбору значений $k = 7$ и $k = 8$.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи 5f), то есть описать все пары треугольников с вершинами в вершинах правильного n -угольника, центры тяжести которых совпадают. Отождествим вершины n -угольника с корнями n -й степени из 1 на комплексной окружности $|z| = 1$. Тогда условие на вершины наших треугольников (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) записывается так: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Числа $c_i = -b_i$ (треугольник с вершинами c_i центрально-симметричен треугольнику из b_i) являются корнями (НОК(2, n))-й степени, и выполняется условие $\sum a_i + \sum c_i = 0$. Наоборот, если эти 6 корней дают в сумме 0, то вершины a_i , b_i являются почти искомыми — надо только выяснить, когда b_i являются корнями n -й (а не только $(2n)$ -й) степени из 1.

Мы уже поняли, что есть три случая, когда сумма 6 корней из 1 равна нулю: $2 + 2 + 2$, $3 + 3$ и $5 + 3 - 2$. Осталось выяснить, каким треугольникам соответствуют эти ситуации. Заметим, что одной комбинации могут соответствовать несколько типов троек, т. к. эти 6 корней можно по-разному разбить на тройки!

(i) $2 + 2 + 2$. Если в один треугольник попали по одному корню из каждой пары, то полученные после симметрии *треугольники совпа-*

дают. Если же нет, то мы получили после симметрии два прямоугольных треугольника с общей вершиной прямого угла (для этого n должно быть чётным).

(ii) $3 + 3$. Либо все три вершины одного 3-угольника попали в один треугольник — получились два правильных треугольника (для этого нужно $n : 3$); либо в треугольнике две вершины одного и одна другого — получилась первая трудноугадываемая серия: у каждого треугольника есть сторона, стягивающая на описанной окружности дугу $2\pi/3$; при этом третья вершина другого треугольника есть середина этой дуги (и для этого тоже нужно $n : 3$).

(iii) $5 + 3 - 2$. Напомним, что это означает. Вершины правильных 5-угольника и 3-угольника, из которых выкинута пара диаметрально противоположных вершин. Ясно, что наша конфигурация лежит в вершинах правильного 30-угольника. Занумеруем вершины нашего 30-угольника в порядке обхода, тогда наша шестёрка вершин имеет номера 6, 12, 18, 24, 5, 25 (а выкинута вершины 0 и 15). Выпишем все возможные ситуации (с точностью до симметрий, в скобках — номера вершин одного треугольника):

- 1) (5,6,12), (3,9,10); 2) (5,6,18), (9,10,27); 3) (5,12,24), (3,10,21);
- 4) (5,18,24), (10,21,27); 5) (5,6,25), (3,9,27); 6) (5,12,25), (3,9,21);
- 7) (5,6,24), (3,10,27).

Нетрудно видеть, что все эти ситуации возможны лишь при $n : 30$.

Приложение

В этом приложении мы разбираем задачу 1f).

Докажем, что для салфетки, имеющей форму многоугольника, следующие условия равносильны:

(i) как ни положить несколько транслятов такой салфетки на стол, всегда можно вбить несколько гвоздей так, что каждая салфетка прибита ровно одним гвоздем;

(ii) из транслятов салфетки можно выложить паркет.

Замечание. Честно говоря, авторы, выдавая эту задачу школьникам, не вполне осознавали, с какими техническими трудностями сопряжено её решение (тем приятнее, что на конференции её решили, хотя и не с максимальной строгостью)...

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим салфетку $\mathcal{F}$. Отметим в салфетке фиксированную точку. Аналогично лемме 1 нетрудно показать, что множество отмеченных точек тех салфеток, которые задеты данным гвоздем, образуют транслят салфетки $\mathcal{F}$ (симметричной салфет-

ке $\mathcal{F}$), лежащий отмеченной точкой на гвозде. Поэтому условие (i) можно переформулировать так:

(iii) Как ни отметить несколько точек на плоскости, найдутся такие трансляты салфетки $\bar{\mathcal{F}}$, центрально-симметричной нашей, что каждую отмеченную точку покрывает ровно один транслят.

Понятно, что если существует $\bar{\mathcal{F}}$ -паркет (это равносильно (ii)), то выполняется также и (iii). Действительно, если мы перенесём паркет так, что ни одна из отмеченных точек не легла на границу фигурки, то после этого можно выбрать те фигурки, в которых есть отмеченные точки. Множество концов «запрещённых» векторов переноса для одной точки (то есть тех, при которых эта точка попадает на границу фигурки) есть граница фигурок $\mathcal{F}$ -паркета. Понятно (почему?), что конечное число таких множеств не может покрыть плоскость, поэтому так перенести паркет можно.

Идея обратного перехода (iii) $\Rightarrow$ (ii) также проста. Ясно, что если условие (iii) выполнено для фигурки $\mathcal{F}$, то оно выполнено и для $\bar{\mathcal{F}}$. Отметим «очень плотно» точки на большом куске плоскости. Возьмём $\mathcal{F}$ -трансляты, покрывающие каждую из них по разу, тогда они образуют «почти паркет» на этом куске. Значит, наверное, и паркет найдётся.

Последующая часть решения посвящена формализации этого рассуждения. Сначала мы покажем, что существует паркет на любом квадрате, а затем выведем отсюда существование паркета на всей плоскости.

Нам потребуется следующая

Лемма (о компактности). *Даны k бесконечных ограниченных последовательностей (a_n^i) , $i = 1, \dots, k$. Тогда существует такая последовательность индексов $j_1, j_2, \dots$, что при каждом i последовательность $a_{j_1}^i, a_{j_2}^i, a_{j_3}^i, \dots$ сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукция по k . Для $k = 1$ утверждение хорошо известно. Пусть для последовательностей (a_n^i) ($i = 1, \dots, k - 1$) уже найдена требуемая последовательность индексов $p_1, p_2, \dots$. Рассмотрим (ограниченную!) последовательность (b_n) , $b_n = a_{p_n}^k$, и выберем такую подпоследовательность индексов $q_1, q_2, \dots$, что (b_{q_r}) сходится. Тогда в качестве последовательности (j_d) можно выбрать последовательность $p_{q_1}, p_{q_2}, \dots$ □

Введём на плоскости систему координат. Все стороны рассматриваемых квадратов будут параллельны осям координат; единицу измерения мы выберем так, чтобы салфетка помещалась в квадрат 1×1 .

Пусть площадь салфетки равна S . Обозначим через $Q(d)$ квадрат со стороной $2d$ и центром в начале координат.

1. Покажем, что для любого квадрата $Q(d)$ существует семейство $\mathcal{F}$ -транслятов, покрывающее весь квадрат без перекрытий (иными словами, существует $\mathcal{F}$ -паркет на этом квадрате).

Рассмотрим расстановку отмеченных точек V_i , состоящую из всех точек внутри квадрата $Q(d)$ с координатами вида $\left(\frac{p}{2i}; \frac{q}{2i}\right)$, где $p, q \in \mathbb{Z}$. Пусть W_i — раскладка $\mathcal{F}$ -транслятов, покрывающая каждую точку V_i ровно один раз. Ясно, что раскладка W_i будет правильной раскладкой для множества V_ℓ при $\ell < i$ (так как $V_\ell \subset V_i$); поэтому мы можем, если надо, заменить W_ℓ на W_i .

Можно считать, что все трансляты каждой раскладки имеют общие точки с $Q(d)$ (остальные можно просто выкинуть). Тогда в любой W_i есть не больше, чем $4(d+1)^2/S$ транслятов, так как любой такой транслят лежит в квадрате $Q(d+1)$. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность (W_{i_k}) , что количество транслятов s в них одно и то же (и далее, согласно сказанному выше, можно считать, что во всех W_{i_k} это количество равно s). Пусть

$$(x_i^1, y_i^1), \dots, (x_i^s, y_i^s)$$

— координаты отмеченных точек в этих транслятах. Тогда по лемме можно выбрать такую подпоследовательность индексов (i_j) , что все последовательности $(x_{i_j}^t), (y_{i_j}^t)$ сходятся. Рассмотрим их пределы X^t, Y^t и положим на каждую из точек (X^t, Y^t) фигурку отмеченной точкой. (В этом случае мы будем говорить, что раскладки W_{i_j} также сходятся, а описанная раскладка есть их предел.) Тогда при любом i эти трансляты покрывают все множество V_i , причём каждая точка из V_k либо покрыта только одним транслятом, либо не лежит *внутри* никакого транслята.

Покажем, что мы получили паркет на $Q(d)$. Действительно, если есть точка, не покрытая ни одним транслятом, то не покрыт также маленький круг с центром в этой точке. Однако в этом круге есть точка какого-то множества V_ℓ , которая покрыта, — противоречие. Аналогично, если какая-то точка покрыта дважды (внутренностями двух транслятов!), то найдётся маленький круг, покрытый дважды, чего не может быть по тем же соображениям.

2. Покажем теперь, как с помощью паркетов на любом квадрате построить паркет на всей плоскости.

Для каждого натурального d обозначим через P_d какой-то паркет на квадрате $Q(d)$. Заметим, что P_d также образует паркет на любом

квадрате $Q(d')$ при $d' < d$. Вообще говоря, паркеты P_d могут выглядеть совершенно непохоже друг на друга. Мы покажем, что из этой последовательности можно выкинуть часть членов так, чтобы оставшаяся подпоследовательность сходилась на любом квадрате. Будем производить процесс выкидывания пошагово.

Шаг 1. В каждой из раскладок P_d выделим трансляты, задевающие квадрат $Q(1)$; назовём это множество 1-ограничением раскладки P_d . Мы получили последовательность паркетов на $Q(1)$. Как мы видели в предыдущем пункте, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Выкинем все члены нашей последовательности (P_d), не входящие в эту подпоследовательность, полученную последовательность опять обозначим через (P_d) . Зафиксируем первый её член: его мы уже никогда не выкинем.

Заметим, что полученная подпоследовательность обладает теми же свойствами: P_d реализует паркет на $Q(d)$.

Шаг 2. Аналогично для каждой из P_d при $d \geq 2$ рассмотрим её 2-ограничение (состоящее из всех транслятов, задевающих квадрат $Q(2)$) и выделим из этой последовательности паркетов сходящуюся. Опять же выкинем все члены, не входящие в эту подпоследовательность (оставив P_1); полученную подпоследовательность опять обозначим через (P_d) . Далее мы уже не будем изменять первые два члена этой последовательности.

Шаг $(n + 1)$. Аналогично предыдущему выделим подпоследовательность, которая сходится на квадрате $Q(n + 1)$, и выкинем все члены с номерами, большими чем n , не входящие в неё.

Замечание. Объясним, зачем мы оставляем первые члены последовательности неизменными. Без этой предосторожности мы легко могли бы выкинуть слишком много. Например, если на 1-м шаге выкинуть все члены с нечётными номерами, на втором — все члены (исходной последовательности) с номерами, не делящимися на 4, и т. д., то в результате выкинутся просто все члены! В нашем процессе такого не будет: после n -го шага первые n членов перестают меняться, значит, итоговая последовательность будет иметь хотя бы n членов (при любом n). Поэтому она останется бесконечной.

Итак, посмотрим на полученную последовательность раскладок. Для любого d эта последовательность сходится внутри квадрата $Q(d)$ (точнее, сходятся d -ограничения элементов этой последовательности); действительно, это выполнено после d -го шага, а дальше мы только брали подпоследовательности. Значит, мы можем говорить о предельной раскладке в квадрате $Q(d)$; при этом она, естественно,

будет паркетом. Кроме того, предельная раскладка для $Q(d)$ будет содержаться в предельной раскладке для $Q(d+1)$. Значит, взяв объединение всех этих раскладок, мы получим требуемый паркет. $\square$

Литература

1. *Berger R.* The undecidability of the domino problem // *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 66.
2. *Coven E., Meyerowitz A.* Tiling the integers with translates of one finite set // *J. Algebra.* 1999. Vol. 212. P. 161—174.
3. *Hajós G.* Über einfache und mehrfache Bedeckung des n -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter // *Math. Zeitschrift.* 1942. Vol. 47. P. 427—467.
4. *Minkowski H.* *Geometrie der Zahlen.* Leipzig, 1896.
5. *Newman D. J.* Tessellation of integers // *J. of Number Theory.* 1977. Vol. 9. P. 107—111.
6. *Stein S. K.* Algebraic tiling // *The American Mathematical Monthly.* 1974. Vol. 81(5). P. 445—462.
7. *Zassenhaus H.* Modern developments in the geometry of numbers // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1961. Vol. 67. P. 426—439.
8. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.
9. *Васильев Н. Б., Сендеров В. А.* Решение задачи M1618 // *Квант.* 1998. № 3. С. 22—23.
10. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам. М.: Мир, 1993.
11. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности М.; Л., 1950. (Популярные лекции по математике; Вып. 1).

Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра

А. А. Заславский

Постановка задачи

Эта статья посвящена задаче, которая была предложена школьникам на XV Летней конференции Турнира городов в августе 2003 года. Постановка задачи является совершенно естественной. Действительно, большая часть планиметрии состоит в изучении свойств треугольника. Трёхмерным аналогом треугольника является тетраэдр, поэтому вполне логично поставить вопрос: для каких свойств треугольника существуют трёхмерные аналоги. Впрочем, в полном объеме эта задача абсолютно неподъемна. Достаточно сказать, что в электронной энциклопедии [1] число связанных с произвольным треугольником замечательных точек превышает уже 3000. Здесь мы рассмотрим вопросы, связанные примерно с десятком этих точек, которые будут перечислены ниже (об этих точках см. также [2, § 2.3]).

1. *Центр тяжести* M — точка пересечения медиан треугольника.
2. *Центр описанной окружности* O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.
3. *Центр вписанной окружности* I — точка пересечения его биссектрис. Напомним, что для любого треугольника существуют ещё три вневписанные окружности, каждая из которых касается одной из его сторон и продолжений двух других.
4. *Ортоцентр* H — точка пересечения высот треугольника. Отметим, что точки O , M и H лежат на одной прямой (прямая Эйлера) и $HM = 2MO$. Кроме того, точки O и H изогонально сопряжены¹.
5. *Точка Жергонна* G — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположными сторонами вписанной окружности.

Впервые опубликовано: Заславский А.А. Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра // Математическое просвещение. Третья серия. М.: МЦНМО, 2004. Вып. 8. С. 78—92. Проект представлен на XV Летней конференции.

¹ Если даны треугольник ABC и точка P , то прямые, симметричные прямым AP , BP , CP относительно биссектрис соответствующих углов ABC , пересекаются в одной точке P' , которая называется *изогонально сопряжённой* точке P относительно ABC .

6. Точка *Нагеля* N — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с соответствующей вневписанной окружностью. При этом точки N , M , I лежат на одной прямой и $NM = 2MI$. Отметим также, что точки G и N изотомически сопряжены² друг другу, а изогонально сопряжённые им точки являются центрами гомотетии описанной и вписанной окружностей.

7. Точка *Лемуана* L — изогонально сопряжённая точке M . Точка L обладает также тем свойством, что сумма квадратов расстояний от неё до сторон треугольника меньше, чем для любой другой точки плоскости.

8. Точки *Торричелли* — точки пересечения прямых AA' , BB' и CC' , где ABC' , BCA' , CAB' — правильные треугольники, построенные на сторонах треугольника ABC . При этом, если треугольники строятся во внешнюю сторону, получается первая точка Торричелли T_1 , а если во внутреннюю — вторая точка Торричелли T_2 . Если все углы треугольника меньше 120° , то точка T_1 лежит внутри треугольника и из неё все стороны треугольника видны под углами 120° . В этом случае она обладает ещё одним важным свойством: сумма расстояний от вершин треугольника до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

9. Точки *Аполлония* — точки пересечения трёх окружностей, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и точки пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов при этой вершине с противоположной стороной. Точки Аполлония обладают тем свойством, что расстояния от них до вершин треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам, а их проекции на стороны треугольника образуют правильные треугольники. Кроме того, точки Аполлония изогонально сопряжены точкам Торричелли, поэтому мы будем обозначать их T'_1 и T'_2 .

Мы будем исследовать вопрос, существуют ли аналогичные точки в произвольном тетраэдре, и если нет, то как описать соответствующие классы тетраэдров, а также существуют ли между замечательными точками в пространстве такие же связи, как между их плоскими аналогами. Приведём сначала результаты, которые можно считать широко известными.

² Если прямые AP , BP , CP пересекают противоположные стороны треугольника ABC в точках A_1 , B_1 , C_1 , а точки A_2 , B_2 , C_2 симметричны A_1 , B_1 , C_1 относительно середин соответствующих сторон, то прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке P' , которая называется изотомически сопряжённой P относительно ABC .

Известные факты геометрии тетраэдра

1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке — центре тяжести тетраэдра M — и делят друг друга в отношении $3:1$.

2. Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу. Её центр O — точка пересечения перпендикуляров к граням тетраэдра, проходящих через центры описанных около них окружностей.

3. В любой тетраэдр можно вписать сферу. Её центром I будет точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов. Сложнее выяснить, сколько существует сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра. Прежде всего отметим, что их не может быть больше 8. Действительно, так как центр такой сферы равноудален от плоскостей ABC и ABD , он лежит в биссекторной плоскости одного из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями. Аналогичны условия равноудалённости от плоскостей ABC и ACD ; ABC и BCD . Так как каждую плоскость можно выбрать 2 способами, для трёх плоскостей имеем 8 возможностей. В каждом из этих 8 случаев плоскости имеют не более одной общей точки (в противном случае биссекторная плоскость угла, например, при ребре AB проходила бы через точку C , что невозможно), которая однозначно определяет сферу.

Осталось понять, действительно ли эти 8 сфер существуют. Для этого посмотрим, на какие части разбивают пространство плоскости граней тетраэдра. Очевидно, что этих частей 15:

- а) внутренность тетраэдра,
- б) 4 трёхгранных угла с вершинами в вершинах тетраэдра,
- в) 4 части, примыкающие к граням тетраэдра,
- г) 6 «корытец», примыкающих к рёбрам тетраэдра.

Очевидно, что в части типа б) сфера вписана быть не может, так как каждая из таких частей не пересекается плоскостью четвёртой грани. Докажем, что для части типа в) невписанная сфера существует всегда. Для этого построим вписанную в тетраэдр сферу и проведём к ней касательную плоскость, например, параллельную плоскости ABC . Она отсекает от тетраэдра гомотетичный (с центром гомотетии D) тетраэдр $A'B'C'D$. Соответствующая гомотетия переводит вписанную сферу в искомую невписанную.

Наконец, исследуем части типа г). Пусть в такую часть, прилежащую к ребру CD , можно поместить сферу, касающуюся плоскостей всех граней, с центром K и радиусом r . Тогда

$$V_{ABCD} = V_{ABCK} + V_{ABDK} - V_{ACDK} - V_{BCDK} = \frac{r}{3}(S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}).$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования искомой сферы будет неравенство $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$. Для доказательства его достаточности заметим, что для любой точки рассматриваемого «корытца» её расстояния a, b, c, d до плоскостей BCD, CDA, DAB, ABC удовлетворяют соотношению

$$dS_{ABC} + cS_{ABD} - bS_{ACD} - aS_{BCD} = 3V.$$

Поэтому для точки K с $a = b = c = r = \frac{3V}{S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}}$ выполняется $d = r$.

Таким образом, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к рёбрам AB и CD , вписать сферу нельзя, а если $S_{ABC} + S_{ABD} \neq S_{ACD} + S_{BCD}$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец». Соответственно, в зависимости от того, сколько из равенств

$$S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD},$$

$$S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD},$$

$$S_{ABC} + S_{BCD} = S_{ACD} + S_{ABD}$$

выполняются, количество сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра, может быть от 5 до 8. Нетрудно построить примеры тетраэдров, реализующих указанные возможности.

Участник XV Летней конференции И. Шнурников (Краснодар) нашёл другое условие для определения числа вневписанных сфер.

Утверждение 1. Если $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAD + \angle CBD$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к рёбрам AB и CD , нельзя вписать сферу, а если $\angle ADB + \angle ACB \neq \angle CAD + \angle CBD$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец».

Лемма 1. Пусть даны четырёхгранный угол $OABCD$ и сфера, касающаяся изнутри его граней OAB, OBC и OCD . Тогда

— если $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD также касается сферы;

— если $\angle AOB + \angle COD > \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD не пересекает сферу;

— если $\angle AOB + \angle COD < \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD пересекает сферу.

Доказательство леммы 1 полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения об описанном четырёхугольнике. Поэтому мы его не приводим. Докажем утверждение 1.

Доказательство. Найдем теперь необходимое и достаточное условие существования сферы, вписанной в «корытце», прилегаю-

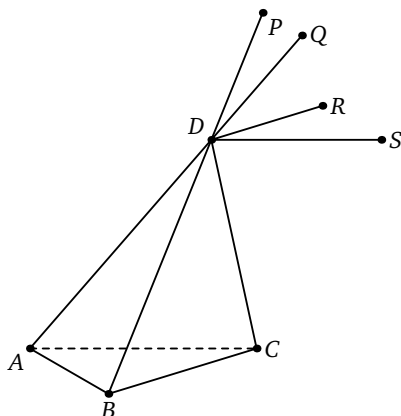


Рис. 1

щее к ребру CD . Пусть лучи DP и DQ противоположны соответственно DA и DB , а лучи DR и DS параллельны лучам BC и AC (см. рис. 1). Рассмотрим любую сферу, касающуюся всех граней угла $DPQRS$, кроме, возможно, DRS . Если плоскость DRS пересекает сферу, то, меняя её радиус, можно добиться искомого касания с плоскостью ABC , а если нет — то нельзя. По лемме 1 соответствующее условие имеет вид

$$\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD.$$

Аналогично для ребра AB необходимым и достаточным условием будет противоположное неравенство.

Впрочем, убедиться в равносильности условий

$$\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD \quad \text{и} \quad S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$$

можно непосредственно, разрезав тетраэдр по рёбрам AC , BC , AD и BD на два четырёхугольника с равными сторонами, но разными углами и сравнив их площади. $\square$

Отметим также следующий важный факт. Пусть I — центр вписанной сферы тетраэдра, X , Y — его проекции на рёбра AC , BC , D' — точка касания сферы с гранью ABC (см. рис. 2). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $D'X = r \operatorname{ctg} \frac{AC}{2}$, $D'Y = r \operatorname{ctg} \frac{BC}{2}$.

Таким образом, расстояния от точки касания до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих рёбрах. Если аналогично рассмотреть внеписанную сферу,

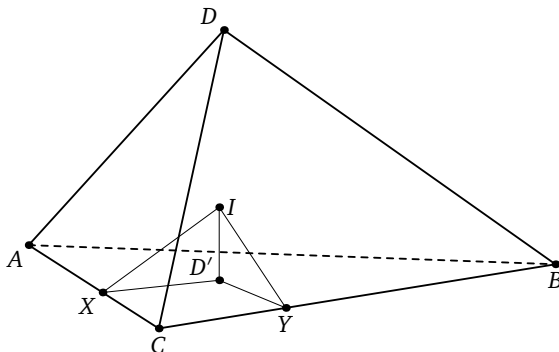


Рис. 2

касающуюся грани ABC и продолжений остальных граней, то мы увидим, что расстояния от точки D'' её касания с ABC до рёбер основания относятся как тангенсы тех же углов. Отсюда следует, что

$$\angle D'CA = \angle D''CB, \quad \angle D'AC = \angle D''AB, \quad \angle D'BC = \angle D''BA,$$

т. е. доказано

Утверждение 2. Точки касания вписанной и невписанной сфер изогонально сопряжены относительно соответствующей грани.

Рассмотрим теперь точку касания плоскости ABC с невписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней. Расстояния от этой точки до BC , CA и AB относятся как

$$\operatorname{ctg} \frac{BC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{AC}{2} : \operatorname{ctg} \frac{AB}{2}.$$

Следовательно, для изогонально сопряжённой точки отношение этих расстояний равно $\operatorname{tg} \frac{BC}{2} : \operatorname{tg} \frac{AC}{2} : \operatorname{tg} \frac{AB}{2}$. Именно такое отношение получается для точки касания ABC со сферой, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD (или AB). Таким образом, 8 точек касания плоскости ABC со сферами, касающимися плоскостей всех граней тетраэдра, разбиваются на 4 пары изогонально сопряжённых.

Пойдём дальше. Как известно, если

$$S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD},$$

то ни в одно из «корытец», прилежающих к рёбрам AB и CD , нельзя вписать сферу. Это связано с тем, что точки касания сферы с плоскостями граней уходят в бесконечность. Но тогда изогонально сопряжённые им точки лежат на описанных окружностях граней.

Отсюда и из ранее доказанных утверждений следует

Теорема 1. *Следующие условия равносильны.*

а) Ни в одно из «корытец», прилегающих к рёбрам AB и CD , нельзя вписать сферу.

б) $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

в) $\angle ACB + \angle ADB = \angle CAD + \angle CBD$.

г) Точка касания плоскости ABC с вневписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABC .

д) Точка касания плоскости ABD с вневписанной сферой, касающейся грани ABC и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABD .

е) Точка касания плоскости ACD с вневписанной сферой, касающейся грани BCD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ACD .

ж) Точка касания плоскости BCD с вневписанной сферой, касающейся грани ACD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около BCD .

з) Центр вписанной сферы лежит в плоскости, проходящей через середины рёбер AC , BC , AD , BD .

Последнее условие найдено С. Л. Берловым. Его равносильность условию б) следует из того, что центр вписанной сферы является выпуклой линейной комбинацией вершин тетраэдра с коэффициентами, пропорциональными площадям противоположных граней.

Из теоремы 1 можно получить множество красивых следствий. Вот одно из них.

Если точки касания одной из вневписанных сфер с плоскостями трёх граней тетраэдра лежат на описанных окружностях этих граней, то же верно для трёх других вневписанных сфер (соответствующий тетраэдр называется *равногранным*, так как все его грани — равные треугольники; о равногранных тетраэдрах можно прочесть в статье [3]).

Может возникнуть вопрос: почему в качестве аналога вписанной окружности треугольника мы решили взять сферу, касающуюся всех граней тетраэдра, а не всех его рёбер. Дело в том, что последняя сфера существует не всегда. Действительно, пусть сфера касается рёбер тетраэдра в точках X, Y, Z, U, V, W (см. рис. 3). Тогда $AX = AU = AW = a$, как касательные, проведённые к сфере из одной точки. Аналогично

$$BY = BU = BV = b, \quad CZ = CV = CW = c, \quad DX = DY = DZ = d.$$

Следовательно, $AB + CD = AC + BD = AD + BC = a + b + c + d$,

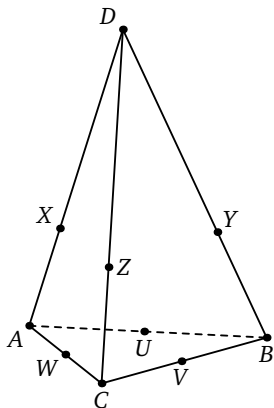


Рис. 3

т. е. необходимым условием существования искомой сферы является равенство сумм противоположных рёбер тетраэдра. Как показано в [3], это условие будет и достаточным.

Тетраэдры, для которых существует сфера, касающаяся всех рёбер, называются *каркасными*. В [3] приводится следующий перечень равносильных свойств:

- а) тетраэдр является каркасным;
- б) суммы противоположных рёбер равны;
- в) суммы противоположных двугранных углов равны;
- г) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;
- д) любой четырёхугольник, образованный на развёртке тетраэдра двумя его гранями, описанный;

е) перпендикуляры к граням, восстановленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Ниже будет показано, что этот список можно дополнить.

4. Высоты пересекаются в одной точке не для всех тетраэдров, а лишь для некоторого специального класса — *ортоцентрических* тетраэдров. В [4] доказываются следующие условия, эквивалентные ортоцентричности:

- а) противоположные рёбра тетраэдра перпендикулярны;
- б) суммы квадратов противоположных рёбер равны;
- в) основание любой высоты тетраэдра совпадает с ортоцентром грани, на которую она опущена.

Отметим также, что для ортоцентрических тетраэдров существует аналог прямой Эйлера: точка пересечения высот H , центр тяжести M и центр описанной сферы O лежат на одной прямой и $OM = OH$.

В [4] описан ещё один класс тетраэдров. Тетраэдр называется *инцентрическим*, если отрезки, соединяющие его вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней, пересекаются в одной точке. Для этого необходимо и достаточно, чтобы произведения противоположных рёбер были равны.

Малоизвестные факты

Выясним теперь, в каких тетраэдрах существуют аналоги точек Жергонна и Нагеля. Для этого будет полезна следующая

Лемма 2. Пусть точка C' лежит в грани ABD тетраэдра $ABCD$, а точка D' — в грани ABC . Отрезки CC' и DD' пересекаются тогда и только тогда, когда $S_{ACD'}S_{BDC'} = S_{BCD'}S_{ADC'}$.

Доказательство. Для того чтобы CC' и DD' пересекались, необходимо и достаточно, чтобы точки C, D, C' и D' лежали в одной плоскости. Пусть X — точка пересечения этой плоскости с отрезком AB . Тогда отрезки CD' и DC' пересекаются в точке X и, значит,

$$\frac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \frac{S_{ACX} - S_{AD'X}}{S_{BCX} - S_{BD'X}} = \frac{AX}{BX} = \frac{S_{ADC'}}{S_{BDC'}},$$

что равносильно утверждению леммы. $\square$

Теперь определим условия пересечения двух отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, например отрезков CC' и DD' . Из рис. 2 видно, что

$$2S_{ACD'} = AC \cdot D'X = AC \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \frac{AC}{2}.$$

Выписав аналогичные соотношения для площадей треугольников BCD', ADC', BDC' и применив лемму 2, получим условие пересечения:

$$AC \cdot BD \cdot \operatorname{ctg} \frac{AC}{2} \operatorname{ctg} \frac{BD}{2} = AD \cdot BC \cdot \operatorname{ctg} \frac{AD}{2} \operatorname{ctg} \frac{BC}{2}.$$

Это условие можно упростить, воспользовавшись тем, что в трёхгранном угле синусы плоских углов относятся так же, как синусы противоположащих им двугранных. Соответственно, имеем

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin \widehat{ABC} \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{BAC} \sin \widehat{ABD}} = \frac{\sin AC \sin BD}{\sin BC \sin AD},$$

и после преобразований условие пересечения принимает вид

$$\cos \frac{AC}{2} \cos \frac{BD}{2} = \cos \frac{AD}{2} \cos \frac{BC}{2}.$$

Отсюда, очевидно, следуют два утверждения.

Утверждение 3. Пусть вписанная сфера касается граней тетраэдра в точках A', B', C', D' . Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Назовём тетраэдр *жергонновым*, если отрезки, соединяющие его вершины с точками касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке.

Утверждение 4. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда произведения косинусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Рассуждая аналогично, найдём условия, при которых выполнен аналог свойства 6. Такие тетраэдры будем называть тетраэдрами Нагеля.

Утверждение 5. Пусть вневписанные сферы касаются граней тетраэдра в точках A', B', C', D' . Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Утверждение 6. Тетраэдр является нагелевым тогда и только тогда, когда произведения синусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Утверждения 3—6 были доказаны учеником автора, в то время школьником московской гимназии 1543 Д. Косовым. Участники XV Летней конференции Турнира городов М. Исаев (Барнаул) и В. Филимонов (Екатеринбург) обнаружили³ ещё одно свойство тетраэдров Жергонна.

Утверждение 7. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда любое его ребро видно из точки касания вписанной сферы с содержащей это ребро гранью под углом 120° . Таким образом, в жергонновом тетраэдре точки Торричелли всех граней совпадают с точками касания граней и вписанной сферы.

Доказательство. Докажем сначала, что если для одной грани тетраэдра точка её касания с вписанной сферой совпадает с точкой Торричелли, то это верно и для остальных граней. Пусть A', B', C', D' — точки касания вписанной сферы с гранями BCD , CDA , DAB , ABC , и пусть $\angle AD'B = \angle BD'C = \angle CD'A = 120^\circ$. Так как касательные к сфере из одной точки равны, $AD' = AC'$, $BD' = BC'$, то треугольники ABD' и ABC' равны и $\angle AC'B = \angle AD'B = 120^\circ$. Аналогично $\angle BA'C = \angle CB'A = 120^\circ$. Далее,

$$\angle AB'D = \angle AC'D, \quad \angle BC'D = \angle BA'D, \quad \angle CA'D = \angle CB'D$$

и

$$\angle AB'D + \angle CB'D = \angle BC'D + \angle AC'D = \angle CA'D + \angle BA'D = 240^\circ,$$

откуда следует, что все эти углы равны 120° .

Пусть теперь точки касания C' и D' — точки Торричелли соответствующих граней. Так как прямые CD' и DC' являются биссектрисами углов $AD'B$ и $AC'B$, они пересекают ребро AB в такой точке X , что

$$\frac{AX}{BX} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{AD'}{BD'}.$$

³ Впоследствии оказалось, что указанные факты содержатся в книге [5], в которой жергонновы тетраэдры называются *изогональными*.

Следовательно, точки C , D , C' , D' лежат в плоскости CDX , и отрезки CC' и DD' пересекаются. Любые другие два отрезка также пересекаются, а так как четыре отрезка не лежат в одной плоскости, точка пересечения одна и та же. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

Очевидно, утверждение 7 можно переформулировать следующим образом: тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие вершины с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке. Все приведённые выше результаты объединяет следующая теорема.

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

а) отрезки, соединяющие вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке;

б) произведения косинусов половин противоположных двугранных углов равны;

в) точка касания одной из граней тетраэдра с вписанной сферой является точкой Торричелли этой грани;

г) точки касания всех граней тетраэдра с вписанной сферой являются точками Торричелли этих граней;

д) отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке;

е) проекции центра вневписанной сферы на рёбра соответствующей грани образуют равносторонний треугольник;

ж) тетраэдр, образованный точками касания вписанной сферы с гранями, инцентрический.

Равносильность условий г) и е) следует из того, что точки касания грани с вписанной и вневписанной сферами сопряжены, а точка Торричелли изогонально сопряжена с точкой Аполлония. Равносильность условий б) и ж) следует из того, что, например, $A'B' = 2r \cos \frac{CD}{2}$.

Выясним теперь, чем является точка Жергонна тетраэдра $ABCD$ для тетраэдра $A'B'C'D'$. Поскольку отрезки CC' и DD' пересекаются, прямые CD и $C'D'$ лежат в одной плоскости. Рассмотрим плоскость $A'B'C'$. Она пересекает вписанную сферу $ABCD$ по окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, плоскости BCD и ACD — по прямым, касающимся этой окружности в точках A' и B' и пересекающимся в некоторой точке Q , а плоскость $CDC'D'$ — по прямой $C'Q$. Нетрудно доказать, что тогда прямая CQ будет симедианой треугольника $A'B'C'$ (т. е. прямой, симметричной медиане, проведённой из вершины C' , относительно биссектрисы, проведённой из той же

вершины). Следовательно, прямая DD' пересекает грань $A'B'C'$ в точке, лежащей на симедиане. Аналогично точка пересечения лежит на двух других симедианах, т. е. является точкой Лемуана треугольника $A'B'C'$. Точно так же доказывается, что прямые AA' , BB' , CC' проходят через точки Лемуана граней $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$. Отметим, что по лемме 2 прямые, соединяющие вершины тетраэдра и точки Лемуана противоположных граней, пересекаются тогда и только тогда, когда тетраэдр является инцентрическим. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Предположим, что тетраэдр $ABCD$ жергоннов, тогда тетраэдр $A'B'C'D'$, образованный точками касания его граней с вписанной сферой, инцентрический и точка Жергонна $ABCD$ совпадает с точкой пересечения прямых, соединяющих вершины $A'B'C'D'$ с точками Лемуана противоположных граней.*

Теорема 3 является аналогом планиметрического утверждения о совпадении точки Жергонна треугольника и точки Лемуана треугольника, образованного точками касания его сторон с вписанной окружностью.

Для тетраэдров Нагеля пока не найдено никаких условий, отличных от задаваемых утверждением 6. Неизвестно также, верно ли, что точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания его граней с внеписанными сферами, лежит на прямой, проходящей через центр тяжести тетраэдра и центр его вписанной сферы. Возможно, впрочем, что какой-то аналог этого свойства выполняется для другого класса тетраэдров.

Наконец, отметим следующее. Может показаться, что ещё один класс тетраэдров задан условием пересечения в одной точке отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки Жергонна противоположных граней. Однако, применив лемму 2, нетрудно убедиться, что это условие задаёт каркасные тетраэдры. Действительно, в этом случае, например,

$$\frac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \frac{AB + AC - BC}{AB + BC - AC}.$$

Подставив это и аналогичные выражения в лемму 2, после преобразований получим

$$AC + BD = AD + BC.$$

То же получится и при замене точек Жергонна точками Нагеля.

Прежде чем пытаться строить точки Лемуана, Торричелли и Аполлония для трёхмерного случая, определим для тетраэдров аналоги изотомического и изогонального сопряжения. Для изотомического сопряжения сделать это несложно.

Утверждение 8. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P , и пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения прямых AP, BP, CP, DP с противоположными гранями тетраэдра, а A_2, B_2, C_2, D_2 — точки, изотомически сопряжённые A_1, B_1, C_1, D_1 относительно граней. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 пересекаются в одной точке.

Это утверждение сразу следует из леммы 2. Полученную точку естественно назвать *изотомически сопряжённой* к P . Впрочем, изотомическое сопряжение даже на плоскости не обладает особо интересными свойствами, так что и в пространстве трудно ожидать каких-либо ценных результатов.

Определим теперь изогональное сопряжение в пространстве относительно тетраэдра $ABCD$. Прежде всего отметим следующий факт.

Утверждение 9. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P . Тогда шесть плоскостей, симметричных плоскостям $ABP, ACP, BCP, ADP, BDP, CDP$ относительно биссекторных плоскостей соответствующих двугранных углов, пересекаются в одной точке.

Для доказательства достаточно заметить, что если расстояния от P до граней тетраэдра относятся как $a : b : c : d$, то каждая из рассматриваемых плоскостей проходит через точку, расстояния от которой до тех же граней относятся как $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$.

Определённую таким образом точку P' назовём *изогонально сопряжённой* точке P относительно $ABCD$. Покажем теперь, что, как и в плоском случае, существует другой способ её определения.

Утверждение 10. Пусть A', B', C', D' — проекции точки P на плоскости BCD, CDA, DAB, ABC . Тогда перпендикуляры, опущенные из A на $B'C'D'$, из B на $C'D'A'$, из C на $D'A'B'$, из D на $A'B'C'$, пересекаются в изогонально сопряжённой P точке P' .

Прежде всего докажем следующий, имеющий самостоятельную ценность факт.

Лемма 3. Пусть даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Перпендикуляры, опущенные из A' на BCD , из B' на CDA , из C' на DAB , из D' на ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда «антисоответственные» рёбра этих тетраэдров (например, $A'B'$ и CD) перпендикулярны.

Доказательство. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров. Так как $PA' \perp BCD$ и $PB' \perp CDA$, то $PA' \perp CD$ и $PB' \perp CD$. Следовательно, $CD \perp PA'B'$ и $CD \perp A'B'$.

Обратно, пусть «антисоответственные» рёбра перпендикулярны. Тогда перпендикуляры из A' на BCD и из B' на ACD лежат в плоскости,

проходящей через $A'B'$ и перпендикулярной CD , и, значит, пересекаются. Аналогично пересекаются два любых других перпендикуляра, и так как четыре перпендикуляра не лежат в одной плоскости, все они проходят через одну точку. $\square$

Доказательство утверждения 10. Из леммы 3 сразу следует, что если перпендикуляры из вершин одного тетраэдра на грани другого пересекаются, то и перпендикуляры из вершин второго на грани первого тоже пересекаются. Поэтому осталось доказать, что в условиях утверждения точкой пересечения будет именно P' .

Плоскость $PC'D'$ перпендикулярна ребру AB . Поэтому если она пересекает AB в точке Q , то $C'QD'$ — линейный угол двугранного угла AB . Перпендикуляр, опущенный из A на $B'C'D'$, перпендикулярен $C'D'$, значит, линия пересечения плоскости $C'D'X$ с плоскостью π , проходящей через этот перпендикуляр и AB , также перпендикулярна $C'D'$ по теореме о трёх перпендикулярах. Отсюда и из свойства 1 плоского изогонального сопряжения следует, что π проходит через P' . Утверждение доказано. $\square$

Исследуем теперь свойства изогонального сопряжения. Очевидно, что, как и на плоскости, центры вписанной и невписанных сфер сопряжены сами себе. Не представляет также труда доказать, что центр тяжести M изогонально сопряжен точке L , для которой сумма квадратов расстояний до граней тетраэдра минимальна. Эту точку можно считать точкой Лемуана тетраэдра. С другой стороны, точки, изогонально сопряжённые бесконечно удалённым, лежат не на описанной сфере, а на некоторой поверхности третьего порядка. Вопрос об изогональной сопряжённости точек O и H , очевидно, имеет смысл ставить лишь для ортоцентрических тетраэдров. Впрочем, с помощью утверждения 10 легко доказывается, что даже для них ответ будет положителен, только если тетраэдр правильный. Какими свойствами обладает точка, изогонально сопряжённая O , в общем случае — непонятно.

Наконец, попробуем разобраться с точками Торричелли и Аполлония. Судя по всему, единственный перспективный путь — найти точку, минимизирующую сумму расстояний до вершин тетраэдра. Для этого проведём механическое рассуждение, аналогичное плоскому.

Пропустим через вершины тетраэдра четыре верёвки, свяжем их внутренние концы в узел, а за внешние будем тянуть в одном направлении с равными силами. Если узел не проскочит через одну из вершин, то остановится в искомой точке T , причём сумма действующих на него сил будет равна нулю. Исследуем свойства этой точки.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ — единичные векторы, направленные из T в направлении A, B, C, D . Имеем

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 &= -\vec{e}_4, \\ (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) &= 1, \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_1, \vec{e}_3) + (\vec{e}_2, \vec{e}_3) &= -1,\end{aligned}$$

т. е. для любых трёх векторов $\vec{e}_i$ сумма косинусов углов между ними равна -1 . Далее,

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_4) = -(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -1 - (\vec{e}_1, \vec{e}_2) - (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Это означает, что из точки T противоположные рёбра тетраэдра видны под равными углами. Отсюда следует, что трёхгранные углы $TABC, TCDA, TBAD$ и $TDCB$ равны. Так как их объединение совпадает со всем пространством, каждый из них высекает на единичной сфере с центром T область площади π , и, значит, сумма его двугранных углов равна 2π . Соответственно, для того чтобы узел не провалился в вершину тетраэдра, нужно, чтобы сумма двугранных углов в любой вершине была меньше 2π (или сумма косинусов плоских углов больше -1). Подведем итог нашим рассуждениям.

Теорема 4. *Если в любой вершине тетраэдра $ABCD$ сумма двугранных углов меньше 2π , то внутри тетраэдра существует точка T , из которой противоположные рёбра тетраэдра видны под равными углами. При этом сумма расстояний от вершин тетраэдра до точки T меньше, чем до любой другой точки пространства.*

Найденную точку T можно считать трёхмерным аналогом первой точки Торричелли. Аналогично плоскому случаю доказывается, что проекции изогонально сопряжённой ей точки T' на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр. Поэтому точку T' можно считать аналогом точки Аполлония. Невыясненными остаются следующие вопросы.

1. Как определить точку Торричелли для тетраэдра, сумма двугранных углов при одной из вершин которого больше 2π ?

2. Сколько существует точек, проекции которых на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр, и какими свойствами обладают сопряжённые к ним? (Эти точки задаются системой трёх уравнений второй степени, следовательно, их не более 8. Но не исключено, что число действительных и конечных среди них всегда меньше.)

3. Обладают ли точки Аполлония ещё какими-либо свойствами, аналогичными плоским?

Возможно, ответы на эти вопросы удастся найти читателям.

Литература

1. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers.
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>
2. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
3. Матизен В. Э. Равногранные и каркасные тетраэдры // Квант. 1983. № 7.
4. Матизен В. Э., Дубровский В. Н. Из геометрии тетраэдра // Квант. 1988. № 9.
5. Скопец З. А., Понарин Я. Л. Геометрия тетраэдра и его элементов. Изд-во Ярославского пед. института, 1974.

Вписанные зацепления

М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов

Данный цикл задач условно разделен на 6 частей.

Первая часть посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1 (Конвей — Гордон — Закс, 1981). *Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.*

Последующие части посвящены её обобщению на произвольные узлы и зацепления.

Теорема 2 (Негами, 1991). *Для любого узла найдётся такое число N , что для любых N точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, существует замкнутая ломаная с вершинами в данных точках, образующая данный узел.*

Определение и примеры узлов и зацеплений даны во втором пункте. Доказательство теоремы 2 намечено в задачах четвёртого и пятого пунктов. Полностью доказательство этой теоремы приводится в статье В. В. Прасолова и М. Б. Скопенкова «Рамсеевская теория зацеплений», опубликованной в этой книге (с. 251—260).

Применению рамсеевской теории зацеплений посвящён шестой пункт.

Различные части статьи практически независимы, поэтому можно начинать как с задачи 1.1, так и с задач 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1.

1. Зацепленные треугольники

1.1. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1.2. На плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то два отрезка с концами в этих точках пересекаются во внутренней точке.

Данный цикл задач представляет собой расширенную версию проекта, представленного на XV Летней конференции Турнира городов М. Скопенковым, О. Скрыбиным и А. Шаповаловым (при участии И. Дынникова и А. Скопенкова).

Более трудные разделы отмечены звёздочкой.

Определение общего положения. Будем говорить, что набор точек в пространстве находится в *общем положении*, если никакие 4 точки из этого набора не лежат в одной плоскости.

Пример 1. Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, расположенных в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно, находится в общем положении (рис. 1).

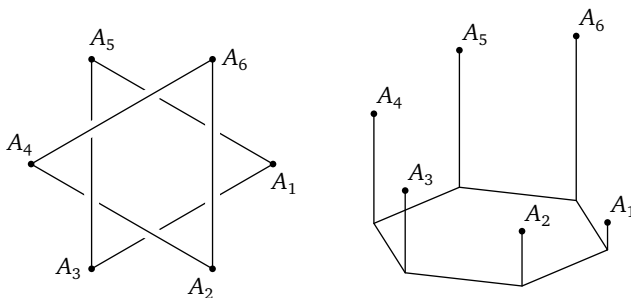


Рис. 1

Пример 2. Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении (предлагаем проверить это самостоятельно).

Определение зацепленных треугольников. Пусть Δ, Δ' — два треугольника в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении. Будем говорить, что эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке.

Пример 3. Треугольники $A_1A_3A_5, A_2A_4A_6$ из примера 1 зацеплены.

1.3. Докажите, что если контур одного из треугольников Δ и Δ' не пересекается с плоскостью, в которой лежит другой треугольник, то Δ и Δ' не зацеплены.

1.4. Докажите, что если Δ зацеплен с Δ' , то Δ' зацеплен с Δ .

1.5. Треугольники Δ и Δ' остаются зацепленными, если их вершины при движении в пространстве остаются в общем положении.

1.6. Пусть даны два треугольника в пространстве. Предположим, что проекции никаких 3 из их 6 вершин на некоторую плоскость не лежат на одной прямой. Будем считать рассматриваемую плоскость расположенной горизонтально. Изобразим на рисунке проекции треугольников и в каждой точке пересечения проекций (*перекрёстке*) укажем, сторона какого треугольника проходит выше (рис. 1).

Докажите, что данные треугольники зацеплены, если и только если число перекрёстков, в которых сторона первого треугольника проходит выше стороны второго, нечётно.

1.7. Пусть точка A_1 из примера 1 движется вверх с единичной скоростью. Найдите все интервалы времени, в течение которых треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ зацеплены.

Определение (зацепленности шестёрки точек). Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовём *разделённой парой* два треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. *Зацепленностью* данной шестёрки точек назовём количество зацепленных разделённых пар.

Контрольные вопросы

I. Рассмотрим правильный треугольник ABC , лежащий на горизонтальной плоскости. Повернём его на угол φ вокруг центра и поднимем над плоскостью. Обозначим полученный треугольник $A'B'C'$ (плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны). При каких значениях φ шесть точек A, B, C, A', B' и C' находятся в общем положении?

- При любых φ .
- При любых φ , кроме $\varphi = 2\pi k/3$, где k — целое.
- При любых φ , кроме $\varphi = \pi k/3$, где k — целое.
- Ни при каких φ .

II. Требуется так покрасить три вершины октаэдра в белый цвет, а три другие — в чёрный, чтобы после небольшого «шевеления» этих вершин треугольник с вершинами в белых точках был бы зацеплен с треугольником с вершинами в чёрных точках. Выберите все способы раскраски вершин на рис. 2 а), б), в), которые удовлетворяют данному условию.

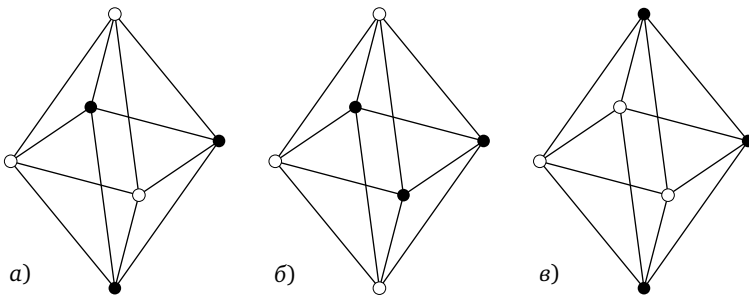


Рис. 2

III. Сколько существует зацепленных разделённых пар для шестёрки точек из примера 1?

а) 0 б) 1 в) 2

1.8. Докажите, что чётность зацепленности не зависит от выбора шестёрки точек.

1.9. Приведите пример шестёрки точек, зацепленность которой равна 1.

1.10. Докажите теорему 1.

2. Вписанные узлы и зацепления

Основные понятия. Узел можно представлять себе как верёвку, концы которой соединены. Верёвку будем считать эластичной, и узлы, получающиеся друг из друга деформацией¹ верёвки, различать не будем.

Примеры *различных* узлов: тривиальный K , правый и левый трилистники T , восьмёрка E (рис. 3).

Если взять не одну верёвку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление*.

Примеры *различных* зацеплений: зацепление Хопфа H , двойное зацепление D , зацепление Уайтхеда W , кольца Борромео B (рис. 4).

2.1. В какие из узлов и зацеплений, изображённых на рис. 3 и 4, можно продеформировать узлы и зацепления на рис. 5?

Определение (вписанного узла и зацепления). Пусть в пространстве дано некоторое множество точек и узел. Если верёвку продеформировать в ломаную, все вершины которой принадлежат данному множеству, то получится узел, *вписанный* в данное множество точек. (При этом часть точек множества может остаться незадействованной.) Будем говорить также, что полученная ломаная *образует* данный узел. Аналогично определяется *вписанное зацепление*.

Замечание. Если каждую точку множества соединить прямолинейным отрезком с каждой из остальных точек, то вписанный узел является подмножеством полученной фигуры.

Сформулируйте теорему Негами (см. начало статьи) с помощью введенных понятий. Попробуйте доказать эту теорему для трилистника. Указания, а также связанные с этой теоремой открытые вопросы будут даны в последующих частях этой статьи.

¹ В процессе деформации запрещается разрывать верёвку (концы верёвки также должны оставаться соединёнными); верёвка, разумеется, не может самопересекаться.

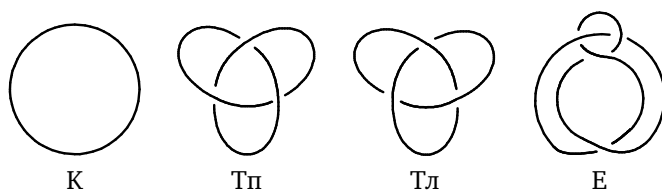


Рис. 3

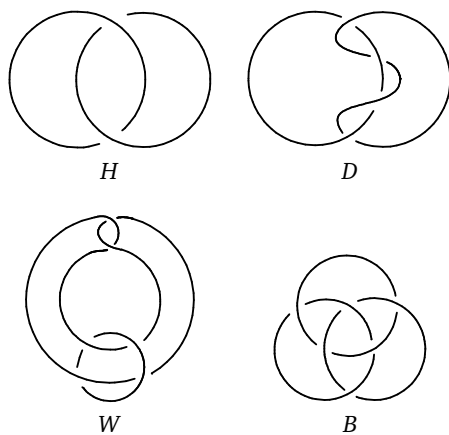


Рис. 4

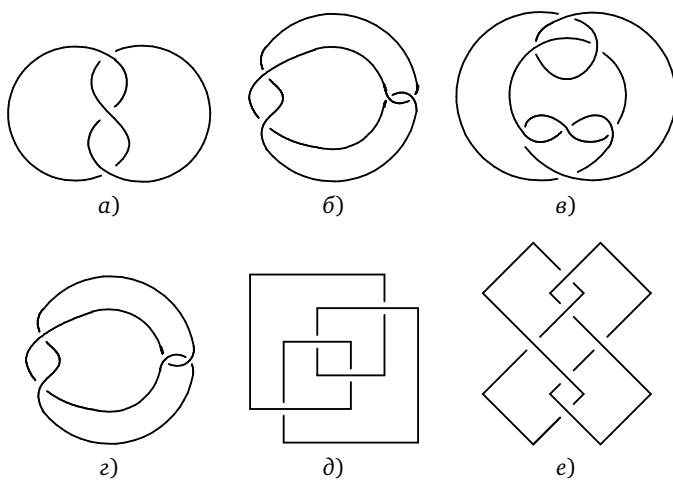


Рис. 5

Контрольный вопрос

1. Какой узел представляет ломаная, вписанная в множество из 5 точек, проекция которой изображена на рис. 6?

а) К; б) Тп; в) Тл; г) Е; д) такой ломаной не существует.

2.2. Докажите, что всякий узел, вписанный в набор из ≤ 5 точек, тривиален.

2.3. Приведите наборы с минимальным числом точек, в которые можно вписать:

- а) зацепление Хопфа;
 - б) кольца Борромео;
 - в) трилистник;
 - г) двойное зацепление;
 - д) восьмёрку;
 - е) зацепление Уайтхеда.
- (Доказывать минимальность необязательно.)

2.4. Зацеплены ли

- а) два треугольника, образующих зацепление Хопфа;
- б) два из трёх треугольников, образующих кольца Борромео?

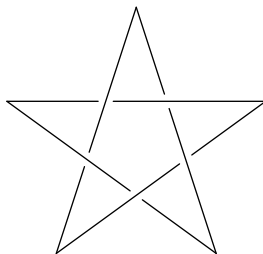


Рис. 6

3*. Зацепленные четырёхзвенные ломаные

Теорема 1' (Закс, 1981). Пусть в пространстве даны 4 красные и 4 синие точки, причём никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек. Тогда найдутся две зацепленные замкнутые четырёхзвенные ломаные с вершинами в этих точках, звенья которых соединяют точки разных цветов.

3.1. На плоскости даны три синие и три красные точки, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два отрезка с разноцветными концами, пересекающиеся во внутренней точке.

Определение коэффициента зацепления четырёхзвенных ломаных. Пусть $\square$ и $\square'$ — две замкнутые четырёхзвенные ломаные в пространстве, с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно, находящимися в общем положении. Их коэффициентом зацепления $lk(ABCD, A'B'C'D')$ назовём остаток при делении на 2 количества точек пересечения контура $ABCD$ с объединением треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$.

3.2. Докажите, что $\text{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \text{lk}(ABCD, B'C'D'A')$.

3.3. Решите аналоги задач 1.4—1.6 для четырёхзвенных ломаных.

3.4. Заменим требование общего положения более слабым требованием $\square \cap \square' = \emptyset$. Дайте для этого случая определение коэффициента зацепления четырёхзвенных ломаных так, чтобы сохранились предыдущие свойства.

Определение (общего положения в случае двух цветов). Набор точек в пространстве, окрашенных в два цвета, называется набором *общего положения*, если никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек.

Определение (разделённой пары четырёхзвенных ломаных). Пусть в пространстве дан набор 4 красных и 4 синих точек общего положения. Назовём *разделённой парой* две замкнутые четырёхзвенные ломаные со следующими свойствами: (1) их вершины расположены в данных точках; (2) они не имеют общих вершин; (3) их звенья соединяют точки разных цветов.

Контрольные вопросы

I. Имеется набор точек, в котором есть хотя бы 3 синие и хотя бы 3 красные точки. Пусть все синие точки лежат на прямой a , а все красные — на прямой b . В каких случаях данный набор будет набором общего положения?

- Никогда.
- Если прямые a и b скрещиваются.
- Если прямые a и b не параллельны.
- Всегда.

II. Требуется так покрасить четыре вершины куба в белый цвет, а четыре другие — в чёрный, чтобы после небольшого «шевеления» этих вершин можно было выбрать замкнутую четырёхзвенную лома-

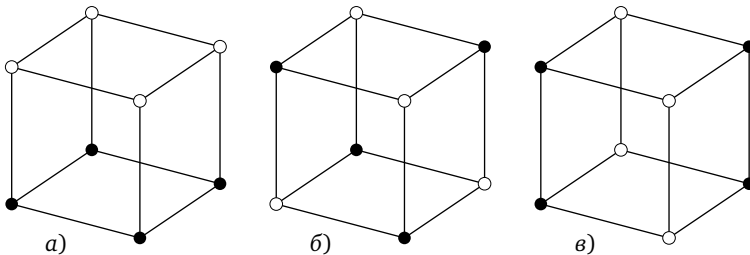


Рис. 7

ную с вершинами в белых точках и замкнутую четырёхзвенную ломаную с вершинами в чёрных точках, зацепленную с ней. Выберите все способы раскраски вершин на рис. 7, а), б), в), которые удовлетворяют данному условию.

III. Найдите коэффициент зацепления двух четырёхзвенных ломаных, образующих двойное зацепление (рис. 8):

а) 0; б) 1; в) 2; г) зависит от способа, каким двойное зацепление вписано в набор из 8 точек.

3.5. Пусть 4 красные точки лежат на одной прямой, а 4 синие — на другой прямой, скрещивающейся с ней. Найдите в этом случае все разделённые пары $(\square, \square')$, для которых $lk(\square, \square') = 1$.

3.6. Дайте определение зацепленности для четвёрки синих и четвёрки красных точек и докажите, что она чётна.

3.7. Докажите теорему 1'.

3.8. Докажите, что в предположениях теоремы 1' найдутся хотя бы две пары зацепленных замкнутых четырёхзвенных ломаных.

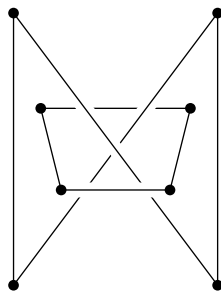


Рис. 8

4. Доказательство теоремы Негами для трилистника

Определение (узла (зацепления), вписанного в раскрашенное множество). Пусть в пространстве дано множество точек, окрашенных в два цвета. Тогда под *вписанным узлом* будем понимать ломаную, образующую данный узел, звенья которой соединяют точки разных цветов. *Вписанное зацепление* определяется аналогично (ср., например, с теоремой 1').

Теорема 2' (Миёчи, 1994). Для любого узла (зацепления) найдётся такое число N , что в любое множество N синих и N красных точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел (зацепление).

Очевидно, теорема Негами следует из теоремы Миёчи.

Определение (положительного набора). Пусть в пространстве дан набор N синих и N красных точек, находящийся в общем положении (смотри определение выше). Проведем все отрезки, соединяющие точки разного цвета. Зафиксируем некоторую плоскость, которую будем считать расположенной горизонтально. Нарисуем на ней проекцию полученной фигуры. В дальнейшем нас будет интересо-

вать только эта плоская картинка и мы будем говорить «точка набора» и «отрезок», подразумевая соответственно «проекция точки набора» и «проекция проведённого нами отрезка».

Пусть точки набора не попадают внутрь отрезков. В каждой точке пересечения отрезков (*перекрёстке*) укажем, какой из отрезков проходит выше (как в задаче 1.6). Назовём перекрёсток *положительным* (рис. 9 слева), если при движении по отрезку, который проходит выше, от синего конца к красному синий конец другого отрезка остаётся слева. Иначе перекрёсток назовём *отрицательным* (рис. 9 справа).

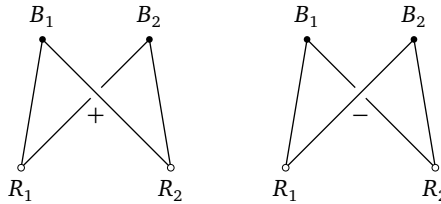


Рис. 9

Исходный набор точек назовём *положительным*, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 одна из пар отрезков B_1R_1, B_2R_2 и B_1R_2, B_2R_1 пересекается во внутренней точке, причём полученный перекрёсток положителен. Аналогично определяется *отрицательный* набор.

Пример 4. Пример положительного набора изображён на рис. 10 (сравните с задачей 3.5).

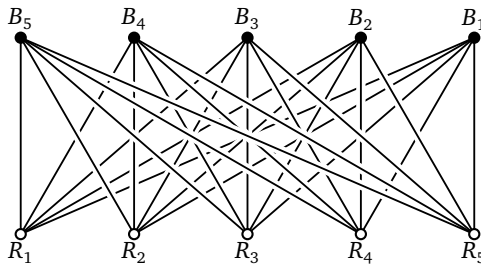


Рис. 10

4.1. Раскрасьте точки из примера 1 в два цвета так, чтобы получился отрицательный набор.

В задачах 4.2—4.5 предполагается, что дан некоторый положительный набор, причём $N \geq 2$.

4.2. Докажите, что все синие точки лежат по одну сторону от любой прямой, соединяющей две красные точки.

Определение порядка «>». Пусть дан положительный набор. Пусть R_1 и R_2 — две красные точки. Скажем, что $R_1 > R_2$, если при движении по прямой R_1R_2 от R_1 к R_2 все синие точки остаются справа.

4.3. Докажите, что если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

4.4. Докажите, что если отрезок R_1B_1 проходит выше R_2B_2 , то $R_1 > R_2$.

4.5. Докажите, что красные и синие точки можно занумеровать так, что при любых $i < j$ и $k \neq l$ отрезок R_iB_k проходит выше R_jB_l .

Контрольные вопросы

I. Каково минимальное число точек в раскрашенном в 2 цвета множестве, в которое можно вписать зацепление Хопфа?

а) 6; б) 8; в) 9; г) 10; д) 12; е) бесконечно много.

II. Если в положительном наборе изменить цвет каждой точки на противоположный, то набор станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

III. Положительный набор при отражении относительно любой вертикальной плоскости станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

IV. Положительный набор при отражении относительно любой горизонтальной плоскости станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

V. При неограниченном движении вертикально вверх наибольшей красной точки (относительно введенного порядка «>») положительного набора

а) он всё время остаётся положительным;

б) он через некоторое время становится отрицательным;

в) он через некоторое время становится ни положительным, ни отрицательным.

4.6. Впишите трилистник в набор точек из примера 4.

4.7. В любой положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно вписать трилистник.

4.8 (Теоремы Рамсея). а) Докажите, что для любых m и n найдётся такое $R(m, n)$, что при любой раскраске рёбер полного графа с $R(m, n)$

вершинами в два цвета найдётся либо полный подграф первого цвета с m вершинами, либо полный подграф второго цвета с n вершинами.

б) Сформулируйте и докажите обобщение пункта а) на случай трёх цветов.

в) Сформулируйте и докажите обобщение пунктов а) и б) на полные двудольные графы.

г) Назовём набор точек общего положения в пространстве, окрашенных в два цвета, *нейтральным*, если проекции на плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках). Докажите, что для любого n найдётся такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек.

д) Докажите, что для любого n найдётся такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный набор n синих и n красных точек.

4.9. Докажите теоремы Миёчи и Негами для трилистника.

4.10. Впишите узлы и зацепления, изображённые на рис. 3 и 4, в какие-нибудь положительные наборы точек и докажите для них теоремы Миёчи и Негами.

5*. Доказательство теоремы Негами для произвольного зацепления

Лемма 1 (о двух спицах). Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Для любого узла найдётся такое N , что данный узел можно вписать в множество, состоящее из N красных точек на первой прямой и N синих точек на второй прямой.

(Иными словами, любой узел можно натянуть на две спицы.)

Определение (прямоугольного представления узла, рис. 11, слева). Будем говорить, что задано *прямоугольное представление* узла, если проекция верёвки на плоскость обладает следующими свойствами:

□) проекция состоит из некоторого числа вертикальных и горизонтальных отрезков;

–) никакие два вертикальных отрезка не лежат на одной вертикальной прямой и никакие два горизонтальных отрезка не лежат на одной горизонтальной прямой;

÷) если вертикальный и горизонтальный отрезок пересекаются, то горизонтальная часть верёвки проходит выше вертикальной.

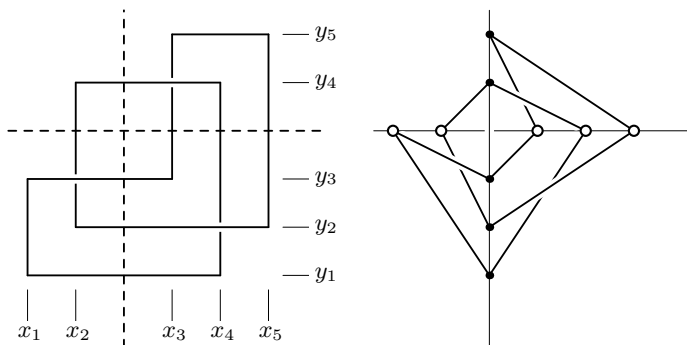


Рис. 11

Определение *прямоугольного представления* зацепления аналогично.

Определение (двойственного узла, рис. 11). Пусть дано прямоугольное представление некоторого узла. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_N$ — координаты вертикальных, а $y_1, y_2, \dots, y_M$ — координаты горизонтальных отрезков его проекции (рис. 11). Рассмотрим две прямые, параллельные плоскости рисунка, одна из которых расположена под этой плоскостью и проходит горизонтально, а вторая расположена над этой плоскостью и проходит вертикально. Отметим на горизонтальной прямой точки с координатами $x_1, x_2, \dots, x_N$, а на вертикальной — точки с координатами $y_1, y_2, \dots, y_M$. Обозначим через R_i точку на первой прямой с координатой x_i , а через B_j — точку на второй прямой с координатой y_j . Соединим отрезками все пары отмеченных точек R_i, B_j , для которых точка (x_i, y_j) на плоскости рисунка является концом некоторого отрезка проекции узла. В результате получим некоторую замкнутую ломаную. Узел, который представляется этой ломаной, назовём узлом, *двойственным* к исходному. Определение *двойственного зацепления* аналогично.

Пример 5. На рис. 11 изображены трилистник и двойственный к нему узел (трилистник).

Контрольные вопросы

1. Можно ли назвать картинку д), е) на рис. 5 прямоугольным представлением узла?

а) да; б) нет.

II. Каково минимальное число отрезков в прямоугольном представлении простого зацепления?

- а) 6 б) 8 в) 9 г) 10 д) 12

III. Набор N красных точек $R_1, R_2, \dots, R_N$ и M синих точек $B_1, B_2, \dots, B_M$ из определения двойственного узла является положительным, если и только если:

- а) все числа $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M$ положительны;
 б) все числа $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M$ отрицательны;
 в) все числа $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M$ одного знака;
 г) числа $x_1, x_2, \dots, x_N$ имеют один и тот же знак, а числа $y_1, y_2, \dots, y_M$ имеют противоположный знак.

5.1. Постройте прямоугольные представления узлов и зацеплений с рис. 3 и 4.

5.2. Нарисуйте двойственные узлы и зацепления для построенных вами в задаче 5.1 прямоугольных узлов и зацеплений. Что это за узлы?

5.3. а) Докажите, что для любого узла существует прямоугольное представление.

б) Докажите, что любой узел можно продеформировать в двойственный к нему.

5.4. Докажите лемму о двух спицах.

5.5. Выведите из леммы о двух спицах теоремы Миёчи и Негами.

Дополнительные задачи

5.6 (очень трудная). Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве найдётся пара зацепленных циклов.

5.7 (известная открытая проблема). Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве некоторый цикл оказывается заузленным.

6*. Доказательство гипотезы Менгера

Этот раздел посвящён одному применению рамсеевской теории зацеплений, а именно доказательству следующего утверждения:

Теорема Уммеля (гипотеза Менгера). *Двумерную фигуру, являющуюся произведением двух полных графов на 5 вершинах, нельзя расположить² без самопересечений в 4-мерном евклидовом пространстве.*

Это утверждение было сформулировано Менгером в 1929 г. в качестве гипотезы, а доказано Уммелем в 1978 г. Мы приведём простое до-

² Мы рассматриваем только достаточно «хорошие», то есть кусочно линейные расположения. Мы не приводим их формального определения.

казательство гипотезы Менгера, полученное одним из авторов статьи. Для его понимания и для решения некоторых задач данного раздела требуется знакомство с понятием 4-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. Однако для того, чтобы увидеть основную идею доказательства, это совсем не обязательно. Большинство последующих задач будет относиться к случаю плоскости или трёхмерного пространства.

Определение (произведения графов). *Графом* мы называем фигуру, состоящую из точек (*вершин*), причём некоторые из них соединены отрезками (*рёбрами*), пересекающимися между собой только в вершинах. Соответственно, *точка* графа — это либо одна из его вершин, либо точка на одном из его рёбер.

Произведением двух множеств A, B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(a; b)$, где a — точка множества A , а b — точка множества B .

Таким образом, произведение двух графов — это двумерная фигура, склеенная из квадратиков, отрезков и точек (вершин).

Квадратики соответствуют всевозможным парам (α, β) , где α — ребро первого графа, β — ребро второго. Аналогично отрезки соответствуют всевозможным парам (ребро 1-го графа, вершина 2-го графа) и (вершина 1-го графа, ребро 2-го графа), а вершины — всевозможным парам (вершина 1-го графа, вершина 2-го графа).

Примеры. Произведение двух отрезков — квадрат.

Произведение отрезка и окружности — боковая поверхность цилиндра.

Произведение двух окружностей — тор.

Произведение отрезка на букву Y — «книжка с тремя страницами».

6.1. Из скольких квадратиков, отрезков и вершин склеено произведение $Y \times Y$?

Обозначим через K_n полный граф на n вершинах, а через $K_{n,m}$ полный двудольный граф с n синими и m красными вершинами (то есть граф, образованный всеми рёбрами, соединяющими вершины разных цветов).

6.2. а) Произведение отрезка на окружность можно расположить на плоскости без самопересечений.

б) Произведение графа K_5 на отрезок можно расположить в (трёхмерном) пространстве без самопересечений.

в) Произведение графа K_4 на окружность можно расположить в (трёхмерном) пространстве без самопересечений.

г) Граф K_5 можно расположить без самопересечений на двумерном торе.

Проиллюстрируем основную идею раздела на следующем примере.

Пример. Докажем от противного, что полный граф на 5 вершинах (граф K_5) нельзя расположить на плоскости без самопересечений. Предположим, что нам удалось это сделать. Пусть O — некоторая вершина этого графа. Рассмотрим на плоскости маленькую окружность с центром O . Она пересекает наш граф в 4 точках. Обозначим данные точки через A, B, C, D в том порядке, в котором они расположены на окружности. Выбросим из нашего графа K_5 отрезки OA, OB, OC, OD — то есть ту его часть, которая попала внутрь рассматриваемой окружности.

В оставшейся части графа пары точек A, C и B, D можно соединить непересекающимися путями. Действительно, пусть A — точка пересечения окружности и рёбра OA' графа K_5 . Аналогично определим точки B', C', D' . Тогда пути $AA'C'C$ и $BB'D'D$ идут по различным рёбрам графа, стало быть, не пересекаются.

Добавим к построенным путям хорды AC и BD нашей окружности. В результате мы получим два замкнутых пути, пересекающихся в единственной точке — точке пересечения хорд AC и BD .

Теперь нетрудно прийти к противоречию. Действительно, точки A и C находятся по разные стороны от отрезка BD , а следовательно, и по разные стороны от замкнутого пути $BDD'B'B$. С другой стороны, эти две точки можно соединить путем $AA'C'C$, следовательно, они лежат по одну сторону от замкнутого пути $BDD'B'B$.

Полученное противоречие показывает, что граф K_5 нельзя расположить на плоскости без самопересечений.

6.3. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ нельзя расположить на плоскости без самопересечений.

Следующая задача посвящена доказательству того, что произведение $Y \times Y$, где Y — буква 'Y', нельзя расположить в трёхмерном пространстве без самопересечений.

6.4. Предположим, что произведение $Y \times Y$ расположено без самопересечений в пространстве. Рассмотрим маленькую сферу S^2 вокруг точки $O \times O \subset Y \times Y$, где O — вершина степени 3 графа Y .

- а) Сколько рёбер произведения $Y \times Y$ выходят из вершин $O \times O$?
- б) Сколько квадратиков произведения $Y \times Y$ содержат вершину $O \times O$?
- в) Как выглядит пересечение данной сферы S^2 с произведением $Y \times Y$?
- г) Произведение $Y \times Y$, где Y — буква 'Y', нельзя расположить в трёхмерном пространстве без самопересечений.

Следующая задача посвящена доказательству того, что произведение графа K_5 на окружность нельзя реализовать в (трёхмерном) пространстве без самопересечений.

6.5. Предположим, что произведение $K_5 \times K_3$ расположено без самопересечений в пространстве. Рассмотрим маленькую сферу S^2 вокруг точки $O_1 \times O_2 \subset K_5 \times K_3$, где O_1, O_2 — вершины графов K_5 и K_3 соответственно.

а) Как выглядит пересечение K данной сферы S^2 и произведения $K_5 \times K_3$?

б) При любом расположении графа K (из пункта а)) на сфере в нём найдётся цикл и пара вершин, расположенных по разные стороны от данного цикла.

в) Выведите невозможность расположения $K_5 \times K_3$ без самопересечений в пространстве из следующего утверждения (доказательства которого мы не требуем): *число точек пересечения замкнутой двумерной поверхности и замкнутого пути в пространстве, пересекающихся трансверсально, всегда чётно.*

6.6. Предположим, что произведение $K_5 \times K_5$ расположено без самопересечений в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим маленькую сферу S^3 вокруг точки $O \times O \subset K_5 \times K_5$, где O — вершина графа K_5 .

а) Докажите, что пересечение сферы S^3 и произведения $K_5 \times K_5$ — полный двудольный граф $K_{4,4}$.

б) (Теорема Закса.) При любом расположении графа $K_{4,4}$ в сфере S^3 в нём найдётся пара циклов с нечётным коэффициентом зацепления.

в) Любую пару циклов в $S^3 \cap K_5 \times K_5$ можно заклеить парой непесекающихся двумерных поверхностей, лежащих в произведении $K_5 \times K_5$, но вне шара, ограниченного сферой S^3 .

г) Выведите теорему Уммеля из следующего утверждения (доказательства которого мы не требуем): *число точек пересечения двух замкнутых двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^4$, пересекающихся трансверсально, всегда чётно.*

6.7. Как по данному набору графов определить такую минимальную размерность n , что их произведение можно реализовать без самопересечений в $\mathbb{R}^n$?

Ответы на контрольные вопросы

К разделу «Зацепленные треугольники»: I в, II б, III б.

К разделу «Вписанные узлы и зацепления»: I е.

К разделу «Зацепленные четырёхзвенные ломаные»: I б, II в, III а.

К разделу «Доказательство теоремы Негами для трилистника»: Ib, IIa, IIIb, IVb, Va.

К разделу «Доказательство теоремы Негами для произвольного зацепления»: Ia, IIb, IIIc.

Решения задач

1.1. Рассмотрим граф, состоящий из шести вершин и всех рёбер, соединяющих их. Каждому человеку сопоставим вершину этого графа. Если двое людей знакомы, то ребро, соединяющее соответствующие им вершины, покрасим в красный цвет, иначе — в синий цвет. Рассмотрим некоторую вершину A . По принципу Дирихле найдутся такие три вершины X_1, X_2 и X_3 , что рёбра AX_1, AX_2, AX_3 одного цвета. Для определённости считаем, что это — красный цвет. Если какое-то из рёбер X_iX_j ($i, j \in \{1; 2; 3\}$) красного цвета, то все стороны треугольника AX_iX_j имеют красный цвет, и, тем самым, задача решена. В противном случае все стороны треугольника $X_1X_2X_3$ имеют синий цвет. И в этом случае задача тоже решена.

1.2. Первое решение. Если выпуклая оболочка рассматриваемых точек — это четырёх- или пятиугольник, то утверждение задачи очевидно: пересекутся две диагонали. Рассмотрим случай, когда выпуклой оболочкой является треугольник ABC . Две оставшиеся точки D и E из данных пяти лежат внутри треугольника ABC . Точка E лежит внутри одного из треугольников DAB, DAC или DBC ; допустим, в DAC . Тогда BE пересекается с одним из отрезков DA или DC .

Второе решение. Утверждение этой задачи является двумерным аналогом теоремы 1 и может быть доказано аналогичным образом. Набор точек на плоскости назовём набором *общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовём *зацепленностью* пятёрки точек общего положения число пар отрезков с концами в этих точках, пересекающихся во внутренней точке. Легко привести пример пятёрки, зацепленность которой равна 1. После этого для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что чётность зацепленности не зависит от выбора 5 точек. Пусть даны две пятёрки. Одну из них можно перевести в другую, по очереди двигая точки (причём движение можно считать равномерным). Пока точки движутся так, что пятёрка остаётся в общем положении, зацепленность, очевидно, не меняется. Как только одна из точек (скажем, A) попадает на отрезок с концами в двух других точках (скажем, B и C), зацепленность либо не меняется, либо меняется на

± 2 . Действительно, в такой момент меняется «состояние» (т. е. пересекающиеся отрезки становятся непересекающимися, и наоборот) ровно двух пар отрезков: AD, BC и AE, BC (где D и E — две оставшиеся точки пятёрки).

1.3. Достаточно доказать, что если Δ зацеплен с Δ' или Δ' зацеплен с Δ , то контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' . Первый случай очевиден. Во втором случае контур треугольника Δ' пересекает внутренность треугольника Δ . Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' . Однако в таком случае и контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ' .

1.4. Указание. Утверждение задачи непосредственно следует из доказанного ниже. Дадим сначала следующее определение.

Определение (зацепленных пар точек). Пусть на горизонтальной прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная), считая справа.

Утверждение. Треугольники Δ и Δ' зацеплены $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия:

- 1) плоскости треугольников Δ и Δ' пересекаются по некоторой прямой l ;
- 2) каждое из множеств $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек (здесь и далее Δ и Δ' обозначают контуры треугольников);
- 3) пары точек $\Delta \cap l$ и $\Delta' \cap l$ зацеплены на прямой l .

Доказательство. (И, следовательно, решение задачи 1.4). Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ' . Тогда выполнение условия 1) очевидно. Выполнение условия 2) следует из задачи 1.3. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ' , то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки. Докажем теперь выполнение условия 3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и B , а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B' . Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l .

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l . Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ' . $\square$

1.5. Из Утверждения, доказанного в решении задачи 1.4, следует, что треугольники Δ и Δ' зацеплены тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)–3) (см. выше). Никакое из этих условий не может нарушиться при допустимом движении. В проверке нуждается лишь сохранение условия 1), которое может нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но из задачи 1.3 следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него треугольники Δ и Δ' не зацеплены.

1.6. *Решение Д. Коробицына.* Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат выше горизонтальной плоскости. Пусть $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC на плоскость. Рассмотрим простой многогранник τ , ограниченный многоугольниками ABC , $A'B'C'$, $ABA'B'$, $BCB'C'$ и $CAC'A'$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ зацеплены, если и только если число L точек пересечения контура треугольника ABC с внутренностью треугольника $A_1B_1C_1$ нечётно. Пусть U — число точек пересечения контура треугольника ABC с боковыми гранями многогранника τ . Число точек пересечения контура с многогранником чётно. Поэтому по модулю 2 имеем $L + U = 0 \Rightarrow L = U \Rightarrow L$ равно числу точек пересечения контуров проекций треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых сторона треугольника $A_1B_1C_1$ проходит ниже стороны треугольника ABC .

Утверждение задачи может оказаться полезным при решении других задач из первой части.

1.7. *Указание.* Для решения может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма. Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t , где $0 \leq t \leq 2$. Предположим, что набор 6 вершин треугольников Δ_t и Δ' находится в общем положении при всех t , кроме $t = 1$. Тогда:

а) если $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$, то пары треугольников (Δ_0, Δ') и (Δ_2, Δ') зацеплены или не зацеплены одновременно;

б) если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то ровно одна из пар треугольников (Δ_0, Δ') и (Δ_2, Δ') зацеплена.

Все интервалы времени, в течение которых рассматриваемые треугольники зацеплены, это

$$(-\infty; 2), \quad (3, 5; 4, 5), \quad (6; +\infty).$$

Вид этих интервалов следует из примера 3 и леммы, сформулированной выше. Сама лемма легко следует, например, из утверждения, доказанного в решении задачи 1.4.

1.8. Пусть наборы точек N , X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , и X_5 , а также N' , X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , и X_5 находятся в общем положении. Соединим точки N и N' ломаной, не проходящей через отрезки $X_i X_j$. Будем равномерно двигать точку N вдоль этой ломаной, через N_t обозначим её положение в момент времени t . В соответствии с леммой из указания к задаче 1.7 зацепленность шестёрки точек N , X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 может измениться лишь в те моменты времени, когда $N_t \in X_i X_j X_k$ для некоторых $1 \leq i < j < k \leq 5$. Поэтому достаточно доказать, что при прохождении точки N через плоскость $X_i X_j X_k$ чётность зацепленности нашей шестёрки не меняется (считаем, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$). Среди всех возможных отрезков с концами в точках N , X_i , X_j , X_k или вообще нет двух пересекающихся отрезков, или имеется только одна пара пересекающихся отрезков. В первом случае контуры любых двух пар треугольников с концами в точках N , X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , и X_5 не пересекаются; в соответствии с указанной леммой зацепленность шестёрки точек измениться не может. Рассмотрим второй случай. Пусть A_1 , A_2 , A_3 , A_4 — такая перестановка точек N , X_1 , X_2 , X_3 , что отрезок $A_1 A_2$ пересекается с отрезком $A_3 A_4$. Существуют две пары треугольников с вершинами в точках N , X_1 , X_2 , X_3 , X_4 и X_5 , контуры которых пересекаются: $X_4 A_1 A_2$ и $X_5 A_3 A_4$, $X_5 A_1 A_2$ и $X_4 A_3 A_4$. Из нашей леммы следует, что коэффициент зацепления каждой из этих пар треугольников поменяется, а коэффициент зацепления остальных пар треугольников останется неизменным. Утверждение задачи доказано.

1.9. Подходит набор точек из примера 1. Другой пример можно получить, чуть пошевелив набор точек из решения задачи 2.3 а).

1.10. Утверждение задачи следует из двух предыдущих задач.

2.1. Указание. Самый правильный способ решить эту задачу — это взять верёвку, завязать на ней узел с рис. 5 и попытаться продеформировать его в один из узлов на рис. 3, 4. То же относится к зацеплениям. Деформацию верёвки удобно изображать на бумаге в виде серии картинок, в которой соседние картинки получаются друг из друга небольшой деформацией и отличаются мало.

Ответ. а), б) Правый трилистник; в) восьмёрка; г) тривиальный узел; д) восьмёрка; е) зацепление Уайтхеда.

2.2. Достаточно показать, что замкнутая ломаная с не более чем 5 звеньями незаузлена (то есть представляет тривиальный узел). Ясно, что треугольник незаузлен. Ясно, что если в n -угольнике (то есть n -звенной замкнутой ломаной) натянутый на пару соседних звеньев

треугольник не пересечён никаким другим звеном, то эту пару звеньев можно стянуть по диагонали, то есть получить представление того же узла $(n - 1)$ -угольником. Поскольку в 4-угольнике препятствий для стягивания нет, то он стягивается в треугольник, и, значит, незаузелен. Пусть в 5-угольнике $ABCDE$ есть препятствие для стягивания пары звеньев AB и BC . Тогда звено DE пересекает треугольник ABC . Но тогда звено AE не пересекает треугольник BCD , так как они лежат по разные стороны от плоскости ABC .

2.3. Ответ. а) 6; б) 9; в) 6; г) 7; д) 8.

Примеры. Пример к пункту а) изображён на рис. 12а). Другой пример: правильный треугольник ABC в горизонтальной плоскости, второй треугольник DEF с вершиной F , лежащей вне треугольника ABC в его плоскости, и вершинами D и E , расположенными в точности над и под центром треугольника ABC соответственно.

На рисунках приведены проекции узлов и зацеплений, вписанных в наименьший набор точек. Для каждой проекции нужно ещё проверить, что она реализуема, т. е. действительно существует конфигура-

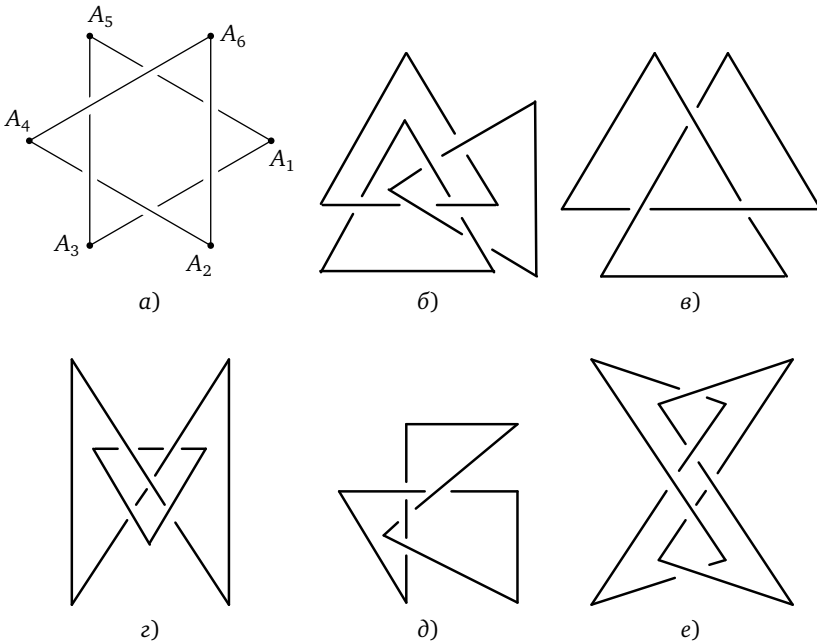


Рис. 12

ция в пространстве, которая проецируется в данную картинку. (О реализуемости таких картинок пространственными ломаными можно почитать в [6], [7].)

Минимальность. В пунктах а) и б) — очевидна. В пункте в) следует из задачи 2.2. Докажем минимальность набора в пункте г). Для этого достаточно показать, что любая пара треугольников в пространстве либо представляет простое зацепление, либо их можно расцепить. Если контур одного из треугольников не пересекает внутренность другого, то препятствий для расцепления нет. Иначе каждый из контуров треугольников должен пересекать внутренность другого в единственной точке. Рассмотрим плоскость одного из треугольников (скажем, ABC). Будем считать её горизонтальной. Пусть сторона DE треугольника пересекает треугольник ABC , а F — его третья вершина. Двигая F вертикально (и вместе с ней — стороны FD и FE), мы можем поместить её на плоскость ABC . После этого мы можем подвинуть вершины D и E (вместе с соответствующими сторонами) и получить описанный выше пример к пункту а)).

В пунктах д) и е) авторы задачи не умеют доказывать минимальность.

2.4. Ответ. а) Да. Следует из примера 3. б) Нет.

3.1. *Первое решение.* Допустим, утверждение задачи неверно. Синие точки обозначим C_1 , C_2 и C_3 , а красные — K_1 , K_2 и K_3 . Тогда стороны четырёхугольника $C_1K_1C_2K_2$ не пересекаются во внутренних точках. Отрезок C_3K_3 не пересекается с контуром четырёхугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому точки C_3 и K_3 или обе лежат внутри четырёхугольника $C_1K_1C_2K_2$, или обе вне его.

В первом случае точка C_3 лежит внутри одного из четырёхугольников $C_1K_1C_2K_3$ или $C_1K_2C_2K_3$. Если, например, точка C_3 лежит внутри четырёхугольника $C_1K_1C_2K_3$, то отрезок C_3K_2 пересекает контур четырёхугольника $C_1K_2C_2K_3$, что приводит нас к противоречию. Во втором подслучае противоречие получаем аналогичным способом.

Второй случай. Отрезки K_3C_1 и K_3C_2 не пересекаются с контуром четырёхугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому или точка K_2 лежит внутри четырёхугольника $K_1C_1K_3C_2$, или точка K_1 лежит внутри четырёхугольника $K_2C_1K_3C_2$. Задача свелась к первому случаю.

Другое решение этой задачи почти дословно повторяет рассуждение из второго решения задачи 1.2.

3.2. Пусть τ — число точек пересечения контура $ABCD$ с гранями тетраэдра $A'B'C'D'$. Тетраэдр $A'B'C'D'$ делит пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. Так как точки $A, B, C, D, A', B', C', D'$

находятся в общем положении, то число τ чётно. Так как

$$\tau \equiv \text{lk}(ABCD, A'B'C'D') + \text{lk}(ABCD, B'C'D'A') \pmod{2},$$

то

$$\text{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \text{lk}(ABCD, B'C'D'A').$$

3.3. Определение (коэффициента зацепления двух треугольников). Коэффициентом зацепления двух треугольников Δ и Δ' назовём число

$$\text{lk}(\Delta, \Delta') = 1, \text{ если } \Delta \text{ и } \Delta' \text{ зацеплены, } \text{lk}(\Delta, \Delta') = 0, \text{ — иначе.}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{lk}(ABCD, A'B'C'D') \equiv & \text{lk}(ABC, A'B'C') + \text{lk}(ABC, A'D'C') + \\ & + \text{lk}(ADC, A'B'C') + \text{lk}(ADC, A'D'C') \pmod{2}. \end{aligned}$$

Из этого, а также из свойств 1.4—1.5 следуют такие утверждения:

$$1. \text{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \text{lk}(A'B'C'D', ABCD).$$

2. При непрерывном движении точек $A, B, C, D, A', B', C', D'$, оставляющем их в каждый момент в общем положении, число $\text{lk}(ABCD, A'B'C'D')$ остаётся постоянным.

3.4. Пусть даны две замкнутые четырёхзвенные ломаные $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые не имеют общих точек.

Первый способ. Пошевелим немного вершины этих ломаных таким образом, чтобы новый набор вершин — $A', B', C', D', A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ — находился в общем положении. Положим по определению

$$\text{lk}(ABCD, A_1B_1C_1D_1) = \text{lk}(A'B'C'D', A'_1B'_1C'_1D'_1).$$

Второй способ. Пусть α — полуплоскость, ограниченная прямой A_1C_1 и содержащая треугольник $A_1B_1C_1$. А β — полуплоскость, ограниченная прямой A_1C_1 и содержащая треугольник $A_1D_1C_1$. Объединив эти полуплоскости, мы разделим пространство на две части. Каждой точке пересечения контура $ABCD$ с контурами или внутренностями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ поставим в соответствие 0, если существует такая окрестность этой точки, пересечение которой с контуром $ABCD$ лежит в одной части пространства. В противном случае поставим в соответствие этой точке 1. Коэффициентом зацепления четырёхзвенных ломаных $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называется сумма всех этих чисел по модулю 2.

3.5. Указанные ломаные будут зацеплены тогда и только тогда, когда пары их вершин на каждой из скрещивающихся прямых будут зацеплены. Поэтому количество зацепленных разделённых пар четырёхзвенных ломаных равно 2.

3.6. Пусть даны четыре синие и четыре красные точки, находящиеся в общем положении. Их зацепленностью называется количество зацепленных разделённых пар с вершинами в этих точках.

Пусть B, B', B_1, B_2, B_3 — синие точки, а R_1, R_2, R_3, R_4 — красные точки, причём наборы точек $B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4$, а также $B', B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4$ находятся в общем положении.

Соединим точки B и B' ломаной так, чтобы никакое её звено не лежало ни в одной из плоскостей $R_i R_j B_k$. При движении точки B по ломаной зацепленность набора точек $B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4$ может измениться лишь в те моменты, когда отрезок BR_i пересекается с отрезком $B_k R_j$ ($i \neq j$). Пусть, например, отрезок BR_2 пересекается с отрезком $B_1 R_1$. Среди всех разделённых пар ломаных с вершинами в нашем наборе точек коэффициент зацепления изменится у следующих: $BR_2 B_2 R_3$ и $B_1 R_1 B_3 R_4$, $BR_2 B_2 R_4$ и $B_1 R_1 B_3 R_3$, $BR_2 B_3 R_3$ и $B_1 R_1 B_2 R_4$, $BR_2 B_3 R_4$ и $B_1 R_1 B_2 R_3$. Поэтому чётность зацепленности при этом не изменится.

Из приведённого рассуждения ясно, что у любых двух наборов из четырёх синих и четырёх красных точек зацепленность имеет одинаковую чётность. Тогда из предыдущей задачи следует, что зацепленность всегда является чётной.

3.7. Для набора общего положения синих точек B_1, B_2, B_3, B_4 и красных точек R_1, R_2, R_3, R_4 рассмотрим число I таких зацепленных разделённых пар $(\square, \square')$, что ломаная $\square$ содержит отрезок $B_1 R_1$. Аналогично рассуждению задачи 3.6 доказывается, что чётность числа I не зависит от набора точек. В примере из задачи 3.5 имеем $I = 1$. Значит, в каждом наборе число I нечётно, и поэтому в каждом наборе существует зацепленная разделённая пара замкнутых четырёхзвенных ломаных.

3.8. Утверждение задачи следует из задач 3.6 и 3.7.

4.1. Можно например раскрасить точки A_1, A_2, A_3 в синий цвет, а A_4, A_5, A_6 — в красный. Непосредственно проверяется, что полученный набор отрицателен.

4.2. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда некоторые две синие точки B_1, B_2 расположены по разные стороны от прямой, проходящей через некоторые две красные точки R_1, R_2 . Тогда отрезок $B_1 R_1$ не пересекает $B_2 R_2$ и $B_1 R_2$ не пересекает $B_2 R_1$, что противоречит определению положительного набора.

4.3. Пусть, от противного, $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$. Тогда при обходе треугольника $R_1 R_2 R_3$ все синие точки все время остаются справа. Это возможно, только если обход происходит по часовой стрелке, и все синие точки расположены внутри треугольника. В задачах 4.2—4.5

предполагается $N \geq 2$, поэтому есть хотя бы две синие точки. Проведем через них прямую. Какие-то две вершины треугольника расположены по разные стороны от этой прямой. Но тогда исходный набор не может быть положительным (доказывается аналогично задаче 4.2).

4.4. Так как исходный набор точек положителен, то по определению пересечение R_1B_1 и R_2B_2 положительно. Значит, при движении от B_1 к R_1 точка B_2 остаётся слева. Но тогда и при движении от R_1 к B_2 точка B_2 остаётся справа. Значит, по определению $R_1 > R_2$.

4.5. Из задачи 4.3 следует, что красные точки можно занумеровать так, чтобы $R_1 < R_2 < \dots < R_N$. Из задачи 4.4 следует, что эта нумерация — искомая.

4.6 (решение В. Челнокова). Занумеруем красные и синие точки слева направо. Тогда трилистник представляется ломаной

$$R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1.$$

4.7. Пусть дан положительный набор 5 красных и 5 синих точек. Занумеруем красные точки, как в задаче 4.5. Занумеруем синие точки аналогичным образом. А именно, можно определить порядок «>» синих точек аналогично порядку красных точек и занумеровать синие точки в порядке возрастания (в смысле «>»). Рассмотрим ломаную $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$ (см. решение задачи 4.6). Она представляет трилистник, что вытекает из следующей леммы.

Лемма. Положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно перевести в набор точек из примера 4 непрерывным движением так, чтобы в процессе движения набор оставался в общем положении.

Идея доказательства. Рассмотрим точку B_1 . Из нашей нумерации точек следует, что отрезки с началом B_1 расположены выше всех остальных. Поэтому мы можем переместить (допустимым образом) точку B_1 так, чтобы её проекция попала в самую левую синюю точку на рис. 10, а сама точка B_1 располагалась очень высоко над плоскостью рисунка. Тогда и все отрезки с началом B_1 будут располагаться очень высоко. То же самое можно сделать и с точкой B_2 — так расположить её очень высоко, но ниже точки B_2 , чтобы её проекция совпала со второй слева синей точкой. Действуя таким образом со всеми синими точками, а потом и с красными, мы переведем исходный набор точек в требуемый набор. Лемма, а вместе с ней и утверждение задачи 4.7, доказана. $\square$

4.8 (небольшой экскурс в рамсеевскую теорию графов).

а) Утверждение легко доказать индукцией по $n + m$. Докажем базу ($n + m = 6$). Всюду в дальнейшем через $R(m, n)$ будем обозначать минимальное число вершин в полном графе с требуемым свой-

ством. Из задачи 1.1 следует, что $R(3, 3) = 6$. Очевидно, $R(4, 2) = 4$. База доказана. Индукционный переход в случае $n = 2$ или $m = 2$ очевиден. При $m, n > 2$ индукционный переход получается из оценки $R(n, m) \leq R(n - 1, m) + R(n, m - 1)$. Действительно, рассмотрим полный граф с $R(n - 1, m) + R(n, m - 1)$ вершинами. Рассмотрим его вершину A . По принципу Дирихле найдётся либо $R(n - 1, m)$ выходящих из неё рёбер первого цвета, либо $R(n, m - 1)$ выходящих из неё рёбер второго цвета. Рассматривая полные подграфы с вершинами в отличных от A концах указанных рёбер, получаем требуемое. Утверждение доказано.

б) Формулировка очевидна, доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R(l, m, n) \leq R(l - 1, m, n) + R(l, m - 1, n) + R(l, m, n - 1).$$

в) **Теорема.** Для любых $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ найдётся такое $R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$, что при любой раскраске в три цвета двудольного графа с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле) для некоторого $1 \leq i \leq 3$ найдётся полный двудольный подграф i -го цвета с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй.

Доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R \leq R(m_1 - 1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3) + R(m_1, m_2 - 1, m_3, n_1, n_2, n_3) + R(m_1, m_2, m_3 - 1, n_1, n_2, n_3).$$

г) (Идея доказательства.) Сначала нужно доказать следующее вспомогательное

Утверждение. Пусть дан полный двудольный граф с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле). Назовём треугольником три вершины, одна из которых лежит в первой доле, а две другие — во второй. Тогда для любых n_1, n_2, n_3 и m_1, m_2, m_3 найдётся такое

$$R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3),$$

что при любой раскраске всех треугольников в три цвета найдётся полный двудольный подграф с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй, все треугольники которого имеют цвет i .

Доказательство производится индукцией по $\sum n_i + \sum m_i$. База индукции состоит в утверждениях задач 4.7 б) и 4.7 в). Индукционный переход получается из оценки

$$R \leq R(R(m_1 - 1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3), R(m_1, m_2 - 1, m_3, n_1, n_2, n_3), R(m_1, m_2, m_3 - 1, n_1, n_2, n_3)).$$

Здесь $R(x, y, z)$ — число из пункта 4.7 б). Для доказательства приведённой формулы нужно рассмотреть одну из вершин в первой доле, скажем A . Без ограничения общности, согласно пункту 4.7 б) можно отметить $R(m_1 - 1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$ вершин во второй доле так, чтобы все треугольники с вершинами в A и двух отмеченных точках были первого цвета. Теперь наша формула получается из предположения индукции.

Для доказательства утверждения 4.7 г) нужно рассмотреть одну синюю вершину B_1 . Каждую тройку B_2, R_1, R_2 раскрасим в один из трёх цветов в зависимости от того, положительна, отрицательна или нейтральна четвёрка B_1, B_2, R_1, R_2 . Теперь проходит индукционный переход, использующий предыдущее утверждение и аналогичный доказательству этого утверждения. Тем самым утверждение задачи 4.7 г) может быть доказано по индукции.

д) Согласно задаче 3.1, нейтральных наборов при $n \geq 3$ не бывает. Поэтому пункт д) следует из пункта г).

4.9. Теоремы Миёчи и Негами для трилистника следуют из задачи 4.7, её аналога для отрицательного набора и задачи 4.8 д) для $n = 5$.

4.10. Лучший способ решить эту задачу — воспользоваться задачами 5.1 и 5.2 из раздела «Доказательство теоремы Негами». Как и в решении задачи 2.1, для проверки лучше всего использовать верёвку или нить.

Благодарности

Авторы статьи благодарны И. Дынникову, А. Райгородскому, А. Скопенкову и О. Скрыбину за полезные обсуждения.

Литература

1. Conway J., Gordon C. Knots and links in spatial graphs // J. of Graph Theory. 1983. Vol. 7. P. 445—453.
2. Negami S. Ramsey-type theorem for spatial graphs // Graphs and Combinatorics. 1998. Vol. 14. P. 75—80.
3. Skopenkov M. Embedding products of graphs into Euclidean spaces // Fundamenta Mathematicae. 2003. Vol. 179. P. 191—197.
<http://arxiv.org/abs/0808.1199>
4. Прасолов В., Скопенков М. Рамсеевская теория зацеплений // Математическое просвещение. Третья серия. 2005. Т. 9. С. 108—115. См. также настоящее издание, с. 251—260.
5. Скопенков М., Скрыбин О., Шаповалов А. Вписанные зацепления // Материалы XV Летней конференции международного математического Турнира городов, <http://www.turgor.ru/lktg/2003/zacepl.ru/index.htm>

6. Богданов И., Каибханов А., Кудряшов Ю., Скопенков А., Сосинский А., Челноков Г. Новые способы плетения корзин // Материалы XVI Летней конференции международного математического Турнира городов, <http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm>
7. Гайфуллин А., Скопенков А., Скопенков М., Шаповалов А. Проекция скрещивающихся прямых. Материалы XIII Летней конференции международного математического Турнира городов, <http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php>

Рамсеевская теория узлов и зацеплений

В. В. Прасолов, М. Б. Скопенков

Теорема Рамсея [8] заключается в следующем. Пусть r -элементные подмножества некоторого N -элементного множества S разбиты на два подмножества α и β . Тогда для любых данных чисел $p \geq r$ и $q \geq r$ найдётся число $n(p, q, r)$ (зависящее только от p, q и r), которое обладает следующим свойством: если $N \geq n(p, q, r)$, то либо существует p -элементное подмножество A в S , у которого все r -элементные подмножества лежат в α , либо существует q -элементное подмножество B в S , у которого все r -элементные подмножества лежат в β .

Например, известная задача о том, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых, показывает, что в качестве $n(3, 3, 2)$ можно взять число 6. Действительно, мы разбиваем 2-элементные подмножества следующим образом: к α относим пары знакомых, а к β относим пары незнакомых, и получаем требуемое.

Различные обобщения теоремы Рамсея составляют так называемую теорию Рамсея; этой теории посвящена книга [4].

Примером теоремы рамсеевского типа является следующее утверждение. «Для каждого натурального числа n можно выбрать число N (зависящее только от n) так, что среди любых N точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать n точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника». (Это — задача 22.7 из книги [1]; по ходу решения этой задачи доказывается теорема Рамсея.)

В последние годы стали появляться теоремы рамсеевского типа в теории узлов и зацеплений. (Узлы и зацепления были темой 3-го выпуска «Математического просвещения»; к нему можно обратиться за необходимыми определениями.) Первая теорема такого типа, доказанная независимо Заксом [9] и Конвеем и Гордоном [3], обсуждалась в восьмом выпуске «Математического просвещения» в ста-

Впервые опубликовано: Прасолов В. В., Скопенков М. Б. Рамсеевская теория узлов и зацеплений // Математическое просвещение. Третья серия. М.: МЦНМО, 2005. Вып. 9. С. 108—115. По содержанию связано со статьёй в этой книге: Скопенков М. Б., Шаповалов А. В. Вписанные зацепления. С. 223—250.

ть [2]. Напомним её формулировку: «Для любого вложения графа K_6 в трёхмерное пространство в нём найдётся пара зацепленных циклов». Конвей и Гордон доказали также, что для любого вложения графа K_7 в трёхмерное пространство в нём найдётся нетривиальный узел. (Здесь и далее используются следующие стандартные обозначения: K_n — граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, так называемый *полный* граф с n вершинами; $K_{m,n}$ — граф с n вершинами одного цвета и m вершинами другого цвета, причём любые две вершины разного цвета соединены ребром.) Пример применения этих теорем приведён в статье [10].

В нашей статье обсуждаются следующие две более общие теоремы рамсеевского типа о возможности вписать данный узел (зацепление) в произвольный набор точек в пространстве, который содержит достаточно много точек в общем положении (это означает, что никакие 4 точки не лежат в одной плоскости). Будем говорить, что данный узел *вписан* в данное множество точек в трёхмерном пространстве, если существует замкнутая ломаная с вершинами в данных точках, представляющая данный узел. Для зацеплений определение аналогично.

Теорема 1 (Негами [6], [7]). *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число N так, что в любое множество из N точек в общем положении в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно вписать данный узел (зацепление).*

Можно также рассматривать множества точек, раскрашенных в два цвета, и при этом рассматривать только ломаные, все звенья которых имеют разноцветные вершины. В такой ситуации верно следующее утверждение.

Теорема 2 (Миёчи [5]). *Для любого узла (зацепления) можно выбрать натуральное число N так, что в любое множество N красных и N синих точек в общем положении можно вписать данный узел (зацепление).*

Теорема Негами очевидным образом следует из теоремы Миёчи. Но, как это часто бывает, удобнее доказывать именно теорему Миёчи. В этом доказательстве важную роль играет понятие *положительного* набора точек. Чтобы определить это понятие, мы фиксируем плоскость, на которой все проекции точек данного набора различны и при этом все точки набора лежат выше этой плоскости. Будем рассматривать проекции отрезков, соединяющих данные точки, а для пересекающихся проекций будем отмечать, какой из отрезков проходит выше. Набор из n красных точек и n синих точек (в общем положе-

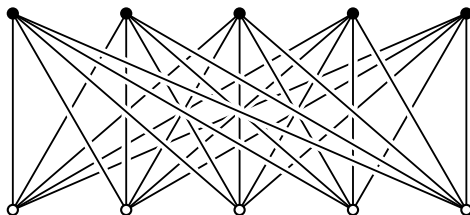


Рис. 1. Положительный набор точек

нии) называют положительным, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 проекции отрезков B_1R_1 и B_2R_2 или проекции отрезков B_1R_2 и B_2R_1 пересекаются во внутренней точке, причём при движении от синего конца к красному по отрезку, который проходит выше, синий конец нижнего отрезка остаётся слева (рис. 1, синие точки — наверху, красные — внизу).

Схема доказательства следующая. Сначала доказываем, что для любого n можно выбрать $N = R(n)$ так, что из любого набора N синих и N красных точек можно выбрать n синих и n красных точек, образующих положительный (или отрицательный) набор. Затем доказываем, что положительный набор точек можно перевести (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках) в стандартное положение, для которого есть две скрещивающиеся прямые — синяя и красная — и все синие точки лежат на синей прямой, а все красные точки — на красной. Наконец, доказываем лемму о двух спицах¹: для любого узла (зацепления) можно выбрать число n так, что данный узел (зацепление) можно вписать в множество из n красных точек на красной прямой и n синих точек на синей прямой.

Выбор положительного подмножества точек

Назовём набор n красных и n синих точек в пространстве в общем положении *нейтральным*, если проекции на выделенную плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках).

Легко видеть, что если $n \geq 3$, то набор точек не может быть нейтральным. Действительно, предположим, что на плоскости заданы си-

¹ Об этой лемме мы узнали от И. Дынникова.

ние точки B_1, B_2, B_3 и красные точки R_1, R_2, R_3 (в общем положении) так, что отрезки с разноцветными концами не пересекаются во внутренних точках. Тогда $R_1B_1R_2B_2R_3B_3$ — замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Легко видеть, что по крайней мере две из диагоналей R_1B_2, R_2B_3 и R_3B_1 лежат внутри этой ломаной. Действительно, пусть, например, диагональ R_1B_2 внешняя. Тогда все данные точки лежат по одну сторону от прямой R_1B_2 , а в таком случае диагонали R_2B_3 и R_3B_1 внутренние. Эти внутренние диагонали пересекаются, поскольку точки R_2 и B_3 лежат по разные стороны от прямой R_3B_1 . Приходим к противоречию.

Таким образом, достаточно доказать, что для любого n можно выбрать число $R(n)$ так, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек. Для этого нам нужен небольшой экскурс в рамсеевскую теорию графов.

Теорема 3. Для любых m_1, m_2, m_3 и n_1, n_2, n_3 можно выбрать число $R = R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3)$ так, что для любой раскраски треугольников с вершинами в $R - 1$ синих и R красных точках цветами 1, 2, 3 можно для некоторого цвета i таким образом выделить m_i красных точек и n_i синих точек, что все треугольники с вершинами в выделенных точках имеют цвет i .

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся более простые утверждения о раскрасках графов, которые мы сейчас докажем.

Теорема 4. а) Для любых m и n можно так выбрать число $R = R(m, n)$, что для любой раскраски рёбер полного графа K_R в два цвета можно выделить либо подграф K_m с рёбрами первого цвета, либо подграф K_n с рёбрами второго цвета.

б) Для любых l, m и n можно выбрать число $R = R(l, m, n)$ так, что для любой раскраски рёбер полного графа K_R в три цвета можно выделить либо подграф K_l с рёбрами первого цвета, либо подграф K_m с вершинами второго цвета, либо подграф K_n с вершинами третьего цвета.

Доказательство. а) Ясно, что в качестве $R(m, 2)$ можно взять m , поскольку либо все рёбра первого цвета, либо есть хотя бы одно ребро второго цвета. Аналогично в качестве $R(2, n)$ можно взять n . Если же $m, n > 2$, то

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) + 1.$$

Действительно, рассмотрим полный граф с $R(m-1, n) + R(m, n-1) + 1$ вершинами и выделим в нём вершину A . Из неё выходит $R(m-1, n) +$

$+ R(m, n - 1)$ рёбер, поэтому из неё выходит либо $R(m - 1, n)$ рёбер первого цвета, либо $R(m, n - 1)$ рёбер второго цвета. Пусть для определённости из вершины A выходит $R(m - 1, n)$ рёбер первого цвета. Тогда в полном графе с вершинами в концах этих рёбер (отличных от A) можно выделить либо полный подграф с $m - 1$ вершинами, все рёбра которого имеют первый цвет, либо полный подграф с n вершинами, все рёбра которого имеют второй цвет. Во втором случае мы уже получили требуемое, а в первом случае к выделенным $m - 1$ вершинам нужно добавить вершину A .

б) Прежде всего заметим, что $R(2, m, n) = R(m, n)$, поскольку либо есть ребро первого цвета, либо все рёбра имеют второй или третий цвет. Далее, если $l, m, n > 2$, то

$$R(l, m, n) \leq R(l - 1, m, n) + R(l, m - 1, n) + R(l, m, n - 1).$$

Это доказывается точно так же, как и утверждение а). □

Теперь мы готовы к доказательству теоремы 3. Применим индукцию по $\sum n_i + \sum m_i$. Если $m_i = 1$ или $n_i = 0$, то доказывать нечего, поскольку i -е множество рассматриваемых треугольников пусто. Докажем теперь, что

$$R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3) \leq R(l, m, n) + 1,$$

где $R(l, m, n)$ — число из теоремы 4 б) для

$$l = R(m_1, n_1 - 1, m_2, n_2, m_3, n_3), \quad m = R(m_1, n_1, m_2, n_2 - 1, m_3, n_3) \\ \text{и} \quad n = R(m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3 - 1).$$

Действительно, рассмотрим полный граф с вершинами в красных точках и окрасим каждое его ребро $R_i R_j$ одним из трёх цветов в соответствии с цветом треугольника $B_1 R_i R_j$, где B_1 — фиксированная синяя вершина. К этому графу можно применить теорему 4 б). В результате получим, например, что можно выделить $R(m_1, n_1 - 1, m_2, n_2, m_3, n_3)$ красных вершин так, что все соединяющие их рёбра окрашены первым цветом. Выберем произвольно ещё столько же синих точек, отличных от B_1 . По предположению индукции возможны три варианта:

- 1) можно выбрать m_1 красных точек и $n_1 - 1$ синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют первый цвет;
- 2) можно выбрать m_2 красных точек и n_2 синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют второй цвет;
- 3) можно выбрать m_3 красных точек и n_3 синих так, что все треугольники с вершинами в выбранных точках имеют третий цвет.

В первом случае к выбранным точкам добавляем точку B_1 , а в двух остальных сразу же получаем требуемое. Теорема 3 доказана. □

Теперь мы уже можем доказать сформулированное на с. 254 утверждение: для любого n можно выбрать число $R(n)$ так, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек. Для этого покрасим каждый тетраэдр вида $B_1B_2R_1R_2$ в один из трёх цветов в соответствии с тем, положительна, отрицательна или нейтральна четвёрка B_1, B_2, R_1, R_2 . Нужно доказать, что для каждого n можно выбрать число $R(n)$ таким образом, что при любой такой раскраске можно выделить n синих и n красных точек так, что все тетраэдры с вершинами в выделенных точках окрашены одним цветом. Это доказывается аналогично теореме 3.

Стандартный вид положительного набора точек

Докажем, что любой положительный набор из n красных и n синих точек можно перевести в стандартное положение (так, чтобы в процессе движения точек соединяющие их отрезки не пересекались во внутренних точках). Для этого мы сначала последовательно докажем некоторые свойства положительных наборов точек.

Утверждение 1. *Все проекции синих точек лежат по одну сторону от проекции любой прямой, соединяющей пару красных точек.*

Доказательство. Предположим, что проекции синих точек B_1 и B_2 лежат по разные стороны от проекции прямой, соединяющей красные точки R_1 и R_2 . Тогда проекции отрезков B_1R_1 и B_2R_2 не пересекаются и проекции отрезков B_1R_2 и B_2R_1 тоже не пересекаются. Это противоречит определению положительного набора точек. $\square$

Будем говорить, что $R_1 > R_2$, если при движении от R_1 к R_2 проекции всех синих точек остаются справа.

Утверждение 2. *Если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.*

Доказательство. Предположим, что $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$, и придём к противоречию. По предположению при обходе проекции треугольника $R_1R_2R_3$ все синие точки остаются справа. Легко проверить, что это возможно лишь в том случае, когда обход происходит по часовой стрелке и при этом проекции всех синих точек расположены внутри треугольника $R_1R_2R_3$. Синих точек у нас столько же, сколько красных, поэтому есть по крайней мере две синие точки. Проведем через их проекции прямую. Проекция двух из красных точек R_1, R_2, R_3 лежат по разные стороны от этой прямой, и мы получаем противоречие, как и при доказательстве утверждения 1. $\square$

Утверждение 3. Пусть проекции отрезков R_1B_1 и R_2B_2 пересекаются, причём отрезок R_1B_1 лежит выше (ниже) отрезка R_2B_2 . Тогда $R_1 > R_2$ ($R_1 < R_2$).

Доказательство. Пусть отрезок R_1B_1 лежит выше отрезка R_2B_2 . Рассматриваемый набор точек положителен, поэтому при движении от B_1 к R_1 проекция точки B_2 остаётся слева. Значит, при движении от R_1 к R_2 проекция точки B_2 остаётся справа, т. е. $R_1 > R_2$. Случай, когда отрезок R_1B_1 лежит ниже отрезка R_2B_2 , рассматривается аналогично. $\square$

Утверждение 4. Красные и синие отрезки можно занумеровать так, что если $i < j$ и $k \neq l$, то либо проекции отрезков R_iB_k и R_jB_l не пересекаются, либо отрезок R_iB_k лежит выше отрезка R_jB_l .

Доказательство. Согласно утверждению 2 красные точки можно занумеровать так, что $R_1 > R_2 > \dots > R_n$. Свойство 3 показывает, что эта нумерация — искомая. $\square$

Воспользовавшись утверждением 4, положительный набор точек легко привести к стандартному виду. Занумеруем красные точки так, как указано в этом утверждении. Отрезки с концом R_1 лежат выше всех других отрезков, поэтому точку R_1 можно поднять сколь угодно высоко (над плоскостью проекции). Затем точку R_2 можно поднять намного выше всех точек, кроме первой, и т. д. При этом можно позаботиться о том, чтобы точки $R_3, \dots, R_n$ попали на прямую R_1R_2 (эту прямую можно выбрать заранее, направив её почти вертикально).

Красные точки теперь расположены так, как нужно. После этого остаётся повторить то же самое для синих точек.

Лемма о двух спицах

Доказательство леммы о двух спицах начнём с того, что выберем для данного узла диаграмму, которая представляет собой ломаную

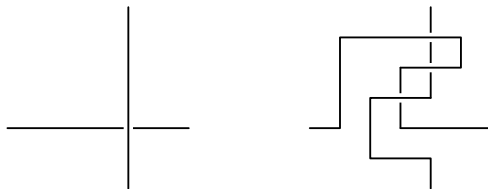


Рис. 2. Преобразование перекрёстка

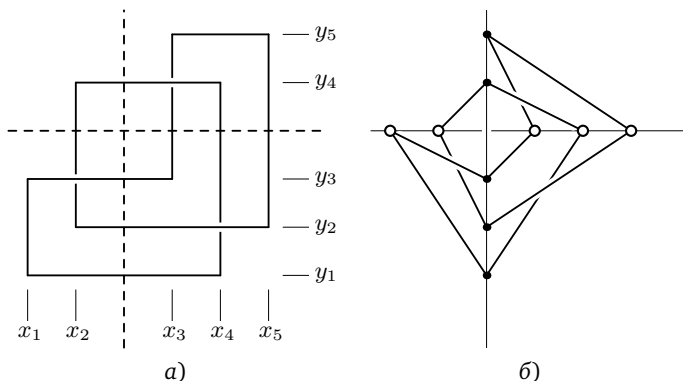


Рис. 3. Узел на двух спицах

со звеньями двух направлений — горизонтального и вертикального. Этого легко добиться, аппроксимируя гладкую кривую ломаной с горизонтальными и вертикальными звеньями.

Затем каждый перекресток, на котором горизонтальное звено проходит ниже вертикального, преобразуем так, как показано на рис. 2. После этого мы получим диаграмму с вертикальными и горизонтальными звеньями, у которой на всех перекрёстках горизонтальные звенья проходят над вертикальными.

Малым шевелением диаграммы можно добиться, чтобы никакие два горизонтальных звена диаграммы не лежали на одной прямой и никакие два вертикальных звена тоже не лежали на одной прямой.

Полученному «прямоугольному» представлению узла сопоставим узел на двух спицах следующим образом. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты вертикальных звеньев, а $y_1, \dots, y_n$ — координаты горизонтальных звеньев (рис. 3а)). (Количество горизонтальных звеньев, как и количество вертикальных звеньев, в два раза меньше количества вершин.) Проведем горизонтальную прямую и вертикальную прямую так, чтобы вертикальная прямая проходила выше (рис. 3б)). На горизонтальной прямой отметим точки с координатами $x_1, \dots, x_n$, а на вертикальной прямой — точки с координатами $y_1, \dots, y_n$. Пару точек на разных прямых мы соединяем отрезком, если существует вершина диаграммы с координатами (x_i, y_j) . Всего получаем $2n$ отрезков: из каждой отмеченной точки выходят два отрезка.

Остается показать, что полученный в результате узел, натянутый на две спицы, — это исходный узел. Это легко сделать, если рассмот-

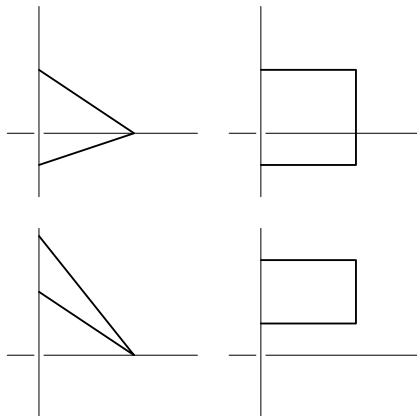


Рис. 4. Деформация пары звеньев

реть полуплоскости, проходящие через вертикальную прямую и отмеченные точки на горизонтальной прямой (вместе эти полуплоскости похожи на страницы раскрытой книги). Мы можем свободно деформировать отрезки в каждой полуплоскости, и это позволяет получить прямоугольное представление узла. Действительно, сначала в каждой рассматриваемой полуплоскости продеформируем соответствующую пару звеньев так, как показано на рис. 4. Затем уберём отрезки, которые проходятся дважды (рис. 5).

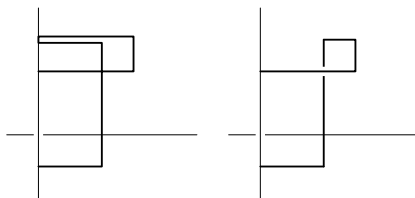


Рис. 5. Лишние отрезки

Литература

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2001.
2. Прасолов В. В. Прямоугольники на прямой и вложения листа Мёбиуса // Математическое просвещение. Третья серия. 2004. Вып. 8. С. 127—131.

3. *Conway J. H., Gordon C. McA.* Knots and links in spatial graphs // *J. Graph Theory*. 1983. Vol. 7. P. 445—453.
4. *Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H.* Ramsey theory. New York: Wiley, 1980.
5. *Miyauchi M. S.* Topological Ramsey theorem for complete bipartite graphs // *J. Comb. Theory. Ser. B*. 1994. Vol. 62. P. 164—179.
6. *Negami S.* Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 324. P. 527—541.
7. *Negami S.* Ramsey-type theorem for spatial graphs // *J. Comb. Theory. Ser. B*. 1998. Vol. 72. P. 53—62.
8. *Ramsey F. P.* On a problem of formal logic // *Proc. London Math. Soc.* 2nd series. 1930. Vol. 30. P. 264—286.
9. *Sachs H.* On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem. Berlin: Springer, 1982. (*Lecture Notes Math.*; Vol. 1018). P. 231—240.
10. *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179. P. 191—198.

ЛЕТНИЕ КОНФЕРЕНЦИИ ТУРНИРА ГОРОДОВ

Избранные материалы

Выпуск 1

Под общей редакцией Н. Н. Константинова

Составитель Б. Р. Френкин

Подписано в печать 30.12.2008 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 16,5. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».

121099, Москва, Шубинский пер., 6.