

Отчет по гранту

А. Я. Белов

December 22, 2014

1.7 Аннотация (не более 1 стр.; описать содержание фактически проделанной работы и полученные результаты за 2014 год)

Главным результатом за этот год явилось решение известной открытой проблемы Шеврина о построении конечно-определенной ниль-полугруппы и написание полного доказательства. (Оно выложено в arxiv.org, 147 страниц, предполагается его подать в ближайшее время в Известия РАН). Данный результат предполагается как основа докторской диссертации И.А. Иванова-Погодаева.

Другой целью явилось исследование проблемы изоморфизма языков, заданных подстановочными (HDOL) системами. Рассмотрим подстановку $\psi : v_i \rightarrow x_i$ такую что в пределе получается бесконечное слово $\psi^\infty(x_i)$. К нему применяем морфизм. Требуется проверить алгоритмически что две такие системы изоморфны или доказать алгоритмическую неразрешимость. Предполагается, что недавно разработанная А.Я.Беловым и И.В.Митрофановым техника, основанная на обобщении теоремы Вершика-Лившица может помочь в решении этих проблем. Две работы в этом направлении выложены в arxiv.org предполагается их представить в ДАН. Кроме того, проведенные работы предполагается использовать как основу диссертации И.В.Митрофанова на соиск. уч. степ. канд. физ-мат. наук.

Проведено исследование внешних билиардов, в частности внешнего билиарда вокруг правильного восьмиугольника. Опубликована работа Ф.Руховичем. Такое исследование (выполненное другим методом) было опубликовано Ричардом Шварцем. Предполагается в дальнейшем изучить другие правильные многоугольники, в частности 12-и угольник с помощью техники, обобщающей теорему Вершика-Лившица.

Проведено исследование нормальных форм. Исследованы свойства периодических последовательностей, заданных запретами. Соответствующая статья представлена акад. А.Л.Семеновым в ДАН. Исследованы расстояния между множествами в многомерных пространствах. Соответствующая работа принята в печать в Вестник МГУ.

Получены оценки в теореме Ширшова о высоте. Соответствующий текст (61 страница) выложен в arxiv.org, принят к печати в Чебышевском сборнике и составляет основу диссертации М.И.Харитоновой на соискание уч. степ. кандидата физ-мат наук.

Решен одномерный случай гипотезы Концевича о соответствии голономных D -модулей и лагранжевых многообразий. Предполагается подать работу в журнал *Selecta Mathematica* по просьбе проф. Д.Каждана

3.4 Объявленные ранее цели проекта на 2014 год

Исследование комбинаторики слов и ее приложениям к символической динамике и алгебре (теории колец, нормальных форм и полугрупп). Построение конечно

определенных объектов с заданными свойствами, например построение конечно - определенной бесконечной ниль-полугруппы (проблема Шеврина) и связанное с этим исследование непериодических мозаик. Предполагалось также исследовать алгоритмические проблемы, связанные с перекладыванием отрезков и взаимоотношением языков, полученных из DOLL-систем.

3.5 Степень достижения поставленных в проекте целей

Основную цель – проблему (проблему Шеврина) удалось решить.

Удалось понять, как доказать алгоритмическую разрешимость проблемы изоморфизма языков, заданных HDOL-системами.

3.6 Полученные в 2014 году важнейшие результаты

1. Решена проблема Шеврина. Создан текст доказательства и выложен в Arxiv.org.

2. Объявлен (И.Рипсом на конференции Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips, Event date: Dec 14 – Dec 19 ,2014) совместный с А.Я.Беловым результат о построении тела, конечно-порожденного но бесконечно-мерного как алгебра.

3. Разработан метод, позволяющий решить проблему изоморфизма языков, заданных HDOL-системами.

3.7 Степень новизны полученных результатов

Решение проблемы Шеврина основана на абсолютно новых методах и абсолютно оригинально. То же относится

Результаты, относящиеся к HDOL-системам (решение известных открытых вопросов об алгоритмической разрешимости периодичности и равномерной рекуррентности подстановочных систем, поставленных, в частности, в известном обзоре *Последовательности, близкие к периодическим* Ан. А. Мучник, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов УМН, 64:5(389) (2009), 21–96) были получены несколько раньше, чем аналогичные результаты F.Duranda, и другим методом, основанном на обобщении теоремы Вершика-Лившица. Техника схем Розы, хотя и восходящая к теореме Вершика-Лившица, тем не менее является существенно новой.

Исследование по теореме о высоте находилось в рамках развития имеющихся идей. Задача про восьмиугольник оказалась ранее решенной Ричардом Шварцем близким методом (сделана методическая публикация).

3.8 Сопоставление полученных результатов с мировым уровнем

Результаты находятся на мировом уровне. Решение проблемы Шеврина докладывалось на ряде международных конференций, в том числе на конференции Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips, Dec 14 – Dec 19 ,2014, где получила высокую оценку, в том числе и от самого И. Рипса.

Проблемы алгоритмического определения периодичности HDOL систем а также равенства языков были поставлены французской школой в Lumini по комбинаторике слов и в ряде частных случаях были решены представителями этой школы и опубликованы в престижных международных журналах.

3.9 Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта (описать, уделив особое внимание степени оригинальности и новизны)

Для решения проблемы Шеврина использовался метод, основанный на исследовании аperiodических мозаик, заданных локальными правилами примыкания. Элементы полугруппы интерпретировались как геодезические пути, а rewriting rules интерпретируются как то, что два пути с общим началом и концом определяет один другой. Соответствие между языком примыкания (теорема типа Гудмана-Штраусса), языком глобальной

геометрии и языком соотношений. Построение равномерно-эллиптических пространств (для которых существует глобальная константа $\lambda > 0$ что любые две точки на расстоянии D соединены пучком геодезических, образующих диск ширины $\lambda \cdot D$ (подобно северному и южному полюсу сферы). Методы, позволившие решить проблему Шеврина, оказались абсолютно новыми.

Для построения бесконечномерного тела, конечно-порожденного как кольцо разработан новый метод, аналог теории малых сокращений в кольцах.

Алгоритмические вопросы, относящиеся к *HDOL*-системами исследуются с помощью техники, основанной на схемах Рози и обобщенной теоремы Вершика-Лифшица. Данный подход был разработан А. Я. Беловым и И. В. Митрофановым в 2010–2014 годах. Функции короста и число запретов исследуются с помощью классической техники схем Рози. Внешний бильярд исследовался с помощью индукции Рози.

3.10.1.1 Количество научных работ по Проекту, опубликованных в 2014 году (цифрами)

10

3.10.1.2 Из них в изданиях, включенных в перечень ВАК

3.10.1.3 Из них в изданиях, включенных в системы цитирования (Web of Science, Scopus, Web of Knowledge, Astrophysics, PubMed, Mathematics, Chemical Abstracts, Springer, Agris, GeoRef)

3.10.2 Количество научных работ, подготовленных в ходе выполнения Проекта и принятых к печати в 2014 году (цифрами)

6

Из них в изданиях, включенных в системы цитирования (Web of Science, Scopus, Web of Knowledge, Astrophysics, PubMed, Mathematics, Chemical Abstracts, Springer, Agris, GeoRef) - 5

(1 в Матзаметки, 1 в Чебышевский Сборник, 3 в Доклады РАН),

3.11 Участие в 2014 году в научных мероприятиях по тематике Проекта (указать названия мероприятий)

1) Научный Семинар университета Бар-Илана. Январь 2014

И.В.Митрофанов

2.) XII межд. конф., посв. 80-летию проф. В. Н. Латышева

Участвовали: Харитонов М.И., Иванов-Погодаев И.А., Лавров П.А., Белов А.Я.

2) Geometric and Combinatorial Group Theory In honor of Eliyahu Rips Event date: Dec 14 - Dec 19 ,2014 Jerusalem

Участвовали:

Белов А.Я., Иванов-Погодаев И.А.

3) AUTOMORPHISMS OF AFFINE VARIETIES(Kerala School of Mathematics, Monday 17 Feb, 2014 – Wednesday 26 Feb, 2014, Kozhicode, India), Tata Institute of Fundamental Research., 2014, 1, http://www.icts.res.in/program/all/talks_tab/346/

4) Визиты в Бремен (Германия) Jacobs University, Июль 2014

А.Я.Белов

5) Shanghai University (Китай), Октябрь 2014 года, А.Я.Белов

6) Зимние и Летние Школы "Алгоритмы и комбинаторика" (Февраль 2014 и август 2014).

А.Я.Белов, Ф.А.Ивлев, М.И.Харитонов

7) Летняя школа "Современная математика" Дубна, июль 2014 года. Прочтен курс лекций И.В.Митрофановым и А.Я.Беловым по фракталам Рози.

3.12 Участие в 2014 году в экспедициях по тематике Проекта, которые проводились при финансовой поддержке Фонда (указать номера Проектов) 3.14 Адреса (полностью) ресурсов в Интернете, подготовленных авторами по данному проекту, например, <http://www.somewhere.ru/mypub.html>

3.15 Библиографический список всех публикаций по Проекту, опубликованных в 2014 году, в порядке значимости: монографии, статьи в научных изданиях, тезисы докладов и материалы съездов, конференций и т.д.

8) Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике, 10 сентября 2014 г. 18:30, Проблема Якобиана и квантизация А.Я.Белов

9) Конечно-определенные ниль-полугруппы, иные объекты и непериодические мозаики А.Я.Белов, И.А.Иванов-Погодаев, Дискретная и вычислительная геометрия, 23 сентября 2014 г. 13:45, г. Москва, ИППИ РАН, Большой Каретный переулок, 19, ауд. 307

References

- [1] Ilya Ivanov-Pogodayev, Alexey Kanel-Belov, *Construction of infinite finitely presented nil-semigroup*, 2014, 147 pp., 103 figures, in Russian, arXiv: 1412.5221
- [2] Alexei Kanel-Belov, Ivan Mitrofanov, *Periodicity of Rauzy Scheme for substitution words*, 2014, 11 pp., in Russian, arXiv: 1412.5041
- [3] Ivan Mitrofanov, *On uniform recurrence of morphic sequences*, 2014, 8 pp., in Russian, arXiv:1412.5066
- [4] Petr Lavrov *Minimal number of restrictions defining a periodic word*. <http://arxiv.org/abs/1412.5201>
- [5] Mikhail Kharitonov. *Estimates in Shirshov height theorem*. 2014, 61 pp., in Russian, arXiv:1411.7435.
- [6] F.A.Ivlev. *The boundness of distance between two sets of fixed volume inside the multidimensional ball*. Arxiv. 1144020.
- [7] G.Yurgin, L.Radsivilovskii *On the bookshelf problem*. Arxiv. 3 pages.
- [8] A. Belov-Kanel, I. Gazhur, I. Ivanov-Pogodaev, A. Malistov. *Problem 2. Algorithms and labyrinths*. 26 summer conference International mathematical Tournament of towns, Russian Academy of Sciences, Moscow Department of Education, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Cener of development of talented Youth, Kaliningrad-Ushakovo, Russia, 02.08.2014–11.08.2014.
- [9] А. Я. Белов, Г. О. Шнайдер, “Об адаптированном курсе математики для кружковцев-химиков”, Математическое Образование, 2014, Апрель–Июнь 2014, N 2(70), 18–22, ISSN 1992–6138
- [10] Ф. Д. Рухович, *Внешние бильярд*. Математическое Образование, 2014, Апрель–Июнь 2014, N 1 (69), 42–57, ISSN 1992–6138

+ тезисы

- [11] *Alexei Belov-Kanel and Andrey Elishev. On Planar Algebraic Curves and Holonomic D-modules in Positive Characteristic.* Arxiv submit/1144416, 10 pages. (Подано в Selecta matematica)

3.16 Приоритетное направление развития науки, технологий и техники РФ, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта 3.17 Критическая технология РФ, которой, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта 3.18 Основное направление технологической модернизации экономики России, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта

Заявка на следующий год:

10.2.1 Основной код классификатора

01-102 Алгебра

10.2.2 Дополнительные коды классификатора 01-114 Дискретная математика и математическая кибернетика

10.3 Ключевые слова (не более 15)

Комбинаторика слов, символическая динамика, базис Гребнера—Ширшова, теорема о высоте, непериодические мозаики, DOLL-системы, тело, теорема Гудмана-Штрауса

10.4 Цели на 2015 год, связь с основной задачей Проекта

- исследование конечно-определенных бесконечных ниль-полугрупп и непериодических мозаик. Построение бесконечной конечно определенной ниль-полугруппы индекса 2. Обобщение теоремы Гудмана-Штрауса. Исследование конечно-определенных ниль-колец.

- исследование конечно-определенных тел и иных задач геометрической теории колец.

- исследование полиномиальных автоморфизмов в связи с гипотезами Концевича.

- Исследование языков, связанных с HDOL-системами.

- Исследование функций ко-роста.

10.5 Ожидаемые в конце 2015 г. научные результаты - доказательство алгоритмической разрешимости изоморфизма языков, связанных с HDOL-системами.

- Определение минимального короста для равномерно-рекуррентных слов (т.е. роста числа запретов, задающих равномерно-рекуррентное слово).

- полное исследование внешних билиардов для некоторого класса правильных многоугольников, в частности, 12-и угольника.

- исследование теоремы Гудмана-Штрауса, перенос результатов на кольца.

10.6 Объем финансирования на 2015 г. запрашиваемый в РФФИ (с предварительной расшифровкой затрат)

700 тысяч рублей

- командировки 2000 долл

- зарплата 400 тыс

10.7.1 Сроки проведения в 2015 г. экспедиции по тематике проекта, если это необходимо (месяц начала – месяц окончания)

10.7.2 Ориентировочная стоимость экспедиции (в руб.) 10.7.3 Регион проведения

экспедиции 10.7.4 Название района проведения экспедиции 10.8.1 Перечень оборудования и материалов, которые необходимо дополнительно приобрести, изготовить или отремонтировать для успешного выполнения Проекта; обосновать необходимость его приобретения

10.8.2 Перечень командировок (в том числе зарубежных), необходимых для выполнения проекта. Обосновать их необходимость и указать приблизительную стоимость

Командировки И.В.Митрофанова и Иванова-Погодаева во Францию (для беседы со специалистами из Люмини и Ф.Дюрандом, получившем параллельные результаты по HDOLL-системам), (Universite de Picardie Jules Verne 33, Rue Saint-Leu 80039 Amiens), и в Израиль (для совместной работы с Илей Рипсом по переносу результата о конечно-определенной ниль-полугруппы на группы и кольца) Hebrew University, Иерусалим)

Планируется 3-4 командировки, стоимость приблизительно 500 долл. каждая

10.9.1 Планируемая численность участников Проекта в 2015 году (цифрой)

10

10.9.2 Полный список членов коллектива на 2015 год (не более 10 человек, указать ФИО и должность)

Белов Алексей Яковлевич, руководитель проекта

Иванов-Погодаев Илья Анатольевич, исполнитель

Митрофанов Иван Викторович, исполнитель

Харитонов Михаил Игоревич, исполнитель

Лавров Петр Аркадьевич, Исполнитель

Рухович Филипп Дмитриевич, Исполнитель

Ивлев Федор Алексеевич, исполнитель.

Гусев Даниил исполнитель

Елишев Андрей - исполнитель

Чернятьев Александр Леонидович - Исполнитель

Keywords: Height theorem, combinatorics on words, n -divisibility, Dilworth theorem, Burnside type problems.

Ключевые слова: Теорема Ширшова о высоте, комбинаторика слов, n -разбиваемый, теоремы Дилуорса, проблемы Бернсайдского типа, конечно-порожденное тело, апериодические мозаики.