А. Я. Белов, Контрпримеры к проблеме Шпехта, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 3, 13–24

УДК 512.5

А. Я. Белов

Контрпримеры к проблеме Шпехта

Работа посвящена построению бесконечно базируемых многообразий ассоциативных алгебр над бесконечным полем произвольной характеристики.

Библиография: 32 названия.

§ 1. Введение

Тождества являются важным объектом исследования как для теории колец, так и для теории инвариантов. *Тождеством в алгебре* называется многочлен, который тождественно обращается в нуль на алгебре (говоря "тождество выполняется", мы допускаем некоторую вольность, которая, однако, не влияет на суть дела). Например, в алгебре Грассмана выполняется тождество *аменабельности* $[[x,y],z]=0$ (четный элемент лежит в центре, а коммутатор двух нечетных элементов четен), в алгебре матриц порядка 2 – *тождество Холла* $[[x,y]^2,z]=0$ (собственные значения матрицы с нулевым следом имеют противоположные знаки, поэтому ее квадрат – скалярная матрица). В алгебре матриц порядка n выполняется *стандартное тождество*

$$\mathrm{St}_{2n}=\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(2n)}$$

степени $2n$ (теорема Амицура–Левицкого). В $(n-1)$-мерной алгебре выполняется *тождество Капелли* C_n порядка n:

$$C_n=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}y_1\cdots y_{k-1}x_{\sigma(n)}.$$

Теория PI-алгебр возникла из потребностей проективной геометрии, и первая работа в этой области датируется 1922 годом. Дело в том, что полиномиальным тождествам координатизирующего тела проективной плоскости соответствуют конфигурационные теоремы [1]. Результаты PI-теории привели к созданию теории некоммутативных аффинных колец и, соответственно, к версии некоммутативной алгебраической геометрии. Теории полиномиальных тождеств посвящена обширная литература (см. монографии [2]–[7]).

Понятие тождества применимо и к неассоциативной ситуации. Многие классы алгебр задаются тождествами. Например, алгебры Ли определяются как алгебры, в которых выполняются тождество антикоммутативности $xy+yx=0$ и тождество Якоби $((xy)z)-((xz)y)-(x(yz))=0$, йордановы алгебры задаются тождествами $[x,y]=0$, $(x^2y)x-x^2(yx)=0$, а ассоциативные алгебры – тождеством ассоциативности $(xy)z-x(yz)=0$.

Пусть $P(x_1,\dots,x_n)$ – тождество в алгебре A, $\{H_i(x_1,\dots,y_{q_i})\}$ – произвольный набор полиномов, а $R(z_1,\dots,z_k)$ – любой полином. Тогда результаты подстановки $P(H_1,\dots,H_n)$ и умножения на R (RP и PR) также являются тождествами в алгебре A и называются *следствиями* тождества P. Кроме того, линейная комбинация тождеств снова есть тождество. Идеал, порожденный значениями системы полиномов, замкнутой относительно операции подстановки, называется T-*идеалом.* Изучение T-идеалов сводится к изучению *вполне характеристических* идеалов в свободной алгебре, т.е. идеалов, замкнутых относительно всех эндоморфизмов. Категория алгебр, удовлетворяющая некоторой системе тождеств, называется *многообразием*, а свободные объекты в этой категории – *относительно свободными алгебрами.* Ассоциативной PI-*алгеброй* называется алгебра, в которой выполняется некоторое нетривиальное тождество. Через $\mathrm{Var}\,A$ обозначается многообразие, заданное тождествами, выполняющимися в алгебре A.

Одной из центральных проблем PI-теории является

Проблема Шпехта. *Всякое ли многообразие ассоциативных колец конечно базируемо? Иными словами: всякая ли система тождеств в ассоциативной алгебре следует из своей конечной подсистемы?*

Эта проблема, поставленная В. Шпехтом в 1950 году [3], обобщается для произвольных многообразий алгебр, в том числе и неассоциативных. Многообразие называется *шпехтовым*, если в нем выполняется условие обрыва возрастающих цепей для T-идеалов.

Хотелось бы отметить, что В.Н. Латышев был вдохновителем исследований по проблеме Шпехта. Во многом он привлек к ней внимание Ю.П. Размыслова, А.Р. Кемера, А.В. Яковлева, А.В. Гришина, А.Я. Белова, В.В. Щиголева и др. Его первоначальные работы по тождествам алгебры Грассмана [8], [9] были своего рода предвестниками дальнейших исследований (им, в частности, была показана локальная шпехтовость многообразия ассоциативных алгебр с тождеством $[[[x,y],z],t]=0$). Да и сами T-пространственные примеры базируются на грассмановой конструкции. Если рассматривать PI-теорию как своего рода взгляд на некоммутативную алгебраическую геометрию, то грассманова алгебра служит одним из самых важных примеров новых объектов, являющихся аналогами первичных алгебр.

А.В. Гришин ввел понятие T-*пространства* [10], т.е. системы полиномов, замкнутых относительно только линейных действий и операции подстановки (а умножение на элемент алгебры может выводить за пределы T-пространства). Примером T-пространства служит пространство матриц с нулевым следом (множество значений коммутатора) или множество значений центральных полиномов. Исследование T-пространств сводится к изучению вполне характеристических подпространств в свободной алгебре. Для T-пространств возникают аналогичные задачи. Шпехтовой проблематикой занимались многие исследователи. Она подразделяется на ряд случаев. Прежде всего это “*локальный*” случай, случай фиксированного числа переменных (т.е. рассматриваются цепочки T-идеалов в конечно порожденной алгебре), и “*глобальный*”, когда изучаются бесконечно порожденные алгебры.

Чтобы показать, как ситуация зависит от свойств основного поля $\mathbb{K}$, опишем процедуру *линеаризации.* Пусть полином P имеет степень n по переменной x. Подставим $\sum_{i=1}^{n} x_i \to x$ и возьмем сумму членов, полилинейных по всем x_i. Получившийся многочлен Q называется *полной линеаризацией* P. *Частичной линеаризацией* называется сумма членов заданной степени полиоднородности по переменным x_i. Из тождества P следует его полная линеаризация Q в силу равенства

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n, \vec{Y}) = P(x_1 + \dots + x_n, \vec{Y}) - \sum_i P(x_1 + \dots + \widehat{x}_i \dots + x_n, \vec{Y}) \\ + \sum_{i<j} P(x_1 + \dots + \widehat{x}_i + \dots + \widehat{x}_j + \dots + x_n, \vec{Y}) \\ - \dots + (-1)^n (P(x_1, \vec{Y}) + \dots + P(x_n, \vec{Y})) \end{aligned}$$

($\vec{Y}$ обозначает набор переменных в P, отличных от x).

Например, линеаризация многочлена x^n есть многочлен

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

а линеаризация тождества Холла по всем переменным есть многочлен

$$\big[[x_1, y_1] \odot [x_2, y_2] + [x_1, y_2] \odot [x_2, y_1], z\big],$$

где $a \odot b = ab + ba$ – симметризатор элементов a и b.

Если в многочлен Q вместо переменных x_i подставить x, то получится многочлен $n! \cdot P$. Поэтому если основное поле имеет характеристику нуль, то все тождества равносильны полилинейным.

Если же основное поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то все тождества можно считать однородными по каждой переменной. В частности, вместе с каждым тождеством будут выполняться все его (частичные) линеаризации. В самом деле. Пусть $P = \sum P_i$, где переменная x входит в P_i i раз. Тогда если сделать замену $\lambda x \to x$, то полином P перейдет в $\sum \lambda^i P_i$. Если основное поле бесконечно, то можно выбрать такие λ_j, чтобы определитель Вандермонда $\det(\lambda_j^i)$ не обращался в нуль, и выделить компоненты P_i по отдельности.

Таким образом, проблема Шпехта имеет и такое подразделение на случаи:

1) $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$,
2) полиоднородный случай или случай бесконечного поля,
3) случай конечного основного поля.

Кроме того, можно рассматривать

4) полилинейный случай в характеристике p.

В семидесятые годы был достигнут значительный прогресс в шпехтовой проблематике. В. Дренски [11] и Vaughan–Lee [12] построили примеры бесконечно базируемых многообразий алгебр Ли над полем положительной характеристики. Ю. П. Размыслов [13] показал шпехтовость многообразия алгебры матриц второго порядка над полем характеристики нуль. Позднее многообразия, связанные с матричными алгебрами, исследовались многими авторами, см. [14]–[16] и др.

В. Н. Латышев [17]–[19], а также Г. К. Генов [20], Попов А. П. [21] показали локальную шпехтовость нематричных многообразий над полем нулевой характеристики.

Окончательное решение проблемы Шпехта в случае нулевой характеристики было получено А. Р. Кемером в восьмидесятые годы [22]. Он показал глобальную шпехтовость многообразий ассоциативных алгебр с помощью замечательного "супертрюка", позволяющего сводить изучение тождеств бесконечно порожденных ассоциативных алгебр к исследованию тождеств конечно порожденных, но *супералгебр* [23]. (Тождество в суперслучае – это полином с фиксированными позициями для четных и нечетных переменных. Соответственно вполне характеристический идеал – это идеал в свободной супералгебре, устойчивый относительно всех эндоморфизмов, сохраняющих суперструктуру.) Позднее техника Кемера работала и в неассоциативном случае. Так, А. Я. Вайс [24] применил "супертрюк" для многообразия, порожденного специальной алгеброй Ли, А. Я. Вайс и Е. И. Зельманов [25] доказали локальную шпехтовость йордановых PI-алгебр в нулевой характеристике. Шпехтовость многообразия, порожденного конечномерной алгеброй Ли, была показана А. В. Ильтяковым [26]. Схема доказательства Кемера состоит в сближении многообразия и конечномерной алгебры, все тождества которой выполняются в этом многообразии.

Для T-пространств в PI-алгебре локальная конечная базируемость была доказана А. В. Гришиным [27] (см. также [10]). Отметим, что метод Гришина основан на прямых комбинаторных рассуждениях с многочленами и в меньшей мере на свойствах носителей и принципиально отличается от метода Кемера.

Локальный случай положительной характеристики для бесконечного основного поля был положительно решен А. Р. Кемером [28], а для общего поля (и для колец) – А. Я. Беловым [29]. Однако "глобальная" ситуация несколько иная.

А. В. Гришин [30] построил пример бесконечно базируемого T-пространства над бесконечным (и тем самым произвольным) полем характеристики 2 в многообразии, порожденном тождеством аменабельности $[[x,y],z]=0$. Пример А. В. Гришина очень прост: это набор произведений квадратов:

$$\{x_1^2, x_1^2x_2^2, \dots, x_1^2\cdots x_n^2, \dots\}.$$

Интересно, что если $\operatorname{char}\mathbb{K}=p>2$, то аналогичное T-пространство

$$\{x_1^p, x_1^px_2^p, \dots, x_1^p\cdots x_n^p, \dots\},$$

как показал В. В. Щиголев, будет конечно базируемым в абсолютно свободной алгебре.

Тем не менее, следуя идеологии А. В. Гришина, В. В. Щиголев построил бесконечно базируемое T-пространство для произвольного p. Он показал, что система полиномов

$$\{Q(x_1,y_1), Q(x_1,y_1)Q(x_2,y_2), \dots, Q(x_1,y_1)\cdots Q(x_n,y_n), \dots\},$$

где $Q(x,y)=x^{p-1}y^{p-1}[x,y]$, бесконечно базируема как T-пространство [31].

Неожиданно оказалось, что в локальном случае ситуация с T-идеалами и T-пространствами различна. Как показал В. В. Щиголев, даже в случае двух образующих, бесконечного основного поля характеристики p и тождества $[[x,y],z]=0$ система полиномов $Q_s=x^{p^s-1}y^{p^s-1}[x,y]$ бесконечно базируема. (А все T-идеалы в локальном случае конечно базируемы. Более того, конечно порожденная алгебра с тождеством аменабельности нётерова!)

Цель настоящей работы – перенести эти результаты на T-идеалы, привести примеры нешпехтовых многообразий для произвольных полей положительной характеристики и дать тем самым отрицательное решение глобальной проблемы Шпехта.

Замечание. А.В. Гришин анонсировал [32] в качестве контрпримера к проблеме Шпехта следующую систему полиномов

$$H_n = z_1^4 \prod_i x_i^2 z_2^4.$$

Как показал В.В. Щиголев, эта система оказывается конечно базируемой (даже если вместо 4 поставить любую степень двойки). В дальнейшем А.В. Гришин предлагал в качестве контрпримера системы типа

$$G_n^{(k)} = z^{2^k} \prod_i x_i^2 z^{2^k}.$$

В этой связи хочется сформулировать гипотезу.

Гипотеза. *При любом k система многочленов $G_n^{(k)}$ конечно базируема.*

Эту гипотезу можно рассматривать как частный случай следующего неформального предположения: любая бесконечная базируемость в T-идеалах объясняется "клеточными эффектами", описанными в начале последнего параграфа; а когда эти эффекты отсутствуют, наблюдается конечная базируемость.

В заключение хотелось бы выразить благодарность за полезные обсуждения руководителям семинара МГУ по теории колец А.В. Михалёву, В.Н. Латышеву, а также А.В. Гришину, К.А. Зубрилину, В.Т. Маркову, В.В. Щиголеву и всем участникам семинара.

§ 2. Основные конструкции

Пусть $\mathbb{K}$ обозначает основное поле. Рассмотрим алгебру A с образующими x_i, y_i, $i = 1, \dots, \infty$, и многообразие, порожденное тождеством $[[x, y], z] = 0$. В этой алгебре все слова, содержащие $p+1$ вхождение какой-нибудь образующей, нулевые. И в случае характеристики основного поля $p > 2$ алгебра A задается этими соотношениями и тождеством аменабельности.

В случае $p = 2$ переменные y_i не используются, а сама алгебра A задается соотношениями

$$x_i^3 = 0, \qquad [x_i, x_j] = \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j,$$

где $\varepsilon_i^2 = 0$, ε_i коммутирует со всеми элементами алгебры (и с ε_j). Ясно, что $\varepsilon_i x_i x_j = \varepsilon_i x_j x_i$, поэтому соотношения определены корректно. Из этих соотношений следует тождество аменабельности. Алгебра A в данном случае – это алгебра Гришина φ_p.

Замечание. Можно показать, что в алгебре A выполняется тождество:

$$z u_1 z u_2 \cdots u_{q-1} z = 0,$$

где q – некоторая степень p. Это можно вывести из результатов Кемера о том, что в алгебре Грассмана в характеристике p выполняются все тождества алгебры матриц порядка p и что достаточно сильная линеаризация некоторого тождества автоматически выполняется в алгебре матриц; или непосредственно, используя специфику тождества аменабельности $[[x, y], z] = 0$.

Нам понадобятся леммы, описывающие свойства тождества аменабельности. Следующая лемма принадлежит В. Н. Латышеву (см. [19]).

Лемма 2.1. *Пусть в A выполняется тождество $[[x, y], z] = 0$. Тогда коммутант $[x, y]$ централен и в A выполняются тождества*:

а) $[x, y]p[z, t] = -[x, t]p[z, y]$;

б) $[x, y]p[z, y] = 0$;

в) *в любой 2-порожденной подалгебре выполняется тождество*:

$$[x, y]p[z, t] = 0.$$

Назовем *p-словом* такое слово, в котором число вхождений каждой образующей алгебры сравнимо с нулем по модулю p. Ясно, что в любое ненулевое p-слово алгебры A каждая образующая входит либо нуль, либо p раз. Полином называется *полным*, если он является линейной комбинацией p-слов. Слово u называется *циклически сопряженным* слову v, если для некоторых слов v_1 и v_2 выполняются равенства: $u = v_1v_2$; $v = v_2v_1$. Отношение “циклической сопряженности” является отношением эквивалентности. Следующая лемма принадлежит В. В. Щиголеву (см. [31]):

Лемма 2.2. а) *Пусть v – p-слово, v' циклически сопряжено v. Тогда в алгебре A значения v и v' одинаковы.*

б) *Пусть W – центральный полином в A, v и v' – циклически сопряженные слова и полином Wv полон. Тогда $Wv = Wv'$.*

Следствие 2.3. *Пусть W – центральный полином в A, $v = v_1v_2$ и $v' = v_3v_4$ – циклически сопряженные слова и полином Wv полон. Тогда $Wv = Wv' = v_1Wv_2 = v_3Wv_4$.*

Лемма 2.4. а) *Значение любого p-слова центрально.* (*А значит, любой полный полином централен.*)

б) *Значения полиномов $Q(x, y) = x^{p-1}y^{p-1}[x, y]$ (если $\operatorname{char}\mathbb{K} = p > 2$) и x^2 (если $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$) лежат в центре A.*

Заметим, что p-слово – это своего рода аналог “спаривания”. Возможно, что за p-словами стоит глубокая теория (подобно теории 2-слов Ю. П. Размыслова).

Хочется привести следующие результаты А. В. Гришина и В. В. Щиголева, относящиеся к свойствам алгебры A.

Лемма 2.5. а) *Пусть $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$. Тогда любой полный полином, являющийся линеаризацией полинома из T-пространства, порожденного $\prod {x_i}^2$, обращается в нуль на A.*

б) *Пусть $\operatorname{char}\mathbb{K} = p > 2$. Тогда любой полный полином, являющийся линеаризацией полинома из T-пространства, порожденного $\prod Q(x_i, y_i)$, обращается в нуль на A.*

Иными словами, остается только возможность подстановки слов вместо переменных.

Лемма 2.6. *Линейные комбинации полиномов, получающиеся подстановкой слов вместо переменных в* $\prod_{i=1}^n {x_i}^2$ *(соответственно в* $\prod_{i=1}^n Q(x_i, y_i)$*), при разных* n *линейно независимы (т.е. равенство нулю суммы линейных комбинаций означает равенство нулю комбинации при каждом* n*).*

Теперь мы расширим алгебру A элементами e, f и t, добавив соотношения:

$$t^{4q+1} = 0, \qquad [t, x_i] = [t, y_i] = 0,$$
$$[t, fe] = [fe, x_i] = [fe, y_i] = 0,$$
$$x_i e = y_i e = te = 0, \qquad fx_i = fy_i = ft = f^2 = e^2 = 0,$$
$$\{v = 0 : v \quad \text{имеет более } q \text{ вхождений } e \text{ или более } q \text{ вхождений } f\}.$$

Получившуюся алгебру мы обозначаем $\widehat{A}$. Каждое слово из $\widehat{A}$ приводится к подслову слова следующего вида: $w = et^{k_1} v (fe)^{k_2} f$, где v – слово из A, т.е. слово от x_i и y_i. Слово w называется *p-словом*, если v – p-слово. Полнота многочлена определяется аналогично.

Теперь мы можем привести бесконечно базируемую систему полиномов R_n:

$$R_n = [[E, T], T] \prod_{i=1}^n x_i^2 ([T, [T, F]][[E, T], T])^{q-1} [T, [T, F]],$$

если $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$, и в общем случае положительной характеристики

$$R_n = [[E, T], T] \prod_{i=1}^n Q(x_i, y_i) ([T, [T, F]][[E, T], T])^{q-1} [T, [T, F]],$$

где $Q(x, y) = x^{p-1} y^{p-1} [x, y]$.

§ 3. Основная теорема

Наша цель – доказать основную теорему:

Теорема 3.1. *Система полиномов* R_n *образует бесконечно базируемый* T*-идеал в алгебре* $\widehat{A}$.

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем неформальное пояснение, относящееся к конструкции алгебры $\widehat{A}$. Алгебра A – это фактически алгебра Грассмана, $A[t]$ – ее расширения центральным нильпотентом. Алгебра $\widehat{A}$ представляет собой алгебру треугольных матриц над “алгеброй Грассмана” $A[t]$ с одинаковыми элементами на диагонали. Диагональная позиция называется *клеткой* по аналогии с конечномерным случаем. (Бесконечно порожденная алгебра Грассмана T-первична, и мы ее используем в своих конструкциях как первичную алгебру.) Поясним это подробнее. В локальном случае относительно свободная алгебра B представима матрицами. При этом можно добиться такого устройства представления: вдоль диагонали идут блоки. Ограничение элементов алгебры на каждый такой блок дает гомоморфизм на алгебру общих матриц. Под блоками стоят нули. Любые два блока могут быть либо *похожими* (для любого элемента алгебры коэффициент при соответствующей матричной единице в двух блоках совпадает), либо *независимыми* (на соответствующих позициях стоят различные трансцендентные переменные). Радикальные компоненты связывают блоки (например компоненты вида E_{ij}, где индекс i отвечает одному блоку, j – другому или один из индексов никакому блоку не соответствует). Радикальные компоненты $\lambda_{ij}E_{ij}$ бывают следующих типов:

1. отвечающие входам в клетку (i – не индекс внутри клетки, j – индекс внутри клетки);
2. отвечающие выходам из клеток;
3. отвечающие переходам из одной клетки в другую;
4. другого типа.

Это можно сказать на языке пирсовского разложения. А именно: алгебру B можно расширить до $\widehat{B}$ так, что $\operatorname{Var}\widehat{B} = \operatorname{Var} B$. При этом система похожих клеток отвечает первичной компоненте расширенной алгебры $\widehat{B}$, а радикальные компоненты типа 1, 2, 3 отвечают смешанным элементам пирсовского разложения (ν_i – ортогональные идемпотенты, отвечающие единицам в первичных компонентах, $\nu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k}\nu_i$, nu_0 соответствует "внеклеточным" индексам; *смешанным* называется элемент вида $\nu_i x\nu_j$, где $i \neq j$). Более того, элементы типа 1 можно представить в виде $\nu_0 x\nu_i$, $i > 0$, а типа 2 – в виде $\nu_i x\nu_0$, $i > 0$. Элемент из B есть сумма своих компонент (которые лежат в расширенной алгебре $\widehat{B}$).

Через $\overline{x}_r$ обозначим сумму полупростых компонент элемента x_r, т.е. его полупростую часть, а через $\theta_r = x_r - \overline{x}_r$ – его радикальную часть. Подстановке $P_r(x_1,\dots,x_n) \to x_r$ соответствует такая же подстановка на полупростых частях. Можно определить действие этой подстановки на радикальных частях $\theta'_r = P_r(x_1,\dots,x_n) - P_r(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$. (Техника такого рода подстановок развита в работах [10], [27].)

Чтобы перейти от T-пространств к T-идеалам, нужно элементы A запереть в клетках (с двух сторон). Но чтобы не возникло новых арифметических явлений, количество запирающих радикальных компонент каждого типа (отвечающих входам и выходам) должно делиться на некоторую степень p. Тогда действие подстановок каждого сорта на радикальных компонентах можно элиминировать.

Мы добиваемся того, чтобы действие подстановок на операторах входа-выхода стало невозможным. Для этого мы строим алгебру $\widehat{A}$ так. Операторы e, f отвечают входам в клетки и выходам из них. Локальная нильпотентность A обеспечивает невозможность при подстановке окружить радикальную связку одним и тем же словом. Количество диагональных элементов q выбирается равным степени p. Это зануляет линеаризации и обеспечивает бесконечную базируемость. Перейдем к построению доказательств.

Операторы подстановки. Нам потребуется несколько стандартных технических замечаний, относящихся к операторам подстановки. Удобно работать со словами, а между тем могут подставляться не слова, а их линейные комбинации. Говоря неформально, после каждой подстановки мы сортируем члены по числу вхождения слов из линейной комбинации и суммы членов каждого сорта выделяются. Поскольку основное поле бесконечно, то переход к таким суммам есть T-пространственная операция, с которой мы и будем работать.

Перейдем к формальным конструкциям. Пусть (некоммутативный) многочлен P однороден степени m_r по переменной z_r. Рассмотрим подстановку $\sum z_{rs} \to z_r$ и компоненту, возникающую при этой подстановке, имеющую ровно k_{rs} вхождений переменной z_{rs}. Ясно, что $\sum k_{rs} = \deg P$. *Символическая степень* – это результат композиции взятия компоненты указанного вида с подстановкой $v_{rs} \to z_{rs}$, где v_{rs} – слова. Набор чисел (k_{rs}) называется *матрицей символической степени.* Можно дать другое, равносильное определение. Рассмотрим подстановку $\sum_s \lambda_{rs} v_{rs} \to z_r$. *Символическую степень* с матрицей (k_{rs}) можно определить как сумму членов при коэффициенте $\prod_{rs} \lambda_{rs}^{k_{rs}}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 3.2. а) *Если основное поле бесконечно, то операция взятия символической степени не выводит за пределы T-пространства.*

б) *Любое пространство, замкнутое относительно символических степеней, является T-пространством.*

Доказательство. Результат подстановки линейных комбинаций слов во все переменные есть сумма символических степеней с некоторыми коэффициентами. Это доказывает п. б). Для доказательства п. а) достаточно воспользоваться вторым определением символической степени и бесконечностью основного поля. А именно: рассуждаем как и при доказательстве того, что если выполняется тождество, то выполняются все его компоненты. (Заменим некоторое λ_{pq} на $\alpha\lambda_{pq}$. Коэффициент $\prod_{rs} \lambda_{rs}^{k_{rs}}$ умножится на $\alpha^{k_{pq}}$. Выберем такие α_j, чтобы определитель Вандермонда $\det(\alpha_j^i)$ не обращался в нуль. Тем самым мы выделяем члены при степенях λ_{pq}. Продолжаем процесс выделения по всем парам (p, q).)

Символическую степень можно представлять себе так. Все вхождения переменной z_r размечаются, т.е. разбиваются на группы по k_{rs} вхождений. Затем во вхождения, помеченные одинаково, подставляются одинаковые слова, и результат суммируется по всем способам разметки. Выбор разметки вместе с подстановкой заданных слов на размеченные позиции будем называть *расстановкой, связанной с матрицей* k_{rs}. Символическая степень есть сумма по всем расстановкам, связанным с матрицей k_{rs}. Отметим, что понятие “символической степени” использует понятие “слова” и потому зависит от выбора системы образующих алгебры.

Подстановки слов на заданные позиции. Итак, достаточно показать бесконечную базируемость пространства, порожденного R_n в алгебре $\widehat{A}$, относительно символических степеней. Исследуем расстановки слов из $\widehat{A}$. Из свойств алгебры $\widehat{A}$ вытекает

Лемма 3.3. а) *Любая ненулевая расстановка слов из $\widehat{A}$ внутрь коммутаторов $[[E,T],T]$ и $[T,[T,F]]$ имеет вхождение переменной e или переменной f.*

б) *Любая ненулевая расстановка слов из $\widehat{A}$ в полином R_n имеет вхождение ровно одной переменной e в $[[E,T],T]$ и ровно одной переменной f в $[T,[T,F]]$.*

в) *Слово, содержащее x_i или y_i, для расстановки имеет не более p вхождений.*

Доказательство. Пункты а) и в) очевидны в силу свойств A и $\widehat{A}$. Докажем п. б). В силу п. а) все $2q$ возможных вхождений e и f должны быть израсходованы. Остается заметить, что после f должно идти e, а перед e – f (это правило может нарушаться лишь тогда, когда f – последний, а e – первый элемент) и что коммутаторы с $[[E,T],T]$ и с $[T,[T,F]]$ чередуются.

Назовем расстановку *хорошей*, если слово, содержащее x_i или y_i, не имеет вхождений в позиции E, F или T, иначе она *плохая*. Назовем символическую степень *хорошей*, если все соответствующие расстановки хорошие, и *плохой* в противном случае.

Лемма 3.4. а) *Любая ненулевая хорошая расстановка слов из $\widehat{A}$ внутрь коммутаторов $[[E,T],T]$ или $[T,[T,F]]$ пропорциональна соответственно $(ef)^h et^k$ или $t^k f(ef)^h$, где $k+h \geqslant 2$, $h \geqslant 0$.*

б) *Пусть ρ – ненулевая хорошая расстановка слов из $\widehat{A}$ в полином R_n, ρ' получается из ρ, если в T, E, F подставить соответственно t, e, f, а остальные позиции оставить без изменений. Тогда ρ' пропорциональна ρ и коэффициент пропорциональности не зависит от неизмененных позиций.*

Доказательство. Пункт а) очевиден, п. б) следует из п. а), свойств алгебр A и $\widehat{A}$ и из п. б) предыдущей леммы.

Отметим, что результат умножения полинома R_n на любой элемент в алгебре $\widehat{A}$ равен нулю. Поэтому из конечной базируемости T-пространств $\prod_{i=1}^n x_i^2$ и $\prod_{i=1}^n Q(x_i,y_i)$ вытекает

Лемма 3.5. *Система полиномов R_n бесконечно базируема относительно хороших символических степеней.*

Мы завершили техническую работу и готовы к доказательству основной теоремы. В силу лемм 3.4 и 3.5 из основной леммы (см. ниже) следует, что путем подстановки из R_k, $k<n$, нельзя получить R_n. Поэтому нам осталось доказать основную лемму.

Основная лемма. *Пусть полный полином Q получается из полинома R_n применением плохой символической степени. Тогда полином Q нулевой.*

Доказательство. Определим оператор σ на расстановках. Занумеруем по кругу вхождения пар коммутаторов $[T,[T,F]][[E,T],T]$ в полиноме

$$R_n = [[E,T],T]\prod_{i=1}^n x_i^2([T,[T,F]][[E,T],T])^{q-1}[T,[T,F]]$$

(в случае $\operatorname{char}\mathbb{K}=2$),

$$R_n = [[E,T],T]\prod_{i=1}^n Q(x_i,y_i)([T,[T,F]][[E,T],T])^{q-1}[T,[T,F]]$$

(в случае $\operatorname{char}\mathbb{K}=p>2$). При этом концевой коммутатор $[T,[T,F]]$ имеет своей парой начальный $[[E,T],T]$. Каждой паре коммутаторов $[T,[T,F]][[E,T],T]$ отвечает 6 позиций (левое T, следующее T, F, E и опять два T). Каждой из этих позиций сопоставим такую же позицию в соседней справа паре коммутаторов; последней паре $[T,[T,F]][[E,T],T]$ отвечает пара из концевого $[T,[T,F]]$ и начального $[[E,T],T]$, а этой паре отвечает первая пара, стоящая после $\prod x_i^2$ (соответственно $\prod Q(x_i,y_i)$). Сопоставив каждой позиции в паре $[T,[T,F]][[E,T],T]$ позицию в соседней паре, мы естественным образом определим циклический сдвиг σ на расстановках. (Подставляются те же слова, но на сдвинутые позиции, а на позициях, отвечающих вхождению x_i, y_i, расстановка не меняется.)

Все члены, составляющие символическую степень, группируются в орбиты оператора σ. Поскольку имеется всего $q = p^s$, $s > 1$, пар коммутаторов, в силу п. в) леммы 3.3 длина каждой орбиты ненулевой плохой расстановки есть степень p (не меньше p^{s-1}) и эта длина делится на p. Поэтому достаточно показать, что расстановки одной орбиты, если они полные многочлены, изображают одинаковые элементы алгебры $\widehat{A}$. Тогда их сумма равна нулю.

Но это вытекает из леммы о центральности полинома $Q(x,y)$ (соответственно полинома x^2) и следствия 2.3 из леммы 2.2 о циклическом сдвиге.

Список литературы

1. *Dehn M.* Über die Grundlagen der projectiven geometric und algemeine zahlsisteme // Math. Ann. 1922. V. 85. P. 184–194.
2. *Rowen L. H.* Polynomial identities in ring theory. New York: Acad. Press, 1980.
3. *Specht W.* Gesetze in Ringen // Math. Z. 1950. V. 52. P. 557–589.
4. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.
5. *Бокуть Л. А., Львов И. В., Харченко В. К.* Некоммутативные кольца // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5–116.
6. *Бейдар К. И., Латышев В. Н., Марков В. Т., Михалёв А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Ассоциативные кольца // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 3–115.
7. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождество // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 117–240.
8. *Латышев В. Н.* Обобщение теоремы Гильберта о конечности базисов // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. №6. С. 1422–1424.
9. *Латышев В. Н.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1969. Т. 8. №6. С. 660–673.
10. *Гришин А. В.* О конечной базируемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №5. С. 899–927.
11. *Дренски В. С.* О тождествах в алгебрах Ли // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. №3. С. 265–290.
12. *Vaughan–Lee M. R.* Varietes of Lie algebras // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1970. V. 21. №83. P. 297–308.
13. *Размыслов Ю. П.* О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. №1. С. 83–113.
14. *Генов Г. К.* Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем // Алгебра и логика. 1981. Т. 20. №4. С. 365–388.
15. *Генов Г. К., Сидеров П. Н.* Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем. I, II // Serdica. 1982. №8. С. 313–323, 351–366.
16. *Красильников А. Н.* О тождествах алгебр Ли треугольных матриц над полем положительной характеристики // VI симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. 11–13 сентября 1990 г. Тезисы докладов. Львов. С. 76.
17. *Латышев В. Н.* О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №5. С. 1010–1037.
18. *Латышев В. Н.* Конечная базируемость некоторых колец // УМН. 1977. Т. 32. №4. С. 259–262.
19. *Латышев В. Н.* Нематричные многообразия ассоциативных алгебр // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1977.
20. *Генов Г. К.* Некоторые шпехтовы многообразия ассоциативных алгебр // Pliska Stud. Math. Bulgar. 1981. №2. С. 30–40.

21. *Попов А. П.* О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Pliska Stud. Math. Bulgar. 1981. № 2. С. 41–53.
22. *Кемер А. Р.* Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 597–641.
23. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 5. С. 1042–1059.
24. *Вайс А. Я.* О нормальных многообразиях алгебр Ли // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. 9–11 сентября 1987 г. Львов, 1987. С. 48.
25. *Вайс А. Я., Зельманов Е. И.* Теорема Кемера для конечно порожденных йордановых алгебр // Изв. вузов. Сер. матем. 1989. № 6. С. 63–72.
26. *Iltiakov A. V.* On finite basis of identities of Lie algebra representations // Nova J. Algebra Geom. 1992. V. 1. № 3.
27. *Гришин А. В.* О конечной базируемости абстрактных T-пространств // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 669–700.
28. *Кемер А. Р.* Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 4. С. 726–753.
29. *Белов А. Я.* Локальная шпехтовость ассоциативных алгебр // Международная конференция по алгебре, посвященная 90-летию со дня рождения А. Г. Куроша. 22–29 мая 1998 г. Тезисы докладов. Москва: Изд-во МГУ, 1998.
30. *Гришин А. В.* Бесконечно базируемое T-пространство над полем характеристики 2 // Международная конференция по алгебре и анализу, посвященная 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарева. 5–11 июня 1994 г. Тезисы докладов. Казань: Изд-во КГУ, 1982. С. 29.
31. *Щиголев В. В.* Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 143–160.
32. *Гришин А. В.* Пример бесконечно базируемого T-идеала над полем характеристики 2 // Международная конференция по алгебре, посвященная 90-летию со дня рождения А. Г. Куроша. 22–29 мая 1998 г. Тезисы докладов. Москва: Изд-во МГУ, 1998.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `kanel@mccme.ru`

Поступила в редакцию
29.10.1998 и 13.10.1999