

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

УДК 517.977

Орлов Сергей Михайлович

**Аналитическое и численное исследование
некоторых нелинейных задач оптимального
управления, допускающих особые режимы**

Специальность 01.01.02 —

«дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:

Киселёв Юрий Николаевич,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Курина Галина Алексеевна,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет»,

Кузнецов Евгений Борисович,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Ведущая организация:

федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 22 июня 2016 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК, аудитория 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан " " 2016 года.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 501.001.43,

доктор физико-математических наук, профессор

Захаров Е.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Во второй половине XX века в связи с появлением новых прикладных задач, исследование которых методами классического вариационного исчисления испытывало значительные трудности, начала формироваться теория оптимального управления. Основополагающий результат теории оптимального управления, а именно принцип максимума Понтрягина¹, был разработан в пятидесятые годы группой выдающихся советских учёных во главе со Львом Семёновичем Понтрягиным. Большой вклад в развитие теории оптимального управления и её приложений внесли учёные Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов, А.В. Кряжковский, А.Б. Куржанский, Ф.П. Васильев, В.И. Благодатских, С.М. Асеев, М.И. Зеликин, В.М. Тихомиров, Ф.Л. Черноусько, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, М. Атанс, П. Фалб, Р. Беллман, Ф. Кларк, А. Брайсон, Хо Ю-ши, Э. Ли, Л. Маркус и многие другие.

Рассмотрим возможные постановки задач оптимального управления. Пусть $\dot{x} = f(t, x, u)$ — система дифференциальных уравнений, описывающая процесс изменения состояния x некоторого объекта. Процессом изменения состояния объекта можно управлять с помощью изменения параметра u — управления — в каждый момент времени t . Целью управления является перевод объекта из состояния x_0 в момент времени $t = t_0$ в состояние x_1 в момент времени $t = t_1$, минимизируя при этом некоторый критерий качества процесса управления J (что равносильно максимизации $-J$). При этом параметры t_0 и x_0 обычно фиксированы, а параметры t_1 и x_1 могут быть как фиксированы, так и свободны. Критерий качества управления J может быть задан, например, интегральным функционалом $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u) dt$ (важным является случай $f^0 \equiv 1$ — задача оптимального быстродействия) или терминальным функционалом $J = \varphi(x(t_1))$ (здесь t_1 фиксирован, а x_1 свободен). Всегда можно перейти от задачи оптимального управления с интегральным функционалом к задаче оптимального управления с терминальным функционалом и наоборот. Отметим, что в задаче оптимального управления возможны фазовые ограничения, то есть условия типа неравенства на переменную состояния x .

Таким образом, теория оптимального управления охватывает широкий спектр математических задач, которые, в свою очередь, могут описывать процессы и задачи из различных областей науки, например, задачу о мягкой

¹Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — Москва: Наука, 1961. — 391 с.

посадке на Луну с минимальным расходом топлива², задачу вакцинации населения при эпидемии гриппа A(H1N1)³, задачу оптимального управления температурой в реакторе⁴, задачу оптимального распределения ресурсов в колонии микроорганизмов⁵ и многие другие. Таким образом, в связи с богатыми возможностями моделирования различных процессов и с появлением мощного инструмента исследования этих задач, после открытия принципа максимума Понтрягина теория оптимального управления переживала стремительное развитие и нашла широкое применение в различных приложениях: экономика и финансы; эпидемиология, медицина и иммунология; биология, экология и климатология; физика, механика и робототехника и другие. В настоящее время исследования нелинейных задач оптимального управления актуальны ещё и в связи с растущим применением математического моделирования для изучения сложных процессов различной природы, а полученные выводы могут быть интересны для тех, кто принимает решения.

Принцип максимума Понтрягина является, вообще говоря, необходимым условием оптимальности, и не всегда можно получить решение задачи только с его помощью. Например в задаче оптимального управления может существовать особый режим⁶, а именно такой режим управления, для которого принцип максимума обращается в тождество на некотором интервале времени на некотором подмножестве области управления (подмножество состоит более, чем из одного элемента). Или в задаче может быть широкое множество экстремалей (траекторий, удовлетворяющих принципу максимума), из которых нужно выделить оптимальную траекторию, или, если найдена некоторая экстремаль, то необходимо обосновать её оптимальность. Поэтому получение достаточных условий оптимальности является важной частью развития математических методов теории оптимального управления, много

²Meditch J. S. On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1964. — Oct. — Vol. 9, no. 4. — Pp. 477–484.

³Optimal Control Applied to the Spread of Influenza A(H1N1) / M. El hia, O. Balatif, J. Bouyaghroumni et al. // Applied Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 6, no. 82. — Pp. 4057–4065.

⁴Multi-objective optimal control of chemical processes using ACADO toolkit / F. Logist, M. Vallerio, B. Houska et al. // Computers & Chemical Engineering. — 2012. — Vol. 37. — Pp. 191–199.

⁵van den Berg H., Kiselev Yu. N., Orlov M. V. Studying Mathematical Models of Resource Allocation Among a Cell's Assimilator Mechanisms // Journal of Mathematical Sciences. — 2003. — Vol. 116, no. 6. — Pp. 3683–3732.

⁶Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. — Москва: URSS, 2013. — 256 с.

работ^{7,8,9,10,11} посвящено этому направлению исследований. В диссертационной работе активно используются достаточные условия оптимальности¹², сформулированные в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина. Следует отметить, что для исследования различных задач оптимального управления популярен метод динамического программирования Беллмана¹³.

Изначально задачи оптимального управления рассматривались на конечном промежутке времени, так как большинство из них имело приложение в физике и механике. Появление новых задач, вытекающих, в том числе, из экономических приложений, обусловило развитие теории оптимального управления для задач на бесконечном горизонте планирования (термин из экономики, который в данном контексте обозначает бесконечный промежуток времени). Сложность задач в новой постановке, связанная с неограниченностью времени управления, повлекла новые трудности и свойства по сравнению с задачами на конечном промежутке времени: обоснование существования оптимального управления, различные определения оптимальности, сходимости траекторий системы и функционала, условия трансверсальности. Много работ^{14,15,16,17,18} посвящено развитию теории оптимального управления для задач на бесконечном горизонте планирования.

⁷Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems // SIAM Journal on Control. — 1966. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 139–152.

⁸Arrow K. J. Applications of control theory to economic growth // Math. Decision Sci., Proc. 5th Summer Semin. Stanford 1967, Part 2, (Lectures Appl. Math., 12). — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968. — Pp. 85–119.

⁹Maurer H. First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control // Mathematical Programming Study. — 1981. — Vol. 12. — Pp. 163–177.

¹⁰Milyutin A. A., Osmolovskii N. P. Calculus of Variations and Optimal Control. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1998. — 372 pp.

¹¹Bonnans J. F., Hermant A. Second-order analysis for optimal control problems with pure state constraints and mixed control-state constraints // Annales de l'Institut Henri Poincaré. Annales: Analyse Non Lineaire/Nonlinear Analysis. — 2009. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 561–598.

¹²Киселёв Ю. Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии. Материалы научного семинара. Планерное Москов. обл. — МАКС Пресс Москва, 2003. — С. 57–67.

¹³Беллман Р. Динамическое программирование. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. — 400 с.

¹⁴Halkin H. Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons // Econometrica. — 1974. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 267–272.

¹⁵Seierstad A., Sydsæter K. Optimal Control Theory with Economic Applications. — Amsterdam: North-Holland, 1987. — 462 pp.

¹⁶Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. — 332 pp.

¹⁷Асеев С. М., Кряжковский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. — 2007. — Т. 257. — С. 3–271.

¹⁸Aseev S. M. Infinite-Horizon Optimal Control with Applications in Growth Theory. — Moscow: MSU CMC Publications Department: MAKS Press, 2009. — 148 pp.

Применение принципа максимума Понтрягина для изучения задач оптимального управления является популярным способом их исследования. Эффективность применения метода зависит от конкретной задачи: часто кажущиеся на первый взгляд простые нелинейные задачи требуют больших усилий для их решения и не всегда могут быть решены только с помощью принципа максимума. Тогда в силу могут вступить некоторые математические методы и приёмы, позволяющие решить задачу. Если и они не помогают в решении, то в этом случае можно провести численное исследование.

В диссертационной работе развиваются методы, позволяющие исследовать аналитически и численно некоторые прикладные нелинейные задачи оптимального управления. Постановки задач включают задачи на конечном и на бесконечном промежутках времени. Предлагаемые методы работают с использованием принципа максимума Понтрягина или на основе прямого сравнения функционалов. В диссертации также разрабатываются алгоритмы численного построения решений задач оптимального управления.

Данная диссертационная работа примыкает к исследованиям в области развития методов теории оптимального управления, а также к области изучения конкретных прикладных задач, интересных для приложений в теории экономического роста и эпидемиологии.

Цели диссертационной работы. В проводимых в диссертации исследованиях ставились следующие цели:

- Разработка методов исследования нелинейных задач оптимального управления, позволяющих получить оптимальные решения, и изучение на основе предложенных методов определённых задач и классов нелинейных задач оптимального управления различных размерностей, представляющих интерес для приложений.
- Разработка численных алгоритмов построения оптимальных решений на основе исследования специальной краевой задачи принципа максимума и их применение для исследования ряда конкретных моделей.

Основные результаты работы.

1. Разработана схема нахождения оптимального решения на основе метода специального интегрального представления функционала в случае разрывной правой части в дифференциальном уравнении. Исследованы модифицированная модель Рамсея с постоянной и переменной эластичностью производства и модифицированная модель экономического роста на конечном и бесконечном горизонтах планирования с использованием предложенных схем.

2. Предложены подходы к поиску оптимального решения на основе принципа максимума Понтрягина с использованием достаточных условий оптимальности специального вида для моделей двухсекторной экономики на конечном и бесконечном горизонтах планирования и найдены оптимальные решения в этих моделях.
3. Разработан алгоритм построения численного решения в одной модели двухсекторной экономики на основе исследования краевой задачи принципа максимума Понтрягина и проведено численное исследование модели из области эпидемиологии.

Методы исследования. Основными методами, используемыми в диссертационной работе, являются математические методы теории оптимального управления, включающие принцип максимума Понтрягина и достаточные условия оптимальности. В работе также используется метод динамического программирования Беллмана.

Научная новизна работы. В диссертационной работе разработаны новые методы исследования одного класса задач оптимального управления с разрывной правой частью и некоторых моделей двухсекторной экономики. На основе предложенных методов впервые получен аналитический вид оптимальных решений в модифицированной модели экономического роста на конечном и бесконечном горизонтах планирования, в модифицированной модели Рамсея с переменной эластичностью производства и в задачах двухсекторной экономики на конечном и бесконечном горизонтах планирования. Предложен численный алгоритм решения одной специальной краевой задачи принципа максимума для нахождения оптимального решения в модели двухсекторной экономики, а также проведён сравнительный анализ двух допустимых режимов управления, интересных для приложений, в модели из области эпидемиологии.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты работы можно применять для теоретического и численного исследования как конкретных задач из изученных классов задач оптимального управления, так и некоторых смежных классов задач оптимального управления.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Научные семинары кафедры оптимального управления «Качественные вопросы теории оптимального управления» под руководством Киселёва Ю.Н., Аввакумова С.Н. и Орлова М.В. (факультет ВМК МГУ)

- Научная конференция «Ломоносов — 2011» (Москва, апрель 2011)
- Научная конференция «Ломоносов — 2012» (Москва, апрель 2012)
- Научная конференция «Ломоносов — 2013» (Москва, апрель 2013)
- Научная конференция «Тихоновские чтения — 2013» (Москва, октябрь 2013)
- Научная конференция «Ломоносовские чтения — 2014» (Москва, апрель 2014)
- Научная конференция «Тихоновские чтения — 2014» (Москва, октябрь 2014)
- II Международный семинар, посвящённый 70-летию со дня рождения академика А.И. Субботина (Екатеринбург, апрель 2015)
- 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games (Вена, май 2015)

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 18 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], 3 — в сборниках [6–8], 10 — в тезисах докладов [9–18].

Личный вклад. Личный вклад автора заключается в формулировке и обосновании основных теоретических результатов и проведении численных экспериментов. Вклад соавторов заключается в следующем. Научный руководитель Ю.Н. Киселёв является автором постановок задач и предложения по использованию подходов к их исследованию. В работах [3, 4] М.В. Орловым предложен, на основе анализа экономической литературы по моделям, выбор нового типа функционала, а в работе [5] им был подготовлен обзор экономической литературы.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 168 страниц с 67 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 70 наименований.

Содержание работы

Содержание диссертационной работы можно разбить на две относительно независимые части: в первой главе диссертации рассматриваются одномерные нелинейные задачи и классы задач оптимального управления с приложением в теории экономического роста. Основным методом их решения яв-

ляется метод специального интегрального представления функционала, который обобщается для некоторых специальных случаев. Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1, 2, 7, 8, 10, 11, 14, 16–18].

Вторая глава посвящена исследованию некоторых задач оптимального управления различной размерности, разрабатываются методы их исследования и алгоритмы их численного решения. Основные результаты второй главы опубликованы в работах [3–6, 9, 12, 13, 15].

Отметим, что во всех исследуемых в диссертации задачах оптимального управления класс допустимых управлений состоит из кусочно-непрерывных управлений.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, обозначаются цели работы, сформулирована научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводятся сведения об апробации результатов работы, о публикациях по теме диссертации, о личном вкладе автора и об объёме и структуре диссертации.

В **первой главе** исследуются с помощью метода специального интегрального представления функционала¹⁹ некоторые одномерные нелинейные задачи оптимального управления, имеющие приложения в теории экономического роста.

В **разделе 1.1** рассматривается одна из версий модели Рамсея, а именно следующая задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^\varepsilon - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^\varepsilon dt \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \end{cases} \quad (1)$$

где одномерная фазовая переменная x играет роль фондовооружённости, управление u — доля инвестиций от производственного выпуска — подчинено геометрическому ограничению $0 \leq u(t) \leq 1$, $t \geq 0$, параметр $\mu > 0$ — коэффициент амортизации производственных фондов, параметр $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, параметр $\varepsilon \in (0, 1)$ — коэффициент эластичности производства. Функция $F(x) = x^\varepsilon$, встречающаяся в дифференциальном уравнении и в функционале, является масштабированной производственной функцией Кобба-Дугласа. Функционал качества $J(u)$ играет роль дисконтированного удельного потребления (на одного работника) на бесконечном промежутке времени $0 \leq t < +\infty$. Исследование задачи (1) на конечном про-

¹⁹Киселёв Ю. Н., Орлов М. В. Исследование одномерных оптимизационных моделей в случае бесконечного горизонта // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 12. — С. 1615–1628.

межутке времени, $0 \leq t \leq T$, с произвольной производственной функцией неоклассического типа изложено в книге²⁰ С.А. Ашманова.

Эта модель исследуется при помощи трёх подходов к решению задачи оптимального управления: первый основан на методе специального интегрального представления функционала, второй — на основе принципа максимума Понтрягина и достаточных условий оптимальности, третий — метод динамического программирования Беллмана. В диссертационной работе подробно излагается решение задачи (1) с помощью каждого из указанных способов, что представляет методический интерес и является базой для дальнейших исследований усложнённых версий этой задачи. Особенностью этой задачи является наличие особого режима.

Ниже представлены основные леммы и теоремы метода специального интегрального представления функционала в применении к задаче (1) и приведено оптимальное решение задачи.

Лемма 1. *Любая допустимая траектория $x(t)$ в задаче (1) допускает следующую двустороннюю оценку*

$$x_-(t) \leq x(t) \leq x_+(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где нижняя граница $x_-(t)$ вилки (2) соответствует управлению $u(t) \equiv 0$, а верхняя граница $x_+(t)$ вилки (2) соответствует $u(t) \equiv 1$. Множество достижимости $X(T)$ в момент времени $T \geq 0$ имеет следующий вид: $X(T) = [x_-(T), x_+(T)]$.

Лемма 2 (основная лемма). *Функционал J в задаче (1) допускает представление*

$$J[x(\cdot)] = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} W(x(t)) dt, \quad (3)$$

где функция $W(x)$ определяется равенством

$$W(x) = x^\varepsilon - (\mu + \nu)x, \quad x \geq 0. \quad (4)$$

Лемма 3. *Функция $W(x)$ обладает следующими свойствами: $W(0) = 0$, $W(\sigma) = 0$, $W(+\infty) = -\infty$; $W(x) > 0$, $x \in (0, \sigma)$; $W(x) < 0$, $x \in (\sigma, +\infty)$; $W'(x) > 0$, $x \in (0, x_*)$; $W'(x_*) = 0$; $W'(x) < 0$, $x \in (x_*, +\infty)$, где x_* — единственный максимизатор функции $W(\cdot)$:*

$$x_* = \operatorname{argmax}_{0 \leq x < +\infty} W(x) = \operatorname{argmax}_{0 < x < \sigma} W(x), \quad (5)$$

²⁰ Ашманов С. А. Математические модели и методы в экономике. — Москва: Издательство Московского университета, 1980. — 199 с. (стр. 159–170)

который вычисляется по формуле $x_* = \left(\frac{\varepsilon}{\mu + \nu} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$.

Теорема 1. *Оптимальная траектория $x_{\text{opt}}(t)$ в задаче (1) определяется равенством*

$$x_{\text{opt}}(t) = \operatorname{argmax}_{x \in X(t)} W(x), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Оптимальное управление $u_{\text{opt}}(t)$ в задаче (4) имеет вид

$$u_{\text{opt}}(t) = \frac{\dot{x}_{\text{opt}}(t) + \mu x_{\text{opt}}(t)}{x_{\text{opt}}^\varepsilon(t)} \quad (7)$$

в точках дифференцируемости траектории (6) и удовлетворяет в этих точках включению $u_{\text{opt}}(t) \in [0, 1]$.

Проведём классификацию оптимальных решения задачи (1) с учётом лемм и теорем выше. В зависимости от начального состояния $x(0) = x_0 > 0$ рассмотрим три случая: «малые» начальные значения $0 < x_0 < x_*$ (случай I); особое начальное значение $x_0 = x_*$ (случай II); «большие» начальные значения $x_0 > x_*$ (случай III).

В случае I имеется один особый участок $[\tau_I, +\infty)$, где τ_I — точка излома оптимальной траектории,

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_+(t), & 0 \leq t < \tau_I, \\ x_*, & \tau_I \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau_I, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_I \leq t < +\infty, \end{cases}$$

причём точка переключения τ_I определяется из уравнения $x_* = x_+(\tau_I)$ равенством $\tau_I = \frac{1}{\mu(1-\varepsilon)} \ln \frac{1/\mu - x_0^{1-\varepsilon}}{1/\mu - x_*^{1-\varepsilon}} > 0$.

В случае II особый участок распространяется на весь интервал $[0, +\infty)$: $x_{\text{opt}}(t) \equiv x_*$, $u_{\text{opt}}(t) \equiv \mu x_*^{1-\varepsilon}$.

В случае III имеется один особый участок $[\tau_{III}, +\infty)$, где τ_{III} — точка излома оптимальной траектории,

$$x_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} x_-(t), & 0 \leq t < \tau_{III}, \\ x_*, & \tau_{III} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau_{III}, \\ \mu x_*^{1-\varepsilon}, & \tau_{III} \leq t < +\infty, \end{cases}$$

причём точка переключения τ_{III} определяется из уравнения $x_* = x_-(\tau_{III})$ равенством $\tau_{III} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_*} > 0$.

Таким образом, в задаче (1) оптимальное решение может иметь не более одной точки переключения управления и один бесконечный особый участок.

В рамках изложения трёх подходов к решению задачи (1) исследуется оптимальное значение функционала в зависимости от параметров задачи.

В разделе 1.2 модифицированная модель Рамсея обобщается на два класса задач оптимального управления с переменной эластичностью производства, а именно рассматривается следующая постановка задачи оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = ux^{\varepsilon(t)} - \mu x, & x(0) = x_0, \\ J[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} (1-u)x^{\varepsilon(t)} dt \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $0 \leq t < +\infty$ — некоторая заданная функция (характеризующая эластичность производства), область значений которой принадлежит интервалу $(0,1)$. Остальные параметры и переменные задачи совпадают с указанными в постановке задачи (1).

Первый класс задач — это задачи с кусочно-гладкой непрерывной функцией $\varepsilon(t)$ с ограничением следующего вида:

$$\frac{\mu\varepsilon(t)}{\mu + \nu} + \dot{\varepsilon}(t) \left(\frac{1}{\varepsilon(t)(1 - \varepsilon(t))} + \frac{\ln \frac{\varepsilon(t)}{\mu + \nu}}{(1 - \varepsilon(t))^2} \right) \in [0,1], \quad t \geq \tau,$$

где τ — первый момент времени пересечения множества достижимости задачи и особой траектории $x_*(t) = (\varepsilon(t)/(\mu + \nu))^{1/(1-\varepsilon(t))}$. Это ограничение вытекает из предположения о том, что особая траектория $x_*(t)$ может быть реализована с помощью управления $u_*(t) \in [0,1]$, явный вид которого отражает левая часть ограничения.

Для исследования этого класса задач привлекается метод специального интегрального представления функционала — удаётся обобщить леммы 1–3 и теорему 1 и получить аналитическое решение задачи (8), качественно аналогичное решению задачи (1) с постоянной эластичностью производства, а именно содержащее бесконечный особый участок, к которому оптимальная траектория движется по границе множества достижимости на начальном отрезке времени. Но в новой постановке на особом участке оптимальные управление (равное $u_*(t)$) и траектория (равная $x_*(t)$), в общем случае, не постоянны и зависят от функции $\varepsilon(t)$.

Второй класс задач — это задачи с кусочно-постоянной функцией $\varepsilon(t)$ с одной точкой переключения:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq t < \theta, \\ \varepsilon_2, & \theta \leq t. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, а параметр θ предполагается «достаточно большим» (смысл этого утверждения раскрывается в диссертации). Функция эла-

стичности (9) может описывать ситуацию, в которой заранее известно, что в момент времени $\theta > 0$ произойдут некоторые изменения, например, в факторах производства или в технологиях производства, которые повлекут за собой изменения производственной функции.

Указанный класс задач исследуется с помощью метода специального интегрального представления функционала, но так как функция $x_*(t)$, максимизирующая подынтегральную функцию в каждый момент времени, разрывна в момент времени $t = \theta$, то она не может быть реализована никаким допустимым управлением. Поэтому для поиска оптимального решения предлагается следующая схема. Задача разбивается на две подзадачи по временному промежутку: от $[0, \theta]$ и от $[\theta, +\infty)$. Находятся оптимальные решения каждой из двух подзадач, затем эти решения «склеиваются» и формируется оптимальное решение исходной задачи путём максимизации значения функционала по всем возможным «склеенным» траекториям. Предложенное обобщение позволяет аналитически построить оптимальное решение, которое имеет следующий вид: на начальном участке времени оптимальная траектория приближается к первому особому режиму (порождённому значением функции $\varepsilon(t) = \varepsilon_1$ до точки переключения θ), далее движется по особому режиму, переключается на граничное управление и приходит ко второму особому режиму (порождённому значением функции $\varepsilon(t) = \varepsilon_2$ после точки переключения θ) и движется по нему до бесконечности. Стоит отметить, что точка переключения оптимального управления с первого особого режима на граничное управление определяется как соответствующее решение нелинейного алгебраического уравнения.

Для случая гладкой функции $\varepsilon(t) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \sin 0.25t$ (первый класс), и остальных параметров $x_0 = 2$, $\mu = 0.2$, $\nu = 0.1$ график оптимальной траектории представлен на рисунке 1. Для случая кусочно-постоянной функции (второй класс)

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 2/5, & 0 \leq t < 15, \\ 3/5, & 15 \leq t, \end{cases}$$

и остальных параметров $x_0 = 3$, $\mu = 0.2$, $\nu = 0.1$, на рисунке 2 показана оптимальная траектория. На этих иллюстрациях $x_{\text{opt}}(t)$ — оптимальная траектория, $x_-(t)$ и $x_+(t)$ — соответственно нижняя и верхняя границы множеств достижимости задачи (8), $x_*(t)$ — значение, максимизирующее подынтегральную функцию в специальном интегральном представлении функционала в каждый момент времени $t \geq 0$.

В разделе 1.3 исследуется модифицированная модель экономического роста на конечном и на бесконечном горизонтах планирования, а именно рассматривается следующая задача оптимального управления:

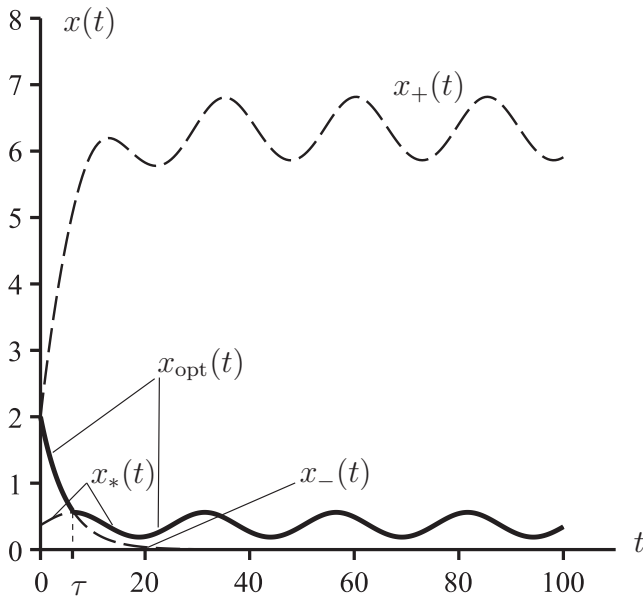


Рис. 1: Оптимальная траектория $x_{\text{opt}}(t)$

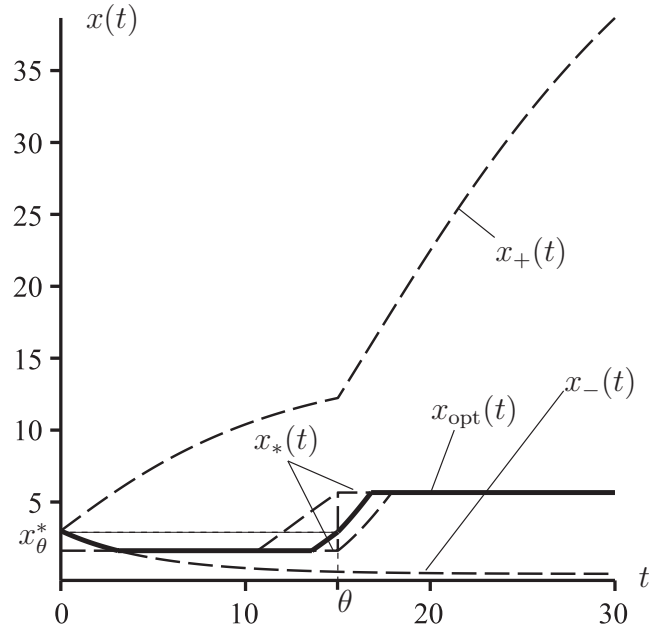


Рис. 2: Оптимальная траектория $x_{\text{opt}}(t)$

$$\begin{cases} \dot{z} = (1+z)u - z(1+z^\gamma), & z(0) = z_0 > 0, \\ L[u] = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, & 0 \leq u \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

где в случаях конечного и бесконечного горизонтов планирования соответственно

$$L_1[u] = \int_0^T [1 + \sqrt{z} - u] dt, \quad L_2[u] = \int_0^T \frac{u}{z} dt; \quad (11)$$

$$L_1[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} [1 + \sqrt{z} - u] dt, \quad L_2[u] = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \frac{u}{z} dt. \quad (12)$$

Здесь z — одномерная фазовая переменная, u — скалярное управление из класса кусочно-непрерывных управлений, подчинённое геометрическому ограничению $u \in [0,1]$, $T > 0$ — заданная, «достаточно большая», длительность процесса управления, параметры ω_1, ω_2 — заданные неотрицательные числа, такие что $\omega_1 + \omega_2 = 1$, ν — заданный положительный коэффициент дисконтирования, параметр $\gamma \in (0,1)$.

В работе сначала устанавливается связь рассматриваемой задачи оптимального управления (10) с известной двумерной моделью “РОСТ”²¹, осуществляемая через замену переменных.

Исследование задачи проводится с помощью метода специального интегрального представления функционала: доказываются леммы и теоремы,

²¹Tarashev A. M., Watanabe C. Optimal Dynamics of Innovation in Models of Economic Growth // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2001. — Vol. 108, no. 1. — Pp. 175–203.

аналогичные леммам 1–3 и теореме 1, которых достаточно для нахождения оптимального решения в случае бесконечного горизонта планирования. Но в случае конечного горизонта планирования метод модифицируется: сначала, с помощью специального интегрального представления функционала находятся оптимальные управления и траектории для задачи (10) с допустимым фиксированным правым концом (из множества достижимости); затем для нахождения оптимального решения задачи со свободным правым концом проводится максимизация значения функционала по всем фиксированным правым концам, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина для задачи со свободным правым концом.

Большое внимание уделяется проблеме численного нахождения решения $z = z_{\text{снг}}(\gamma)$ нелинейного уравнения для особого режима задачи на конечном горизонте планирования:

$$(\gamma - 1)z - z^{1-\gamma} + \gamma = 0.$$

Это уравнение выводится как с помощью метода специального интегрального представления функционала, так и на основе принципа максимума Понтрягина, что интересно с методической точки зрения и служит дополнительной проверкой результатов. Обосновывается единственность решения уравнения, приводятся результаты численных расчётов с применением следующих численных методов: метода Ньютона, нескольких методов различных порядков сходимости, полученных из ряда Чебышёва²² и метода продолжения по параметру²³.

В работе приводятся классификации оптимальных решений задачи (10) в случаях конечного и бесконечного горизонтов планирования. В случае бесконечного горизонта планирования особый режим может не лежать внутри множества достижимости, и приводятся ограничения на параметры задачи, при которых особого режима можно достигнуть. Оптимальное решение задачи (10) на бесконечном горизонте качественно аналогично оптимальному решению модифицированной модели Рамсея с постоянной эластичностью (движение по границе множества достижимости к особому режиму, а затем по особому режиму до бесконечности). В случае конечного горизонта планирования особый режим всегда лежит внутри множества достижимости. Оптимальное решение при «достаточно большом» времени T (определение указано в диссертации) ведёт себя следующим образом: фазовая точка движется по границе множества достижимости к особому режиму, затем дви-

²²Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 5: Прочие сочинения. Биографические материалы. — Москва: Изд-во АН СССР, 1951. — 490 с.

²³Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 4. — С. 601-602.

жется по особому режиму, а на конечном участке времени возможны три ситуации в зависимости от параметров задачи: сход с особого режима с одним из граничных управлений ($u = 0$ или $u = 1$) или продолжение движения по особому режиму до конца. В конце раздела приводится соотношение на параметры задачи, при котором оптимальные решения на конечном и бесконечном горизонтах планирования совпадают.

Вторая глава посвящена разработке методов поиска аналитических и численных решений задач оптимального управления различных размерностей. Она состоит из трёх разделов, два из которых посвящены изучению двумерной модели двухсекторной экономики с производственной функцией Кобба-Дугласа при различных коэффициентах амортизации на конечном и бесконечном горизонтах планирования, а третий — численному исследованию трёхмерной модели из области эпидемиологии.

В **разделе 2.1** рассматривается следующая двумерная нелинейная задача оптимального управления на конечном горизонте планирования

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv \int_0^T e^{-\nu t} (1 - u_1 - u_2) F(x) dt \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{Y}_U}, \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \right\}, \\ 0 \leq t \leq T. \end{array} \right. \quad (13)$$

Здесь x_1, x_2 — положительные фазовые переменные, u_1, u_2 — переменные управления из класса кусочно-непрерывных управлений, $x^0 = (x_{10}, x_{20})^T \in \mathbb{R}_+^2$ — начальное состояние управляемого объекта, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. В дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (13) участвует функция $F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}$ — производственная функция Кобба-Дугласа, в которой коэффициенты эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяют условиям $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$; μ_1, μ_2 — положительные коэффициенты амортизации. Коэффициент дисконтирования $\nu > 0$. Фазовые переменные характеризуют факторы производства (например, основной капитал и человеческий капитал), а функционал — интегральный объём потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учётом дисконтирования. В работе подробно рассматривается случай $\mu_1 \neq \mu_2$.

В начале приводится постановка более общей задачи оптимального управления, которую можно свести к каноническому виду (13). После этого

производится анализ задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. Строится функция Гамильтона-Понтрягина, и находится её максимизатор. Поиск особого режима приводит к нелинейному уравнению

$$z^{\varepsilon_2} - z^{-\varepsilon_1} = \mu \equiv \mu_1 - \mu_2. \quad (14)$$

Обосновывается единственность и другие свойства решения z_{sng} уравнения (14) так же, как и соотношения для особого режима задачи.

Далее строится краевая задача принципа максимума, и приводится обоснование оптимальности экстремального решения в терминах конструкций принципа максимума.

После этого следует подробный анализ дифференциальных уравнений движения и сопряжённой системы при режимах управления, вытекающих из максимизатора функции Гамильтона-Понтрягина и из возможного особого режима. Для каждого режима удаётся построить решения систем в явном виде. Потом эти решения склеиваются, и явно строится экстремальное решение. Выделяются следующие три случая расположения начального состояния относительно особого режима задачи: $C_{10} : \frac{x_{20}}{x_{10}} > z_{\text{sng}}$, $C_{\text{sng}} : \frac{x_{20}}{x_{10}} = z_{\text{sng}}$, $C_{01} : \frac{x_{20}}{x_{10}} < z_{\text{sng}}$. В случае C_{01} оптимальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u_{01}, & t \in [0, \tau], \\ u_{\text{sng}}, & t \in (\tau, \theta], \\ u_{10}, & t \in (\theta, \bar{\theta}], \\ u_{00}, & t \in (\bar{\theta}, T], \end{cases} \quad (15)$$

где $u_{00} = (0,0)^T$, $u_{01} = (0,1)^T$, $u_{10} = (1,0)^T$, $u_{\text{sng}} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$, имеет три точки переключения τ , θ и $\bar{\theta}$, определяемые явными формулами. Предполагаемая «достаточно большая» длительность процесса управления означает, что $\tau < \theta < \bar{\theta}$, таким образом $0 < \tau < \theta < \bar{\theta} < T$. Для случая C_{01} в работе приведена теорема об экстремальном решении, в которой представлены явные формулы управления, фазовых и сопряжённых траекторий. Завершает исследование теорема об оптимальности полученного экстремального решения, уже доказанная выше. Отметим, что в задаче представлен качественно новый вид оптимального решения, не встречавшийся ранее в задачах похожего типа, а именно появился «калибровочный» режим управления между особым и финальным участками времени. Для случаев C_{sng} , C_{10} имеют место утверждения, аналогичные теоремам, доказанным в диссертации.

В заключительной части раздела проводятся численные эксперименты для иллюстрации свойств оптимального решения задачи (13). На рисунке 3 показан вид оптимальной траектории на фазовой плоскости $x_1 x_2$ (стрелками показано направление движения фазового вектора).

В разделе 2.2 рассматривается следующая двумерная нелинейная задача оптимального управления

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\nu t} \ln[(1 - u_1 - u_2) F(x)] dt \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 < 1 \right\}, \\ 0 \leq t < +\infty. \end{array} \right. \quad (16)$$

Видно, что задача совпадает с задачей из предыдущего раздела, только она рассматривается на бесконечном горизонте планирования и функционал характеризует интегральный объём удельного потребления на отрезке времени $[0, +\infty)$ с учётом дисконтирования. Задачу (16) предложил академик А.В. Кряжимский. В работе рассматривается подробно случай различных коэффициентов амортизации, $\mu_1 \neq \mu_2$.

В начале приводится более общая постановка задачи оптимального управления, которая может быть приведена к данному каноническому виду (16). Затем проводится анализ задачи на основе принципа максимума Понтрягина: строится функция Гамильтона-Понтрягина, находится её максимизатор функции вместе с особым режимом, причём уравнение для особого режима имеет тот же самый вид, что и в случае конечного горизонта планирования.

После этого строится решение краевой задачи принципа максимума в случаях, когда начальная точка лежит на особом луче $L_{\text{sng}} = \{x = (x_1, x_2)^\top \in R_+^2 : x_2/x_1 = z_{\text{sng}}\}$ и ниже особого луча, причём в первом случае даются явные формулы, а во втором остаётся краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{1}{p_2 F(x)} \right) F(x) - \mu_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(\tau) = x_{10} e^{-\mu_1 \tau} \cdot z_{\text{sng}}, \\ \dot{p}_2 = -p_2 \left(\frac{F(x)}{x_2} - \nu - \mu_2 \right), \quad p_2(\tau) = \frac{e^{\mu_1 \tau}}{x_{10} \nu (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z_{\text{sng}})}. \end{array} \right. \quad (17)$$

которую не удалось решить аналитически, но предложен алгоритм численного решения этой задачи, сводящий решение краевой задачи к последовательному решению двух задач Коши в обратном и прямом времени. По аналогии с конечным горизонтом, представлено обоснование оптимальности экстремального решения в терминах конструкций принципа максимума. Сформулируем

основное утверждение для случая, когда начальная точка лежит не выше осязого луча:

Теорема 2. При $\nu \in (0, z_{\text{sng}}^{-\varepsilon_1}]$ и $\mu_1 > \mu_2$ оптимальное решение задачи (16) имеет вид:

1) если $x_2(0) = x_1(0) \cdot z_{\text{sng}}$, то

$$u(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(1 - \nu/z_{\text{sng}}^{\varepsilon_2}) \\ \varepsilon_2(1 - \nu/z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1}) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_{10}e^{(z_{\text{sng}}^{\varepsilon_2} - \mu_1 - \nu)t} \\ x_1(t) \cdot z_{\text{sng}} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, +\infty);$$

2) если $x_2(0) < x_1(0) \cdot z_{\text{sng}}$, то

$$u(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(1 - \nu/z_{\text{sng}}^{\varepsilon_2}) \\ \varepsilon_2(1 - \nu/z_{\text{sng}}^{\varepsilon_1}) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_{10}e^{-\mu_1\tau} e^{(z_{\text{sng}}^{\varepsilon_2} - \mu_1 - \nu)(t-\tau)} \\ x_1(t) \cdot z_{\text{sng}} \end{pmatrix}, \quad t \in [\tau, +\infty),$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 1/(p_2(t)F(x(t))) \end{pmatrix}, \quad x_1(t) = x_{10}e^{-\mu_1 t}, \quad t \in [0, \tau),$$

где момент времени $\tau > 0$, функции $x_2(t)$, $p_2(t)$, $t \in [0, \tau)$, определяются при решении краевой задачи (17);

В конце приводятся результаты численных расчётов по формулам из теоремы 2 и согласно разработанному численному алгоритму. На рисунке 4 показан вид оптимальной траектории на фазовой плоскости x_1x_2 (стрелками показано направление движения фазового вектора).

В разделе 2.3 рассматривается нелинейная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a - (u + b_1)x_1 - c \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -b_2x_2 + c \frac{x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, & x_2(0) = x_{20}, \\ \dot{x}_3 = ux_1 + b_3x_2 - b_1x_3, & x_3(0) = x_{30}, \\ J(u) = \int_0^T \left(Qx_2 + \frac{1}{2}u^2 \right) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, & u \in U. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — трёхмерная фазовая переменная, u — скалярное управление, подчинённое геометрическому ограничению $u \in U \equiv [0, 0.9]$, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления, параметры $a, b_1, b_2, b_3, c, x_{10}, x_{20}, x_{30}, Q$ — заданные положительные константы. Переменная x_1 характеризует количество людей, склонных к заболеванию, x_2 — количество инфицированных, x_3 — количество людей, имеющих иммунитет к

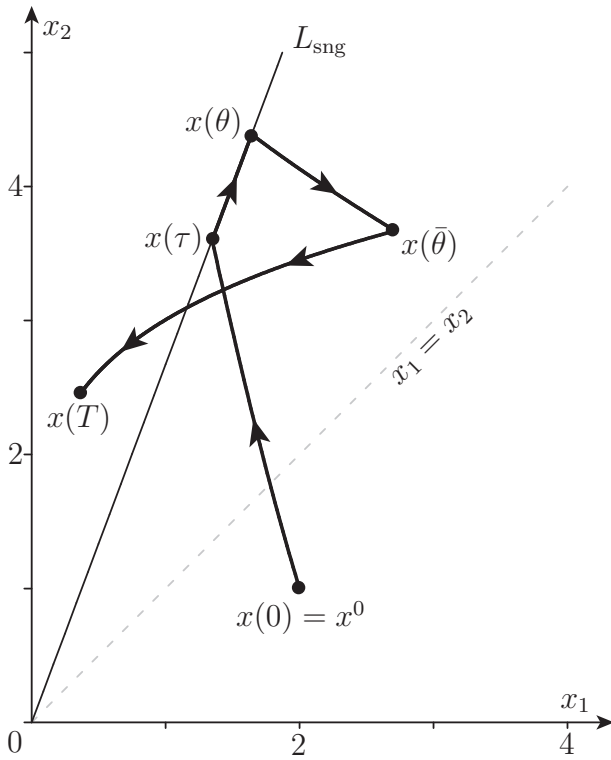


Рис. 3: Оптимальная траектория на фазовой плоскости

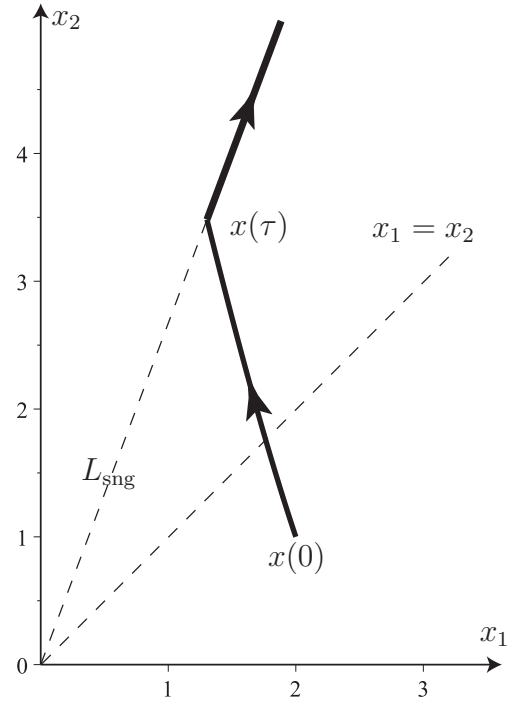


Рис. 4: Оптимальная траектория на фазовой плоскости

заболеванию. Управление u характеризует интенсивность вакцинации. Функционал — взвешенная характеристика количества заболевших и затрат на лечение — подлежит минимизации.

Изучен ряд теоретических вопросов, возникающих при анализе задачи (18), таких как положительность фазовых переменных, положения равновесия при $u = 0$, продолжимость решения задачи Коши.

Для исследования задачи привлекается принцип максимума Понтрягина. Строится шестимерная краевая задача принципа максимума, проводятся численные эксперименты по нахождению экстремального решения и по нахождению управлений, наилучших с точки зрения значения функционала, в двух классах кусочно-постоянных управлений. Сравниваются значения функционалов на построенных решениях, и выясняется, что значение функционала на экстремальном решении лучше (меньше), чем на наилучших в обоих классах, а в случае одного из классов, лучше приблизительно на 10%.

Вычисления проводились в среде Maple 11 при помощи встроенных стандартных функций. В том числе, поиск решения краевой задачи принципа максимума осуществлялся методом продолжения по параметру, причём одной из сложностей было нахождение подходящего начального приближения.

В **заключении** приведены основные результаты работы, рекомендации их использования и перспективы их дальнейшей разработки.

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Ю.Н. Киселёву за всестороннюю многолетнюю поддержку и постоянное внимание к работе. Автор выражает благодарность С.Н. Аввакумову, С.М. Асееву, В.В. Баландину, А.В. Кряжимскому и Е.А. Ровенской за плодотворные беседы и советы по теме диссертации, а также всему коллективу кафедры оптимального управления ВМК МГУ за поддержку и помощь в различных вопросах. Автор очень признателен маме Т.В. Орловой и Е.С. Анисимовой за понимание и неоценимую моральную поддержку на всех этапах работы над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] *Kiselev Yu. N., Orlov S. M. A Class of Models Describing the Dynamics of Production and Infrastructure-Planning Indicators // Computational Mathematics and Modeling. — 2015. — Vol. 26, no. 2. — Pp. 213–243. — (Перевод статьи: Киселёв Ю. Н., Орлов С. М. Исследование модифицированной модели “РОСТ” с особыми режимами // Прикладная математика и информатика. — 2014. — № 45. — С. 93–122).*
- [2] *Киселёв Ю. Н., Орлов С. М. Исследование модифицированной модели Рамсея с переменной эластичностью производства // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2015. — № 3. — С. 35–42.*
- [3] *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа при различных коэффициентах амортизации // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 671–687.*
- [4] *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2013. — № 4. — С. 27–37.*
- [5] *Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование краевой задачи принципа максимума Понтрягина в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 11. — С. 1812–1826.*

- [6] Орлов С. М. Задача оптимального управления в модели распространения вируса гриппа А(Н1N1) // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. — Т. 10. — МАКС Пресс Москва, 2013. — С. 150–166.
- [7] Орлов С. М. Поиск оптимальных решений модифицированных версий модели “РОСТ” // Сборник научных трудов ф-та ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова «Проблемы динамического управления» под редакцией Ю.С. Осипова, А.В. Кряжмского. — Т. 6. — МАКС Пресс Москва, 2012. — С. 78–101.
- [8] Киселёв Ю. Н., Орлов С. М., Орлов М. В. Исследование одной нелинейной задачи оптимального управления с особыми режимами // Сборник научных трудов ф-та ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова «Проблемы динамического управления» под редакцией Ю.С. Осипова, А.В. Кряжмского. — Т. 5. — МАКС Пресс Москва, 2010. — С. 113–126.
- [9] Orlov M. V., Kiselev Yu. N., Orlov S. M. Optimal control problem for two-sector economic model with Cobb–Douglas production function // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games. Book of Abstracts. — Research Unit ORCOS Vienna, 2015. — P. 135.
- [10] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Модель Рамсея: три подхода к решению // Тезисы докладов II Международного семинара, посвященного 70-летию со дня рождения академика А.И.Субботина. — ИММ УрО РАН, УРФУ Екатеринбург, 2015. — С. 70–71.
- [11] Киселёв Ю. Н., Орлов С. М. Упрощённая модель Рамсея с переменной эластичностью производства // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 27-31 октября 2014г.: Тезисы докладов. — МАКС Пресс Москва, 2014. — С. 36.
- [12] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование модели двухсекторной экономики с интегральным функционалом качества при различных коэффициентах амортизации // Тезисы конференции “Ломоносовские чтения - 2014”. Секция вычислительной математики и кибернетики. МГУ имени М.В. Ломоносова. — 2014. — С. 24–25.
- [13] Киселёв Ю. Н., Орлов М. В., Орлов С. М. Исследование модели двухсекторной экономики с интегральным функционалом качества при одинаковых коэффициентах амортизации // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, 28 октября - 1 ноября 2013 г.: Тезисы докладов. — МАКС Пресс Москва, 2013. — С. 29–30.

- [14] Орлов С. М. Особые режимы в модифицированной версии модели “РОСТ” // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней матем. школы. — ИПЦ ВГУ Воронеж, 2013. — С. 171–172.
- [15] Орлов С. М. Управляемая модель распространения вируса гриппа А(Н1N1) // Сборник тезисов XX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2013», секция Вычислительная математика и кибернетика. — Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2013. — С. 144–145.
- [16] Орлов С. М. Исследование некоторых нелинейных задач оптимального управления // Сборник тезисов лучших дипломных работ. — МАКС Пресс Москва, 2012. — С. 62–64.
- [17] Орлов С. М. Поиск оптимального решения в модели экономического роста специального вида // Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012», секция Вычислительная математика и кибернетика. — Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2012. — С. 64–65.
- [18] Орлов С. М. Максимизация уровня развития технологий в одной модели экономического роста // Сборник тезисов XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011». — Издательский отдел ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2011. — С. 42–43.