МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Ложников Михаил Андреевич

О некоторых разностных схемах для уравнений газовой динамики

01.01.07 — Вычислительная математика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
профессор Кобельков Георгий Михайлович

Москва, 2019

Оглавление

Введение **4**

1 Основные обозначения и определения **14**

1.1 Условные обозначения на ортогональных сетках 14

1.1.1 Одномерные сетки с постоянным шагом 14

1.1.2 Двумерные ортогональные сетки 15

1.2 Условные обозначения на треугольных сетках 17

1.3 Тетраэдральные сетки 20

1.4 Сеточная аппроксимация дивергенции и градиента на неструктурированных сетках 23

1.5 Дискретизация по времени 28

1.6 Вспомогательные утверждения 29

1.7 Выводы 31

2 Одномерные уравнения газовой динамики **32**

2.1 Постановка задачи 32

2.2 Априорные оценки 33

2.3 Разностная аппроксимация 35

2.3.1 Аппроксимация уравнения неразрывности 36

2.3.2 Аппроксимация уравнения движения 39

2.3.3 Существование решения 41

2.4 Выводы 43

3 Стабилизация одномерной газовой динамики **44**

3.1 Постановка задачи 44

3.2 Стабилизация линеаризованной задачи 46

3.3 Численный эксперимент 50

3.4 Выводы 57

4 Двумерные уравнения газовой динамики **59**

4.1 Постановка задачи 59

4.2 Аппроксимация на ортогональных сетках 60
4.2.1 Аппроксимация уравнения неразрывности 60
4.2.2 Аппроксимация уравнений движения 63
4.3 Аппроксимация на треугольной сетке 65
4.4 Аппроксимация уравнения неразрывности 65
4.5 Аппроксимация уравнений движения 69
4.6 Существование решения 73
4.7 Численная оценка сходимости 75
4.8 Решение одномерных тестовых задач 76
4.8.1 Распад разрыва и две волны разрежения 77
4.8.2 Дозвуковая, сверхзвуковая и трансзвуковая волны разрежения 79
4.9 Решение двумерных тестовых задач 80
4.10 Выводы 84

5 Адаптивная искусственная вязкость 86
5.1 Постановка задачи 86
5.2 Аппроксимация по времени 87
5.3 Сеточные уравнения 89
5.4 Введение диссипативных слагаемых 91
5.5 Численный эксперимент 95
5.6 Выводы 99

Список литературы 105

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена созданию неявных разностных схем для уравнений газовой динамики и исследованию свойств предложенных схем. Решение задач газовой динамики является одной из интереснейших проблем вычислительной математики, исследованию этих задач посвящено много научных трудов, среди которых важно отметить работы Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко [8], а также работы А. А. Самарского и Ю. П. Попова [9].

На практике необходимость решения задач газо- и гидро- динамики возникает во многих областях промышленности, например, таких как авиастроение, разработка струйных логических элементов, а также проектирование гидравлических систем, трубопроводов, используемых в широком классе прикладных задач от перекачки нефти до систем охлаждения в атомных реакторах.

Одной из интересных особенностей этих задач является наличие контактных разрывов и ударных волн, которые приводят к необходимости работать с разрывными решениями.

Впервые подход к расчёту таких задач был представлен в работе J. Von Neumann и R. D. Richtmyer [10]. Предложенный ими метод предполагает введение искусственной вязкости в уравнение неразрывности для размазывания резких скачков решения на несколько ячеек сетки. Таким образом, в областях разрывов решение представляется непрерывными функциями с большими градиентами на достаточно малых промежутках. Это направление получило широкое распространение. Одним из наиболее известных современных алгоритмов, основанных на нём, является метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ), впервые опубликованный в работе И. В. Попова и И. В. Фрязинова [11]. К числу достоинств подхода АИВ можно отнести использование

метода опорных операторов [12], обеспечивающего сопряжённость сеточных операторов дивергенции и градиента, а также использование приёмов построения полностью консервативных разностных схем [9]. Недостатками метода АИВ являются жёсткое ограничение на шаг по времени, а также отсутствие точных теоретических оценок, поскольку все выкладки делаются при "замороженных" коэффициентах.

Алгоритмы, основанные на введении искусственной вязкости, строятся при помощи разложения в ряд Тейлора, следовательно требуют некоторой гладкости решения. В работе С. К. Годунова [13] был впервые предложен метод, предназначенный для расчёта разрывных решений. Подход Годунова вводит нелинейный алгоритм нахождения соотношений на разрывах таким образом, что схема Годунова предоставляет точное решение для задачи Римана [14]. Кроме того, С. К. Годунов ввёл понятие монотонных схем и сформулировал так называемый запрет Годунова, утверждающий, что не существует монотонных схем второго порядка аппроксимации. Позднее этот термин получил развитие в работах В. В. Остапенко [15—17], в которых были предложены сильно монотонные разностные схемы. В последнее время получили распространение схемы типа TVD, впервые опубликованные в работе A. Harten [18], позволяющие обойти запрет Годунова, введя понятие схем, не увеличивающих общую вариацию.

Отметим, что подавляющее большинство разностных схем для уравнений газовой динамики являются явными с ограничением на шаг по времени, зависящим от скорости и вводимым посредством числа Куранта. В диссертационной работе автора предлагаются неявные разностные схемы без ограничения на шаг по времени, теоретическое обоснование предложенных схем проводится без использования принципа замороженных коэффициентов.

В настоящее время практически отсутствуют какие-либо теоретические результаты, касающиеся решения задачи как в дифференциальной, так и в разностной постановке. Например, одним из естественных требований при решении задач газовой динамики является выполнение свойства положительности плотности, которое следует из физики. Однако данный вопрос практически нигде не исследовался. Исключением является работа А. А. Злотника [19], в которой в переменных Эйлера была доказана отделимость плотно-

сти от нуля и стабилизация решения в дифференциальной постановке. Также стоит отметить статью А. А. Злотника и А. А. Амосова [20], в которой доказана отделимость плотности от нуля в переменных Лагранжа, существование, единственность и устойчивость решений разностной схемы. Кроме того, в работе А. В. Попова [21] для системы уравнений вязкого баротропного газа в переменных Эйлера при помощи некоторого преобразования исходной системы в предположении положительности плотности строится разностная аппроксимация, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. В недавней работе Г. М. Кобелькова и А. Г. Соколова [22] был предложен новый подход к построению разностных схем для одномерных уравнений динамики идеального баротропного газа в переменных Эйлера. Этот подход позволяет строить разностные схемы, обеспечивающие выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующие положительность сеточной функции плотности.

В диссертационной работе автор обобщает идеи, предложенные Г. М. Кобельковым и А. Г. Соколовым [22], на другие постановки задач, а также на многомерный случай, в том числе и для неструктурированных сеток.

Цели работы.

1. Построение аппроксимации, обеспечивающей положительность сеточной функции плотности, одномерных уравнений динамики баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением.
2. Построение метода стабилизации уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению.
3. Построение аппроксимации, обеспечивающей положительность сеточной функции плотности, двумерных уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках.
4. Обобщение метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа на неструктурированных тетраэдральных сетках.
5. Проведение численных экспериментов, исследующих поведение указанных выше схем на модельных задачах. Численная оценка сходимости

предложенных методов, сравнение указанных методов с другими алгоритмами на стандартных тестах [23].

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся: обоснование актуальности, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, а также следующие положения, которые подтверждаются результатами исследования, представленными далее в заключении диссертации.

1. Построена аппроксимация одномерных уравнений динамики баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением. Доказан сеточный аналог закона сохранения массы, положительность сеточной функции плотности, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
2. Предложен метод стабилизации решения уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению по начальным условиям. Получены оценки скорости сходимости для линеаризованной задачи.
3. Построена аппроксимация двумерных уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках. Доказан сеточный аналог закона сохранения массы, положительность сеточной функции плотности, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
4. Предложена модификация метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа на неструктурированных тетраэдральных сетках. Предложена комбинация поправок Лакса–Вендрофа и МакКормака, позволяющая провести частичную монотонизацию разностного решения точно так же, как и в оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости не смотря на увеличенный шаблон схемы.
5. Проведено сравнение предложенных методов с другими алгоритмами на модельных задачах, проведена численная оценка сходимости предложенных методов. Проведено сравнение результатов расчётов с результатами натурного эксперимента.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. Основными из них являются следующие.

1. Впервые предложена аппроксимация для расчёта одномерных уравнений динамики вязкого баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Доказаны сеточный аналог закона сохранения массы, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
2. Впервые предложен метод численной стабилизации нелинейных уравнений динамики вязкого баротропного газа по начальным данным к стационарному решению. Получены оценки скорости сходимости для полунеявной лианеризации исходной задачи.
3. Впервые предложена конечно-разностная аппроксимация уравнений динамики вязкого баротропного газа на треугольных сетках, обеспечивающая положительность сеточной функции плотности и гарантирующая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы. Доказаны энергетическое неравенство и существование разностного решения.
4. Предложена модификация метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для метода адаптивной искусственной вязкости на тетраэдральных сетках предложены модификации сеточных операторов дивергенции и градиента, позволяющие обойти условие отсутствия тупоугольных элементов, являющееся критическим в трёхмерном случае.

Теоретическая значимость работы. Теоретические исследования, проведённые для анализа предложенных разностных схем, гарантирующих положительность сеточной функции плотности, являются важным дополнением вычислительной математики, а именно теории конечно-разностных аппроксимаций уравнений газовой динамики.

Практическая значимость работы. Аппроксимации на треугольных и тетраэдральных сетках являются эффективным инструментарием, который на практике можно использовать для численного моделирования задач вычислительной математики в общем виде в областях произвольной формы посредством использования стандартных сеточных генераторов таких, как Gmsh или Ani2D.

Методология и методы исследования. Для построения разностных

схем использовались идеи аппроксимаций, предложенные в работах А. Г. Соколова [22], а также И. В. Попова и И. В. Фрязинова [24]. Для обоснования полученных схем использовалась методика, предложенная Г. М. Кобельковым [22]. Исследование стабилизации к стационарному решению производилось с помощью идей, предложенных в работах А. А. Корнева [25] и Е. В. Чижонкова [26]. Кроме того, использовались методы линейной алгебры, методы функционального анализа, а также методы построения и обоснования разностных схем. Для проведения численных расчётов был написан комплекс программ, предназначенный для использования на системах с раздельной памятью. Пересылка данных между узлами реализована при помощи технологии MPI. Численные эксперименты проводились на суперкомпьюторном комплексе "Ломоносов" с использованием до 1024 ядер.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Вычислительная математика — область науки, к которой относятся разработка и теория методов численного решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, а также реализация методов в практическом решении задач с применением современных ЭВМ. Области исследования:

1. создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники;
2. разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности;
4. реализация численных методов в решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и научно-технических проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. на конференции "Ломоносов 2018", Москва, Россия, МГУ имени М.В.Ломоносова (9–13 апреля 2018);

2. на конференции Ломоносовские чтения–2018, секция Математики, Москва (16-26 апреля 2018);
3. на XVII Всероссийской молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения–2018” (г. Казань, 23–28 ноября 2018);
4. на научном семинаре института вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН (г. Москва, 20 февраля 2018);
5. на научном семинаре кафедры математического моделирования АВТИ МЭИ (г. Москва, 3 октября 2018);
6. на научном семинаре института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (г. Москва, 1 ноября 2018);
7. на международной научной конференции “Современные проблемы математики и механики”, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего (г. Москва, 14 мая 2019);
8. на научном семинаре кафедры Вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2014–2019гг).

Результаты диссертации представлены в пяти главах. В **первой главе** приводятся основные обозначения и определения как на ортогональных, так и на неструктурированных сетках, вводятся разностные аппроксимации операторов дивергенции и градиента таким образом, чтобы в сеточном случае имела место формула Гаусса–Остроградского, а также выполнялось сохранение баланса массы на ячейке. Кроме того, приведены некоторые факты, используемые в дальнейшем, а также доказаны достаточные условия, необходимые для того, чтобы показать, что матрица системы линейных уравнений, получающаяся при построении аппроксимации уравнения неразрывности, является M-матрицей.

Во **второй главе** предлагается разностная схема для одномерных уравнений динамики вязкого баротропного газа в цилиндрической области с переменным во времени сечением. Одним из актуальных приложений данной задачи является является расчет течения при закрытии клапанов и заслонок в трубопроводах [27; 28]. Для одномерного моделирования таких течений обычно используется метод характеристик. Клапан моделируется как место, где параметры течения (давление и скорость) разрывны, т. е. имеют разные

величины с двух сторон от клапана. При этом система уравнений механики сплошной среды становится незамкнутой. Для того чтобы её замкнуть, добавляются два эмпирических соотношения, связывающие скорость и давление перед клапаном со скоростью и давлением за ним. Эти соотношения зависят от технических характеристик конкретного клапана. Ключевым отличием данной работы является представление клапана как части трубы с переменным во времени сечением. Для данной задачи предлагается разностная схема на основе идей, впервые предложенных в работах [22; 29]. Для данной схемы доказаны положительность сеточной функции плотности, сеточный аналог закона сохранения массы, энергетическое неравенство, а также существование разностного решения.

Третья глава посвящена стабилизации одномерных уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению по начальным данным с помощью метода нулевого приближения. Задача рассматривается в разностном случае на смещённых сетках, благодаря чему удаётся выписать решение линеаризованной схемы методом Фурье. В данной главе получен спектр линеаризованной системы, доказана теорема об общем виде её решения, а также получена оценка скорости сходимости к стационарному решению. В конце главы приведены результаты численных расчётов для начальных условий типа скачок плотности или скачок скорости, иллюстрирующих влияние таких параметров как вязкость, шаг по времени, число вырезаемых гармоник и размер носителя функций сдвига на скорость стабилизации нелинейной задачи.

В **четвёртой главе** предлагается обобщение идей, изложенных во второй главе, на двумерный случай. Сначала строится модификация предложенной схемы в случае ортогональных сеток таким образом, чтобы сеточные функции аппроксимировались в центрах ячеек. Затем посредством этой модификации строится обобщение данной разностной схемы на случай неструктурированных треугольных сеток с помощью аппроксимаций сеточных операторов дивергенции и градиента, предложенных в работах И. В. Попова и И. В. Фрязинова [24; 30]. Для полученных схем доказана положительность сеточной функции плотности, сеточный аналог закона сохранения массы, энергетическое неравенство, а также существование решения при любых шагах

по времени и пространству. В конце главы представлена численная оценка сходимости, а также проведена серия тестов на стандартных модельных задачах [23; 31—34] для сравнения предложенного подхода с другими методами. На модельных задачах произведено сравнение предложенной схемы с методом адаптивной искусственной вязкости.

Наконец, в **пятой главе** производится обобщение метода адаптивной искусственной вязкости И. В. Попова и И. В. Фрязинова на случай вязкого сжимаемого теплопроводного газа. В оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости используются поправки Лакса–Вендроффа [35] для получения аппроксимации второго порядка по времени, благодаря чему удаётся уменьшить количество осцилляций сеточного решения. Однако, в данном случае эти поправки неудобно использовать поскольку они слишком громоздкие из-за наличия вторых производных по пространству. Получить второй порядок аппроксимации по времени можно с помощью метода МакКормака [36], но он приводит к семнадцатиточечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В данной главе предлагается модифицировать метод адаптивной искусственной вязкости, а именно скомбинировать лучшие качества методов Лакса–Вендроффа и МакКормака, то есть ввести поправки для невязких слагаемых с помощью метода Лакса–Вендроффа, а поправки, получающиеся в результате наличия вязких слагаемых с помощью метода МакКормака. В конце главы проведён численный эксперимент по определению давления переключения струйного транзистора, результаты которого количественно согласуются с результатами натурного эксперимента.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Георгию Михайловичу Кобелькову за постановку задачи, помощь и поддержку в работе над диссертацией, доктору физико-математических наук профессору Андрею Алексеевичу Корневу за постановку задачи о стабилизации, а также за многочисленные консультации, помощь и поддержку, доктору физико-математических наук профессору Александру Васильевичу Звягину за постановку задачи о моделировании поведения клапана, сотруднику института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН Игорю Викторовичу Попову за консультации, касающиеся аппроксимаций на неструктурированных сетках, а также со-

трудникам кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, в особенности А. В. Попову и Е. В. Чижонкову за внимание и доброжелательное отношение.

Глава 1

Основные обозначения и определения

В данной главе мы введём обозначения на сетках, а также перечислим основные определения. Кроме того докажем некоторые вспомогательные утверждения, использующиеся в дальнейшем.

1.1 Условные обозначения на ортогональных сетках

В этом разделе будут рассмотрены условные обозначения, использующиеся в главах 2–4 для построения аппроксимаций на ортогональных сетках.

1.1.1 Одномерные сетки с постоянным шагом

Пусть задана одномерная сетка $\Omega_h^1 = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_M\}$ с постоянным шагом $h = x_{i+1} - x_i,\ i = \overline{0, M-1}$. Для произвольной функции ζ, заданной на сетке Ω_h^1, определим её значение в точке x_i через ζ_i, кроме того, продолжим функцию ζ нулём за границу Ω_h^1 на всю сеточную прямую. Для сокращения обозначений введём безындексную форму записи, а именно $\zeta = \zeta_i,\ \zeta_{(\pm1)} = \zeta_{i\pm1}$. Как обычно, положим $\zeta_x = \frac{\zeta_{i+1}-\zeta_i}{h},\ \zeta_{\bar{x}} = \frac{\zeta_i-\zeta_{i-1}}{h}$, $\zeta_{\mathring{x}} = \frac{\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1}}{2h}$, $\overline{\zeta} = \frac{\zeta_i+\zeta_{i-1}}{2}$. Пусть $\mathcal{R}(\Omega_h^1)$ — пространство функций, определённых на сетке Ω_h^1. Введём скалярное произведение в $\mathcal{R}(\Omega_h^1)$ следующим образом:

$$(f,\, g)_{\mathcal{R}(\Omega_h^1)} = \sum_{i=0}^{M} h f_i g_i,\ \text{где } f,\, g \in \mathcal{R}(\Omega_h^1).$$

Сеточную норму $\|\cdot\|_{\mathcal{R}(\Omega_h^1)}$ определим естественным образом

$$\|f\|_{\mathcal{R}(\Omega_h^1)} = \sqrt{(f,\, f)_{\mathcal{R}(\Omega_h^1)}},\ \text{где } f \in \mathcal{R}(\Omega_h^1).$$

1.1.2 Двумерные ортогональные сетки

Теперь опишем условные обозначения на двумерной равномерной по каждому координатному направлению ортогональной сетке $\Omega_h^2 = \{x_{i,j} \mid i = \overline{0, M_1},\ j = \overline{0, M_2}\}$ с шагом $h_\alpha,\ \alpha = \overline{1,2}$. Значение произвольной сеточной функции ζ в узле $x_{\overline{m}}$ с номером $\overline{m} = (i,j)$ обозначим через $\zeta_{\overline{m}}$ или $\zeta_{i,j}$. Продолжим сеточные функции нулём на всю оставшуюся часть сеточной плоскости. Для сокращения обозначений введём безындексную форму записи, а именно $\zeta_{\overline{m}} = \zeta$, $\zeta_{i\pm1,j} = \zeta^{\pm1}$, $\zeta_{i,j\pm1} = \zeta^{\pm2}$. Используем стандартные обозначения

$$\zeta_{x_k} = \frac{\zeta^{+k} - \zeta}{h_k}, \quad \zeta_{\overline{x}_k} = \frac{\zeta - \zeta^{-k}}{h_k}.$$

Кроме того введём аппроксимацию

$$\langle\zeta\rangle_{\mathring{x}_k} = \begin{cases} \dfrac{\langle\zeta\rangle^{+k} - \langle\zeta\rangle^{-k}}{h_k}, \text{ если узлы } x^{\pm k} \text{ лежат в области } \Omega_h^2; \\ \dfrac{\langle\zeta\rangle^{+k} - \langle\zeta\rangle^{-k}}{h_k/2}, \text{ иначе,} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

где усреднение $\langle\zeta\rangle^{\pm k}$ определяется как

$$\langle\zeta\rangle^{\pm k} = \begin{cases} \dfrac{\zeta + \zeta^{\pm k}}{2}, \text{ если узел } x^{\pm k} \text{ лежит в области } \Omega_h^2; \\ \zeta, \text{ иначе} \end{cases}$$

для произвольной сеточной функции ζ.

Замечание 1.1.1. *Заметим, что внутри области Ω_h^2 аппроксимация $\langle\zeta\rangle_{\mathring{x}}$ является обычной центральной разностью, а на границе — направленной разностью.*

Замечание 1.1.2. *Если ввести понятие потоковых узлов аналогично методу адаптивной искусственной вязкости И. В. Попова и И. В. Фрязинова, то выражения $\langle\zeta\rangle^{\pm k}$ и $\langle\zeta\rangle_{\mathring{x}_k}$ будут аппроксимировать величину ζ и её пространственную производную по k-ой координате соответственно в потоковом узле, лежащем между точками x и $x^{\pm k}$.*

Пусть $\mathcal{R}(\Omega_h^2)$ — пространство функций, определённых на Ω_h^2, а $\mathcal{V}(\Omega_h^2)$ — пространство вектор-функций, определённых на Ω_h^2. Введём скалярные произведения в $\mathcal{R}(\Omega_h^2)$ и $\mathcal{V}(\Omega_h^2)$ соответственно

$$(f,g)_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)} = \sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} h_{1i}h_{2j}f_{i,j}g_{i,j},$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{V}(\Omega_h^2)} = \sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} h_{1i}h_{2j}(u_{1i,j}v_{1i,j} + u_{2i,j}v_{2i,j}),$$

где

$$h_{\alpha i} = \begin{cases} h_\alpha,\ i = \overline{1, M_\alpha - 1} \text{ (то есть узел } x^{\pm\alpha} \text{ лежит в } \Omega_h^2); \\ h_\alpha/2,\ i = 0, i = M_\alpha \text{ (иначе)}, \end{cases} \qquad \alpha = \overline{1,2}. \quad (1.1.2)$$

Сеточные нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{R}((\Omega_h^2)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}((\Omega_h^2)}$ определим естественным образом

$$\|f\|_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)} = \sqrt{(f,\, f)_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)}}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}(\Omega_h^2)} = \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})_{\mathcal{V}(\Omega_h^2)}}.$$

Утверждение 1.1.1. *Для произвольных сеточный функций $\rho,\ u \in \mathcal{R}(\Omega_h^2)$, где $u = 0$ на границе области Ω_h^2, имеет место следующее соотношение*

$$\left(\langle u\rangle_{\mathring{x}_k},\, \rho\right)_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)} = -\left(\langle \rho\rangle_{\mathring{x}_k},\, u\right)_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)}, \quad k = \overline{1,2}.$$

Доказательство. Докажем утверждение для случая $k = 1$. Случай $k = 2$ разбирается аналогично. По определению

$$\left(\langle u\rangle_{\mathring{x}_k},\, \rho\right)_{\mathcal{R}(\Omega_h^2)} = \sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} h_{2j}\left(\langle u\rangle_{i,j}^{+k} - \langle u\rangle_{i,j}^{-k}\right)\rho_{i,j}.$$

Используя тот факт, что $u_{0,j} = 0$ и $u_{M_1,j} = 0$, преобразуем выражение под знаком суммы по j в правой части последнего равенства. С точностью до h_{2j} имеем

$$\left(\frac{u_{0,j}+u_{1,j}}{2} - u_{0,j}\right)\rho_{0,j} + \sum_{i=1}^{M_1-1}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2}\rho_{i,j} + \\ + \left(\frac{u_{M_1-1,j}+u_{M_1,j}}{2} - u_{M_1,j}\right)\rho_{M_1,j} = -\left(\frac{\rho_{0,j}+\rho_{1,j}}{2} - \rho_{0,j}\right)u_{0,j} - \\ - \sum_{i=1}^{M_1-1}\frac{\rho_{i+1,j}-\rho_{i-1,j}}{2}u_{i,j} - \left(\frac{\rho_{M_1-1,j}+\rho_{M_1,j}}{2} - \rho_{M_1,j}\right)u_{M_1,j}. \quad (1.1.3)$$

Из выражения (1.1.3) следует требуемое соотношение. Таким образом, утверждение доказано.

1.2 Условные обозначения на треугольных сетках

Пусть построена кусочно-линейная аппроксимация Γ_h границы Γ некоторой двумерной области Ω, а область $\Omega_h^{\Delta,2}$, ограниченная границей Γ_h, разбита на согласованные треугольники ω_i, которые в дальнейшем будем называть ячейками. Ребра треугольника ω_i и смежные треугольники обозначим через S_{i_k} и ω_{i_k} соответственно, причём ребро S_{i_k} является смежной стороной треугольников ω_i и ω_{i_k}, где $k = \overline{1,3}$. Положим $\mathbf{n}_{i_k} = (n^1_{i_k}, n^2_{i_k})$ —внешняя нормаль к ребру S_{i_k} ячейки ω_i. Если нумерация ведётся относительно ребра S_j, то соседние ячейки обозначим через ω_{j_1} и ω_{j_2}. В том случае если ребро S_j лежит на границе области, определена только ячейка ω_{j_1}. Тогда $\mathbf{n}_{j_k}$ —внешняя нормаль к ребру S_j относительно ячейки ω_{j_k}, где $k = \overline{1,2}$.

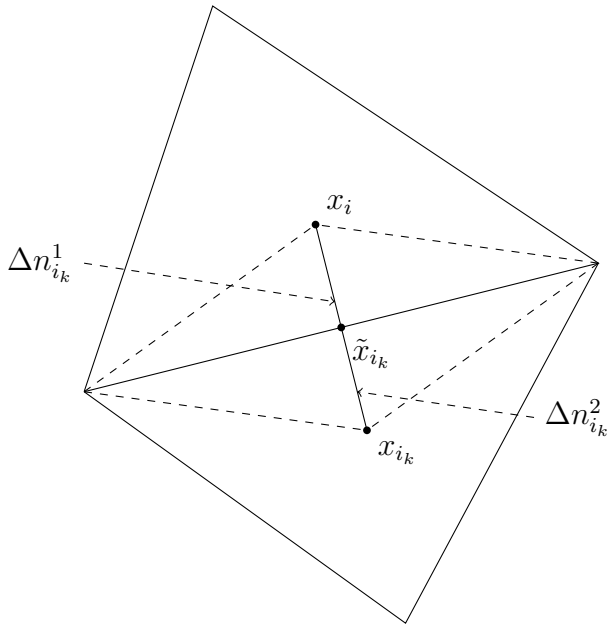

Рис. 1.1: Остроугольные ячейки ω_i и ω_{i_k}

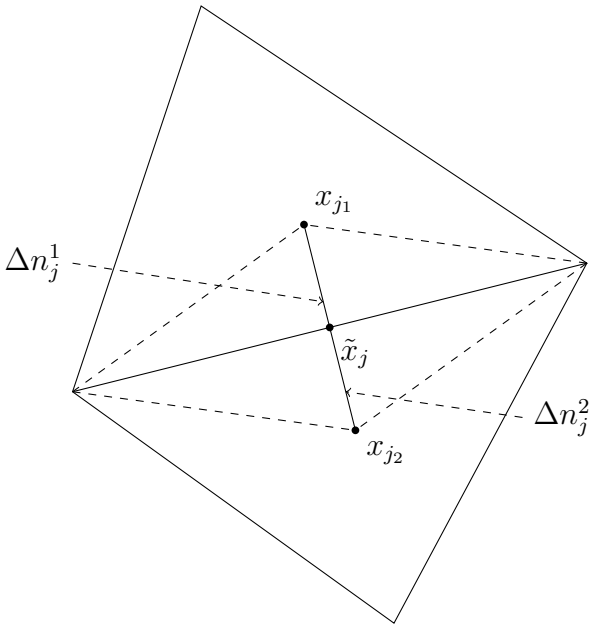

Рис. 1.2: Остроугольные ячейки ω_{j_1} и ω_{j_2}

Если ячейка ω_i является остроугольным треугольником, то её центром x_i назовём центр описанной окружности треугольника ω_i. Рассмотрим две соседние остроугольные ячейки ω_i и ω_{i_k} (рис. 1.1), где $k = \overline{1,3}$.

Пусть Δn_{i_k} —отрезок, соединяющий точки x_i и x_{i_k}, он перпендикулярен ребру S_{i_k} и пересекается с ним в точке $\tilde{x}_{i_k}$, причём эта точка делит ребро S_{i_k} пополам. Отрезки $x_i\tilde{x}_{i_k}$ и $\tilde{x}_{i_k}x_{i_k}$ обозначим с помощью $\Delta n^1_{i_k}$ и $\Delta n^2_{i_k}$ соответственно. Таким образом, $\Delta n_{i_k} = \Delta n^1_{i_k} + \Delta n^2_{i_k}$. В случае если нумерация ведётся относительно ребра S_j (рис. 1.2), то центрами ячеек ω_{j_1} и ω_{j_2} являются

точки x_{j_1} и x_{j_2} соответственно, $\tilde{x}_j$ —точка пересечения отрезка $x_{j_1}x_{j_2}$ с ребром S_j, а величины Δn_j, Δn_j^1 и Δn_j^2 обозначают отрезки $x_{j_1}x_{j_2}$, $x_{j_1}\tilde{x}_j$ и $\tilde{x}_j x_{j_2}$ соответственно.

Теперь перейдём к обозначениям для тупоугольных ячеек. Если ячейка ω_i является тупоугольным треугольником, то центром x_i этой ячейки назовём её центр масс. Рассмотрим две соседних ячейки ω_i и ω_{i_k} (рис. 1.3), где $k = \overline{1,3}$, причём хотя бы одна из этих ячеек является тупоугольной. Пусть Δn_{i_k} —проекция отрезка, соединяющего точки x_i и x_{i_k} на нормаль $\mathbf{n}_{i_k}$.

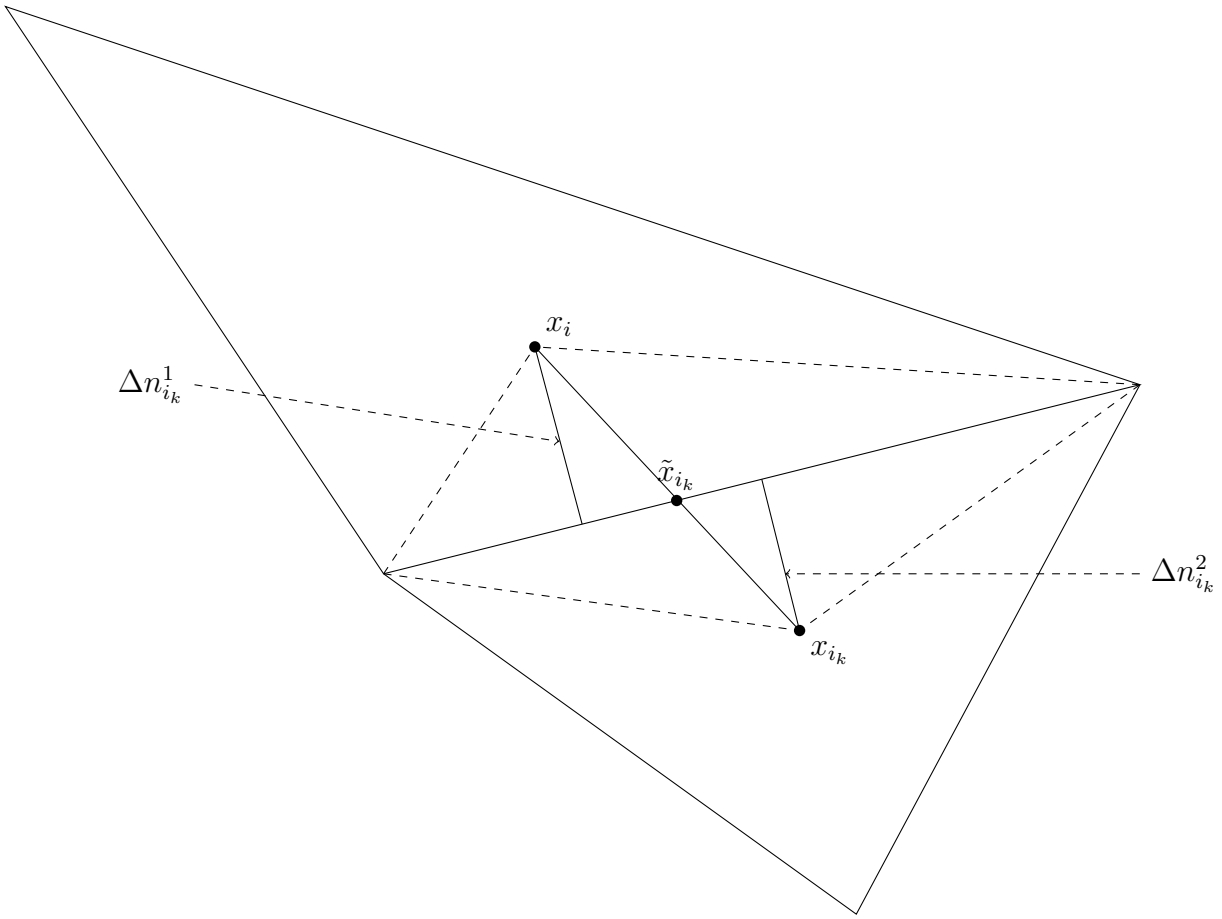

Рис. 1.3: Ячейки ω_i и ω_{i_k}

Положим $\tilde{x}_{i_k}$ —точка пересечения отрезка $x_i x_{i_k}$ с ребром S_{i_k} (или с его продолжением). Опустим из точек x_i и x_{i_k} перпендикуляры на ребро S_{i_k} (или на его продолжение), которые обозначим с помощью $\Delta n_{i_k}^1$ и $\Delta n_{i_k}^2$ соответственно. Таким образом, $\Delta n_{i_k} = \Delta n_{i_k}^1 + \Delta n_{i_k}^2$.

Аналогично, если нумерация ведётся относительно ребра S_j (рис. 1.4), то центрами ячеек ω_{j_1} и ω_{j_2} являются точки x_{j_1} и x_{j_2} соответственно, $\tilde{x}_j$ —точка пересечения отрезка $x_{j_1}x_{j_2}$ с ребром S_j или его продолжением, а величи-

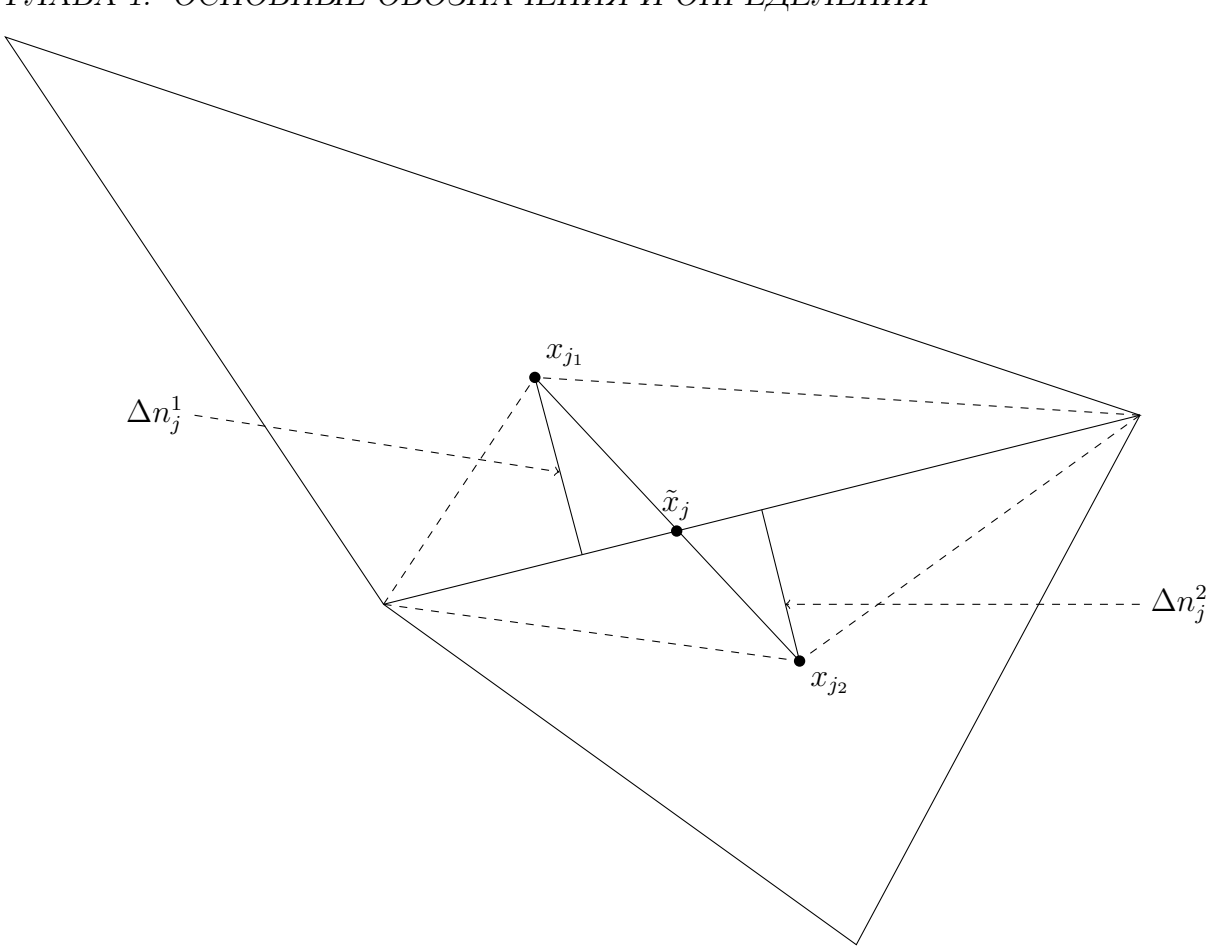

Рис. 1.4: Ячейки ω_{j_1} и ω_{j_2}

ны Δn_j, Δn_j^1 и Δn_j^2 обозначают проекции отрезков $x_{j_1}x_{j_2}$, $x_{j_1}\tilde{x}_j$ и $\tilde{x}_j x_{j_2}$ соответственно на нормаль к ребру S_j.

Если ребро S_{i_k} ячейки ω_i принадлежит границе Γ_h, то точку $\tilde{x}_{i_k}$ расположим в центре ребра S_{i_k}, величину $\Delta n_{i_k}^1$ определим точно так же, как и в двух предыдущих случаях, а величину Δn_{i_k} положим равной $\Delta n_{i_k}^1$. Аналогичным образом определяются обозначения в нумерации относительно граничного ребра S_j.

Четырехугольник, ограниченный отрезками, соединяющими точки x_i и x_{i_k} с концами ребра S_{i_k} назовём потоковой ячейкой и обозначим через $\tilde{\omega}_{i_k}$. Центр потоковой ячейки ω_{i_k} определим в точке $\tilde{x}_{i_k}$. Отметим, что в случае отсутствия точки x_{i_k} соответствующая потоковая ячейка имеет форму треугольника. Пусть $\tilde{\Omega}_h^{\Delta,2}$ — множество всех потоковых ячеек. Если нумерация ведётся относительно ребра S_j, то ему соответствует потоковая ячейка $\tilde{\omega}_j$.

В дальнейшем будем обозначать площади ячеек точно так же, как ячейки, а длины отрезков так же, как и сами отрезки. Сеточные функции ρ и вектор-

функции $\mathbf{u}$ определим на множестве центров ячеек $\{x_i|\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,2}\}$ таким образом, что $\rho(x_i) = \rho_i$ и $\mathbf{u}(x_i) = \mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i})$. Значение произвольной сеточной функции ζ в потоковом узле $\tilde{x}_j$ обозначим через $\tilde{\zeta}_j$. Кроме того для удобства введём безындексную форму записи, а именно, при рассмотрении аппроксимации в одной отдельно взятой ячейке ω_i будем опускать индекс i для всех обозначений, введённых в этом разделе, то есть положим $\omega = \omega_i$, $\rho = \rho_i$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \mathbf{u}_i$, $S_k = S_{i_k}$, $\Delta n_k = \Delta n_{i_k}$ и т. д. Аналогично, в нумерации относительно ребра S_j будем опускать индекс j, то есть $\omega_q = \omega_{j_q}$, $\Delta n^q = \Delta n_j^q$, $\rho_q = \rho_{j_q}$, где $q = \overline{1,2}$ и т. д.

Пусть $\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})$ — пространство функций, определённых в центрах ячеек, а $\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})$ — пространство вектор-функций, определённых в центрах ячеек. Пространства функций и вектор-функций, определённых в потоковых узлах обозначим соответственно через $\mathcal{R}(\tilde{\Omega}_h^{\Delta,2})$ и $\mathcal{V}(\tilde{\Omega}_h^{\Delta,2})$. Введём скалярные произведения в $\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})$ и в $\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})$ соответственно:

$$(f,g)_{\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})} = \sum_{\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,2}} \omega_i f_i g_i, \quad (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})} = \sum_{\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,2}} \omega_i (u_{1i}v_{1i} + u_{2i}v_{2i}),$$

где $f, g \in \mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})$. Сеточные нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{R}\left(\Omega_h^{\Delta,2}\right)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\left(\Omega_h^{\Delta,2}\right)}$ определим естественным образом

$$\|f\|_{\mathcal{R}\left(\Omega_h^{\Delta,2}\right)} = \sqrt{(f,f)_{\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})}}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}\left(\Omega_h^{\Delta,2}\right)} = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})}}.$$

1.3 Тетраэдральные сетки

Пусть построена триангуляция Γ_h границы Γ некоторой трёхмерной области Ω, а область $\Omega_h^{\Delta,3}$, ограниченная поверхностью Γ_h, разбита на согласованные тетраэдры, которые в дальнейшем будем называть ячейками. Аналогично обозначениям на треугольных сетках, центр x_i ячейки ω_i определим в центре сферы, описанной вокруг соответствующего тетраэдра при условии того, что он лежит внутри этого тетраэдра. В противном случае центром ячейки является её центр тяжести.

Общую грань ячеек ω_i и ω_{i_k}, $k = \overline{1,4}$ обозначим через S_{i_k}, а её центр масс через $\tilde{x}_{i_k}^{\text{цм}}$. Определим потоковый узел $\tilde{x}_{i_k}$ грани S_{i_k} в точке пересечения грани (или её продолжения) с отрезком, соединяющим центры ячеек ω_i и ω_{i_k}. Если

грань тетраэдра находится на границе области Γ_h, то в случае если эта грань является остроугольным треугольником, назовём её потоковым узлом центр описанной окружности грани. В противном случае потоковый узел этой грани расположим в её центре тяжести. Введённые ранее узлы $\tilde{x}_{i_k}^{\text{цм}}$ будем также относить к потоковым.

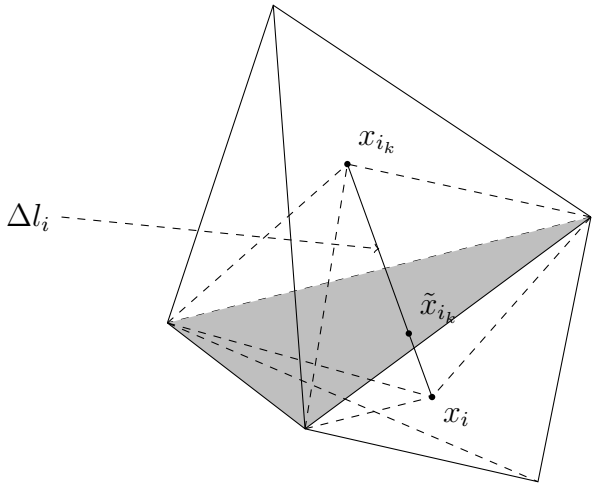

Рис. 1.5: Ячейки ω_i и ω_{i_k}

Фигуру, ограниченную плоскостями, проведёнными через рёбра грани S_{i_k} и точки x_i и x_{i_k} назовём потоковой ячейкой и обозначим через $\tilde{\omega}_{i_k}$, а её центром назовём точку $\tilde{x}_{i_k}$. Положим $\tilde{\Omega}_h^{\Delta,3}$ —множество всех потоковых ячеек. Грани потоковой ячейки $\tilde{\omega}_{i_k}$ обозначим буквами $\tilde{S}_{i_k,q}$, $q = \overline{1,4}$.

Величины $\Delta l_{i_k}^1$ и $\Delta l_{i_k}^2$ определим как части отрезка Δl_{i_k}, находящиеся со стороны точек x_i и x_{i_k} от грани S_{i_k} соответственно. Пусть $\mathbf{n}_{i_k}$ — внешняя нормаль к грани S_{i_k} ячейки ω_i. Обозначим с помощью величин Δn_{i_k}, $\Delta n_{i_k}^1$ и $\Delta n_{i_k}^2$ длины проекций отрезков Δl_{i_k}, $\Delta l_{i_k}^1$ и $\Delta l_{i_k}^2$ соответственно на нормаль $\mathbf{n}_{i_k}$. Определим $\mathbf{n}_{i_k,q}$ как внешнюю нормаль к грани $\tilde{S}_{i_k,q}$, $q = \overline{1,6}$ ячейки $\tilde{\omega}_{i_k}$. Для удобства будем обозначать объёмы ячеек, площади граней и длины отрезков точно так же, как и ячейки, грани и отрезки соответственно.

Аналогично обозначениям на треугольных сетках, если нумерация ведётся относительно грани S_j, то соседние ячейки обозначим через ω_{j_1} и ω_{j_2}, соответствующую потоковую ячейку через $\tilde{\omega}_j$, а центр масс грани S_j через $\tilde{x}_j^{\text{цм}}$. В том случае если грань S_j лежит на границе области, определена только ячейка ω_{j_1}. Тогда $\mathbf{n}_{j_k}$ —внешняя нормаль к грани S_j относительно ячейки ω_{j_k}, где $k = \overline{1,2}$. Центрами ячеек ω_{j_1} и ω_{j_2} являются точки x_{j_1} и x_{j_2} соответствен-

но, $\tilde{x}_j$ —точка пересечения отрезка $x_{j_1}x_{j_2}$ с гранью S_j или его продолжением, а величины Δn_j, Δn_j^1 и Δn_j^2 обозначают проекции отрезков $x_{j_1}x_{j_2}$, $x_{j_1}\tilde{x}_j$ и $\tilde{x}_j x_{j_2}$ соответственно на нормаль к грани S_j.

Сеточные функции ρ и вектор-функции $\mathbf{u}$ определим на множестве центров ячеек $\left\{x_i|\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,3}\right\}$ таким образом, что $\rho(x_i) = \rho_i$ и $\mathbf{u}(x_i) = \mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i})$. Значение произвольной сеточной функции ζ в потоковом узле $\tilde{x}_j$ обозначим через $\tilde{\zeta}_j$. Кроме того для удобства введём безындексную форму записи, а именно, при рассмотрении аппроксимации в одной отдельно взятой ячейке ω_i будем опускать индекс i для всех обозначений, введённых в этом разделе, то есть положим $\omega = \omega_i$, $\rho = \rho_i$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \mathbf{u}_i$, $S_k = S_{i_k}$, $\Delta n_k = \Delta n_{i_k}$ и т. д. Аналогично, в нумерации относительно грани S_j будем опускать индекс j, то есть $\omega_q = \omega_{j_q}$, $\Delta n^q = \Delta n_j^q$, $\rho_q = \rho_{j_q}$, где $q = \overline{1,2}$ и т. д.

Аналогично двумерному случаю, введём пространство сеточных функций $\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,3})$ и пространство вектор-функций $\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,3})$, определённых в центрах ячеек. Пространства сеточных функций и сеточных вектор-функций, определённых в потоковых узлах, обозначим соответственно через $\mathcal{R}(\tilde{\Omega}_h^{\Delta,3})$ и $\mathcal{V}(\tilde{\Omega}_h^{\Delta,3})$. Кроме того, введём скалярные произведения:

$$(f,g)_{\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,3})} = \sum_{\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,3}} \omega_i f_i g_i, \quad (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,3})} = \sum_{\omega_i \in \Omega_h^{\Delta,3}} \omega_i (u_{1i}v_{1i} + u_{2i}v_{2i} + u_{3i}v_{3i}),$$

где $f, g \in \mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,3})$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,3})$. Сеточные нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{R}\left(\Omega_h^{\Delta,3}\right)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{V}\left(\Omega_h^{\Delta,3}\right)}$ определим естественным образом

$$\|f\|_{\mathcal{R}\left(\Omega_h^{\Delta,3}\right)} = \sqrt{(f,f)_{\mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,3})}}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}\left(\Omega_h^{\Delta,3}\right)} = \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,3})}}.$$

Теперь введём обозначения, которые потребуются для построения более точных аппроксимаций. Пусть

$$L_{P,Q,R}(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} x_1 - P_1 & x_2 - P_2 & x_3 - P_3 \\ Q_1 - P_1 & Q_2 - P_2 & Q_3 - P_3 \\ R_1 - P_1 & R_2 - P_2 & R_3 - P_3 \end{vmatrix}, \tag{1.3.1}$$

где $P = (P_1, P_2, P_3)$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $R = (R_1, R_2, R_3)$ — некоторые три точки. Определим базисные функции задачи линейной интерполяции для про-

извольных четырёх точек P_1, P_2, P_3, P_4, не лежащих в одной плоскости

$$\begin{aligned}
\psi_1(x_1,x_2,x_3) &= L_{P_2,P_3,P_4}(x_1,x_2,x_3)/L_{P_2,P_3,P_4}(P_1),\\
\psi_2(x_1,x_2,x_3) &= L_{P_1,P_3,P_4}(x_1,x_2,x_3)/L_{P_1,P_3,P_4}(P_2),\\
\psi_3(x_1,x_2,x_3) &= L_{P_1,P_2,P_4}(x_1,x_2,x_3)/L_{P_1,P_2,P_4}(P_3),\\
\psi_4(x_1,x_2,x_3) &= L_{P_1,P_2,P_3}(x_1,x_2,x_3)/L_{P_1,P_2,P_3}(P_4),
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

то есть $\psi_i(P_j) = \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,4}$. Для произвольной функции ζ построим её линейное приближение ζ_i^L в каждой ячейке ω_i следующим образом

$$\zeta_i^L = \sum_{k=1}^{4} \zeta(P_{i_k})\psi_k(P_{i_k}), \tag{1.3.3}$$

где через P_{i_k} обозначена точка x_{i_k} если S_{i_k} не является частью границы или точка x_i в противном случае, и функции (1.3.2) построены по точкам P_{i_k}, $k = \overline{1,4}$. Здесь предполагается, что никакие две грани тетраэдра не являются частью границы одновременно.

Кроме того нам потребуются квадратичные аппроксимации ζ_i^Q в основных ячейках ω_i или ζ_j^Q в потоковых ячейках $\tilde{\omega}_j$, которые мы будем искать в следующем виде

$$\zeta^Q(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\substack{p,q=1\\ p\leqslant q}}^{3} a_{pq}x_px_q + \sum_{p=1}^{3} b_px_p + c \tag{1.3.4}$$

Для нахождения коэффициентов в выражении (1.3.4) потребуется решить систему из 10 линейных уравнений

$$\zeta^Q(P_k) = \zeta(P_k), \quad k = \overline{1,10}, \tag{1.3.5}$$

где точки P_k выбраны из числа основных точек сетки, соседних с ячейками ω_i или $\tilde{\omega}_j$. Разрешимость системы (1.3.5) в настоящей работе не рассматривается.

1.4 Сеточная аппроксимация дивергенции и градиента на неструктурированных сетках

В данном разделе будем предполагать, что построена треугольная или тетраэдральная сетка $\Omega_h = \Omega_h^{\Delta,2}$ или $\Omega_h = \Omega_h^{\Delta,3}$. Точно так же, как и в [24], будем

строить разностную схему таким образом, чтобы сеточные операторы дивергенции и градиента были взаимно сопряжены. Сначала построим аппроксимацию дивергенции в основных точках сетки x_i. Обозначим с помощью $\mathbf{W}_{i_k}$ некоторый вектор, определённый в узле $\tilde{x}_{i_k}$, тогда $\mathbf{W}_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}$ — проекция этого вектора на нормаль $\mathbf{n}_{i_k}$. В основных узлах сетки дивергенцию произвольного векторного поля $\mathbf{W}$ аппроксимируем следующим образом

$$\operatorname{div}{}_i^h \mathbf{W} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{D+1} \mathbf{W}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k}, \tag{1.4.1}$$

где D — размерность пространства. То есть $\operatorname{div}{}_i^h \mathbf{W}$ — дивергенция вектора $\mathbf{W}$ в точке x_i, суммирование ведётся по всем граням ячейки ω_i. Обозначим линейную интерполяцию вектора $\mathbf{W}$ в потоковую точку $\tilde{x}_{i_k}$ через

$$\langle \mathbf{W} \rangle_{i_k} = \begin{cases} \frac{\mathbf{W}_i \Delta n^2_{i_k} + \mathbf{W}_{i_k} \Delta n^1_{i_k}}{\Delta n_{i_k}}, \ \tilde{x}_{i_k} \notin \Gamma_h, \\ (\mathbf{W})_i, \ \tilde{x}_{i_k} \in \Gamma_h, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

где $\mathbf{W}_i$ — значение вектора $\mathbf{W}$ в точке x_i. Тогда с учётом (1.4.1) и (1.4.2) дивергенция вектора скорости аппроксимируется в узле x_i следующим образом

$$\operatorname{div}{}_i^h \mathbf{v} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{D+1} \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k}. \tag{1.4.3}$$

Замечание 1.4.1. *Выражение (1.4.1) задаёт сеточный оператор дивергенции, действующий из пространства $\mathcal{V}(\tilde{\Omega}_h)$ в пространство $\mathcal{R}(\Omega_h)$, а формула (1.4.3) — сеточный оператор дивергенции, действующий из пространства $\mathcal{V}(\Omega_h)$ в пространство $\mathcal{R}(\Omega_h)$.*

Аппроксимация (1.4.3) обеспечивает выполнение сеточного аналога закона сохранения массы при однородных краевых условиях. Теперь построим разностную аппроксимацию оператора градиента таким образом, чтобы он был сопряжён ранее выбранному сеточному оператору дивергенции, а именно, чтобы выполнялся сеточный аналог равенства

$$\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\Omega = -\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\Omega,$$

то есть

$$\sum_{\Omega_h} \omega_i p_i \operatorname{div}{}_i^h \mathbf{v} = -\sum_{\Omega_h} \omega_i (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i^h p). \tag{1.4.4}$$

Пользуясь тем, что $\langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} = 0$ на жёсткой стенке, а также тем, что $\sum\limits_{k=1}^{D+1} S_{i_k} \mathbf{v}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} = 0$ и $\Delta n_{i_k} = \Delta n_{i_k}^1 + \Delta n_{i_k}^2$, преобразуем левую часть выражения (1.4.4)

$$\sum_{\Omega_h} \omega_i p_i \operatorname{div}{}_i^h \mathbf{v} = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ S_{i_k} \notin \Gamma_h}}^{D+1} p_i S_{i_k} \frac{\mathbf{v}_i \Delta n_{i_k}^2 + \mathbf{v}_{i_k} \Delta n_{i_k}^1}{\Delta n_{i_k}} \mathbf{n}_{i_k} \right) =$$

$$= \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ S_{i_k} \notin \Gamma_h}}^{D+1} p_i S_{i_k} \frac{\mathbf{v}_{i_k} \Delta n_{i_k}^1 - \mathbf{v}_i \Delta n_{i_k}^1}{\Delta n_{i_k}} \mathbf{n}_{i_k} - \sum_{\substack{k=1 \\ S_{i_k} \in \Gamma_h}}^{D+1} p_i S_{i_k} \mathbf{v}_i \mathbf{n}_{i_k} \right). \quad (1.4.5)$$

Перейдём от суммирования по ячейкам к суммированию по граням то есть перегруппируем слагаемые таким образом, чтобы внешнее суммирование в выражении (1.4.5) производилось по граням. Тогда

$$\sum_{S_j \notin \Gamma_h} \left(p_{j_1} S_j \frac{\Delta n_j^1}{\Delta n_j} \big(\mathbf{v}_{j_2} - \mathbf{v}_{j_1} \big) \mathbf{n}_{j_1} + p_{j_2} S_j \frac{\Delta n_j^2}{\Delta n_j} \big(\mathbf{v}_{j_2} - \mathbf{v}_{j_1} \big) \mathbf{n}_{j_1} \right) -$$

$$- \sum_{S_j \in \Gamma_h} \left(p_{j_1} S_j \mathbf{v}_{j_1} \mathbf{n}_{j_1} \right) =$$

$$= \sum_{S_j \notin \Gamma_h} \left(S_j \mathbf{n}_{j_1} \big(\mathbf{v}_{j_2} - \mathbf{v}_{j_1} \big) \frac{p_{j_1} \Delta n_j^1 + p_{j_2} \Delta n_j^2}{\Delta n_j} \right) - \sum_{S_j \in \Gamma_h} \left(\mathbf{v}_{j_1} \mathbf{n}_{j_1} S_j p_{j_1} \right).$$

Возвращаясь к суммированию по ячейкам, получаем

$$- \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ S_{i_k} \notin \Gamma_h}}^{D+1} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k} \frac{p_i \Delta n_{i_k}^1 + p_{i_k}^2 \Delta n_{i_k}^2}{\Delta n_{i_k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ S_{i_k} \in \Gamma_h}}^{D+1} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k} p_i \right) =$$

$$= - \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \left(\mathbf{v}_i \cdot \sum_{k=1}^{D+1} \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k} \bar{p}_{i_k} \right), \quad (1.4.6)$$

где

$$\bar{p}_{i_k} = \begin{cases} \dfrac{p_i \Delta n_{i_k}^1 + p_{i_k} \Delta n_{i_k}^2}{\Delta n_{i_k}}, \ S_{i_k} \notin \Gamma_h \\ p_i, \ S_{i_k} \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Таким образом, если взять

$$\nabla_i^h p = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{D+1} \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k} \bar{p}_{i_k}, \tag{1.4.7}$$

то правая часть выражения (1.4.6) примет вид правой части условия сопряжённости сеточных операторов дивергенции и градиента (1.4.4).

Замечание 1.4.2. *Равенство (1.4.7) задаёт сеточный оператор градиента, действующий из пространства $\mathcal{R}(\Omega_h)$ в пространство $\mathcal{V}(\Omega_h)$.*

Замечание 1.4.3. *Согласно работе [24] аппроксимации (1.4.3) и (1.4.7) имеют первый порядок по пространству, если центы описанных окружностей треугольников ω_i и ω_{i_k}, $k = \overline{1,3}$ в двумерном случае или описанных сфер тетраэдров ω_i и ω_{i_k}, $k = \overline{1,4}$ в трёхмерном случае лежат внутри соответствующих ячеек, иными словами если соответствующие элементы сетки являются остроугольными.*

Замечание 1.4.4. *Отметим, что на практике не удаётся построить сетку полностью из остроугольных элементов. На данный момент современные открытые генераторы сеток, такие как Ani2D [37] и Gmsh [38] позволяют строить треугольные сетки, в которых количество тупоугольных элементов не превышает двух процентов. Однако, в работах [24; 30] было показано, что наличие тупоугольных элементов не оказывает существенного влияния на численную оценку сходимости и результат вычислений при условии, что их количество не превышает 15 процентов от общего числа элементов сетки. В настоящей работе в двумерном случае тупоугольные элементы точно также будут игнорироваться.*

В трёхмерном случае количество тупоугольных элементов превышает 40% при использовании открытых генераторов сеток [37—39], поэтому нам потребуется модифицировать аппроксимацию. Если хотя бы одна из ячеек, смежных с гранью S_j является тупоугольной, то положим

$$\langle \zeta \rangle_j = \zeta_{j_1}^L(\tilde{x}_j^{\text{цм}}), \tag{1.4.8}$$

причём одна из двух ячеек ω_{j_1} и ω_{j_2}, выбранных для построения приближения $\zeta_{j_1}^L$ определяется строго однозначно для каждой грани S_j. Тогда сеточный оператор дивергенции $\operatorname{div}^h : \mathcal{V}(\Omega_h) \to \mathcal{R}(\Omega_h)$ будет задаваться формулой (1.4.3) с учётом поправки (1.4.8). Отметим, что такая аппроксимация

останется симметричной и она будет сохранять баланс масс на ячейке. Если одна из ячеек ω_i или ω_{i_k}, $k = \overline{1,4}$ является тупоугольной, то сеточный оператор градиента $\nabla^h : \mathcal{R}(\Omega_h) \to \mathcal{V}(\Omega_h)$ в узле x_i аппроксимируем формулой

$$\nabla_i^h p = \nabla p_i^L. \tag{1.4.9}$$

Определим сеточный оператор дивергенции в потоковых узлах $\operatorname{div}^h : \mathcal{V}(\Omega_h) \to \mathcal{R}(\tilde{\Omega}_h)$ аналогично [30]:

$$\operatorname{div}_j^h \mathbf{v} = \begin{cases} \frac{\mathbf{v}_{j_2}\mathbf{n}_{j_1} - \mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1}}{\Delta n_j}, \ \tilde{x}_j \notin \Gamma_h, \\ \frac{-\mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1}}{\Delta n_j}, \ \tilde{x}_j \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{1.4.10}$$

Точно так же, как и в [24] исходя из сеточного условия сопряжённости операторов дивергенции и градиента

$$\sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h} \tilde{\omega}_j \bar{p}_j \operatorname{div}_j^h \mathbf{v} = -\sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h} \left(\tilde{\omega}_j \langle \mathbf{v} \rangle_j \cdot \nabla_j^h p \right), \tag{1.4.11}$$

найдём сеточную аппроксимацию градиента в потоковых узлах. Преобразуем левую часть выражения (1.4.11)

$$\begin{aligned} &\sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h} \tilde{\omega}_j \bar{p}_j \operatorname{div}_j^h \mathbf{v} = \\ &= \sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h \setminus \Gamma_h} \frac{S_j}{D} \frac{p_{j_2}\Delta n_j^2 + p_{j_1}\Delta n_j^1}{\Delta n_j} \Big(\mathbf{v}_{j_2}\mathbf{n}_{j_1} - \mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1} \Big) - \sum_{\tilde{x}_j \in \Gamma_h} \frac{S_j}{D} p_{j_1} \mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1} = \\ &= \sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h \setminus \Gamma_h} \frac{S_j}{D} \Big((p_{j_1} - p_{j_2}) \langle \mathbf{v} \rangle_j \mathbf{n}_{j_1} + p_{j_2}\mathbf{v}_{j_2}\mathbf{n}_{j_1} - p_{j_1}\mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1} \Big) - \sum_{\tilde{x}_j \in \Gamma_h} \frac{S_j}{D} p_{j_1}\mathbf{v}_{j_1}\mathbf{n}_{j_1}. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

С учётом тождества $\sum\limits_{k=1}^{D+1} \mathbf{v}_i \mathbf{n}_{i_k} S_{i_k} = 0$, правая часть (1.4.12) примет вид

$$-\sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h \setminus \Gamma_h} \left(\frac{S_j}{D} \langle \mathbf{v} \rangle_j \cdot \mathbf{n}_{j_1} (p_{j_2} - p_{j_1}) \right) = -\sum_{\tilde{x}_j \in \tilde{\Omega}_h \setminus \Gamma_h} \left(\tilde{\omega}_j \langle \mathbf{v} \rangle_j \cdot \mathbf{n}_{j_1} \frac{p_{j_2} - p_{j_1}}{\Delta n_j} \right).$$

Таким образом, градиент в потоковой точке $\tilde{x}_j$ аппроксимируется следующей величиной

$$\nabla_j^h p = \begin{cases} \frac{p_{j_2} - p_{j_1}}{\Delta n_j} \mathbf{n}_{j_1}, \ \tilde{x}_j \notin \Gamma_h, \\ 0, \ \tilde{x}_j \in \Gamma_h. \end{cases} \tag{1.4.13}$$

Замечание 1.4.5. *Выражение (1.4.13) задаёт сеточный оператор градиента, действующий из пространства $\mathcal{R}(\Omega_h)$ в пространство $\mathcal{V}(\tilde{\Omega}_h)$.*

Замечание 1.4.6. *Отметим, что выражения (1.4.10) и (1.4.13) аппроксимируют величины $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}$ и $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}$ соответственно с первым порядком по пространству при условии, что соседние ячейки являются остроугольными. Порядок аппроксимации равен двум, если соседние ячейки являются правильными треугольниками или тетраэдрами.*

Поскольку в трёхмерном случае трудно сделать сетку из остроугольных элементов, то нам потребуются более точные аппроксимации дивергенции и градиента в потоковых ячейках, которые мы определим с помощью

$$\operatorname{div}{}_j^h \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}_j^Q|_{\tilde{x}_j^{\text{цм}}}, \quad \nabla_j^h p = \nabla p_j^Q|_{\tilde{x}_j^{\text{цм}}}. \tag{1.4.14}$$

Замечание 1.4.7. *Выражения (1.4.14) аппроксимируют дивергенцию и градиент в узлах $\tilde{x}_j^{цм}$ со вторым порядком по пространству.*

Замечание 1.4.8. *Отметим, что такой выбор аппроксимации затрудняет реализацию за счёт того, что требуется строить приближение по соседним элементам, расположенным в два слоя. Этого можно избежать, аппроксимировав дивергенцию и градиент конечными разностями с учётом того факта, что в методе адаптивной искусственной вязкости требуется только производная по направлению к нормали к поверхности.*

1.5 Дискретизация по времени

Как обычно будем предполагать, что введена дискретизация по времени с шагом τ_n, $n = \overline{0, N-1}$ или просто τ, то есть каждая сеточная функция задана на цилиндре $Q_T^h = \Omega_h \times \omega_t$, где Ω_h — некоторая сеточная область, а $\omega_t = \{t_0, t_1, ..., t_N \,|\, t_{n+1} - t_n = \tau_n\}$. Произвольную сеточную функцию $\zeta(\cdot, \cdot)$ в момент времени t_n обозначим через $\zeta^n = \zeta(\cdot, t_n)$. В безындексной форме записи $\zeta = \zeta^n$ и $\hat{\zeta} = \zeta^{n+1}$.

1.6 Вспомогательные утверждения

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения и определения, использующиеся в данной работе.

Утверждение 1.6.1. *(Неравенство Юнга) Для любых действительных чисел $a, b > 0$ и $p, q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливо соотношение*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Утверждение 1.6.2. *Для любого действительного числа $x > 0$ справедливо неравенство*

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

Утверждение 1.6.3. *(Принцип Лере-Шаудера) Пусть $A : H \to H$ — вполне непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если все возможные решения уравнений $x = \lambda Ax$ для $\lambda \in [0, 1]$ не выходят за пределы некоторого шара $|x| \leqslant \rho$, то уравнение $x = Ax$ имеет по крайней мере одно решение в этом шаре.*

Определение 1.6.1. *Матрица $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, n$ называется M-матрицей* [40]*, если*

1. $a_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

2. $a_{i,j} \leqslant 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

3. *Матрица A невырождена.*

4. A^{-1} *неотрицательна, то есть все её элементы неотрицательны.*

Имеют место следующие утверждения (см. [40]):

Утверждение 1.6.4. *Пусть элементы $a_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ действительной матрицы A удовлетворяют следующим свойствам*

1. $a_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

2. $a_{i,j} \leqslant 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Тогда A является M-матрицей тогда и только тогда, когда $\rho(B) < 1$, где $B = E - (D(A))^{-1}A$, $\rho(B)$ — спектральный радиус матрицы B, а $D(A)$ — диагональ матрицы A.

Утверждение 1.6.5. *Пусть матрицы $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$, $i, j = 1 \ldots, n$ удовлетворяют следующим свойствам:*

1. *$A \leqslant B$, т. е. $a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$ $\forall i, j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

2. *$b_{i,j} \leqslant 0$ $\forall i \neq j$.*

Тогда если A является M-матрицей, то B также является M-матрицей.

Теорема 1. *Пусть элементы $a_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ действительной матрицы A удовлетворяют следующим свойствам*

1. *$a_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

2. *$a_{i,j} \leqslant 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.*

3. *Существуют такие $\omega_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, что $\forall j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ выполнено $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i = 0$.*

Тогда для любого $\tau > 0$ матрица $(A + \tau E)$ является M-матрицей.

Доказательство. Пусть W — матрица, на диагонали которой располагаются числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$, остальные элементы матрицы равны нулю. Докажем, что матрица $Z = (W(A + \tau E))^T$ является M-матрицей. Элементы матрицы Z имеют вид

$$z_{i,j} = \begin{cases} \omega_j a_{j,j} + \tau\omega_j, \ i = j, \ j = 1, \ldots, n \\ \omega_j a_{j,i}, \ i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Вычислим сумму модулей элементов в i-ой строке матрицы $B = E - (D(Z))^{-1}Z$:

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{\omega_j a_{j,i}}{\omega_i a_{i,i} + \tau\omega_i} \right| = -\frac{1}{\omega_i a_{i,i} + \tau\omega_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \omega_j a_{j,i} = \frac{\omega_i a_{i,i}}{\omega_i a_{i,i} + \tau\omega_i} < 1.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\|B\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \right) < 1,$$

то есть максимальная строчная норма матрицы B меньше единицы. Воспользовавшись известным фактом о том, что модуль любого собственного значения матрицы не превосходит любой её нормы получаем, что $\rho(B) < 1$. Тогда из утверждения 1.6.4 следует, что Z, а значит и Z^T являются M-матрицами. Поскольку матрица W является диагональной с положительными элементами на диагонали, то матрица $(A + \tau E)$ также является M-матрицей. Теорема доказана.

1.7 Выводы

В данной главе вводится система обозначений на ортогональных сетках в одномерном и двумерном случаях, а также обозначения на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. Кроме того, были определены сеточные операторы дивергенции и градиента на треугольных и тетраэдральных сетках согласно работам [24; 30] и оговорены ограничения, которые накладывает на сетку данный выбор сеточных операторов. Также предложены модификации, позволяющие обойти эти ограничения. Наконец, в конце главы сформулированы утверждения, используемые в настоящей работе, а также доказано достаточное условие для того, чтобы матрица являлась M-матрицей.

Глава 2

Одномерные уравнения газовой динамики в канале с переменным поперечным сечением

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу одномерного движения вязкой сжимаемой жидкости (газа) в трубе переменного сечения. Пусть $A(x,t)$ — площадь поперечного сечения трубы, $L(x,t)$ — периметр поперечного сечения трубы, $\rho(x,t)$ — плотность жидкости, $u(x,t)$ — скорость жидкости, $p(x,t)$ — давление жидкости, μ — динамическая вязкость жидкости. Для жидкости, заключённой в кон-

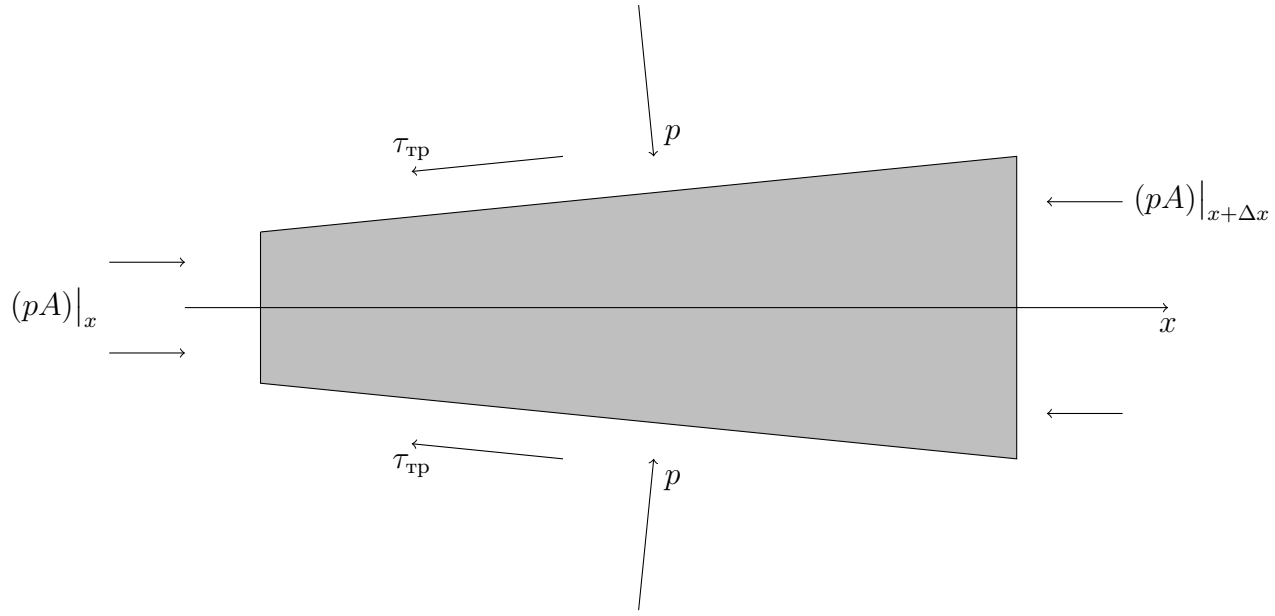

Рис. 2.1: Контрольный объём, заключённый между сечениями x и $x+\Delta x$.

трольном объёме между сечениями x и $x+\Delta x$ (Рис. 2.1) имеет место закон

сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A\Delta x) = (\rho Au)\big|_x - (\rho Au)\big|_{x+\Delta x} \tag{2.1.1}$$

и закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Au\Delta x) = (\rho Au^2)\big|_x - (\rho Au^2)\big|_{x+\Delta x} + (pA)\big|_x - (pA)\big|_{x+\Delta x} + \\ + p\frac{\partial A}{\partial x}\Delta x - \tau_{\text{тр}}L\Delta x. \tag{2.1.2}$$

Поделив уравнения (2.1.1) и (2.1.2) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим систему уравнений в цилиндре $Q_T = [X_1,\, X_2] \times [0,\, T]$, описывающую движение вязкого баротропного сжимаемого газа (жидкости) в прямой трубе переменного радиуса

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(A\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial(A\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u^2)}{\partial x} + A\frac{\partial p}{\partial x} + \tau_{\text{тр}}L = 0. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Связь между давлением и плотностью положим линейной $p = \kappa\rho$, где κ — некоторая положительная константа. Сила трения во втором уравнении системы (2.1.3) моделируется экспериментальной формулой $\tau_{\text{тр}} = \lambda u|u|$, где λ — положительная константа, зависящая только от числа Рейнольдса.

2.2 Априорные оценки

Дополним систему (2.1.3) краевыми

$$u(X_1) = u(X_2) = 0 \tag{2.2.1}$$

и начальными условиями

$$\rho(x,0) = \rho_0(x),\ u(x,0) = u_0(x). \tag{2.2.2}$$

Не уменьшая общности, упростим запись, считая, что $\kappa = 1$ и $\lambda = 1$. Умножив первое уравнение системы (2.1.3) скалярно в $L_2([X_1,\, X_2])$ на $-\frac{1}{2}u^2$, а второе на u и сложив, получим

$$-\frac{1}{2}\Big((A\rho)_t, u^2\Big) + ((A\rho u)_t, u) - \frac{1}{2}\Big((A\rho u)_x, u^2\Big) + \Big(\big(A\rho u^2\big)_x, u\Big) + \\ + (A\rho_x, u) + (u|u|L, u) = 0. \tag{2.2.3}$$

Элементарные преобразования дадут

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\Big((A\rho)_t, u^2\Big) + ((A\rho u)_t, u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(A\rho, u^2\right), \\ &-\frac{1}{2}\Big((A\rho u)_x, u^2\Big) + \Big(\left(A\rho u^2\right)_x, u\Big) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Преобразуя пятый член в левой части (2.2.3) в предположении, что $\rho > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} (A\rho_x, u) &= \left(\frac{1}{\rho}\rho_x, A\rho u\right) = ((\ln\rho)_x, A\rho u) = (\ln\rho, (A\rho)_t) = \\ &= \big((A\rho\ln\rho)_t - A\rho(\ln\rho)_t, 1\big) = \big((A\rho\ln\rho)_t - A\rho_t, 1\big) = \\ &= \big((A\rho\ln\rho)_t - (A\rho)_t + \rho A_t, 1\big) = \big((A\rho(\ln\rho - 1))_t + \rho A(\ln A)_t, 1\big). \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Таким образом, равенство (2.2.3) с учётом (2.2.4) и (2.2.5) примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(A\rho, u^2\right) + \big((A\rho(\ln\rho - 1))_t, 1\big) + \big(\rho A(\ln A)_t, 1\big) + \big(|u|L, u^2\big) = 0. \tag{2.2.6}$$

Если функция $(\ln A)_t$ непрерывна на отрезке $[X_1,\, X_2]$ при любом фиксированном $t \geqslant 0$, то предпоследнее слагаемое в (2.2.6) можно оценить с помощью неравенства

$$\big(\rho A(\ln A)_t, 1\big) \geqslant (\rho A, 1) \min_{[X_1, X_2]} (\ln A)_t = (\rho_0 A_0, 1) \min_{[X_1, X_2]} (\ln A)_t. \tag{2.2.7}$$

Используя соотношение (2.2.7), формально проинтегрируем (2.2.6) по времени на отрезке $[0,\, T]$. Получим "энергетическое" неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big(A\rho, u^2\Big) + \big(A\rho(\ln\rho - 1), 1\big) + \int\limits_{X_1}^{X_2} \rho_0 A_0 dx \int\limits_0^T \min_{[X_1, X_2]} (\ln A)_t dt + \\ &\qquad + \int\limits_0^T \int\limits_{X_1}^{X_2} u^2 |u| L dx dt \leqslant \frac{1}{2}\Big(A_0\rho_0, u_0^2\Big) + \big(A_0\rho_0(\ln\rho_0 - 1), 1\big). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Замечание 2.2.1. *Поскольку в дифференциальном случае нет гарантии положительности функции плотности, то слово "энергетическое" здесь взято в кавычки.*

Оценим величину $\int_0^T \min(\ln A)_t dt$ в некотором частном случае. Пусть функция $A(x, t)$ удовлетворяет условию

$$A_t \geqslant -\theta \text{ при } x \in [X_1, X_2],\ t \in [0, T],$$

где θ — некоторая положительная константа. Обозначим величину $\min\limits_{[X_1,X_2]} A_0$ через $A_{0,\min}$. Тогда $A(x,t) \geqslant A_{0,\min} - \theta t$ на отрезке $[X_1,\, X_2]$ и

$$(\ln A)_t = \frac{A_t}{A} \geqslant -\frac{\theta}{A} \geqslant -\frac{\theta}{A_{0,\min} - \theta t}.$$

В этом случае предпоследнее слагаемое левой части (2.2.8) можно оценить с помощью неравенства

$$\int\limits_{X_1}^{X_2} \rho_0 A_0 dx \int\limits_0^T \min_{[X_1,X_2]} (\ln A)_t dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{X_1}^{X_2} \rho_0 A_0 dx \int\limits_0^T -\frac{\theta}{A_{0,\min} - \theta t} dt = \ln \frac{A_{0,\min} - T\theta}{A_{0,\min}} \int\limits_{X_1}^{X_2} \rho_0 A_0 dx. \quad (2.2.9)$$

Замечание 2.2.2. *Отметим, что в случае линейно убывающей по времени функции $A(x,t)$ в выражении (2.2.9) будет иметь место равенство. В этом случае соотношение (2.2.9) позволяет оценить последний член левой части неравенства (2.2.8) через минимальную площадь поперечного сечения канала в момент времени T.*

T	0.9	0.99	0.999	0.9999
$\min_{[X_1,\,X_2]} A(x,T)$	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\ln \dfrac{A_{0,\min} - T\theta}{A_{0,\min}}$	-2.3025	-4.6051	-6.9077	-9.2103

Таблица 2.1: Зависимость минимальной площади поперечного сечения и коэффициента в выражении (2.2.9) от времени.

В таблице 2.1 приведены значения минимальной площади поперечного сечения и коэффициента в выражении (2.2.9) от времени T в случае линейно убывающей по времени функции $A(x,t)$ и $A_{0,\min} = 1$, $\theta = 1$. Из таблицы видно, что этот коэффициент остаётся небольшим даже при практически полном закрытии клапана.

2.3 Разностная аппроксимация

Введём две сетки по пространству с шагом $h = (X_2 - X_1)/M$, а именно $\Omega_\rho = \{x_i = X_1 + ih,\ i = 0, \ldots, M-1\}$, $\quad \Omega_u = \{x_i = X_1 + ih,\ i = 0, \ldots, M\}$.

Положим шаг по времени $\tau = T/N$. Пусть в момент времени $n\tau$ сеточная функция ρ^n определена на Ω_ρ, а u^n определена на Ω_u. Будем считать, что эти функции продолжены нулём на всю сеточную прямую. Разностную аппроксимацию системы (2.1.3)–(2.2.2) будем строить таким образом, чтобы она обладала следующими свойствами.

1. Разностная схема должна быть консервативной, т. е. должен выполняться сеточный аналог закона сохранения массы

$$\sum_{i=0}^{M-1} hA_i^n \rho_i^n = \sum_{i=0}^{M-1} hA_i^{n+1} \rho_i^{n+1},$$

   где $A_i^n = A(ih, n\tau)$.

2. Плотность ρ^n должна быть строго положительна.

3. Сеточные аппроксимации $(A\rho u)_x$ и $(A\rho u^2)_x$ должны быть сопряжены, т. е. должен выполняться сеточный аналог равенства

$$\big((A\rho u^2)_x, u\big) - \frac{1}{2}\bigg((A\rho u)_x, u^2\bigg) = 0.$$

4. Решение разностной схемы должно существовать.

5. Из соотношения (2.2.8) следует ограниченность нормы $\|(A\rho)^{1/2}u\|_{L_2}$ на любом конечном временном интервале. Решение разностной схемы должно обладать аналогичным свойством.

2.3.1 Аппроксимация уравнения неразрывности

Будем аппроксимировать уравнение неразрывности аналогично [22]:

- если u_i и u_{i+1} имеют одинаковые знаки, то используем аппроксимацию "против потока":

$$(A\rho u)_x \approx \begin{cases} \dfrac{\rho_i A_{i+1} u_{i+1} - \rho_{i-1} A_i u_i}{h}, \text{ при } u_i,\ u_{i+1} > 0; \\ \dfrac{\rho_{i+1} A_{i+1} u_{i+1} - \rho_i A_i u_i}{h}, \text{ при } u_i,\ u_{i+1} < 0; \end{cases}$$

- если $u_i > 0$, а $u_{i+1} < 0$, то

$$(\rho A u)_x = \rho_x A u + \rho (A u)_x \approx \frac{\rho_{i+1} A_{i+1} u_{i+1} - \rho_i A_i u_i}{h} + \frac{(\rho_i - \rho_{i-1}) A_i u_i}{h};$$

- если $u_i < 0$, а $u_{i+1} > 0$, то

$$(\rho A u)_x = \rho_x A u + \rho (A u)_x = \frac{\rho_i (A_{i+1} u_{i+1} - A_i u_i)}{h}.$$

Данная аппроксимация имеет порядок $O(h)$. Рассмотрим полностью неявную разностную схему для задачи (2.1.3)–(2.2.2). Для удобства введём обозначение $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$\{\rho, u\}_i = \begin{cases} \rho_{i-1}, \text{ если } u_i > 0; \\ \rho_i, \text{ если } u_i < 0, \end{cases}$$

В этих обозначениях аппроксимация первого уравнения системы (2.1.3) примет вид

$$(A\rho)_t + \left(\{\hat{\rho}, \hat{u}\} \hat{A} \hat{u} \right)_x = 0, \quad i = 0, \ldots, M-1. \tag{2.3.1}$$

Таким образом, по построению

Утверждение 2.3.1. *Аппроксимация (2.3.1) имеет порядок $O(\tau) + O(h)$.*

Кроме того, имеют место следующие факты:

Теорема 2. *Аппроксимация (2.3.1) обеспечивает выполнение сеточного закона сохранения массы, т. е.*

$$\sum_{i=0}^{M-1} h A_i^0 \rho_i^0 = \sum_{i=0}^{M-1} h A_i^n \rho_i^n \tag{2.3.2}$$

при однородных краевых условиях, то есть при $u_0^n = u_M^n = 0$, $n = 0, \ldots, N$.

Доказательство. В самом деле, учитывая тождество

$$\{\rho, u\}_i u_i = \frac{\rho_i (u_i - |u_i|) + \rho_{i-1} (u_i + |u_i|)}{2},$$

получаем

$$\sum_{i=0}^{M-1} hA_i^{n-1}\rho_i^{n-1} = \sum_{i=0}^{M-1} hA_i^n\rho_i^n + \\ + \sum_{i=0}^{M-1} h\frac{\tau}{h}\left(\frac{\rho_{i+1}^n(u_{i+1}^n - |u_{i+1}^n|) + \rho_i^n(u_{i+1}^n + |u_{i+1}^n|)}{2}A_{i+1}^n - \right. \\ \left. - \frac{\rho_i^n(u_i^n - |u_i^n|) + \rho_{i-1}^n(u_i^n + |u_i^n|)}{2}A_i^n\right).$$

Вторая сумма в правой части последнего выражения равна нулю в силу краевых условий $u_0^n = u_M^n = 0$, что завершает доказательство. Теорема доказана.

Теорема 3. *Аппроксимация (2.3.1) гарантирует положительность сеточной функции плотности, т. е. при выполнении условий $\rho_i^0 > 0$ и $A_i^n > 0$ для любых $i = \overline{0, M-1}$ и $n \geqslant 0$ имеет место неравенство $\rho_i^n > 0$ при любых $i = \overline{0, M-1}$ и $n > 0$.*

Доказательство. Введём сеточный оператор $B(u) : \mathcal{R}(\Omega_\rho) \to \mathcal{R}(\Omega_\rho)$

$$B(u)\rho = \left(\{\rho, u\}Au\right)_x.$$

Отметим, что сеточный оператор $B(\hat{u})$ является матрицей размера $M \times M$ со следующими свойствами: на диагонали стоят неотрицательные элементы, вне диагонали стоят неположительные элементы, сумма элементов по столбцу равна нулю в силу сеточного аналога закона сохранения массы. Таким образом, для матрицы оператора $B(\hat{u})$ выполнены условия теоремы 1. Тогда матрица $(E + \tau_1 B(\hat{u}))$ является M-матрицей для любого $\tau_1 > 0$. Воспользовавшись утверждением 1.6.5 нетрудно показать, что матрица системы линейных уравнений (2.3.1) на функцию $\hat{\rho}$ также является M-матрицей, следовательно она невырождена и элементы обратной матрицы неотрицательны. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 2.3.1. *Теоремы 2 и 3 будут справедливы и в том случае, если в аппроксимации (2.3.1) вынести скорость на нижний слой, то есть использовать явно-неявную схему*

$$(A\rho)_t + \left(\{\hat{\rho}, u\}\hat{A}u\right)_x = 0, \quad i = 0, \ldots, M-1.$$

2.3.2 Аппроксимация уравнения движения

Конвективные слагаемые в уравнении движения аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{\partial(A\rho u^2)}{\partial x} = u\frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} + A\rho u\frac{\partial u}{\partial x} \approx$$
$$\approx \big(\{\rho,\, u\}Au\big)_x u + \frac{1}{2}\bigg(\big(\{\rho,\, u\}Au\big)_{(+1)}u_x + \big(\{\rho,\, u\}Au\big)u_{\bar{x}}\bigg) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\{\rho, u\}Au(u_{(-1)} + u)\Big)_x.$$

Тогда аппроксимация второго уравнения системы (2.1.3) примет вид:

$$(A\rho u)_t + \frac{1}{2}\Big(\{\hat\rho, \hat u\}\hat A\hat u(\hat u_{(-1)} + \hat u)\Big)_x + \kappa\frac{1}{h}\hat A\{\hat\rho, \hat u\}\ln\frac{\hat\rho}{\hat\rho_{(-1)}} + \lambda\hat u|\hat u|\hat L = 0. \quad (2.3.3)$$

Тем самым доказано

Утверждение 2.3.2. *Аппроксимация (2.3.3) имеет порядок* $O(\tau) + O(h)$.

Теперь докажем, что норма $\|(A\rho)^{1/2}u\|_{\mathcal{R}(\Omega_\rho)}$ равномерно ограничена по времени на любом конечном временном интервале. В самом деле, умножим уравнение (2.3.1) на $-\frac{1}{2}\tau\hat u^2$, а уравнение (2.3.3) на $\tau\hat u$ и сложим. Для краткости опустив здесь и далее в пределах данной главы подпись в скалярном произведении $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{R}(\Omega_\rho)}$, получим равенство

$$-\frac{1}{2}\tau\Big((A\rho)_t, \hat u^2\Big) + \tau\big((A\rho u)_t, \hat u\big) + \frac{1}{2}\tau\bigg(\Big(\{\hat\rho, \hat u\}\hat A\hat u(\hat u_{(-1)} + \hat u)\Big)_x, \hat u\bigg) -$$
$$- \tau\frac{1}{2}\bigg(\Big(\{\hat\rho, \hat u\}\hat A\hat u\Big)_x, \hat u^2\bigg) + \tau\kappa\bigg(\frac{1}{h}\hat A\{\hat\rho, \hat u\}\ln\frac{\hat\rho}{\hat\rho_{(-1)}}, \hat u\bigg) +$$
$$+ \tau\lambda\Big(\hat u|\hat u|\hat L, \hat u\Big) = 0. \quad (2.3.4)$$

Нетрудно показать, что

$$-\frac{1}{2}\tau\Big((A\rho)_t, \hat u^2\Big) + \tau\big((A\rho u)_t, \hat u\big) = \frac{1}{2}\tau\Big(A\rho, u^2\Big)_t + \frac{1}{2}\Big(A\rho, (\hat u - u)^2\Big), \quad (2.3.5)$$

а сеточные аппроксимации $(A\rho u)_x$ и $(A\rho u^2)_x$ кососимметричны, т. е.

$$\frac{1}{2}\tau\bigg(\Big(\{\hat\rho, \hat u\}\hat A\hat u(\hat u_{(-1)} + \hat u)\Big)_x, \hat u\bigg) - \tau\frac{1}{2}\bigg(\Big(\{\hat\rho, \hat u\}\hat A\hat u\Big)_x, \hat u^2\bigg) = 0. \quad (2.3.6)$$

С помощью соотношения $\ln x \leqslant x - 1$ упростим предпоследнее слагаемое в (2.3.4):

$$\tau\left(\frac{1}{h}\hat{A}\{\hat{\rho},\hat{u}\}\ln\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{(-1)}},\hat{u}\right) = \tau\left((\ln\hat{\rho})_{\bar{x}},\hat{A}\{\hat{\rho},\hat{u}\}\hat{u}\right) = \tau\big((A\rho)_t\ln\hat{\rho},1\big) =$$

$$= \tau\big((A\rho\ln\rho)_t - A\rho(\ln\rho)_t,1\big) = \tau\big((A\rho\ln\rho)_t,1\big) - \left(A\rho\ln\frac{\hat{\rho}}{\rho},1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \tau\big((A\rho\ln\rho)_t,1\big) - \big(A(\hat{\rho}-\rho),1\big) = \tau\big((A\rho\ln\rho)_t - (A\rho)_t + \hat{\rho}A_t,1\big) \geqslant$$

$$\geqslant \tau\big((A\rho(\ln\rho-1))_t,1\big) + \tau\left(\hat{A}\hat{\rho},1\right)\min_{\Omega_\rho}\frac{A_t}{\hat{A}} =$$

$$= \tau\big((A\rho(\ln\rho-1))_t,1\big) + \tau(A_0\rho_0,1)\min_{\Omega_\rho}\frac{A_t}{\hat{A}}. \quad (2.3.7)$$

Просуммировав соотношение (2.3.4) по всем шагам по времени и воспользовавшись соотношениями (2.3.5)–(2.3.7), получим энергетическое неравенство. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Решение разностной задачи* (2.3.1), (2.3.3) *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{2}\left(A^n\rho^n,(u^n)^2\right) + \kappa(A^n\rho^n(\ln\rho^n-1),1) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(A^k\rho^k,\left(u^{k+1}-u^k\right)^2\right) +$$

$$+ \kappa(A_0\rho_0,1)\sum_{k=0}^{n-1}\min_{\Omega_\rho}\frac{A^{k+1}-A^k}{A^{k+1}} + \tau\lambda\sum_{k=1}^{n}\big(|u^k|L^k,(u^k)^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(A^0\rho^0,\left(u^0\right)^2\right) + \kappa(A^0\rho^0(\ln\rho^0-1),1)$$

при однородных краевых условиях, то есть при $u_0^n = u_M^n = 0$, $n = 0,\ldots,N$.

Точно так же, как и в дифференциальном случае, оценим величину $\sum_{k=0}^{n-1}\min\dfrac{A^{k+1}-A^k}{A^{k+1}}$ при некоторых дополнительных ограничениях. Обозначим $\min_{\Omega_\rho}A_0$ через $A_{0,\min}$. Пусть выполнены следующие соотношения:

$$\tau < \frac{A_{0,\min}}{\theta(n+1)} \quad \text{и} \quad \frac{A^{k+1}-A^k}{\tau} \geqslant -\theta \text{ при } k = \overline{0,n-1}, \quad (2.3.8)$$

где θ — некоторая положительная константа. Тогда, используя оценку $A^k \geqslant A_{0,\min} - \tau\theta k$, получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A^{k+1}-A^k}{A^{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{-\tau\theta}{A^{k+1}} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{-\tau\theta}{A_{0,\min}-\tau\theta(k+1)}. \quad (2.3.9)$$

Отметим, что при условиях (2.3.9) выполнено неравенство $\dfrac{\tau\theta}{A_{0,\min} - \tau\theta(k+1)} < 1, \quad k = \overline{0, n-1}.$ С помощью неравенства $y \leqslant \ln \dfrac{1}{1-y}$ оценим правую часть (2.3.9). Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\tau\theta}{A_{0,\min} - \tau\theta(k+1)} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} -\ln \frac{A_{0,\min} - \tau\theta(k+1)}{A_{0,\min} - \tau\theta(k+1) - \tau\theta} = \\ = \ln \frac{A_{0,\min} - \tau\theta(n+1)}{A_{0,\min} - \tau\theta}.$$

Данное соотношение позволяет оценить предпоследнее слагаемое левой части энергетического неравенства в случае линейно убывающей по времени функции $A(x,t)$ с помощью минимальной площади поперечного сечения канала на n-м шаге по времени.

Замечание 2.3.2. *Точно так же, как и из неравенства (2.2.9) из последнего соотношения следует, что в случае линейно убывающей функции $A(x,t)$ величина $\sum_{k=0}^{n-1} \min \dfrac{A^{k+1} - A^k}{A^{k+1}}$ остаётся небольшой даже при практически полном закрытии клапана.*

2.3.3 Существование решения

Теорема 5. *Пусть выполнено условие*

$$(A_0\rho_0, 1) - (A^n, 1) > 0 \text{ при любом } n > 0. \tag{2.3.10}$$

Тогда система уравнений (2.3.1), (2.3.3) с краевыми условиями (2.2.1) и начальными условиями (2.2.2) имеет решение при любых τ и h.

Доказательство. Аналогично [22], сделаем замену $r = A\rho$ и $v = A\rho u$. Тогда система примет вид

$$r_t + \left(\{\hat{r}/\hat{A}, \hat{v}\}\hat{A}\hat{v}/\hat{r}\right)_x = 0,$$
$$v_t + \frac{1}{2}\left(\{\hat{r}/\hat{A}, \hat{v}\}\hat{A}\hat{v}\left(\hat{v}_{(-1)}/\hat{r}_{(-1)} + \hat{v}/\hat{r}\right)/\hat{r}\right)_x + \kappa\frac{1}{h}\hat{A}\{\hat{r}/\hat{A}, \hat{v}\}\ln\frac{\hat{r}/\hat{A}}{\hat{r}_{(-1)}/\hat{A}_{(-1)}} + \\ + \lambda\hat{v}/\hat{r}|\hat{v}/\hat{r}|\hat{L} = 0. \tag{2.3.11}$$

Таким образом, система (2.3.11) представима в виде операторного уравнения

$$\hat{r} = F_1(\hat{r}, \hat{v}), \quad \hat{v} = F_2(\hat{r}, \hat{v}).$$

Для доказательства существования решения воспользуемся теоремой Лере–Шаудера, а именно докажем, что решение системы

$$\hat{r} = \theta F_1(\hat{r}, \hat{v}), \quad \hat{v} = \theta F_2(\hat{r}, \hat{v}) \tag{2.3.12}$$

равномерно ограничено по θ при $\theta \in [0,\, 1]$. Случай $\theta = 0$ тривиален, поэтому далее считаем $\theta > 0$. Перепишем систему (2.3.12) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\theta}{\tau\theta}\hat{A}\hat{\rho} + (A\rho)_t + \Big(\{\hat{\rho}, \hat{u}\}\hat{A}\hat{u}\Big)_x = 0,\\
&\frac{1-\theta}{\tau\theta}\hat{A}\hat{\rho}\hat{u} + (A\rho u)_t + \frac{1}{2}\bigg(\{\hat{\rho}, \hat{u}\}\hat{A}\hat{u}(\hat{u}_{(-1)} + \hat{u})\bigg)_x + \kappa\frac{1}{h}\hat{A}\{\hat{\rho}, \hat{u}\}\ln\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{(-1)}} +\\
&+ \lambda\hat{u}|\hat{u}|\hat{L} = 0.
\end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на $-\frac{1}{2}\tau\hat{u}^2$, а второе на $\tau\hat{u}$ и сложим. Так как функции $A(x,t)$ и $L(x,t)$ положительны, а $\rho^k > 0$ при условии $\rho^0 > 0$, то

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\theta}{2\theta}\Big(\hat{A}\hat{\rho}, \hat{u}^2\Big) + \kappa\frac{1-\theta}{\theta}\Big(\hat{A}\hat{\rho}, \ln\hat{\rho}\Big) + \kappa(A_0\rho_0, 1)\min_{\Omega_\rho}\frac{\hat{A}-A}{\hat{A}} + \frac{1}{2}\Big(\hat{A}\hat{\rho}, \hat{u}^2\Big) +\\
&\qquad + \kappa\Big(\hat{A}\hat{\rho}(\ln\hat{\rho} - 1), 1\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(A\rho, u^2\Big) + \kappa(A\rho(\ln\rho - 1), 1) \leqslant\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(A_0\rho_0, u_0^2\Big) + \kappa(A_0\rho_0(\ln\rho_0 - 1), 1) - \kappa(A_0\rho_0, 1)\sum_{k=0}^{n-1}\min_{\Omega_\rho}\frac{A^{k+1} - A^k}{A^{k+1}}.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Оценим второе слагаемое левой части соотношения (2.3.13), учитывая условие (2.3.10). Имеем

$$\Big(\hat{A}\hat{\rho}, \ln\hat{\rho}\Big) \geqslant \Big(\hat{A}\hat{\rho}\Big(1 - \frac{1}{\hat{\rho}}\Big), 1\Big) = \Big(\hat{A}\hat{\rho} - \hat{A}, 1\Big) = (A_0\rho_0, 1) - \Big(\hat{A}, 1\Big) > 0. \tag{2.3.14}$$

Для последнего слагаемого левой части (2.3.13) справедливо соотношение

$$\Big(\hat{A}\hat{\rho}(\ln\hat{\rho} - 1), 1\Big) \geqslant \Big(\hat{A}\hat{\rho}\Big(1 - \frac{1}{\hat{\rho}}\Big) - \hat{A}\hat{\rho}, 1\Big) = -\Big(\hat{A}, 1\Big). \tag{2.3.15}$$

Используя оценки (2.3.14) и (2.3.15), а также сеточный закон сохранения массы (2.3.2), получим

$$\|\hat{v}\|^2_{\mathcal{R}(\Omega_\rho)} = \left(\hat{A}\hat{\rho}\hat{u}, \hat{A}\hat{\rho}\hat{u}\right) \leqslant \max_{\Omega_\rho} \hat{A}\hat{\rho} \cdot \left(\hat{A}\hat{\rho}, \hat{u}^2\right) \leqslant \frac{1}{h}\|A_0\rho_0\|_{L_{1,h}} \left(\hat{A}\hat{\rho}, \hat{u}^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\|A_0\rho_0\|_{L_{1,h}} \Bigg[\left(A_0\rho_0, (u_0)^2\right) + 2\kappa \Bigg((A_0\rho_0(\ln\rho_0 - 1), 1) + \left(\hat{A}, 1\right) -$$

$$- (A_0\rho_0, 1) \sum_{k=0}^{n} \min_{\Omega_\rho} \frac{A^{k+1} - A^k}{A^{k+1}} \Bigg) \Bigg],$$

где $\|f\|_{L_{1,h}} = \sum\limits_{i=0}^{M-1} h|f_i|$. Величина $\hat{r}$ ограничена в норме $\|\cdot\|_{L_{1,h}}$ за счёт свойства консервативности (2.3.2) разностной схемы. Таким образом, выполнены условия теоремы Лере–Шаудера, значит, задача имеет решение при любых τ и h. Теорема доказана.

2.4 Выводы

В настоящей главе предлагается разностная схема для одномерных уравнений динамики баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в цилиндрической области с переменным во времени сечением. Для данной схемы доказаны следующие утверждения

- Разностная схема удовлетворяет сеточному аналогу закона сохранения массы.
- Сеточная функция плотности является положительной на каждом шаге по времени.
- Для решения разностной задачи имеет место “энергетическое” неравенство.
- Доказано существование сеточного решения при любых шагах по времени и по пространству.

Глава 3

Стабилизация одномерных уравнений газовой динамики по начальным данным

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений динамики вязкого баротропного газа [41]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ p = p(\rho) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &(\rho,\, u)|_{t=0} = (\rho_0,\, u_0), \quad x \in \Omega = [0,\, L]; \\ &u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0, \quad t \in [0,\, T]. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Здесь искомые величины — плотность ρ, давление p и скорость u — являются функциями переменных Эйлера $(x,\, t) \in [0,\, L] \times [0,\, T]$, а величина μ характеризует вязкость газа. Связь между давлением и плотностью положим степенной, т.е. $p = C_p \rho^\gamma$, где C_p — некоторая положительная константа, γ — показатель адиабаты Пуассона. Такие уравнения описывают адиабатическое сжатие газа, заключенного между двумя параллельными бесконечными пластинами, лежащими на расстоянии L друг от друга.

Введём дискретизацию задачи (3.1.1), (3.1.2) на смещённых сетках В. И. Лебедева [42; 43] с помощью полунеявной линейной схе-

мы, используя приемы, предложенные в работе [22]. Функцию скорости аппроксимируем в узлах равномерной сетки $Q_{u,\tau} = \omega_u \times \omega_\tau$, где $\omega_u = \{x_m = mh,\ m = 0, \ldots, M\}, \omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0, \ldots, N\}, h = L/M$, $\tau = T/N$, а функцию плотности — в узлах сетки $Q_{\rho,\tau} = \omega_\rho \times \omega_\tau$, где $\omega_\rho = \{x_{m+1/2} = (m + 1/2)h,\ m = 0, \ldots, M - 1\}$, смещенной по пространству относительно сетки $Q_{u,\tau}$ на полшага вправо. Положим

$$\{\zeta, u\}_i = \begin{cases} \zeta_i, \text{ если } u_i < 0; \\ \zeta_{i-1} \text{ иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что ρ_i^n аппроксимирует функцию $\rho(x,t)$ в точке $((i + 1/2)h, n\tau)$, $i = 0, \ldots, M - 1$, а u_i^n — функцию $u(x,t)$ в точке $(ih, n\tau)$, В результате разностная задача имеет вид

$$\begin{cases} \rho_t \ + \ (\{\hat{\rho}, u\}u)_x \ = \ 0, \ i = 0, \ldots, M - 1; \\ (\overline{\rho}u)_t \ + \ \dfrac{1}{4}\left(\left(\{\hat{\rho}, u\} \left(\hat{u} + \hat{u}_{(-1)} \right) u \right)_x + \left(\{\hat{\rho}, u\} \left(\hat{u} + \hat{u}_{(+1)} \right) u \right)_{\bar{x}} \right) + \\ \qquad + \ C_p D_p(\hat{\rho}, u) \ - \ \mu \hat{u}_{x\bar{x}} = 0, \quad i = 1, \ldots, M - 1, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

где

$$D_p(\rho, u) = \begin{cases} \{\rho, u\}(\ln \rho)_{\bar{x}}, \quad \gamma = 1; \\ \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}\{\rho, u\}(\rho^{\gamma-1})_{\bar{x}}, \quad \gamma > 1. \end{cases}$$

Зададим следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} &\rho_i^0 = \rho_0((i + 1/2)h),\ i = 0, \ldots, M - 1, \quad u_i^0 = u_0(ih),\ i = 1, \ldots, M - 1; \\ &u_0^n = 0,\ u_M^n = 0,\ n = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Замечание 3.1.1. *Если вынести вторые слагаемые обоих уравнений системы (3.1.3) на верхний слой, т. е. сделать схему полностью неявной, то можно показать, что имеет место энергетическое неравенство, и решение затухает из-за наличия диссипативных слагаемых.*

В данной главе рассматривается задача стабилизации по начальным данным, т. е. задача ускорения процесса выхода на стационар решения $\mathbf{w} = (\rho,\, u)$ системы (3.1.3), (3.1.4) за счет изменения начальных данных $\mathbf{w} = (\rho^0,\, u^0)$ на некоторой фиксированной подобласти $\bar{\Omega}_h \subset \Omega_h = (\omega_\rho,\, \omega_u)$.

Для решения задачи будем использовать метод нулевого приближения [44]. Пусть решение системы (3.1.3), (3.1.4) слабо отличается от стационарного решения $\mathbf{w}_{\mathrm{st}} = (\rho_{\mathrm{st}},\, 0)$, т. е. $u = \tilde{u}$, $\rho = \rho_{\mathrm{st}} + \tilde{\rho}$. Тогда можно с некоторой точностью считать, что функция $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{\rho},\, \tilde{u})$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \rho_t \;+\; \sigma_\rho u_x \;=\; 0,\; i = 0, \ldots, M-1; \\ u_t \;+ \sigma_u \hat{\rho}_{\bar{x}} - \mu_u \hat{u}_{x\bar{x}} = 0,\; i = 1, \ldots, M-1, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

полученной с помощью линеаризации уравнений (3.1.3) в окрестности стационарного решения $\mathbf{w}_{\mathrm{st}}$. Здесь и далее знак “тильда” опущен, чтобы не загромождать изложение. При этом $\sigma_\rho = \rho_{\mathrm{st}},\ \sigma_u = C_p \gamma \rho_{\mathrm{st}}^{\gamma-2}$, а $\mu_u = \mu/\rho_{\mathrm{st}}$. Метод нулевого приближения заключается в замене задачи стабилизации нелинейной системы (3.1.3), (3.1.4) на задачу стабилизации её линеаризации (3.1.5), (3.1.4) в окрестности стационарного решения $\mathbf{w}_{\mathrm{st}}$.

3.2 Стабилизация линеаризованной задачи

Специфика смещенных сеток позволяет найти решение $\mathbf{w}_m^n = (\rho_m^n,\, u_m^n)$ задачи (3.1.5), (3.1.4) методом Фурье [45; 46] в виде

$$\rho_m^n = \sum_{k=0}^{M-1} a_k^n \cos\left(\frac{\pi k \left(m + \frac{1}{2}\right) h}{L}\right), \quad u_m^n = \sum_{k=1}^{M-1} b_k^n \sin\left(\frac{\pi k m h}{L}\right). \tag{3.2.1}$$

Аналогично [25; 47] подставим разложение (3.2.1) в систему (3.1.5), получим, что для каждого $k = 1, \ldots, M-1$ система распадается на отдельные подсистемы размерности 2×2 относительно вектора искомых коэффициентов a_k^n, b_k^n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau\sigma_u r_k & 1 + \tau\mu_u r_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^{n+1} \\ b_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau\sigma_\rho r_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^n \\ b_k^n \end{pmatrix},$$

где $r_k = \frac{2}{h} \sin \frac{\pi k h}{2L}$. Простыми преобразованиями получаем

$$\Big(E - \tau A\Big) \begin{pmatrix} a_k^{n+1} \\ b_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k^n \\ b_k^n \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} \tau\sigma_\rho\sigma_u r_k^2 & -\sigma_\rho r_k (1 + \tau\mu_u r_k^2) \\ \sigma_u r_k & -\mu_u r_k^2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

Собственные числа системы (3.2.2) имеют вид $(1 - \tau\lambda_k)$, причем величины λ_k являются собственными значениями матрицы A и удовлетворяют уравнению

$$\lambda_k^2 + \lambda_k \left(\mu_u r_k^2 - \tau\sigma_\rho\sigma_u r_k^2\right) + \sigma_\rho\sigma_u r_k^2 = 0. \tag{3.2.3}$$

Тогда $\lambda_k^{(1,2)} = \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) \pm \sqrt{D(k)}}{2}$, где $D(k) = r_k^4(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)^2 - 4\sigma_\rho\sigma_u r_k^2$. Пусть $\mu_u > \tau\sigma_\rho\sigma_u$. Следовательно, $\mathrm{Re}\left(\lambda_k^{(1,2)}\right) < 0$ для всех $k = \overline{1, M-1}$. Обозначим через $k_0 < M$ наибольшее целое число, такое, что $D(k_0) \leqslant 0$. Тогда для всех $k = \overline{1, k_0 - 1}$ выполнено $D(k) < 0$, а для всех $k = \overline{k_0 + 1, M - 1}$ имеет место неравенство $D(k) > 0$. Спектр Λ матрицы A можно представить в виде объединения трех непересекающихся подмножеств: $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$, некоторые из которых могут быть пустыми.

Первое подмножество $\Lambda_1 = \{\lambda_k^{(1,2)},\ k = 1, \ldots, k_0\}$ соответствует случаю $D(k) \leqslant 0$ и содержит элементы $\lambda_k^{(1,2)} = \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) \pm \sqrt{D(k)}}{2}$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k^{(1,2)} = \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)}{2} < 0,$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_{k_0}^{(1,2)} < \mathrm{Re}\,\lambda_{k_0-1}^{(1,2)} < \ldots < \mathrm{Re}\,\lambda_1^{(1,2)} = \frac{-r_1^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)}{2}.$$

Второе подмножество состоит из элементов $\Lambda_2 = \{\lambda_k^{(1)},\ k = k_0 + 1, \ldots, M - 1\}$, где $\lambda_k^{(1)} = \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) - \sqrt{D(k)}}{2}$, причем $D(k) > 0$. Нетрудно показать, что

$$\lambda_{k_0+1}^{(1)} > \lambda_{k_0+2}^{(1)} > \ldots > \lambda_{M-1}^{(1)},$$

$$-(\pi k/L)^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) < -r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) < \lambda_k^{(1)} < \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)}{2},$$

где $k = \overline{k_0 + 1, M - 1}$. Кроме того, $\lambda_k^{(1)} \sim -(\pi k/L)^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)$ при $h \to 0$ и $k \gg 1$. Элементы третьего подмножества $\Lambda_3 = \{\lambda_k^{(2)},\ k = k_0 + 1, \ldots, M - 1\}$ имеют вид $\lambda_k^{(2)} = \frac{-r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u) + \sqrt{D(k)}}{2}$, $D(k) > 0$. Используя соотношение $\sqrt{1 - x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}$, нетрудно показать, что

$$-\frac{r_k^2(\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u)}{2} \leqslant \lambda_k^{(2)} \leqslant \frac{-\sigma_\rho\sigma_u}{\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u},$$

$$\lambda_{k_0+1}^{(2)} < \lambda_{k_0+2}^{(2)} < \ldots < \lambda_{M-1}^{(2)}.$$

Кроме того, $\lambda_k^{(2)} \sim \frac{-\sigma_\rho\sigma_u}{\mu_u - \tau\sigma_\rho\sigma_u}$ при $h \to 0$ и $k \gg 1$.

На рисунке 3.1 изображены различные действительные части точек спектра при указанных значениях шага по времени τ. Если τ находится между некоторым значением τ_{comp}, определяемым равенством $D(M - 1) = 0$,

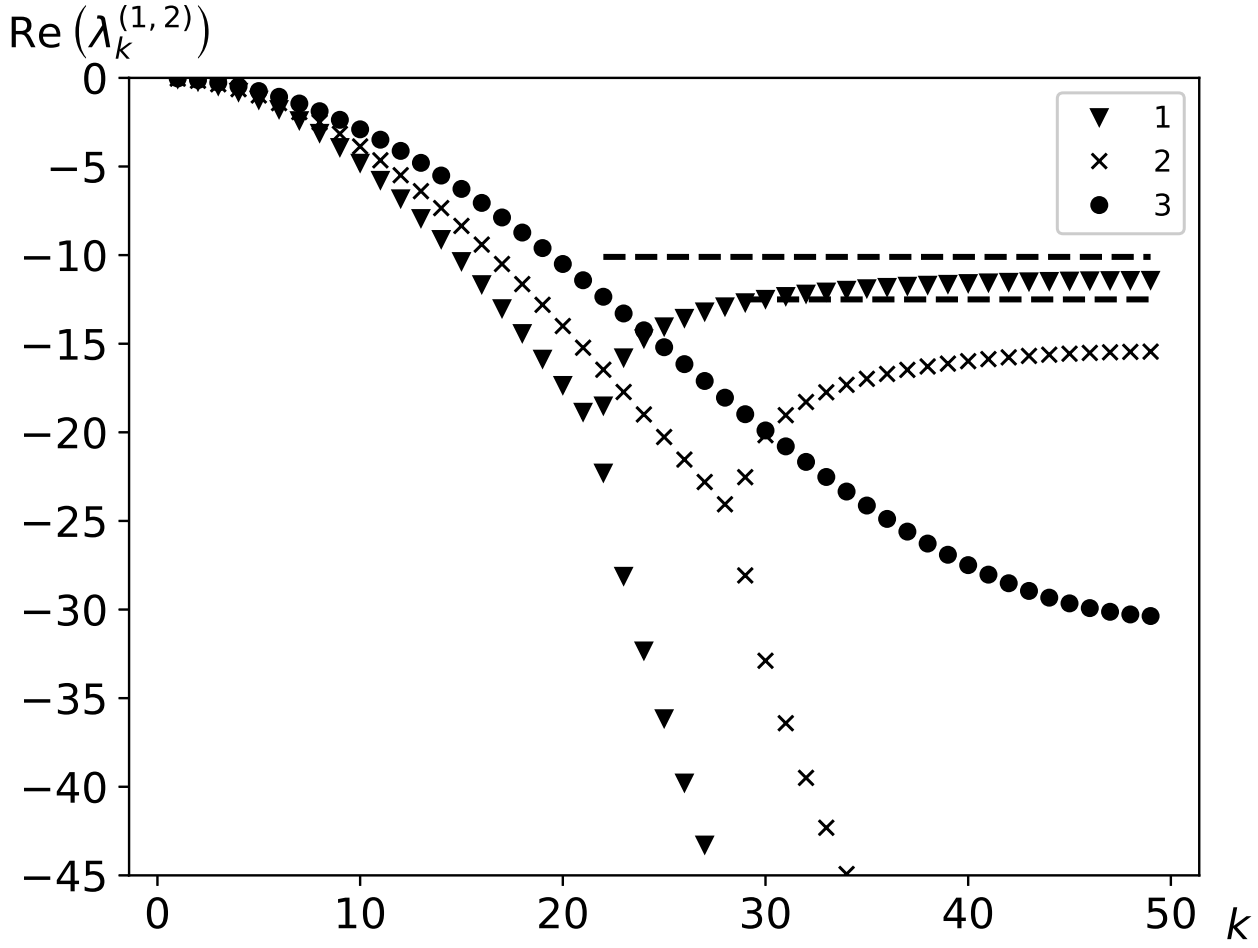

Рис. 3.1: Спектр Λ при $\sigma_\rho = \sigma_u = 1$, $\mu_u = 0.1$, $M = 50$: 1 — $\tau = 0.001$, 2 — $\tau = 0.02$, 3 — $\tau = 0.04$.

и критическим значением $\tau_{\max} = \frac{\mu_u}{\sigma_\rho \sigma_u}$, то спектр является полностью комплексным. При уменьшении шага по времени спектр матрицы A стремится к спектру аналогичной полностью неявной задачи, рассмотренной в [25; 47].

Опишем собственные векторы матрицы A. Если $k \neq k_0$, то уравнение (3.2.3) имеет два различных корня $\lambda_k^{(1,2)}$, которым соответствуют собственные векторы $\psi_k^{(1,2)} = \left(-\sigma_\rho r_k(1 + \tau\mu_u r_k^2),\ \lambda_k^{(1,2)} - \tau\sigma_\rho\sigma_u r_k^2\right)^T$. Если $D(k_0) = 0$, то матрица A имеет собственное значение λ_{k_0} кратности 2, которому соответствует собственный вектор $\psi_{k_0} = \left(-\sigma_\rho r_{k_0}(1 + \tau\mu_u r_{k_0}^2),\ \lambda_{k_0} - \tau\sigma_\rho\sigma_u r_{k_0}^2\right)^T$ и присоединенный вектор $\phi_{k_0} = (\sigma_\rho r_{k_0}/\lambda_{k_0} - \tau\sigma_\rho r_{k_0},\ 0)^T$. Тем самым доказана

Теорема 6. *Решение задачи (3.1.5), (3.1.4) может быть представлено*

в виде

$$\mathbf{w}_m^n = C_0\boldsymbol{\Psi}_0 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{M-1}\left(C_k^{(1)}\left(1-\tau\lambda_k^{(1)}\right)^{-n}\boldsymbol{\Psi}_k^{(1)} + C_k^{(2)}\left(1-\tau\lambda_k^{(2)}\right)^{-n}\boldsymbol{\Psi}_k^{(2)}\right) +$$

$$+\begin{cases} C_{k_0}^{(1)}\left(1-\tau\lambda_{k_0}\right)^{-n}\boldsymbol{\Psi}_{k_0} + C_{k_0}^{(2)}\left(1-\tau\lambda_{k_0}\right)^{-n}\left(n\boldsymbol{\Psi}_{k_0}+\boldsymbol{\Phi}_{k_0}\right), \ D(k_0)=0;\\ C_{k_0}^{(1)}\left(1-\tau\lambda_{k_0}^{(1)}\right)^{-n}\boldsymbol{\Psi}_{k_0}^{(1)} + C_{k_0}^{(2)}\left(1-\tau\lambda_{k_0}^{(2)}\right)^{-n}\boldsymbol{\Psi}_{k_0}^{(2)}, \ D(k_0)\neq 0, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

где $\boldsymbol{\Psi}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Psi}_k^{(1,2)} = \begin{pmatrix} -\sigma_\rho r_k(1+\tau\mu_u r_k^2)\cos\left(\frac{\pi k\left(m+\frac12\right)h}{L}\right)\\ (\lambda_k^{(1,2)} - \tau\sigma_\rho\sigma_u r_k^2)\sin\left(\frac{\pi k m h}{L}\right)\end{pmatrix}$,

$k=1,\dots,M-1$, $\boldsymbol{\Psi}_{k_0} = \begin{pmatrix} -\sigma_\rho r_{k_0}(1+\tau\mu_u r_{k_0}^2)\cos\left(\frac{\pi k_0\left(m+\frac12\right)h}{L}\right)\\ (\lambda_{k_0} - \tau\sigma_\rho\sigma_u r_{k_0}^2)\sin\left(\frac{\pi k_0 m h}{L}\right)\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{k_0} = \begin{pmatrix} (\sigma_\rho r_{k_0}/\lambda_{k_0} - \tau\sigma_\rho r_{k_0})\cos\left(\frac{\pi k_0\left(m+\frac12\right)h}{L}\right)\\ 0\end{pmatrix}$. *Коэффициенты* C_0, $C_k^{(1,2)}$, $k=1,\dots,M-1$, *однозначно определяются из начальных условий* $\mathbf{w}^0$.

Таким образом, решение задачи (3.1.5), (3.1.4) экспоненциально затухает со скоростью $\ln(1-\tau\delta)>0$, т. е.

$$\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\rm st}\|_{2,h} \leqslant \|\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}_{\rm st}\|_{2,h}\, e^{-n\ln(1+\tau\delta)}, \quad \delta = -\max_{0<k<M}\operatorname{Re}\lambda_k^{(1,2)}.$$

Опишем процедуру увеличения скорости выхода на стационар линеаризованной задачи. Перенумеруем собственные значения матрицы A таким образом, чтобы для некоторого фиксированного i_0 были выполнены следующие соотношения:

$$\operatorname{Re}\lambda_1^+ \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2^+ \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{i_0}^+ = -\delta_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\lambda_j^- < -\delta_1 \text{ при } j>i_0, \quad \delta_1>\delta.$$

Тогда множество Λ можно разбить на два непересекающихся подмножества $\Lambda_+ = \{\lambda_0^+=0,\ \lambda_j^+,\ j=1,\dots,i_0\}$ и $\Lambda_- = \{\lambda_j^-,\ j>i_0\}$. Следовательно, исходное пространство H сеточных функций, определенных в узлах Ω_h, раскладывается в прямую сумму подпространств $H = H_+ \oplus H_-$, где

$$H_+ = \operatorname{span}\langle \boldsymbol{\Psi}_j^+ : \lambda_j^+ \in \Lambda_+\rangle, \quad H_- = \operatorname{span}\langle \boldsymbol{\Psi}_j^- : \lambda_j^- \in \Lambda_-\rangle.$$

Таким образом, для обеспечения выхода на стационар со скоростью, равной $\ln(1-\tau\delta_1)$, необходимо спроектировать начальные условия (3.1.4) на подпространство H_-. Отметим, что в точке $\frac{-\sigma_\rho\sigma_u}{\mu_u-\tau\sigma_\rho\sigma_u}$ имеет место сгущение спектра, поэтому нельзя обеспечить скорость сходимости выше $\ln\frac{\mu_u}{\mu_u-\tau\sigma_\rho\sigma_u}$.

Зафиксируем некоторое i_0 и выберем в соответствующем пространстве H_+ действительный базис

$$\{\xi_j,\ j=0,\dots,j_0\}=\{1\}\cup\{\operatorname{Re}\boldsymbol{\Psi}_i^+,\ i=0,\dots,i_0\}\cup\{\operatorname{Im}\boldsymbol{\Psi}_i^+\neq 0,\ i=0,\dots,i_0\}.$$

Кроме того, определим набор функций $\{\mathbf{e}_j,\ j=0,\dots,j_0\}$, задающих пространство допустимых смещений $\operatorname{span}\langle\mathbf{e}_j,\ j=0,\dots,j_0\rangle$ следующим образом:

$$(\mathbf{e}_j)_m=\begin{cases}(\xi_j)_m, & \text{если } x_m\in\bar\Omega_h;\\ 0 \text{ иначе.}\end{cases}$$

Для ускорения стабилизации будем добавлять к начальным условиям (3.1.4) поправки вида $\mathbf{l}=\sum_{j=0}^{j_0}c_j\mathbf{e}_j$, получая при этом новое начальное условие $\tilde{\mathbf{w}}^0=\mathbf{w}^0+\sum_{j=0}^{j_0}c_j\mathbf{e}_j$, где коэффициенты $c_0,\dots,c_{j_0}$ ищутся из условий $(\tilde{\mathbf{w}}^0-\mathbf{w}_{\mathrm{st}},\,\xi_j)=0,\ j=0,\dots,j_0$.

Отметим, что данный алгоритм стабилизации по начальным данным, а также свойства системы линейных уравнений относительно коэффициентов $c_0,\dots,c_{j_0}$ подробно исследованы в работах [26; 48] в контексте задачи стабилизации по граничным условиям, которая сводится к задаче стабилизации по начальным данным при помощи подхода, разработанного А. В. Фурсиковым (см., например, [49]).

3.3 Численный эксперимент

В данном разделе численно исследуем влияние различных параметров на скорость стабилизации нелинейной задачи с начальными условиями типа скачок скорости или плотности. Дополним систему (3.1.3) начальными условиями типа скачок скорости

$$\begin{aligned}&\rho_m^0=1,\quad m=0,\dots,M-1;\\ &u_m^0=\begin{cases}0.1,\ |x_m-L/2|<\pi/14;\\ 0,\ \text{иначе,}\end{cases}\qquad m=1,\dots,M-1\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

или начальными условиями типа скачок плотности

$$\rho_m^0 = \begin{cases} 1.1, \ |x_{m+1/2} - L/2| < \pi/14; \\ 1, \ \text{иначе}, \end{cases} \qquad m = 0, \ldots, M-1; \tag{3.3.2}$$
$$u_m^0 = 0, \quad m = 1, \ldots, M-1$$

а также краевыми условиями:

$$u_0^n = u_M^n = 0, \ n \geqslant 0. \tag{3.3.3}$$

Задача (3.1.3), (3.3.1), (3.3.3) имеет стационарное решение $(1,\, 0)$, а задача (3.1.3), (3.3.2), (3.3.3) — $((L + 0.1\pi/7)/L, 0)$. Функции сдвига определим на промежутке $[0,\, X_1] \cup [X_2,\, L]$, перепроектирование решения на устойчивое подпространство H_- линеаризованной задачи будем производить на каждом шаге по времени. Здесь и далее будем называть временем стабилизации время, необходимое для того, чтобы норма $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\text{st}}\|_\infty$ не превышала 10^{-5}. Для данной задачи проведем несколько численных экспериментов.

Первый эксперимент посвящен исследованию влияния числа вырезаемых гармоник и размера носителя функций сдвига на стабилизацию.

В таблицах 3.1 и 3.2 приведена зависимость времени стабилизации при $\gamma = 1$ и $\gamma = 1.4$ соответственно от числа вырезаемых гармоник j_0 в действительном базисе и размера области L. Показатель адиабаты Пуассона, равный 1, встречается при описании движения газа высокого давления, например, в трубопроводе, случай $\gamma = 1.4$ соответствует адиабатическому сжатию воздуха. При этом $X_1 = (L - \pi)/2$, $X_2 = (L + \pi)/2$. Таким образом начальные условия не меняются на отрезке длиной π, расположенном в центре исходной области. В данном эксперименте шаг по пространству h равен $\pi/600$, шаг по времени τ равен 0.01, $C_p = 1$, вязкость $\mu = 0.1$. В таблице опущены значения в тех случаях, когда полученные поправки приводили к нефизичному решению, а именно к отрицательной плотности. Отметим, что в силу увеличения нормы поправок $\mathbf{l}$ при увеличении числа j_0 вырезаемых гармоник и нефизичности решения с отрицательной плотностью, даже увеличивая носитель функций сдвига, не удалось обеспечить сколь угодно большую скорость стабилизации.

j_0	1.2π	1.4π	1.6π	2π	3π	4π
1	215.92	287.09	368.29	554.64	1175.91	2001.25
2	66.58	90.39	118.39	186.79	429.89	771.87
3	49.74	51.45	51.04	76.25	163.56	270.34
5	28.17	37.23	47.52	71.82	145.44	242.08
6		16.09	19.49	27.75	56.01	94.54
7			26.0	32.12	58.99	96.22
9			19.6	29.36	58.98	96.2
11				20.71	34.05	52.73
13					32.82	52.68
15					22.29	35.42
17					21.45	34.09
19						25.71
21						24.53
23						19.79
25						18.89

Таблица 3.1: Зависимость времени стабилизации от числа вырезаемых гармоник и размера области при постоянном шаге по пространству и $\gamma = 1$.

j_0	1.2π	1.4π	1.6π	2π	3π	4π
1	211.31	283.62	362.38	548.52	1157.3	1967.82
2	56.69	76.8	100.43	157.71	359.57	641.12
3	50.78	52.77	51.66	76.06	164.95	273.04
5	28.05	37.61	47.25	69.67	144.2	238.28
6		15.93	19.23	27.48	53.6	89.9
7			26.26	32.46	57.9	96.31
9			19.51	29.08	57.89	94.15
11					33.55	52.15
13					32.32	52.13
15					23.46	34.75
17					21.62	34.64
19						25.51
21						24.56
23						20.11
25						19.16

Таблица 3.2: Зависимость времени стабилизации от числа вырезаемых гармоник и размера области при постоянном шаге по пространству и $\gamma = 1.4$.

Второй эксперимент затрагивает влияние вязкости на стабилиза-

цию. В данном эксперименте используются следующие параметры: $M = 400,\ L = 1.6\pi,$ число вырезаемых гармоник в действительном базисе $j_0 = 5,\ X_1 = 0.3\pi,\ X_2 = 1.3\pi,\ C_p = 1,\ \gamma = 1,\ \tau = 0.005$. Перепроектирование на устойчивое подпространство H_- линеаризованной задачи осуществляется на каждом шаге по времени. На рисунке 3.2 изображена зависимость нормы $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\text{st}}\|_\infty$ решения задачи (3.1.3), (3.3.1), (3.3.3) от времени при различных значениях вязкости μ. В таблицах 3.3 и 3.4 приведено время затухания решения решения задачи (3.1.3), (3.3.3) с начальными условиями (3.3.1) и (3.3.2) соответственно. Таким образом, величина вязкости существенно влияет на скорость стабилизации.

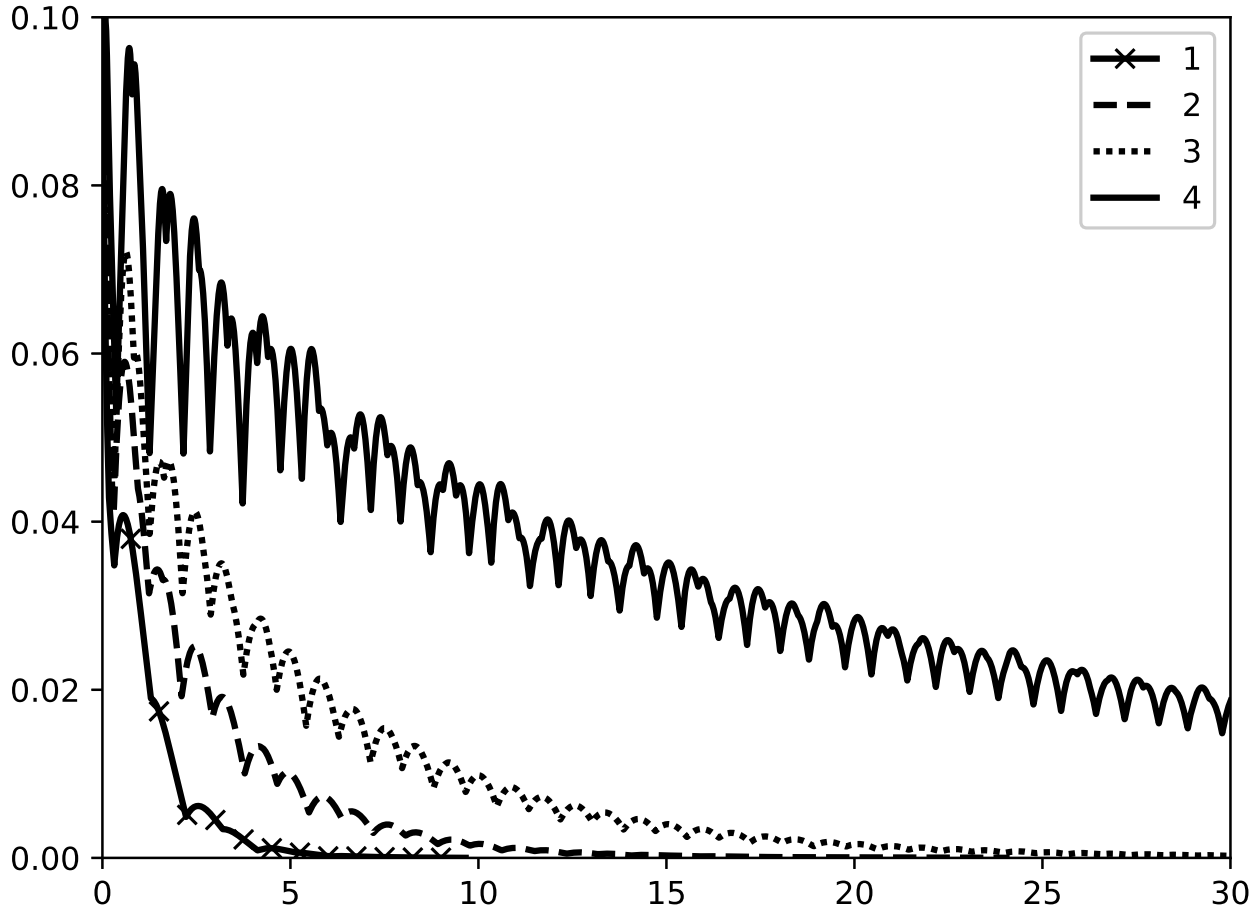

Рис. 3.2: Норма $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\text{st}}\|_\infty$ в зависимости от времени: кривая 1 соответствует $\mu = 0.5$, 2 — 0.2, 3 — 0.1, 4 — 0.02.

Вязкость μ	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Без управления	72.39	182.48	365.84	730.155	1803.32	3499.755
С управлением	9.66	24.125	47.49	94.345	234.21	457.035

Таблица 3.3: Время стабилизации в зависимости от вязкости для начальных условий типа скачок скорости.

Вязкость μ	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Без управления	19.975	47.36	95.055	190.44	471.865	934.235
С управлением	5.84	13.935	27.55	55.09	136.67	268.58

Таблица 3.4: Время стабилизации в зависимости от вязкости для начальных условий типа скачок плотности.

В третьем эксперименте исследуется влияние величины шага по времени τ на скорость стабилизации задачи (3.1.3), (3.3.3) с начальными условиями (3.3.1) или (3.3.2). В данном эксперименте используются следующие параметры: $M = 400$, $L = 1.6\pi$, число вырезаемых гармоник в действительном базисе $j_0 = 5$, $X_1 = 0.3\pi$, $X_2 = 1.3\pi$, $C_p = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0.05$. На рисунке 3.2 изображена зависимость нормы $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\text{st}}\|_\infty$ решения задачи (3.1.3), (3.3.1), (3.3.3) от времени при различных значениях шага по времени τ. В таблицах 3.5 и 3.6 приведено время затухания решения для начальных условий (3.3.1) и (3.3.2) соответственно. Результаты расчетов показали, что величина шага по времени практически не влияет на скорость стабилизации (исключением является случай начальных условий типа скачок плотности при отсутствии управления), не смотря на то, что шаг по времени существенно влияет на спектр линеаризованной системы. Однако, при превышении критического значения, определяемого соотношением $\mu = \tau\sigma_\rho\sigma_u$ (в данном эксперименте это 0.05), стабилизация перестает ускоряться, тем не менее можно выбрать шаг по времени довольно близким к этому значению без ощутимых эффектов, оказывающих воздействие на стабилизацию задачи.

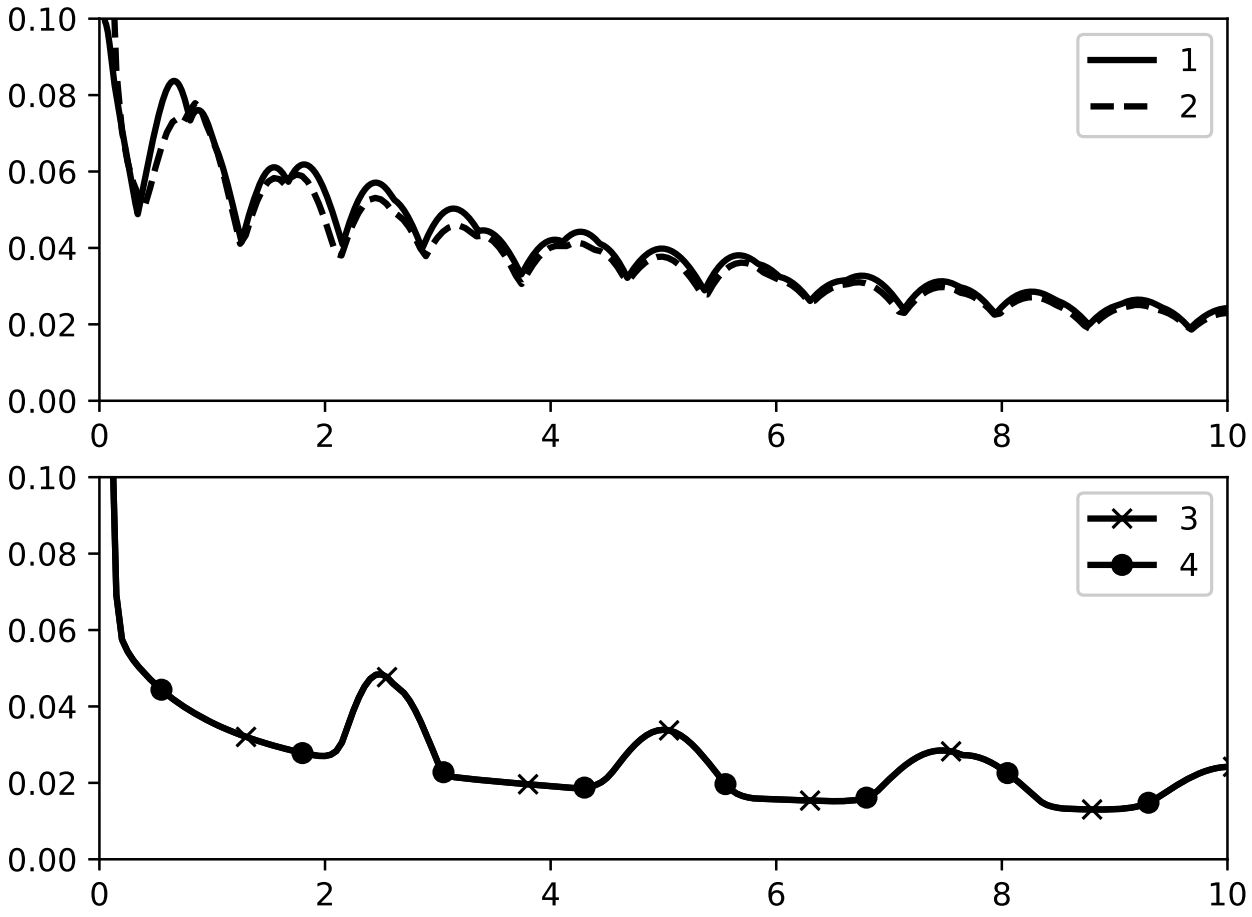

Рис. 3.3: Норма $\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_{\text{st}}\|_\infty$ в зависимости от времени: кривая 1 соответствует $\tau = 0.005$, 2 — 0.0499, кривые 3 и 4 соответствуют параметру $\tau = 0.05$, но при получении кривой 4 не осуществлялось проектирование на H_-.

Шаг по времени τ	0.005	0.01	0.02	0.04	0.0499	0.05	0.06
Без управления	730.155	730.18	730.22	730.28	730.29	730.25	725.28
С управлением	94.345	94.37	94.4	94.48	94.4607	730.25	725.28

Таблица 3.5: Время стабилизации в зависимости от величины шага по времени для начальных условий типа скачок скорости.

Шаг по времени τ	0.005	0.01	0.02	0.04	0.0499	0.05	0.06
Без управления	190.44	195.56	206.08	247.4	267.5638	270.15	287.7
С управлением	55.09	55.14	56.32	57.68	59.0816	270.15	287.7

Таблица 3.6: Время стабилизации в зависимости от величины шага по времени для начальных условий типа скачок плотности.

Наконец, в четвертом эксперименте исследуется влияние частоты перепроектирования решения на устойчивое подпространство H_- линеаризованной

задачи и числа вырезаемых гармоник j_0 в действительном базисе на скорость стабилизации задачи (3.1.3), (3.3.1), (3.3.3). В данном эксперименте используются следующие параметры: $M = 600,\ L = 3\pi,\ X_1 = \pi,\ X_2 = 2\pi,\ C_p = 1,$ $\gamma = 1,\ \mu = 0.1,\ \tau = 0.01$. Время затухания решения данной задачи без управления составляет 1180.52. В таблицах 3.7 и 3.8 приведено время стабилизации и общее число проектирований на пространство H_- в зависимости от частоты перепроектирования и количества вырезаемых гармоник. Результаты расчетов показали, что перепроектирование на каждом шаге по времени не является необходимым, в том числе при малом числе вырезаемых гармоник достаточно перепроектировать решение всего два раза, тогда как при большом числе гармоник достаточно всего пяти раз. В то же время дальнейшее повышение частоты перепроектирования выше, чем один раз на 500 шагов по времени не приносит существенного улучшения результатов.

Частота	Число вырезаемых гармоник							
	3	5	6	7	9	11	13	15
1	161.47	145.45	55.94	59.16	59	34.04	32.83	22.29
10	161.47	145.45	55.04	59.16	59	34.05	32.83	23.3
20	161.47	145.45	55.03	59.16	59	34.06	32.83	23.35
50	161.47	145.45	54.29	59.16	59	34.09	32.83	24.52
100	155.69	145.45	54.45	59.16	59	34.12	32.84	23.48
200	155.68	145.45	56.06	59.16	59	34.21	32.85	25.5
500	155.69	145.45	48.87	59.19	58.99	32.83	32.83	23.79
1000	161.48	145.46	105.47	59.12	59	36.75	32.71	34
2000	161.48	145.46	80.74	59	59.01	43.45	42.11	55
5000	161.48	145.44	144.67	73	65.18	68.21	66.47	108.19
10000	161.46	143.92	140.01	104.58	104.53	113.92	112.65	158.41
20000	214.87	213.26	213.31	137.83	128.74	215.12	213.84	315.38
50000	322.76	322.83	322.78			509.74	509.13	511.83
100000						699.93	671.58	1005.47
200000								1020.51

Таблица 3.7: Время стабилизации в зависимости от частоты перепроектирования и количества вырезаемых гармоник.

Частота	Число вырезаемых гармоник							
	3	5	6	7	9	11	13	15
1	16148	14546	5595	5917	5901	3405	3284	2230
10	1615	1455	551	592	591	341	329	234
20	808	728	276	296	296	171	165	117
50	323	291	109	119	119	69	66	50
100	156	146	55	60	60	35	33	24
200	78	73	29	30	30	18	17	13
500	32	30	10	12	12	7	7	5
1000	17	15	11	6	6	4	4	4
2000	9	8	5	3	3	3	3	3
5000	4	3	3	2	2	2	2	3
10000	2	2	2	2	2	2	2	2
20000	2	2	2	1	1	2	2	2
50000	1	1	1			2	2	2
100000						1	1	2
200000								1

Таблица 3.8: Общее количество проектирований на H_- в зависимости от частоты перепроектирования и количества вырезаемых гармоник.

3.4 Выводы

Предложен алгоритм стабилизации нелинейных уравнений газовой динамики в сеточном случае методом нулевого приближения. Полученные теоретические результаты о структуре инвариантных подпространств и оценки на спектр линеаризованной задачи для полунеявной разностной схемы и как следствие на скорость её стабилизации позволяют обосновать алгоритм как для линейной задачи, так и для малых возмущений полной нелинейной системы. Проведены численные эксперименты по исследованию зависимости стабилизации исходных нелинейных уравнений от различных чисел вырезаемых гармоник, от размера расширенной области, от коэффициента вязкости и от величины шага по времени. Результаты расчетов согласуются, с априорными оценками, проведенными для линеаризованной задачи. Однако вопреки ожиданиям было получено, что для нелинейной задачи изменение частоты перепроектирования и увеличение шага по времени (в разумных пределах с точки зрения точности аппроксимации разностной схемы) не оказывают

существенного влияния на процесс стабилизации.

Глава 4

Двумерные уравнения газовой динамики

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений динамики баротропного газа [41] в цилиндре $\Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область с границей Γ

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ &\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

с уравнением состояния

$$p = a\rho^{\gamma}, \quad \gamma > 1 \tag{4.1.2}$$

начальными

$$\begin{aligned} &\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega, \\ &\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

и граничными условиями

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \ \mathbf{x} \in \Gamma, \ t \geqslant 0, \tag{4.1.4}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости, p — давление газа, a — некоторая положительная константа, которую без ограничения общности будем считать равной единице, γ — показатель адиабаты Пуассона.

Для задачи (4.1.1)–(4.1.4) в предположении положительности плотности

можно получить "энергетическое" тождество:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho(x,t)\mathbf{u}^2(x,t)dx+\frac{1}{\gamma-1}\int\limits_{\Omega}p(x,t)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\rho_0\mathbf{u}_0^2dx+\frac{1}{\gamma-1}\int\limits_{\Omega}p_0dx. \quad (4.1.5)$$

Замечание 4.1.1. *Поскольку в дифференциальном случае нет гарантии положительности функции плотности, то слово "энергетическое" здесь взято в кавычки.*

Аналогично [22] будем строить разностную схему таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим свойствам:

- Решение разностной схемы должно существовать.
- Из соотношения (4.1.5) следует ограниченности нормы $\|\rho^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}$. Решение разностной схемы должно удовлетворять аналогичному свойству.
- Сеточная функция плотности должна быть строго положительна.
- Разностная схема должна обеспечивать выполнение сеточного аналога закона сохранения массы.

4.2 Аппроксимация на ортогональных сетках

Перед тем как построить разностную схему на треугольных сетках, рассмотрим упрощённый вариант этой схемы на ортогональных сетках в области $\Omega=[0,1]\times[0,1]$. Введём сетку Ω_h^2, равномерную по каждому координатному направлению с шагом $h_\alpha=1/M_\alpha$, $\alpha=\overline{1,2}$ таким образом, что узел узел $x_{\overline{m}}$ с номером $\overline{m}=(i,\,j)$ расположен в точке $(ih_1,\,jh_2)$, где $i=\overline{0,M_1}$, $j=\overline{0,M_2}$.

4.2.1 Аппроксимация уравнения неразрывности

Дивергенцию величины $\rho\mathbf{u}$ в уравнении неразрывности аппроксимируем разностями (1.1.1):

$$\operatorname{div}{}^h\rho\mathbf{u}=\langle\rho u_1\rangle_{\overset{\circ}{x}_1}+\langle\rho u_2\rangle_{\overset{\circ}{x}_2}. \quad (4.2.1)$$

Кроме того, определим следующую величину:

$$\left(\langle u_k\rangle\rho^{\circ}_{x_k}\right)^{\circ}_{x_k} = \begin{cases} \dfrac{\langle u_k\rangle^{+k}(\rho^{+k}-\rho) - \langle u_k\rangle^{-k}(\rho-\rho^{-k})}{h_k^2}, \\ \qquad\qquad \text{если } x^{\pm k} \text{ лежат в области } \Omega_h^2; \\ \dfrac{\langle u_k\rangle^{+k}(\rho^{+k}-\rho) - \langle u_k\rangle^{-k}(\rho-\rho^{-k})}{h_k^2/2}, \text{ иначе;} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

где $k = \overline{1,2}$, и в случае если узел $x^{\pm k}$ лежит вне области Ω_h^2, считаем величину $\langle u_k\rangle^{\pm k}(\rho^{\pm k}-\rho)$ раной нулю в силу краевых условий (4.1.4). Для того, чтобы разностная схема удовлетворяла требуемым свойствам, будем добавлять к выражению (4.2.1) слагаемые вида (4.2.2) по следующим правилам:

- Если $u_k > 0$, то вычтем из (4.2.1) величину $h_k\left(\langle u_k\rangle\rho^{\circ}_{x_k}\right)^{\circ}_{x_k}$, где $k = \overline{1,2}$. Если $u_k^{+k} > 0$ и $u_k^{-k} > 0$, то получаем обычную разность "против потока" с аппроксимацией порядка $O(h_k)$.

- Если $u_k < 0$, то прибавим к (4.2.1) величину $h_k\left(\langle u_k\rangle\rho^{\circ}_{x_k}\right)^{\circ}_{x_k}$, где $k = \overline{1,2}$. Аналогично, если $u_k^{+k} < 0$ и $u_k^{-k} < 0$, то получаем обычную разность "против потока" с аппроксимацией порядка $O(h_k)$.

- Если величины u_k и u_k^{+k}, $k = \overline{1,2}$ противоположены по знаку, то заменим в выражении (4.2.1) центральную разность направленной, а именно вместо величины $\langle\rho u_k\rangle^{+k}$ используем величину $\rho\langle u_k\rangle^{+k}$ если $\langle u_k\rangle^{+k} > 0$ и величину $\rho^{+k}\langle u_k\rangle^{+k}$ в противном случае. Кроме того, не будем добавлять часть слагаемого (4.2.2), а именно величину вида $\langle u_k\rangle^{+k}(\rho^{+k}-\rho)/h_k$. В силу того, что величины u_k и u_k^{+k} в данном случае имеют порядок $O(h_k)$, то получаем аппроксимацию порядка $O(h_k)$.

- Если величины u_k и u_k^{-k}, $k = \overline{1,2}$ противоположены по знаку, то заменим в выражении (4.2.1) центральную разность направленной, а именно вместо величины $\langle\rho u_k\rangle^{-k}$ используем величину $\rho\langle u_k\rangle^{-k}$ если $\langle u_k\rangle^{-k} < 0$ и величину $\rho^{-k}\langle u_k\rangle^{-k}$ в противном случае. Кроме того, не будем добавлять часть слагаемого (4.2.2), а именно величину вида $\langle u_k\rangle^{-k}(\rho^{-k}-\rho)/h_k$. В силу того, что величины u_k и u_k^{-k} в данном случае имеют порядок $O(h_k)$, то получаем аппроксимацию порядка $O(h_k)$.

Введём следующие обозначения:

$$\{\rho u_k\}^{\pm k} = \begin{cases} 0, \text{ если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h^2; \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \mp \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), \text{ если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} > 0; \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \pm \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), \text{ если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} < 0; \\ \rho \langle u_k \rangle^{\pm k}, \text{ если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} > 0; \\ \rho^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k}, \text{ если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} \leqslant 0, \end{cases}$$

где $k = \overline{1,2}$ и $\delta^{\pm k} = \operatorname{sign}(x_k^{\pm k} - x_k)$. Определим сеточный оператор $A(\mathbf{u}) : \mathcal{R}(\Omega_h^2) \to \mathcal{R}(\Omega_h^2)$ следующим образом:

$$A(\mathbf{u})\rho = \sum_{k=1}^{2} \{\rho u_k\}_{\overset{\circ}{x}_k},$$

где разность $\{\rho u_k\}_{\overset{\circ}{x}_k}$ определяется аналогично (1.1.1). Для аппроксимации уравнения неразрывности рассмотрим полностью неявную двухслойную разностную схему

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0. \tag{4.2.3}$$

Утверждение 4.2.1. *Аппроксимация (4.2.3) имеет порядок $O(\tau) + O(h)$ (по построению).*

Аналогично [22], докажем положительность сеточной функции плотности и выполнение сеточного аналога закона сохранения массы.

Теорема 7. *Аппроксимация (4.2.3) гарантирует положительность сеточной функции плотности, т. е. при выполнении условий $\rho_{i,j}^0 > 0$ для любых $i = \overline{0, M_1}$, $j = \overline{0, M_2}$ имеет место неравенство $\rho_{i,j}^n > 0$ при любых $i = \overline{0, M_1}$, $j = \overline{0, M_2}$ и $n > 0$.*

Доказательство. Отметим свойства сеточного оператора $A(\mathbf{u})$:

- Сеточный оператор $A(\mathbf{u})$ является матрицей размера $(M_1 + 1)(M_2 + 1) \times (M_1 + 1)(M_2 + 1)$.
- На диагонали стоят неотрицательные элементы.
- Вне диагонали стоят неположительные элементы.

- Имеет место тождество $\sum\limits_{i=0}^{M_1} h_{1i}(A(\mathbf{u}))_{ij} = 0,\ j = \overline{0, M_2}$.

Таким образом, сеточный оператор $A(\mathbf{u})$ удовлетворяет условиям теоремы 1, значит $(E + \tau A(\mathbf{u}))$ является M-матрицей. Следовательно у обратной матрицы все элементы неотрицательны, причём в каждой строке есть хотя бы один положительный элемент. Тогда если $\rho^0 > 0$, то сеточная функция плотности будет положительной на $(n+1)$-м шаге по времени при любых шагах по времени и пространству. Теорема доказана.

Теорема 8. *Аппроксимация (4.2.3) обеспечивает выполнение сеточного закона сохранения массы, т. е.*

$$\sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} h_{1i}h_{2j}\hat{\rho}_{i,j} = \sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2} h_{1i}h_{2j}\rho^0_{i,j}.$$

Доказательство. Следует из тождества $\sum\limits_{i=0}^{M_1} h_{1i}(A(\mathbf{u}))_{ij} = 0,\ j = \overline{0, M_2}$. Теорема доказана.

Замечание 4.2.1. *Заметим, что теоремы 7 и 8 будут верны и в том случае, если в аппроксимации (4.2.3) уравнения неразрывности взять скорость с нижнего слоя.*

4.2.2 Аппроксимация уравнений движения

Уравнения движения аппроксимируем следующим образом:

$$(\rho\mathbf{u})_t + \sum_{k=1}^{2}\left(\{\hat{\rho}\hat{u}_k\}\langle\hat{\mathbf{u}}\rangle\right)_{\mathring{x}_k} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{\rho}\nabla_h\hat{\rho}^{\gamma-1} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\sum_{\substack{k=-2\\k\neq 0}}^{2}\psi^k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \quad (4.2.4)$$

где $\nabla_h g = \left(\langle g\rangle_{\mathring{x}_1}, \langle g\rangle_{\mathring{x}_2}\right)$, а

$$\psi^{\pm k}(\rho, u_q, g) = \frac{1}{2h_{ki_k}}\begin{cases} 0, \text{ если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h^2; \\ -(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), \text{ если } u_k > 0 \text{ и } u_k^{\pm k} > 0; \\ (\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), \text{ если } u_k < 0 \text{ и } u_k^{\pm k} < 0; \\ 0, \text{ если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) > 0; \\ \delta^{\pm k}(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), \text{ если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и} \\ \qquad\qquad \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) < 0, \end{cases}$$

$q = \overline{1,2}$, $\psi^{\pm k}(\rho, \mathbf{u}, g) = \Big(\psi^{\pm k}(\rho, u_1, g), \psi^{\pm k}(\rho, u_2, g)\Big)$ для произвольной сеточной функции g, величина h_{ki_k} определяется формулой (1.1.2). Второе слагаемое (4.2.4) аппроксимирует конвективные члены теми же направленными разностями, что и в уравнении неразрывности, а предпоследнее слагаемое аппроксимирует градиент давления. Отметим, что величина $\psi^k(\hat\rho, \hat{\mathbf{u}}, \hat\rho^{\gamma-1})$, $k \in \{1, 2, -1, -2\}$ имеет порядок $O(h)$. Таким образом, доказано

Утверждение 4.2.2. *Аппроксимация (4.2.4) имеет порядок* $O(\tau) + O(h)$.

Докажем, что норма $\|(\rho)^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}(\Omega_h^2)}$ равномерно ограничена по времени. В самом деле, умножим уравнение (4.2.3) на $-\frac{1}{2}\tau\hat{\mathbf{u}}^2$, а уравнение (4.2.4) на $\tau\hat{\mathbf{u}}$ и сложим. Здесь и далее в пределах данного раздела опуская подпись в скалярном произведении $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}(\Omega_h^2)}$, получим равенство

$$-\frac{1}{2}\tau(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2) + \tau((\rho\mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2}\tau\left(\sum_{k=1}^{2}\{\hat\rho\hat u_k\}_{\mathring{x}_k}, \hat{\mathbf{u}}^2\right) + \tau\left(\sum_{k=1}^{2}\big(\{\hat\rho\hat u_k\}\langle\hat{\mathbf{u}}\rangle\big)_{\mathring{x}_k}, \hat{\mathbf{u}}\right) +$$
$$+ \tau\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big(\hat\rho\nabla_h\hat\rho^{\gamma-1}, \hat{\mathbf{u}}\Big) + \tau\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\sum_{\substack{k=-2\\k\neq 0}}^{2}\psi^k(\hat\rho, \hat{\mathbf{u}}, \hat\rho^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}}\right) = 0. \quad (4.2.5)$$

Простые преобразования дают

$$-\frac{1}{2}\tau\left(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2\right) + \tau\left((\rho\mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}\right) = \frac{1}{2}\tau\left(\rho, \mathbf{u}^2\right)_t + \frac{1}{2}\left(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2}\{\hat\rho\hat u_k\}_{\mathring{x}_k}, \hat{\mathbf{u}}^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{2}\big(\{\hat\rho\hat u_k\}\langle\hat{\mathbf{u}}\rangle\big)_{\mathring{x}_k}, \hat{\mathbf{u}}\right). \quad (4.2.6)$$

Нетрудно показать, что

$$\Big(\hat\rho\nabla_h\hat\rho^{\gamma-1}, \hat{\mathbf{u}}\Big) + \left(\sum_{\substack{k=-2\\k\neq 0}}^{2}\psi^k(\hat\rho, \hat{\mathbf{u}}, \hat\rho^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}}\right) = -\left(\sum_{k=1}^{2}\{\hat\rho\hat u_k\}_{\mathring{x}_k}, \hat\rho^{\gamma-1}\right). \quad (4.2.7)$$

С учётом равенств (4.2.6) и (4.2.7), преобразуем выражение (4.2.5) к виду

$$\frac{1}{2}\tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2) + \tau\frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_t, \hat\rho^{\gamma-1}) = 0. \quad (4.2.8)$$

Далее проведём рассуждения точно так же, как в [22]. Оценим величину $\rho\hat\rho^{\gamma-1}$ с помощью неравенства Юнга с показателями γ и $\frac{\gamma}{\gamma-1}$:

$$\rho\hat\rho^{\gamma-1} \leqslant \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma + \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat\rho^\gamma.$$

Тогда

$$\tau\frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_t,\hat{\rho}^{\gamma-1})\geqslant\frac{1}{\gamma-1}[(\hat{\rho}^{\gamma},1)-(\rho^{\gamma},1)].$$

Из последнего неравенства и (4.2.8) следует

$$\frac{1}{2}\tau(\rho,\mathbf{u}^2)_t+\frac{1}{2}(\rho,(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^2)+\frac{1}{\gamma-1}[(\hat{p},1)-(p,1)]\leqslant 0. \tag{4.2.9}$$

Просуммировав выражение (4.2.9) по всем шагам по времени, получаем

Теорема 9. *Решение разностной задачи (4.2.3), (4.2.4) с заданным на границе условием непротекания удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{2}(\rho^{n+1},(\mathbf{u}^{n+1})^2)+\frac{1}{\gamma-1}(p^{n+1},1)+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}(\rho^m,(\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m)^2)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\rho^0,(\mathbf{u}^0)^2)+\frac{1}{\gamma-1}(p^0,1).$$

4.3 Аппроксимация на треугольной сетке

Теперь перейдём к аппроксимации уравнений (4.1.1) на треугольных сетках. Для построения сеточных уравнений будем использовать обозначения, введённые в разделе 1.2. Кроме того, введём следующие ограничения на сетку:

- Сетка $\Omega_h^{\Delta,2}$ должна состоять из преимущественно остроугольных треугольников.
- Сетка должна быть квазиравномерной, то есть размер ячеек не должен меняться значительно, а именно должны выполняться следующие условия

$$\frac{\max\limits_{\omega_i\in\Omega_h^{\Delta,2}}\max\limits_{k=\overline{1,3}}\Delta n_{i_k}}{\min\limits_{\omega_i\in\Omega_h^{\Delta,2}}\max\limits_{k=\overline{1,3}}\Delta n_{i_k}}<\Theta,\qquad\max_{S_j\in\Omega_h^{\Delta,2}}\frac{\omega_{j_1}}{\omega_{j_2}}<\Theta, \tag{4.3.1}$$

  где Θ —некоторая величина порядка единицы, не зависящая от шага сетки.

4.4 Аппроксимация уравнения неразрывности

Для вывода аппроксимации уравнения неразрывности воспользуемся сеточными операторами дивергенции и градиента, введёнными в разделе 1.4. Нам

понадобится аппроксимация $\operatorname{div}(u_d \nabla \rho)$, которая в безындексной форме записи выглядит следующим образом:

$$\operatorname{div}{}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{3} S_k \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, \tag{4.4.1}$$

где суммирование ведётся только по внутренним рёбрам, то есть по рёбрам, не являющимся частью границы Γ_h. Введём следующую величину

$$H_d = \max_{\Omega_h^{\Delta,2}} (\Delta n_{i_k} |n_{i_k}^d|), \ d = \overline{1,2}.$$

Дивергенцию величины $\rho\mathbf{u}$ в уравнении неразрывности аппроксимируем разностями (1.4.3). Имеем

$$\operatorname{div}{}_i^h \rho\mathbf{u} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{3} S_{i_k} \langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_{i_k} \rangle_{i_k}, \tag{4.4.2}$$

где $\langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_k \rangle_k = 0$ на рёбрах S_k, являющихся частью границы Γ_h в силу краевых условий (4.1.4). Однако для того, чтобы схема удовлетворяла требуемым свойствам, будем добавлять к правой части (4.4.2) слагаемые вида (4.4.1) по следующим правилам:

- Если $u_d > 0$, то вычтем из (4.4.2) слагаемое $H_d \operatorname{div}{}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho)$, где $d = \overline{1,2}$. Получим

$$\left(\frac{\partial(\rho u_d)}{\partial x_d}\right)_i \approx \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{3} S_k \left(\rho \left(\frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} u_d n_k^d + H_d \frac{1}{\Delta n_k} \frac{\Delta n_k^2 u_d + \Delta n_k^1 u_{dk}}{\Delta n_k} \right) + \right.$$
$$\left. + \rho_k \left(\frac{\Delta n_k^1}{\Delta n_k} u_{dk} n_k^d - H_d \frac{1}{\Delta n_k} \frac{\Delta n_k^2 u_d + \Delta n_k^1 u_{dk}}{\Delta n_k} \right) \right). \tag{4.4.3}$$

  Если в каждом соседнем треугольнике ω_k, $k = \overline{1,3}$ величины $u_{dk} > 0$, то имеем обычную разность "против потока" с аппроксимацией порядка $O(H_d)$.

- Если $u_d < 0$, то прибавим к (4.4.2) слагаемое $H_d \operatorname{div}{}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho)$, где $d = \overline{1,2}$. Аналогично предыдущему пункту если в соседних треугольниках ω_k, $k = \overline{1,3}$ величины $u_{dk} < 0$, то получаем обычную разность "против потока" с аппроксимацией порядка $O(H_d)$.

- Если величины u_d и u_{dk}, $k = \overline{1,3}$ противоположены по знаку, то на гладких решениях величина $u_d \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}_k}$ имеет порядок $O(\Delta n_k)$ на отрезке $[x_i, x_{i_k}]$. В этом случае заменим в выражении (4.4.2) "центральную разность" "направленной" на ребре S_k, а именно вместо величины $\langle \rho u_d n_k^d \rangle_k$ используем величину $\rho \langle u_d n_k^d \rangle_k$ при условии $\langle u_d n_k^d \rangle_k > 0$ и величину $\rho_k \langle u_d n_k^d \rangle_k$ в противном случае. В обоих случаях мы добавляем слагаемое порядка $O(\Delta n_k)$, следовательно порядок аппроксимации не нарушается. В самом деле, с учётом ограничения (4.3.1) и неравенства $S_k \Delta n_k^1 < 2\omega$, получаем

$$\frac{1}{\omega} S_k n_k^d (\rho \langle u_d \rangle_k - \langle \rho u_d \rangle_k) = \frac{1}{\omega} S_k n_k^d \frac{\Delta n_k^1}{\Delta n_k} u_{dk} (\rho - \rho_k) = O(\Delta n_k),$$

$$\frac{1}{\omega} S_k n_k^d (\rho_k \langle u_d \rangle_k - \langle \rho u_d \rangle_k) = \frac{1}{\omega} S_k n_k^d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} u_d (\rho_k - \rho) = O(\Delta n_k).$$

Кроме того, величина, добавленная в первых двух пунктах на ребре S_k, имеет порядок $O(H_d)$. Действительно,

$$H_d \frac{1}{\omega} S_k \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} = O(H_d).$$

Для того, чтобы разностная схема удовлетворяла сеточному закону сохранения массы, не будем добавлять это слагаемое.

Опустив индекс i, введём следующие обозначения на ячейке ω_i:

$$\{\rho u_d\}_k = \begin{cases} 0, \text{ если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h; \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k - H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, \text{ если } u_d > 0 \text{ и } u_{dk} > 0; \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k + H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, \text{ если } u_d < 0 \text{ и } u_{dk} < 0; \\ \rho \langle u_d n_k^d \rangle_k, \text{ если } \operatorname{sign} u_d \neq \operatorname{sign} u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k > 0; \\ \rho_k \langle u_d n_k^d \rangle_k, \text{ если } \operatorname{sign} u_d \neq \operatorname{sign} u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k < 0, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

$$[\rho u_d]_k = \{\rho u_d\}_k - \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k,$$

где $k = \overline{1,3}$, нормаль $\mathbf{n}_k$ является внешней по отношению к ячейке ω_i. Определим сеточный оператор $A(\mathbf{u}) : \mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2}) \to \mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})$ следующим образом:

$$A(\mathbf{u})\rho = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{3} S_{i_k} \{\rho \mathbf{u}\}_{i_k} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{3} S_{i_k} (\langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_{i_k} \rangle_{i_k} + [\rho \mathbf{u}]_{i_k}),$$

где $\{\rho\mathbf{u}\}_{i_k} = \{\rho u_1\}_{i_k} + \{\rho u_2\}_{i_k}$. Для аппроксимации уравнения неразрывности рассмотрим полностью неявную двухслойную разностную схему

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0. \tag{4.4.5}$$

Утверждение 4.4.1. *По построению выражение (4.4.5) имеет первый порядок аппроксимации по пространству и первый порядок аппроксимации по времени, если треугольники ω_i и ω_{i_k}, $k = \overline{1,3}$ остроугольные.*

Аналогично [22], докажем положительность сеточной функции плотности и выполнение сеточного аналога закона сохранения массы. Отметим свойства сеточного оператора $A(\mathbf{u})$:

- Сеточный оператор $A(\mathbf{u})$ является $P \times P$-матрицей, где P —количество ячеек в сетке.
- На диагонали стоят неотрицательные элементы.
- Вне диагонали стоят неположительные элементы.
- Для каждого столбца матрицы $A(\mathbf{u})$ имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{P} \omega_i A(\mathbf{u})_{ij} = 0$, где $j = \overline{1,P}$.

Таким образом, согласно теореме 1 сеточный оператор $(E + \tau A(\mathbf{u}))$ является M-матрицей. Следовательно у обратной матрицы все элементы неотрицательны, причём в каждой строке есть хотя бы один положительный элемент. Тем самым доказана

Теорема 10. *Если $\rho^0 > 0$, то сеточная функция плотности будет положительной на $(n+1)$-ом шаге по времени при любых шагах по времени и пространству.*

Из равенства $\sum\limits_{i=1}^{P} \omega_i A(\mathbf{u})_{ij} = 0$, где $j = \overline{1,P}$, следует

Теорема 11. *Разностная схема (4.4.5) удовлетворяет сеточному аналогу закона сохранения массы, то есть*

$$\sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \hat{\rho}_i = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \rho_i^0.$$

Замечание 4.4.1. *Заметим, что теоремы 10 и 11 будут верны и в том случае, если в аппроксимации (4.4.5) уравнения неразрывности взять скорость с нижнего слоя.*

4.5 Аппроксимация уравнений движения

Используя сеточные операторы, введённые в разделе 1.4, аппроксимируем уравнение движения следующим образом:

$$(\rho\mathbf{u})_t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k\frac{\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{u}}_k}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{\rho}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}}\mathbf{n}_k + \\ + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\psi_k(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}},\hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \quad (4.5.1)$$

где $\psi_k(\rho,\mathbf{u},g) = (\psi_k(\rho,u_1,g),\psi_k(\rho,u_2,g))$ и

$$\psi_k(\rho,u_d,g) = \begin{cases} 0, \text{ если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h; \\ -H_d\frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k}\frac{\rho_k-\rho}{\Delta n_k}(g_k-g), \text{ если } u_d>0 \text{ и } u_{dk}>0; \\ H_d\frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k}\frac{\rho_k-\rho}{\Delta n_k}(g_k-g), \text{ если } u_d<0 \text{ и } u_{dk}<0; \\ 0, \text{ если } \operatorname{sign}u_d \neq \operatorname{sign}u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d\rangle_k > 0; \\ n_k^d\frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k}(\rho_k-\rho)(g_k-g), \\ \qquad \text{если } \operatorname{sign}u_d \neq \operatorname{sign}u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d\rangle_k < 0. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Таким образом, второе слагаемое (4.5.1) аппроксимирует конвективные члены теми же направленными разностями, что и в уравнении неразрывности, и является модификацией аппроксимации $\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{3} S_k\langle\rho\mathbf{u}\rangle_k\frac{\mathbf{u}+\mathbf{u}_k}{2}$ из [24]. Предпоследнее слагаемое (4.5.1) аппроксимирует величину ∇p, а последнее слагаемое с учётом ограничений (4.3.1) имеет порядок $O(\max\{H_1,H_2\})$ на каждом из рёбер, по которым ведётся суммирование. Тем самым доказано утверждение

Утверждение 4.5.1. *Выражение (4.5.1) имеет первый порядок аппроксимации по пространству и первый порядок аппроксимации по времени, если треугольники ω_i и ω_{i_k}, $k=\overline{1,3}$ остроугольные.*

Аналогично [22] докажем, что норма $\|\rho^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})}$ равномерно ограничена по времени. В самом деле, умножим уравнение (4.4.5) на $-\frac{1}{2}\tau\hat{\mathbf{u}}^2$, а уравнение (4.5.1) на $\tau\hat{\mathbf{u}}$ и сложим. Здесь и далее в пределах данной главы опуская подпись в скалярном произведении $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})}$, получим равенство

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\tau(\rho_t,\hat{\mathbf{u}}^2)+\tau((\rho\mathbf{u})_t,\hat{\mathbf{u}})-\frac{1}{2}\tau\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k,\hat{\mathbf{u}}^2\right)+\\
+\tau\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k\frac{\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{u}}_k}{2},\hat{\mathbf{u}}\right)+\tau\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{\rho}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}}\mathbf{n}_k,\hat{\mathbf{u}}\right)+\\
+\tau\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\psi_k(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}},\hat{\rho}^{\gamma-1}),\hat{\mathbf{u}}\right)=0. \quad (4.5.3)
\end{aligned}
$$

Нетрудно показать, что

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\tau(\rho_t,\hat{\mathbf{u}}^2)+\tau((\rho\mathbf{u})_t,\hat{\mathbf{u}})=\frac{1}{2}\tau(\rho,\mathbf{u}^2)_t+\frac{1}{2}(\rho,(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^2),\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k,\hat{\mathbf{u}}^2\right)=\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k\frac{\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{u}}_k}{2},\hat{\mathbf{u}}\right).
\end{aligned}
\quad (4.5.4)
$$

Для упрощения дальнейшего изложения разделим рёбра на несколько классов. Пусть $\mathscr{S}_0$ — множество всех внутренних рёбер. Кроме того, нам потребуется ввести классы рёбер, отвечающие четырём последним случаям формул (4.4.4) и (4.5.2), а именно

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S}_1^d&=\{S_j\in\mathscr{S}_0|\,u_{d1}>0\text{ и }u_{d2}>0\},\\
\mathscr{S}_2^d&=\{S_j\in\mathscr{S}_0|\,u_{d1}<0\text{ и }u_{d2}<0\},\\
\mathscr{S}_3^d&=\{S_j\in\mathscr{S}_0|\,\operatorname{sign}u_{d1}\neq\operatorname{sign}u_{d2}\text{ и }\langle u_d n_1^d\rangle>0\},\\
\mathscr{S}_4^d&=\{S_j\in\mathscr{S}_0|\,\operatorname{sign}u_{d1}\neq\operatorname{sign}u_{d2}\text{ и }\langle u_d n_1^d\rangle<0\},
\end{aligned}
$$

где $d=\overline{1,2}$, и нумерация ведётся относительно ребра S_j. Преобразуем левую часть второго выражения (4.5.4). Для удобства опустим знак “крышка” над сеточными функциями. Имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\rho\mathbf{u}\}_k,\mathbf{u}^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\langle\rho\mathbf{u}\mathbf{n}_k\rangle_k,\mathbf{u}^2\right)+\\
+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k[\rho\mathbf{u}]_k,\mathbf{u}^2\right). \quad (4.5.5)
\end{aligned}
$$

В первом слагаемом правой части (4.5.5) стоит двойное суммирование: внешнее по всем ячейкам и внутреннее по рёбрам одной ячейки. Перегруппируем слагаемые таким образом, чтобы осталось только одно суммирование по всем имеющимся рёбрам, то есть перейдём от суммирования по ячейкам к суммированию по рёбрам. Здесь и далее будем пользоваться безындексной формой записи, опуская индекс j ребра S_j. Используя тот факт, что $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, на ребре $S_j \in \mathscr{S}_0$ имеем

$$S_j\left((\langle\rho\mathbf{u}\rangle\mathbf{n}_1)\mathbf{u}_1^2 + (\langle\rho\mathbf{u}\rangle\mathbf{n}_2)\mathbf{u}_2^2\right) = S_j\left(\langle\rho\mathbf{u}\rangle\mathbf{n}_1(\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2)\right) = \\ = S_j\left((\langle\rho\mathbf{u}\rangle\mathbf{n}_1)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 + (\langle\rho\mathbf{u}\rangle\mathbf{n}_2)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\right). \quad (4.5.6)$$

Вернёмся к суммированию по ячейкам. С учётом выражения (4.5.6) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\langle\rho\mathbf{u}\mathbf{n}_k\rangle_k, \mathbf{u}^2\right) = \left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\langle\rho\mathbf{u}\mathbf{n}_k\rangle_k\frac{\mathbf{u}+\mathbf{u}_k}{2}, \mathbf{u}\right). \quad (4.5.7)$$

Теперь перейдём к суммированию по рёбрам во втором слагаемом правой части (4.5.5). На ребре $S_j \in \mathscr{S}_1^d$, $d = \overline{1,2}$ имеем

$$S_j\left(-H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n}\mathbf{u}_1^2 - H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta n}\mathbf{u}_2^2\right) = \\ = S_j\left(-H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n}(\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2)\right) = \\ = S_j\left(-H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 - H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta n}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\right). \quad (4.5.8)$$

Случай $S_j \in \mathscr{S}_2^d$ аналогичен с точностью до знака. В случае если $S_j \in \mathscr{S}_3^d$, $d = \overline{1,2}$

$$S_j\left(n_1^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}u_{d2}(\rho_1-\rho_2)\mathbf{u}_1^2 + n_2^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}u_{d2}(\rho_1-\rho_2)\mathbf{u}_2^2\right) = \\ = S_j\left(n_1^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}u_{d2}(\rho_1-\rho_2)(\mathbf{u}_1^2-\mathbf{u}_2^2)\right) = S_j\Bigg(n_1^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}u_{d2}(\rho_1-\rho_2)(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 + \\ + n_2^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}u_{d2}(\rho_1-\rho_2)(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\Bigg). \quad (4.5.9)$$

Случай $S_j \in \mathscr{S}_4^d$ разбирается аналогично. Учитывая выражения (4.5.8) и (4.5.9), вернёмся к суммированию по ячейкам. В результате получим тождество

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k[\rho\mathbf{u}]_k, \mathbf{u}^2\right) = \left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k[\rho\mathbf{u}]_k\frac{\mathbf{u}+\mathbf{u}_k}{2}, \mathbf{u}\right). \quad (4.5.10)$$

Из выражений (4.5.7) и (4.5.10) следует второе равенство (4.5.4). Точно так же, как и в [24] доказывается, что

$$\left(\hat{\rho}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}}\mathbf{n}_k, \hat{\mathbf{u}}\right) = -\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\langle\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\mathbf{n}_k\rangle_k, \hat{\rho}^{\gamma-1}\right). \tag{4.5.11}$$

Преобразуем последнее слагаемое (4.5.3), а именно перейдём к суммированию по рёбрам. На ребре $S_j \in \mathscr{S}_1^d$, $d = \overline{1,2}$ имеем

$$\begin{aligned} S_j\left(-H_d\frac{\Delta n^2}{\Delta n}\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n}(\rho_2^{\gamma-1}-\rho_1^{\gamma-1})u_{d1} - H_d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta n}(\rho_1^{\gamma-1}-\rho_2^{\gamma-1})u_{d2}\right) = \\ = S_j\left(\rho_1^{\gamma-1}H_d\frac{\Delta n^2 u_{d1}+\Delta n^1 u_{d2}}{\Delta n}\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n} + \rho_2^{\gamma-1}H_d\frac{\Delta n^1 u_{d2}+\Delta n^2 u_{d1}}{\Delta n}\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta n}\right) = \\ = S_j\left(\rho_1^{\gamma-1}H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_2-\rho_1}{\Delta n} + \rho_2^{\gamma-1}H_d\langle u_d\rangle\frac{\rho_1-\rho_2}{\Delta n}\right). \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Случай $S_j \in \mathscr{S}_2^d$, $d = \overline{1,2}$ аналогичен с точностью до знака. На ребре $S_j \in \mathscr{S}_3^d$, $d = \overline{1,2}$ имеем

$$\begin{aligned} S_j\left(n_2^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}(\rho_1-\rho_2)(\rho_1^{\gamma-1}-\rho_2^{\gamma-1})u_{2d}\right) = \\ = S_j\left(-\rho_1^{\gamma-1}n_1^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}(\rho_1-\rho_2)u_{2d} - \rho_2^{\gamma-1}n_2^d\frac{\Delta n^1}{\Delta n}(\rho_1-\rho_2)u_{2d}\right). \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

Случай $S_j \in \mathscr{S}_4^d$, $d = \overline{1,2}$ разбирается аналогично. Используя выражения (4.5.12) и (4.5.13) вернёмся к суммированию по ячейкам. В результате получим тождество

$$\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\psi_k(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}},\hat{\rho}^{\gamma-1}),\hat{\mathbf{u}}\right) = -\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k[\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}]_k, \hat{\rho}^{\gamma-1}\right). \tag{4.5.14}$$

Используя равенства (4.5.4), (4.5.11), (4.5.14) и (4.4.5), преобразуем выражение (4.5.3) к виду

$$\frac{1}{2}\tau(\rho,\mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho,(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^2) + \tau\frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_t,\hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0. \tag{4.5.15}$$

Далее проведём рассуждения точно так же, как в [22]. Оценим величину $\rho\hat{\rho}^{\gamma-1}$ с помощью неравенства Юнга с показателями γ и $\frac{\gamma}{\gamma-1}$:

$$\rho\hat{\rho}^{\gamma-1} \leqslant \frac{1}{\gamma}\rho^{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\hat{\rho}^{\gamma}.$$

Тогда

$$\tau\frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_t,\hat{\rho}^{\gamma-1})\geqslant\frac{1}{\gamma-1}[(\hat{\rho}^{\gamma},1)-(\rho^{\gamma},1)].$$

Из последнего неравенства и (4.5.15) следует

$$\frac{1}{2}\tau(\rho,\mathbf{u}^2)_t+\frac{1}{2}(\rho,(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^2)+\frac{1}{\gamma-1}[(\hat{p},1)-(p,1)]\leqslant 0. \tag{4.5.16}$$

Просуммировав выражение (4.5.16) по всем шагам по времени, получаем

Теорема 12. *Для решения разностной задачи (4.4.5), (4.5.1) с однородными краевыми условиями, то есть* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ *на границе* Γ_h*, имеет место следующая оценка*

$$\frac{1}{2}(\rho^{n+1},(\mathbf{u}^{n+1})^2)+\frac{1}{\gamma-1}(p^{n+1},1)+\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}(\rho^m,(\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^m)^2)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\rho^0,(\mathbf{u}^0)^2)+\frac{1}{\gamma-1}(p^0,1).$$

4.6 Существование решения

Утверждение теоремы 12 и принцип Лере-Шаудера [50] позволяют доказать существование решения при любых шагах по времени и по пространству точно так же, как и в [22].

Теорема 13. *Решение разностной задачи (4.4.5), (4.5.1) с однородными краевыми условиями, то есть* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ *на границе* Γ_h *существует при любых шагах по времени и пространству.*

Доказательство. Аналогично [22], сделаем замену $r=\rho$ и $\mathbf{v}=\rho\mathbf{u}$. Таким образом, система (4.4.5), (4.5.1) представима в виде операторного уравнения

$$\hat{r}=F_1(\hat{r},\hat{\mathbf{v}}),\quad \hat{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_2(\hat{r},\hat{\mathbf{v}}).$$

Для доказательства существования решения воспользуемся теоремой Лере–Шаудера, а именно докажем, что решение системы

$$\hat{r}=\theta F_1(\hat{r},\hat{\mathbf{v}}),\quad \hat{\mathbf{v}}=\theta\mathbf{F}_2(\hat{r},\hat{\mathbf{v}}) \tag{4.6.1}$$

равномерно ограничено по θ при $\theta \in [0,\,1]$. Случай $\theta = 0$ тривиален, поэтому далее считаем $\theta > 0$. Перепишем систему (4.6.1) в виде

$$\frac{1-\theta}{\tau\theta}\hat{\rho} + \rho_t + \frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{3} S_{i_k}\{\rho\mathbf{u}\}_{i_k} = 0,$$
$$\frac{1-\theta}{\tau\theta}\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}} + (\rho\mathbf{u})_t + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k\frac{\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{u}}_k}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{\rho}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}}\mathbf{n}_k +$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3} S_k\psi_k(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}},\hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0.$$

Умножим первое уравнение на $-\frac{1}{2}\tau\hat{\mathbf{u}}^2$, а второе на $\tau\hat{\mathbf{u}}$ и сложим. Поскольку $\rho^k > 0$ при условии $\rho^0 > 0$, то

$$\frac{1-\theta}{2\theta}\Big(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}}^2\Big) + \frac{1-\theta}{\theta}\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big(\hat{\rho}^\gamma,1\Big) + \frac{1}{2}\Big(\rho,(\hat{\mathbf{u}}-\mathbf{u})^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}}^2\Big) +$$
$$+ \frac{1}{\gamma-1}\Big(\hat{p},1\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\rho,\mathbf{u}^2\Big) + \Big(p,1\Big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\rho_0,\mathbf{u}_0^2\Big) + \frac{1}{\gamma-1}\Big(p_0,1\Big). \quad (4.6.2)$$

Используя теорему 11 (сеточный закон сохранения массы), получим

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|^2_{\mathcal{V}(\Omega_h^{\Delta,2})} = (\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}},\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}) \leqslant \max_{\Omega_h^{\Delta,2}}\hat{\rho}\cdot\left(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}}^2\right) \leqslant \frac{1}{\min\limits_{\Omega_h^{\Delta,2}}\omega_i}\|\rho_0\|_{L_{1,h}}\left(\hat{\rho},\hat{\mathbf{u}}^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\min\limits_{\Omega_h^{\Delta,2}}\omega_i}\|\rho_0\|_{L_{1,h}}\left[\Big(\rho_0,(\mathbf{u}_0)^2\Big) + 2\frac{\gamma}{\gamma-1}\Big(p_0,1\Big)\right],$$

где $\|f\|_{L_{1,h}} = \sum\limits_{\Omega_h^{\Delta,2}}\omega_i|f_i|$, $f \in \mathcal{R}(\Omega_h^{\Delta,2})$. Величина $\hat{r}$ ограничена в норме $L_{1,h}$ за счёт свойства консервативности разностной схемы. Таким образом, выполнены условия теоремы Лере–Шаудера, значит, задача имеет решение при любых шагах по времени и пространству. Теорема доказана.

Для нахождения сеточного решения задачи (4.4.5), (4.5.1) на каждом шаге по времени требуется решить нелинейную систему уравнений. Для этого

можно использовать внутренний итерационный процесс по q:

$$\frac{\rho^{q+1}-\rho^n}{\tau}+\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{3}S_{i_k}\{\rho^{q+1}\mathbf{u}^q\}_{i_k}=0,$$

$$\frac{\rho^{q+1}\mathbf{u}^{q+1}-\rho^n\mathbf{u}^n}{\tau}+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\{\rho^{q+1}\mathbf{u}^{q+1}\}_k\frac{\mathbf{u}^q+\mathbf{u}_k^q}{2}+$$

$$+\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{q+1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\overline{(\rho^{q+1})^{\gamma-1}}\mathbf{n}_k+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{3}S_k\psi_k(\rho^{q+1},\mathbf{u}^{q+1},(\rho^{q+1})^{\gamma-1})=0.$$

4.7 Численная оценка сходимости

Рассмотрим в области $Q_T=[0,\,1]\times[0,\,1]\times[0,\,T]$ задачу

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=f_\rho,\\&\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla p=(f_{u_1},f_{u_2}),\\&p=\rho^\gamma,\quad\gamma>1,\end{aligned}\tag{4.7.1}$$

где правые части $f_\rho(x_1,x_2,t)$, $f_{u_1}(x_1,x_2,t)$ и $f_{u_2}(x_1,x_2,t)$ подобраны таким образом, чтобы функции

$$\begin{aligned}\rho(x_1,x_2,t)&=\cos t\sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)+2,\\u_1(x_1,x_2,t)&=\cos t\sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2),\\u_2(x_1,x_2,t)&=\cos t\sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)\end{aligned}\tag{4.7.2}$$

являлись решением системы (4.7.1). Начальные и граничные условия определим естественным образом с помощью функций (4.7.2). Показатель адиабаты Пуассона γ во всех экспериментах равен 1.4. Для оценки погрешности используем норму разницы заданной и сеточной функций плотности в момент времени $T=0.1$. Расчёт проводился как на ортогональных сетках, так и на треугольных. Для построения треугольных сеток использовался программный пакет Gmsh [11], с помощью которого была построена сетка из 23250 треугольников. Более мелкие сетки строились с помощью деления каждого треугольника исходной сетки средними линиями на четыре части. В таблицах 4.1 и 4.2 представлены сеточные нормы погрешности функции плотности на различных сетках. Для решения системы линейных уравнений в итерационном

процессе (4.6) использовался программный пакет PETSc [51]. Порядок сходимости в таблицах считался как двоичный логарифм отношения величин в соседних столбцах.

Сетка	100×100	Порядок	200×200	Порядок	400×400
Шаг по времени	1e-3		5e-4		2.5e-4
$\|\rho(T) - \rho\|_{C_h}$	4.469082e-02	0.93	2.343709e-02	0.96	1.201358e-02
$\|\rho(T) - \rho\|_{L_{1,h}}$	9.339132e-03	0.93	4.883497e-03	0.96	2.501540e-03
$\|\rho(T) - \rho\|_{L_{2,h}}$	1.296574e-02	0.94	6.745709e-03	0.96	3.451346e-03

Таблица 4.1: Норма погрешности на ортогональной сетке.

Кол-во треугольников	23250	Порядок	93000	Порядок	372000
Шаг по времени	1e-3		5e-4		2.5e-4
$\|\rho(T) - \rho\|_{C_h}$	6.082178e-02	0.84	3.394787e-02	0.92	1.789089e-02
$\|\rho(T) - \rho\|_{L_{1,h}}$	1.508937e-02	0.89	8.131671e-03	0.95	4.182657e-03
$\|\rho(T) - \rho\|_{L_{2,h}}$	1.972999e-02	0.88	1.069226e-02	0.95	5.522468e-03

Таблица 4.2: Норма погрешности на треугольной сетке.

4.8 Решение одномерных тестовых задач

Приведём результаты решения некоторых одномерных тестовых задач для оценки возможностей предложенного метода на ортогональных сетках. Рассмотрим задачи Римана в области $\Omega = [0,\, X_{\max}] \times [0,\, X_{\max}]$ на временном интервале $[0,\, T]$ для системы (4.1.1). Число шагов по времени обозначим через N. Стоит отметить, что в работах [23; 31] исследовались численные методы решения уравнений Эйлера, поэтому результаты расчётов по предложенной схеме будут отличаться. Пусть прямая $x_1 = x_0$, где $x_0 \in (0,\, X_{\max})$ делит область Ω на левую и правую части.

Пусть в начальный момент времени в левой части области плотность и скорость газа постоянны и равны ρ_L и u_L соответственно, а в правой части области тоже постоянны и равны ρ_R и u_R соответственно. На левой границе зададим постоянные плотность и скорость ρ_l и u_L, а на правой границе — ρ_R и u_R. На верхней и нижней границах введём периодические краевые условия.

4.8.1 Распад разрыва и две волны разрежения

В этом подразделе приведём результаты некоторых тестовых задач, изложенных в [23; 31].

Тест	ρ_L	u_L	ρ_R	u_R	x_0	T	a	$X_{\max}$
1	1	(0.75, 0)	0.125	(0, 0)	0.3	0.2	1	1
1-jtv	1	(0.75, 1)	0.125	(0, -5)	0.3	0.2	1	1
2	1	(-2, 0)	1	(2, 0)	0.5	0.1	0.4	1

Таблица 4.3: Параметры численных экспериментов.

Во всех тестах показатель адиабаты Пуассона равен 1.4. Результаты расчётов приведены на рисунках 4.1, 4.2 и 4.3. На графиках изображены распределения функции плотности в момент времени T по координате x_1 с фиксированным значением $x_2 = 0.5$.

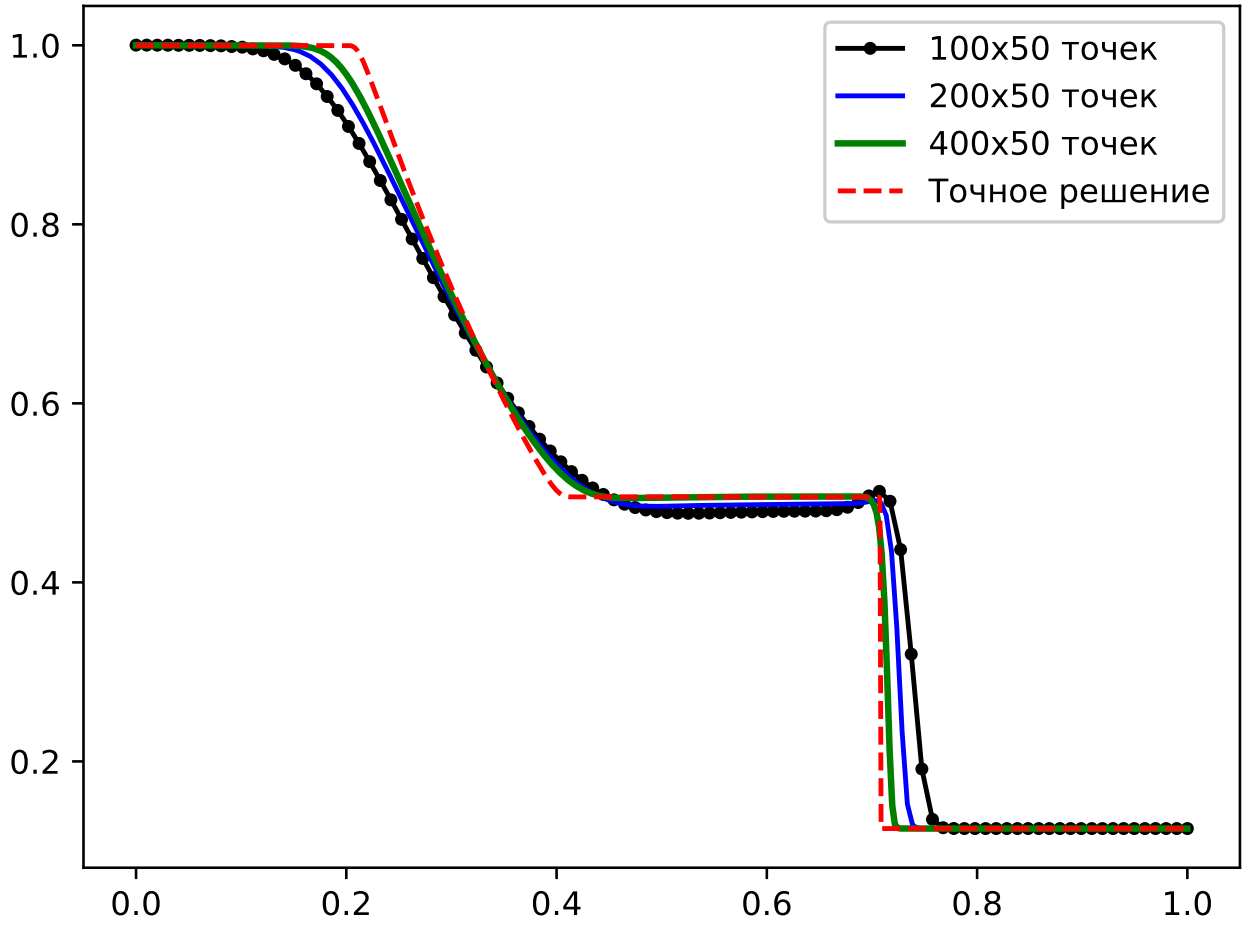

Рис. 4.1: Результаты теста 1.

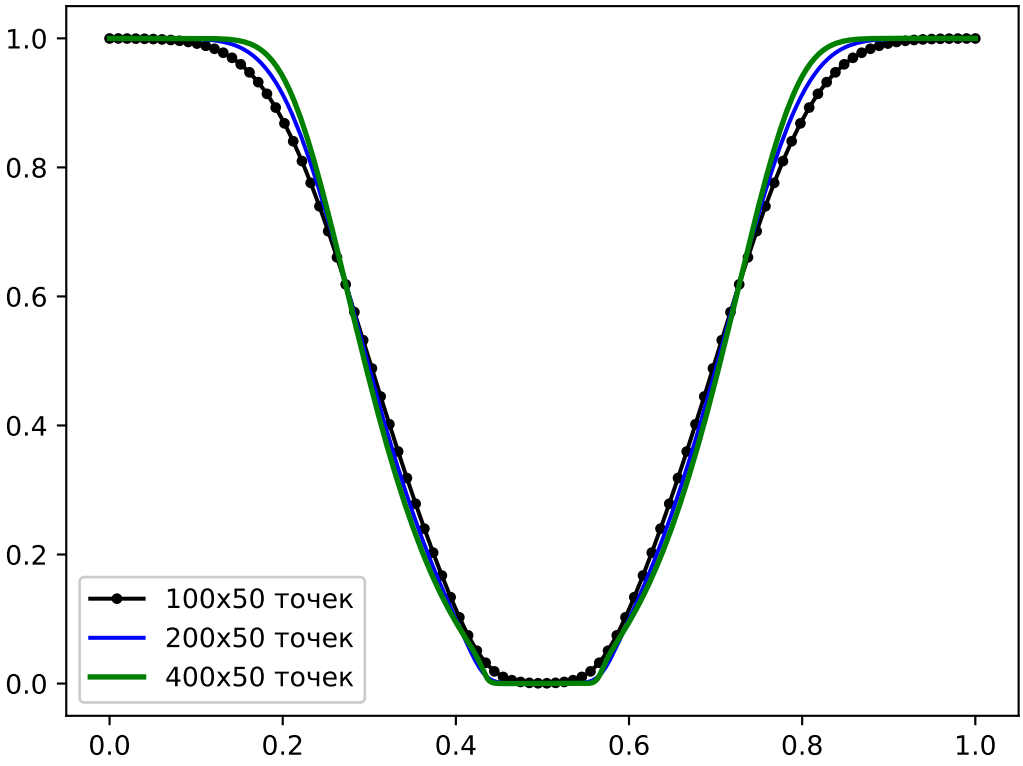

Рис. 4.2: Результаты теста 2.

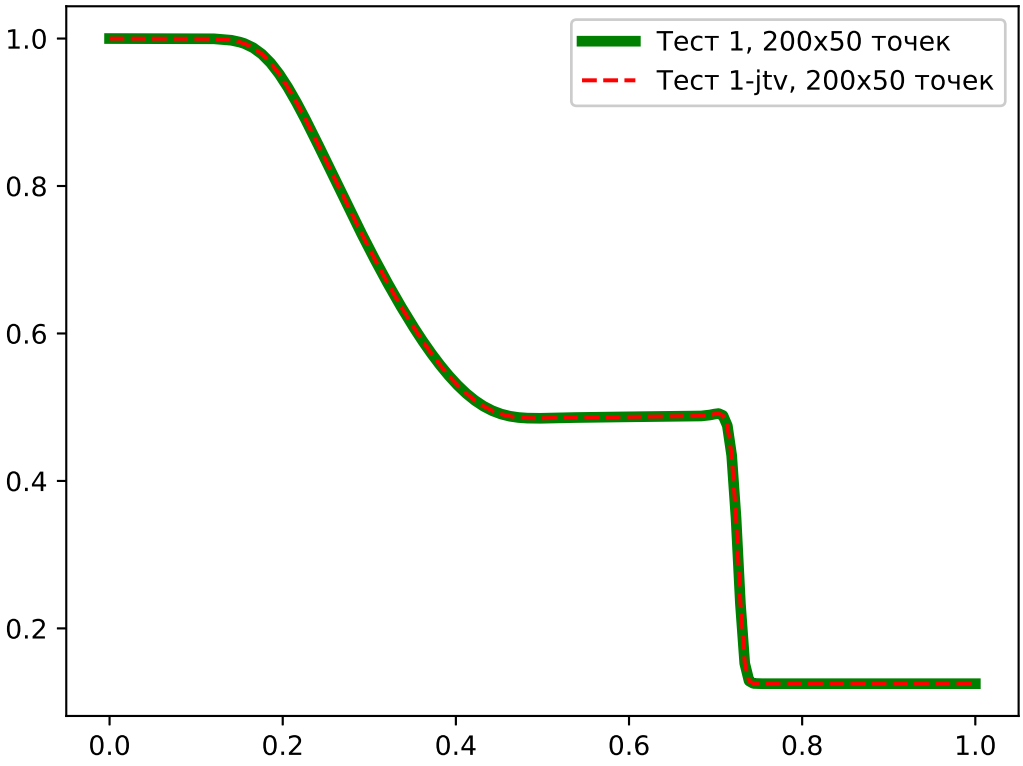

Рис. 4.3: Сравнение результатов тестов 1 и 1-jtv.

Как и следовало ожидать, предложенный метод в силу использования на-

правленных разностей довольно сильно размывает ударную волну. Однако данная схема показывает хорошие результаты при расчёте волн разрежения во втором тесте.

4.8.2 Дозвуковая, сверхзвуковая и трансзвуковая волны разрежения

Теперь приведём результаты решения некоторых тестовых задач, которые были просчитаны в [34] для схемы Кабаре для случая политропного газа.

Тест	ρ_L	u_L	ρ_R	u_R	x_0	T	N	a	$X_{\max}$
3	1	(0, 0)	0.5	(1.828, 0)	5.0	0.4146093	140	1	10
4	1	(2, 0)	0.5	(2.828, 0)	5.0	0.4146093	200	1	10
5	1	(1, 0)	0.5	(1.828, 0)	0.5	0.5611959	200	1	10
6	1	(0, 0)	10^{-6}	(2.828, 0)	0.5	0.5	200	1	10

Таблица 4.4: Параметры численных экспериментов.

Во всех тестах показатель адиабаты Пуассона равен 1.4. Сетка использовалась ортогональная с постоянным шагом по вертикали и по горизонтали, равным 1/64. Тест 3 соответствует дозвуковой волне разрежения, тест 4 — сверхзвуковой волне разрежения, тест 5 — трансзвуковой волне разрежения, а тест 6 — разлёту газа в пустоту. В тестах 3–5 величина правого инварианта Римана $r = u_1 + \frac{2\sqrt{a\gamma}}{\gamma-1}\rho^{(\gamma-1)/2}$ остаётся постоянной и составляет 2.83 для третьего теста, 4.83 для четвёртого и 3.83 для пятого.

Результаты расчётов приведены на рисунках 4.4–4.7. На графиках изображены распределения функции плотности в момент времени T по координате x_1 с фиксированным значением $x_2 = 5$.

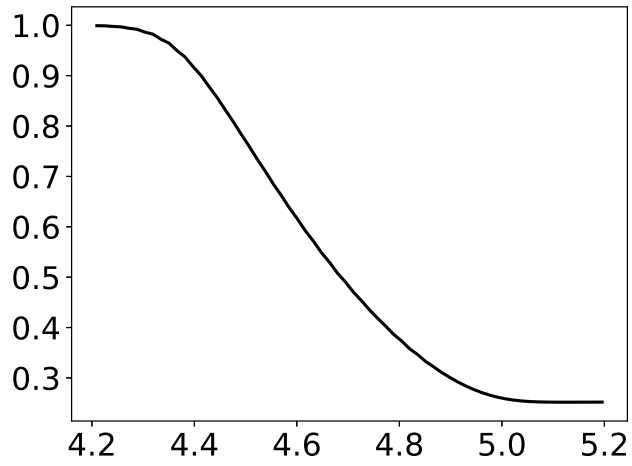

Рис. 4.4: Результаты расчёта теста 3.

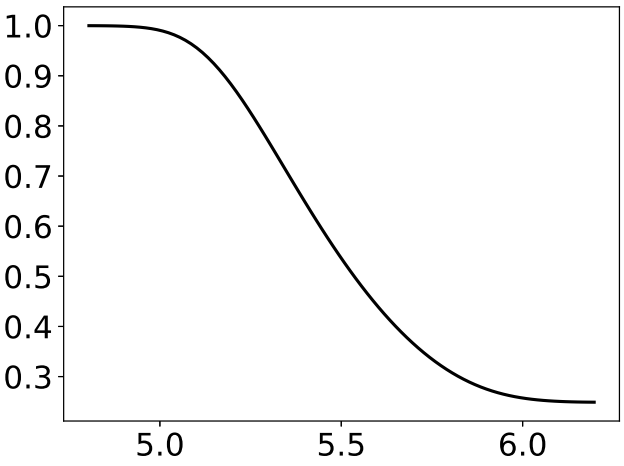

Рис. 4.5: Результаты расчёта теста 4.

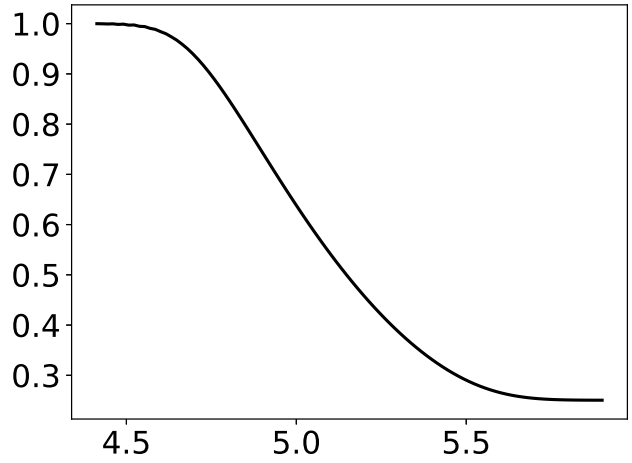

Рис. 4.6: Результаты расчёта теста 5.

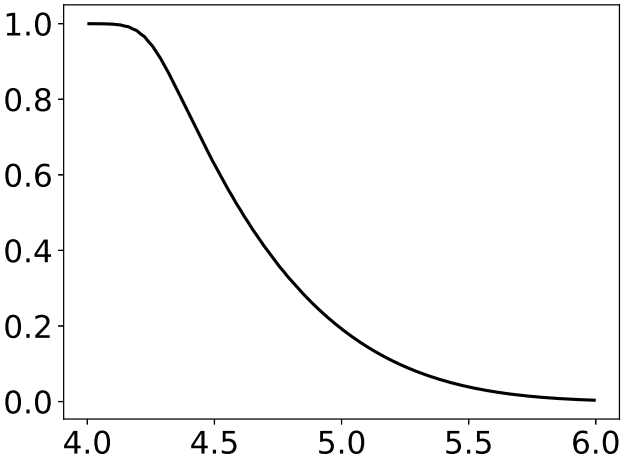

Рис. 4.7: Результаты расчёта теста 6.

4.9 Решение двумерных тестовых задач

В этом разделе приведём результаты расчётов некоторых двумерных тестов из работы [23]. Рассмотрим задачу (4.1.1) в области $\Omega = [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ на временном интервале $[0,\, T]$. Проведём прямые $x_1 = 0.5$ и $x_2 = 0.5$. Эти прямые делят область Ω на четыре квадрата: левый верхний Ω_{UL}, правый верхний Ω_{UR}, левый нижний Ω_{LL} и правый нижний Ω_{LR}. Пусть в начальный момент времени значения функций плотности и скорости постоянны в каждой

подобласти и равны

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_{UL},\ \mathbf{x} \in \Omega_{UL}, \\ \rho_{UR},\ \mathbf{x} \in \Omega_{UR}, \\ \rho_{LL},\ \mathbf{x} \in \Omega_{LL}, \\ \rho_{LR},\ \mathbf{x} \in \Omega_{LR}, \end{cases} \qquad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_{UL},\ \mathbf{x} \in \Omega_{UL}, \\ \mathbf{u}_{UR},\ \mathbf{x} \in \Omega_{UR}, \\ \mathbf{u}_{LL},\ \mathbf{x} \in \Omega_{LL}, \\ \mathbf{u}_{LR},\ \mathbf{x} \in \Omega_{LR} \end{cases}$$

Граничные условия зададим следующие:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t \in [0,\, T].$$

Тест		Лево		Право		T	a
		ρ	$\mathbf{u}$	ρ	$\mathbf{u}$		
4	Верх	0.5065	(0.8939, 0.0)	1.0	(0.0, 0.0)	0.25	1.0
	Низ	1.1	(0.8939, 0.8939)	0.5065	(0.0, 0.8939)		
12	Верх	1.0	(0.7276, 0.0)	0.5313	(0.0, 0.0)	0.25	1.0
	Низ	0.8	(0.0, 0.0)	1.0	(0.0, 0.7276)		
15	Верх	0.5197	(-0.6259, -0.3)	1.0	(0.1, -0.3)	0.2	1.0
	Низ	0.8	(0.1, -0.3)	0.5313	(0.1, 0.4276)		
17	Верх	2.0	(0.0, -0.3)	1.0	(0.0, -0.4)	0.3	1.0
	Низ	1.0625	(0.0, 0.2145)	0.5197	(0.0, -1.1259)		

Таблица 4.5: Начальные значения функций скорости и плотности в каждой из подобластей, а также параметры экспериментов.

Расчёт проводился как на ортогональных, так и на неструктурированных сетках. Ортогональная сетка состояла из 90 тысяч узлов: 300 узлов по горизонтали и 300 узлов по вертикали. Треугольная сетка строилась с помощью программного пакета Gmsh [38]. В численном эксперименте использовалась сетка, состоящая из 105 тысяч треугольников, причём число тупоугольных треугольников не превосходило 2%. Кроме того, был проведён контрольный расчёт задачи (4.1.1) по методу адаптивной искусственной вязкости [24] на треугольной сетке. На рисунках 4.8–4.19 цветом отмечено распределение давления в момент времени T. Линиями отмечена скорость в момент времени T, причём толщина линии пропорциональна модулю скорости.

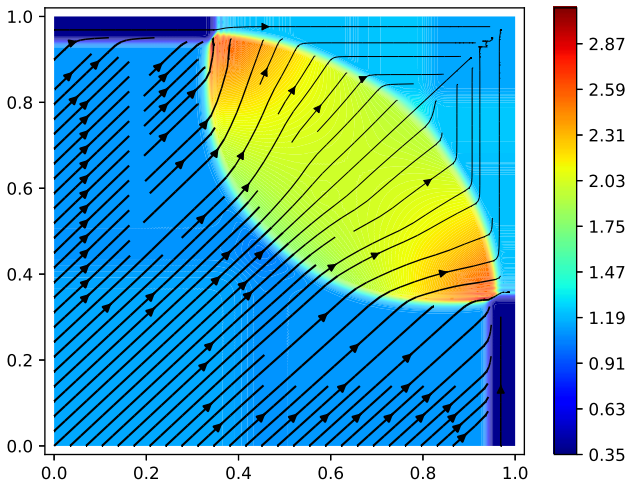

Рис. 4.8: Результаты расчёта теста 4 на ортогональной сетке.

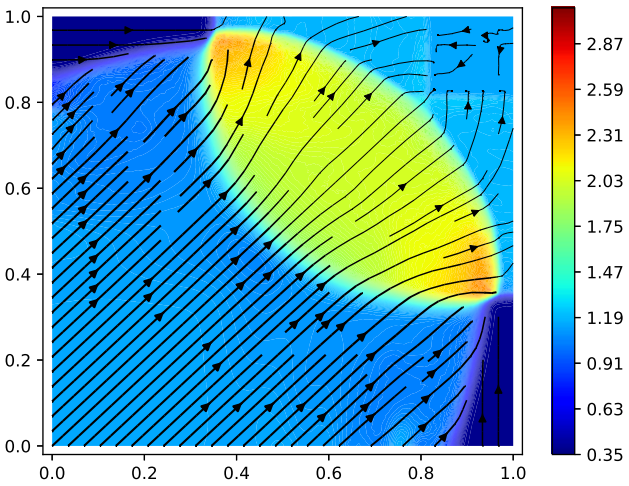

Рис. 4.9: Результаты расчёта теста 4 на треугольной сетке.

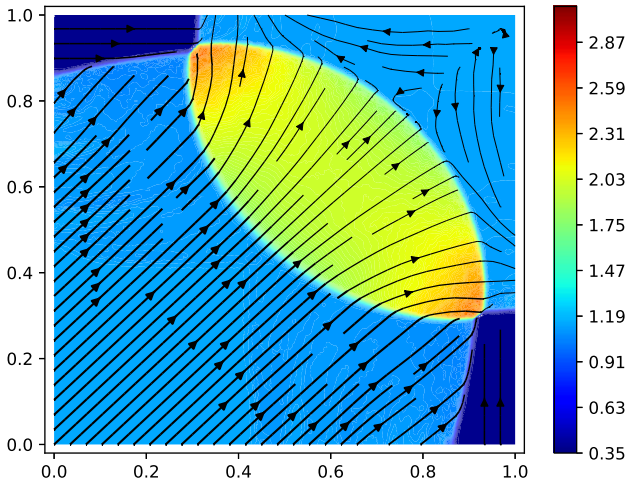

Рис. 4.10: Результаты расчёта теста 4 по методу АИВ на треугольной сетке.

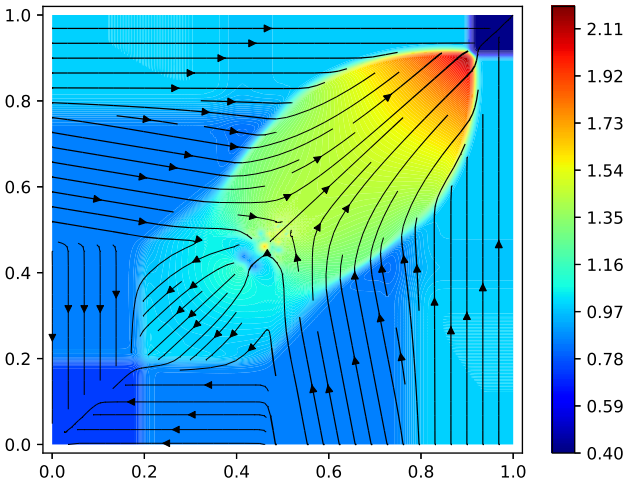

Рис. 4.11: Результаты расчёта теста 12 на ортогональной сетке.

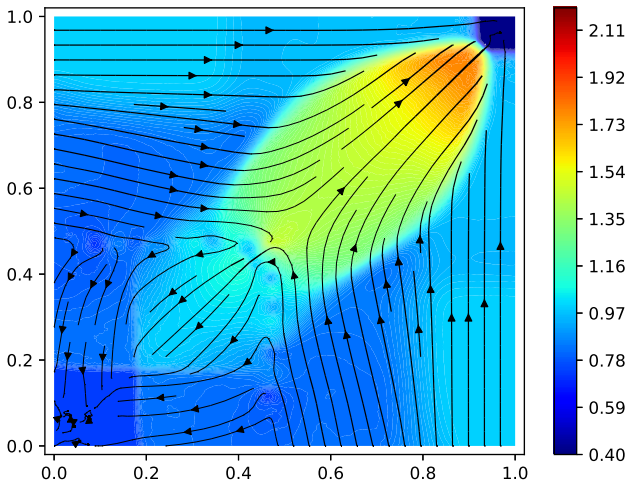

Рис. 4.12: Результаты расчёта теста 12 на треугольной сетке.

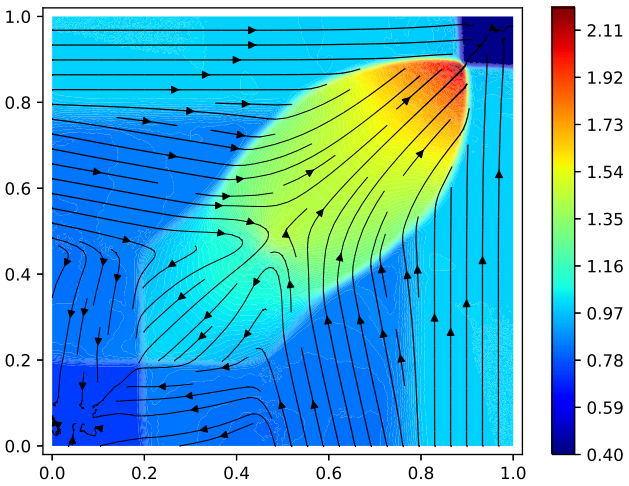

Рис. 4.13: Результаты расчёта теста 12 по методу АИВ на треугольной сетке.

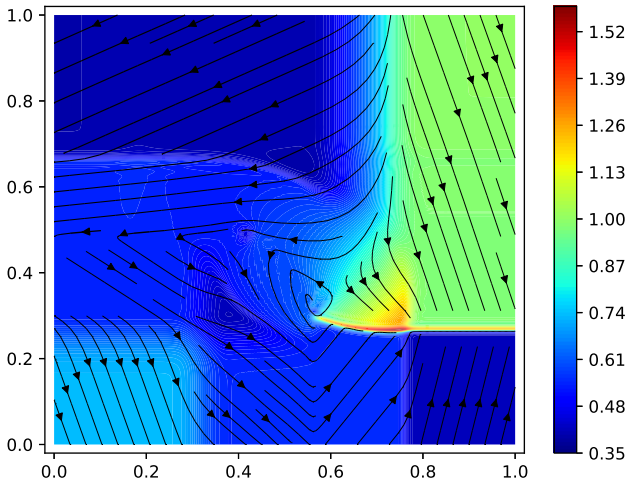

Рис. 4.14: Результаты расчёта теста 15 на ортогональной сетке.

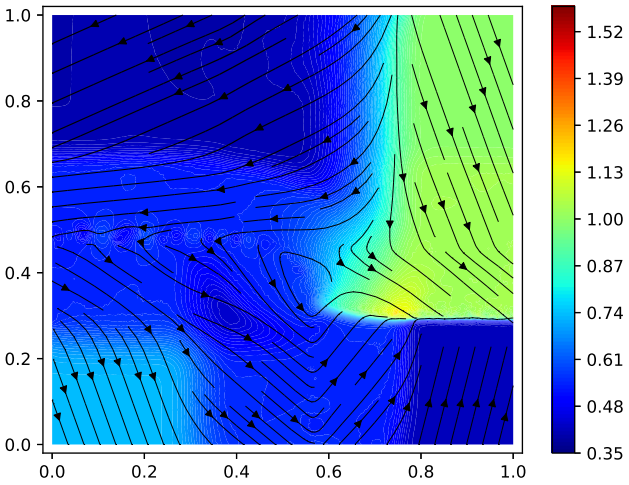

Рис. 4.15: Результаты расчёта теста 15 на треугольной сетке.

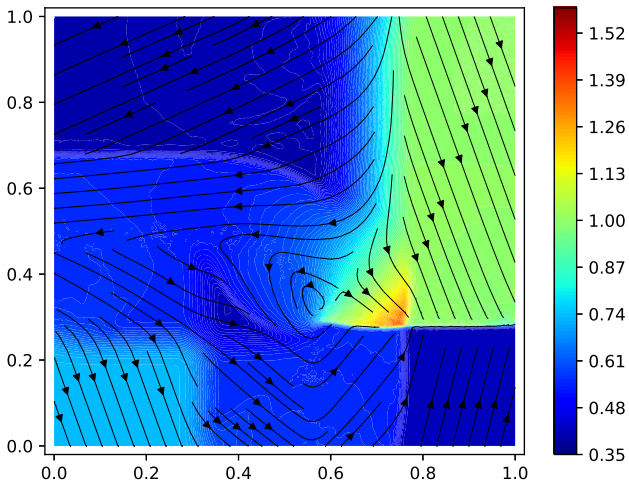

Рис. 4.16: Результаты расчёта теста 15 по методу АИВ на треугольной сетке.

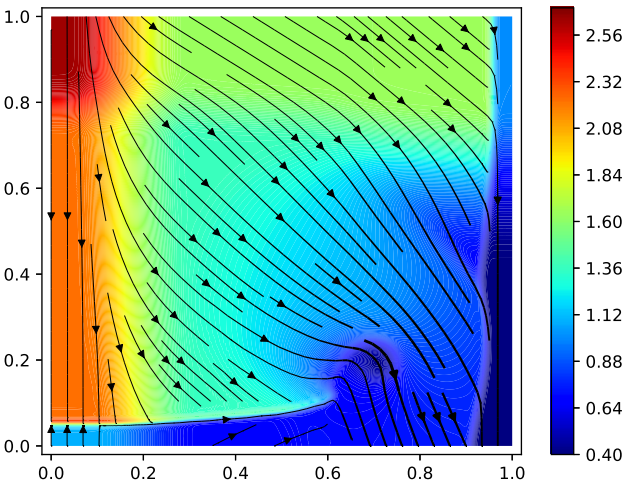

Рис. 4.17: Результаты расчёта теста 17 на ортогональной сетке.

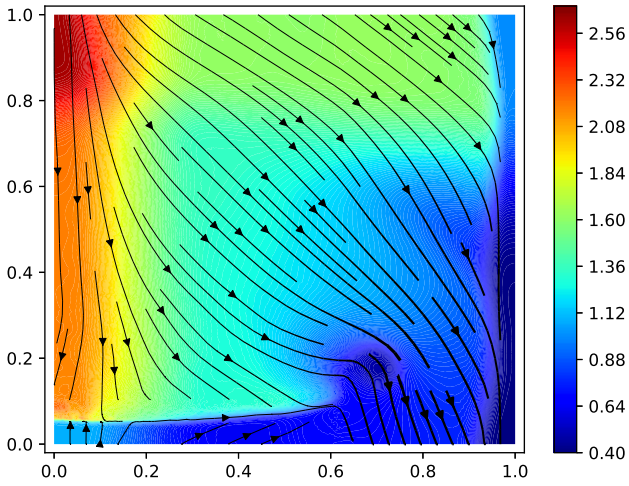

Рис. 4.18: Результаты расчёта теста 17 на треугольной сетке.

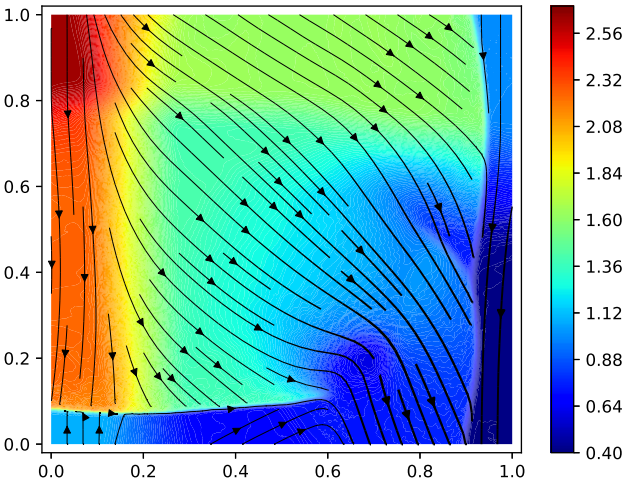

Рис. 4.19: Результаты расчёта теста 17 по методу АИВ на треугольной сетке.

4.10 Выводы

В данной главе предложена разностная схема на неструктурированных треугольных сетках для уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности с показателем, большим единицы. Для данной разностной схемы доказаны следующие утверждения:

- Имеет место сеточный аналог закона сохранения массы.

- Сеточная функция плотности является положительной на каждом шаге по времени.
- Разностная схема обеспечивает выполнение энергетического неравенства при однородных краевых условиях.
- Решение разностной задачи существует при любых шагах по времени и пространству при условиях непротекания на границе.

Для предложенной разностной схемы проведена серия тестов на стандартных модельных задачах, проведено сравнение предложенного метода с методом адаптивной искусственной вязкости [24].

Глава 5

Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений динамики вязкого сжимаемого теплопроводного газа

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики [52] в области общего вида $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{v}) - \nabla\left(\left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\operatorname{div}\mathbf{v}\right) = 0, \tag{5.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) - \varkappa \nabla T - \frac{1}{2}\mu \nabla(\mathbf{v}^2) - \right.$$
$$\left. - \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right)\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}\right] = 0, \tag{5.1.3}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \tag{5.1.4}$$

где ρ —плотность, p —давление, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ε — внутренняя энергия, γ — показатель адиабаты Пуассона. Величина μ обозначает кинематическую вязкость, ζ — вторую вязкость. Внутренняя энергия связана с температурой формулой $\varepsilon = C_v T$. Величины μ, ζ, κ и C_v положим постоянными.

Будем считать, что граница Γ состоит из трёх частей: $\Gamma = \Gamma_w \cup \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}$. На жёсткой стенке Γ_w заданы условие прилипания и температура, на входном

участке Γ_{in} —скорость, давление и температура, на участке стока Γ_{out} считаем равными нулю производные от скорости, плотности, давления и внутренней энергии в направлении нормали к границе.

Сеточные уравнения будем строить на тетраэдральной сетке $\Omega_h^{\Delta,3}$, используя обозначения из раздела 1.3 и сеточные операторы, введённые в разделе 1.4.

5.2 Аппроксимация по времени

В оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости [24] используется схема со вторым порядком аппроксимации по времени, позволяющая сократить количество осцилляций сеточного решения. Для достижения аппроксимации по времени второго порядка используются поправки Лакса-Вендроффа [35]. Этот метод приводит к пятиточечной разностной схеме, которую в дальнейшем нетрудно монотонизировать с помощью добавления искусственной вязкости, величину которой можно оценить с помощью метода замороженных коэффициентов. Однако, в задаче (5.1.1)–(5.1.3) эти поправки неудобно использовать ввиду их громоздкости, которая обусловлена наличием производных по пространству второго порядка. Для достижения аппроксимации второго порядка можно использовать метод МакКормака [36], однако он приводит к семнадцатиточечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В данной главе предлагается совместить лучшие качества метода МакКормака и метода Лакса-Вендроффа, а именно, ввести поправки Лакса-Вендроффа для уравнений без учёта вязких слагаемых, а поправки, которые появляются от наличия вязких слагаемых, ввести с помощью метода МакКормака. Предложенная разностная схема становится пятиточечной при замороженных коэффициентах и монотонизируется точно таким же способом, как и в [24].

Таким образом, поправки Лакса-Вендроффа совпадают с поправками в [24]. Для уравнения неразрывности имеем

$$LW_\rho(\rho, \mathbf{v}, p) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\left(\frac{p_{i_k}-p_i}{\Delta n_{i_k}} + \frac{(\mathbf{v}_{i_k}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2\rho_{i_k} - (\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2\rho_i}{\Delta n_{i_k}}\right).$$

Поправки для уравнения движения имеют вид

$$LW_I(\rho,\mathbf{v},p) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\left(\frac{p_{i_k}-p_i}{\Delta n_{i_k}}\Big(\langle\mathbf{v}\rangle_{i_k} + \big(\langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\big)\mathbf{n}_{i_k}\Big) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\mathbf{v}_{i_k}\mathbf{n}_{i_k})^2\rho_{i_k}\mathbf{v}_{i_k} - (\mathbf{v}_i\mathbf{n}_{i_k})^2\rho_i\mathbf{v}_i}{\Delta n_{i_k}}\right) -$$
$$- \frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\left(\gamma\bar{p}_{i_k}\frac{\mathbf{v}_{i_k}-\mathbf{v}_i}{\Delta n_{i_k}}\mathbf{n}_{i_k} + \langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\frac{p_{i_k}-p_i}{\Delta n_{i_k}}\right).$$

Поправки для полной энергии записываются следующим образом

$$LW_E(\rho,\mathbf{v},p,E) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\left[\gamma\bar{p}_{i_k}\big(\langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\cdot\mathbf{n}_{i_k}\big)\Big(\frac{\mathbf{v}_{i_k}-\mathbf{v}_i}{\Delta n_{i_k}}\cdot\mathbf{n}_{i_k}\Big)\right] -$$
$$- \frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\left[\frac{p_{i_k}-p_i}{\Delta n_{i_k}}\left(\left\langle\frac{E+p}{\rho}\right\rangle_{i_k} + \Big(\langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\Big)^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\mathbf{v}_{i_k}\mathbf{n}_{i_k})^2(E_{i_k}+p_{i_k}) - (\mathbf{v}_i\mathbf{n}_{i_k})^2(E_i+p_i)}{\Delta n_{i_k}}\right],$$

где полная энергия $E = \rho\left(\dfrac{\mathbf{v}^2}{2}+\varepsilon\right)$. Следует отметить, что в случае если хотя бы одна из ячеек ω_i или ω_{i_k}, $k=\overline{1,4}$ является тупоугольной, то для аппроксимации поправок Лакса–Вендроффа для уравнений неразрывности, движения и полной энергии следует использовать формулы

$$LW_\rho(\rho,\mathbf{v},p) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\Big(\operatorname{div}{}^h_{i_k}(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \nabla^h_{i_k}p\Big);$$

$$LW_I(\rho,\mathbf{v},p) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\Big(\operatorname{div}{}^h_{i_k}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\otimes\rho\mathbf{v}) + \nabla^h_{i_k}p\otimes\mathbf{v} + \mathbf{v}\otimes\nabla^h_{i_k}p\Big) -$$
$$- \frac{\tau_n}{2}\nabla\Big(\gamma p_i^L\operatorname{div}\mathbf{v}_i^Q + \nabla p_i^Q\cdot\mathbf{v}_i^L\Big)\Big|_{x_i};$$

$$LW_E(\rho,\mathbf{v},p,E) = -\frac{\tau_n}{2}\frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\left(\operatorname{div}{}^h_{i_k}((E+p)\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) + \left\langle\frac{E+p}{\rho}\right\rangle_{i_k}\nabla^h_{i_k}p + \right.$$
$$\left. + \langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\Big(\gamma\langle p\rangle_{i_k}\operatorname{div}{}^h_{i_k}\mathbf{v} + \nabla^h_{i_k}p\cdot\langle\mathbf{v}\rangle_{i_k}\Big)\right), \tag{5.2.1}$$

соответственно, причём обозначения $\operatorname{div}{}^h_{i_k}$, $\nabla^h_{i_k}$ и $\langle\cdot\rangle_{i_k}$ определены согласно (1.4.8) и (1.4.14).

5.3 Сеточные уравнения

Метод адаптивной искусственной вязкости состоит из двух этапов. На первом этапе вычисляется предикторное решение $\tilde{\rho}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p}$, $\tilde{E}$. На втором этапе вычисляется корректорное решение с помощью введения искусственной вязкости, то есть слагаемых второго порядка, монотонизирующих разностную схему. Воспользовавшись полученными раннее аппроксимациями дивергенции и градиента, выведем аппроксимации исходных уравнений. Сначала выпишем аппроксимации невязких слагаемых согласно [24]

$$A_\rho(\rho, \mathbf{v}) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{4} S_{i_k} \langle \rho \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k}, \tag{5.3.1}$$

$$A_I(\rho, \mathbf{v}, p) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{4} S_{i_k} \left(\Big(\langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \cdot \mathbf{n}_{i_k} \Big) \frac{1}{2} \Big(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i_k} \Big) + \bar{p}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \right), \tag{5.3.2}$$

$$A_E(\rho, \mathbf{v}, p, \varepsilon) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{4} S_{i_k} \left(\Big(\langle \rho \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \Big) \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i_k} + \langle \varepsilon \rangle_{i_k} \right) + \bar{p}_{i_k} \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \right). \tag{5.3.3}$$

Отметим, что в случае, если одна из ячеек ω_i, ω_{i_k}, $k = \overline{1,4}$ является тупоугольной, то в выражениях (5.3.2) и (5.3.3) следует заменить слагаемые $\dfrac{1}{\omega_i} \sum\limits_{k=1}^{4} S_{i_k} \bar{p}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k}$ и $\dfrac{1}{\omega_i} \sum\limits_{k=1}^{4} S_{i_k} \bar{p}_{i_k} \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k}$ на $\nabla_i^h p$ и $\dfrac{1}{\omega_i} \sum\limits_{k=1}^{4} S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \langle p \mathbf{v} \rangle_{i_k}$ соответственно, при этом обозначение $\langle \cdot \rangle_{i_k}$ в формулах (5.3.1)–(5.3.3) следует определять через (1.4.8), а $\nabla_i^h p$ определяется с помощью (1.4.9). Аппроксимации вязких слагаемых примут вид

$$B_I(\mathbf{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{4} S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \mu \nabla_{i_k}^h \mathbf{v} - \nabla \Big((\zeta + \mu/3) \operatorname{div} \mathbf{v}_i^Q \Big) \Big|_{x_i}, \tag{5.3.4}$$

$$B_E(\mathbf{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^{4} S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \Bigg(\kappa \nabla_{i_k}^h T + \frac{1}{2} \mu \nabla_{i_k}^h (\mathbf{v})^2 + \\ + (\zeta + \mu/3) \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \operatorname{div}{}_{i_k}^h \mathbf{v} \Bigg), \tag{5.3.5}$$

где температура T вычисляется через внутреннюю энергию ε, а аппроксимации $\langle \cdot \rangle_{i_k}$, $\nabla_{i_k}^h$ и $\operatorname{div}{}_{i_k}^h$ определяются формулами (1.4.8) и (1.4.14). С помощью

обозначений (5.3.1)–(5.3.5) запишем сеточные уравнения без учёта поправок Лакса-Вендроффа и МакКормака. Сеточное уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\tilde{\rho}_i^{n+1/2} - \rho_i^n}{\tau_n} + A_\rho(\rho^n, \mathbf{v}^n) = 0. \tag{5.3.6}$$

Сеточное уравнение для импульса определяется следующим образом

$$\frac{\tilde{I}_i^{n+1/2} - I_i^n}{\tau_n} + A_I(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n) + B_I(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \tag{5.3.7}$$

где импульс $I = \rho\mathbf{v}$. Сеточное уравнение для полной энергии примет вид

$$\frac{\tilde{E}_i^{n+1/2} - E_i^n}{\tau_n} + A_E(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n, \varepsilon^n) + B_E(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \tag{5.3.8}$$

где полная энергия $E = \rho\left(\dfrac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$. Таким образом, величины $\tilde{\rho}^{n+1/2}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ и $\tilde{\varepsilon}^{n+1/2}$ вычисляются последовательно по явным схемам (5.3.6)–(5.3.8). Давление вычисляется из соотношения $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Замечание 5.3.1. *Выражения (5.3.6)–(5.3.8) аппроксимируют исходные уравнения (5.1.1)–(5.1.3) с первым порядком по пространству и первым порядком по времени.*

Для определения поправок к вязким слагаемых, введём вспомогательные величины $\hat{\rho}^{n+1/2} = \rho^n$, $\hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ и $\hat{\varepsilon}^{n+1/2}$, которые вычисляются последовательно с помощью

$$\frac{\hat{I}_i^{n+1/2} - I_i^n}{\tau_n} + B_I(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \tag{5.3.9}$$

$$\frac{\hat{E}_i^{n+1/2} - E_i^n}{\tau_n} + B_E(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0. \tag{5.3.10}$$

Тогда предикторное решение на $(n+1)$-ом слое с учётом поправок Лакса-Вендроффа и МакКормака примет вид

$$\tilde{\rho}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_i^n + \tilde{\rho}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2}A_\rho(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}) - \tau_n LW_\rho(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n), \tag{5.3.11}$$

$$\tilde{I}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(I_i^n + \tilde{I}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2}\Big[A_I(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}) + \\ + B_I(\tilde{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2})\Big] - \tau_n LW_I(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n), \tag{5.3.12}$$

$$\tilde{E}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(E_i^n + \tilde{E}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2}\Big[A_E(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}, \hat{\varepsilon}^{n+1/2}) + \\ + B_E(\tilde{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2})\Big] - \tau_n LW_E(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n, E^n). \quad (5.3.13)$$

Уравнения (5.3.9)–(5.3.13) позволяют последовательно вычислить величины $\tilde{\rho}^{n+1}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$, $\tilde{\varepsilon}^{n+1}$, $\tilde{p}^{n+1}$. Это и есть предикторное решение. Шаг по времени следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие (5.4.5), накладываемое алгоритмом введения искусственной вязкости, который опишем в следующем разделе.

Замечание 5.3.2. *По построению выражения (5.3.11)–(5.3.13) аппроксимируют исходные уравнения (5.1.1)–(5.1.3) с первым порядком по пространству и вторым порядком по времени.*

5.4 Введение диссипативных слагаемых

Для монотонизации разностной схемы будем добавлять к предикторному решению диссипативные слагаемые. Для определения схемной вязкости рассмотрим систему при замороженных значениях давления, скорости, температуры, внутренней энергии, скорости звука $c = \sqrt{p/\rho}$ и размерах ячеек. Обратим внимание, что в этом случае уравнения для импульса и полной энергии превратятся в уравнение неразравности, умноженное на $\mathbf{v}$ и на $\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$ соответственно, причём вязкие слагаемые сократятся, и разностная схема станет пятиточечной. Это даёт нам возможность вводить диссипативные слагаемые в одном и том же виде

$$\Lambda_h(\nu)q = \frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\nu_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\nabla_{i_k}^h q,$$

где $q = \rho$ для уравнения неразрывности, $q = \rho\mathbf{v}$ для уравнения импульса и $q = \rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon\right)$ для уравнения полной энергии, а сеточный оператор $\nabla_{i_k}^h$ определяется формулой (1.4.14). Таким образом, корректорное решение находится по формулам

$$\frac{q^{n+1} - \tilde{q}^{n+1}}{\tau_n} = \frac{1}{\omega_i}\sum_{k=1}^{4} S_{i_k}\nu_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}\nabla_{i_k}^h q. \quad (5.4.1)$$

Уравнение (5.4.1) позволяет последовательно найти величины ρ^{n+1}, $\mathbf{v}^{n+1}$ и ε^{n+1}. Оценим величину схемной вязкости ν_{i_k}. Для этого достаточно рассмотреть только уравнение неразрывности. Заметим, что при замороженных коэффициентах сеточные операторы (1.4.14) примут вид (1.4.10) и (1.4.13). Заменим $\dfrac{p_{i_k} - p_k}{\Delta n_{i_k}}$ на $\dfrac{c^2(\rho_{i_k} - \rho_i)}{\Delta n_{i_k}}$, где c — скорость звука. Тогда при замороженных коэффициентах имеем

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{4} S\frac{\rho_i^n + \rho_{i_k}^n}{2}\mathbf{v}^n\mathbf{n}_{i_k} - \\ - \frac{\tau}{2\omega}\sum_{k=1}^{4} S\left(\frac{c^2(\rho_{i_k}^n - \rho_i^n)}{\Delta n} + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2(\rho_{i_k}^n - \rho_i^n)}{\Delta n}\right) = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{4} S\nu\frac{\rho_{i_k}^n - \rho_i^n}{\Delta n}. \quad (5.4.2)$$

Заметим, что в уравнении (5.4.2) вязкие слагаемые сократились, в результате чего оно приняло вид, рассмотренный в [24], что позволяет ввести искусственную вязкость аналогичным образом. Если собрать коэффициенты при неизвестных, то уравнение (5.4.2) преобразуется к следующей форме:

$$\rho_i^{n+1} = A_i\rho_i^n + \sum_{k=1}^{4} B_{i_k}\rho_{i_k}^n,$$

где

$$A_i = 1 - \frac{\tau}{2\omega}\sum_{k=1}^{4} S\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k} + \tau\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}{\Delta n} + \frac{2\nu}{\Delta n}\right),$$
$$B_{i_k} = \frac{\tau S}{2\omega}\left(-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k} + \tau\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}{\Delta n} + \frac{2\nu}{\Delta n}\right).$$

Заметим, что поскольку $\sum\limits_{k=1}^{4}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k}S_{i_k} = 0$, то при замороженных коэффициентах будет выполнено $A_i = 1 - \sum\limits_{k=1}^{4} B_{i_k}$. Значит, если выбрать схемную вязкость таким образом, что $A_i > 0$ и $B_{i_k} > 0$, то будет выполнен принцип максимума

$$|\rho_i^{n+1}| \leqslant \max_{\Omega_h^{\Delta,3}}|\rho_i^n|\left(A_i + \sum_{k=1}^{4} B_{i_k}\right) = \max_{\Omega_h^{\Delta,3}}|\rho_i^n|.$$

В свою очередь из принципа максимума и положительности коэффициентов разностной схемы будет следовать монотонность её решения. Однако, это

утверждение будет выполняться лишь приближённо, поскольку оно было доказано при замороженных коэффициентах и размерах ячеек. Теперь найдём допустимые значения для схемной вязкости ν_{i_k}, такие что $A_i > 0$ и $B_{i_k} > 0$. Для того, чтобы было выполнено $B_{i_k} > 0$ достаточно

$$\nu > \frac{\Delta n}{2}|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k}|\left(1 - \frac{\tau}{\Delta n}\sqrt{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}\right).$$

Вернёмся к индексной записи, получим

$$\nu^n_{i_k} > \nu^n_{\min,i_k} = \frac{\Delta n_{i_k}}{2}|\hat{\mathbf{v}}_{i_k}\mathbf{n}_{i_k}|\left(1 - \frac{\tau_n}{\Delta n_{i_k}}\sqrt{(\hat{\mathbf{v}}_{i_k}\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2_{i_k}}\right),$$

где $\hat{\mathbf{v}}_{i_k} = \dfrac{\mathbf{v}_{i_k} + \mathbf{v}_i}{2}$, $c^2_{i_k} = \gamma\left|\dfrac{p_{i_k} + p_i}{\rho_{i_k} + \rho_i}\right|$. Теперь перейдём к условию $A_O > 0$. Учитывая то, что $\dfrac{1}{\omega_i}\sum\limits_{k=1}^{4} S_{i_k}\frac{\Delta n^1_{i_k}}{3} = 1$, получим

$$A_i = \frac{1}{2\omega}\sum_{k=1}^{4} S\left(\frac{\Delta n}{3} - \frac{\tau^2((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2)}{\Delta n} - \frac{2\tau\nu}{\Delta n}\right). \tag{5.4.3}$$

Потребуем, чтобы в выражении (5.4.3) каждая скобка была положительна, тогда

$$\frac{\Delta n}{3} - \frac{\tau^2((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2)}{\Delta n} - \frac{2\tau\nu}{\Delta n} > 0.$$

Простыми преобразованиями получим

$$\nu < \frac{(\Delta n_{i_k})^2}{2\tau}\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{\tau}{\Delta n_{i_k}}\sqrt{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}\right)^2\right). \tag{5.4.4}$$

Неравенство (5.4.4) вводит ограничение на шаг по времени $\sqrt{(\mathbf{v}_{n_i})^2 + c^2} < \dfrac{\Delta n_{i_k}}{\tau\sqrt{3}}$. Для того, чтобы оно было выполнено, потребуем чтобы

$$\tau_n < \mathrm{Ku}\cdot\min_{\tilde{\Omega}^{\Delta,3}_h}\frac{\Delta n_j}{\sqrt{3\left((\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_j)^2 + c^2_j\right)}}, \tag{5.4.5}$$

где $0 < \mathrm{Ku} < 1$ —число Куранта. Тогда (5.4.4) преобразуется к виду

$$\nu < \frac{\Delta n_{i_k}}{2}\sqrt{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{\tau}{\Delta n_{i_k}}\sqrt{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c^2}\right)^2\right).$$

В индексной записи верхнее ограничение на ν примет вид

$$\nu_{i_k}^n < \nu_{\max,i_k}^n = \frac{\Delta n_{i_k}}{2}\sqrt{(\hat{\mathbf{v}}_{i_k}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c_{i_k}^2}\left(1 - \left(\frac{\tau}{\Delta n_{i_k}}\sqrt{(\hat{\mathbf{v}}_{i_k}\cdot\mathbf{n}_{i_k})^2 + c_{i_k}^2}\right)^2\right).$$

Таким образом, для монотонизации разностной схемы следует вводить искусственную вязкость $\nu_{\min,i_k}^n \leqslant \nu_{i_k}^n \leqslant \nu_{\max,i_k}^n$. Однако, введение такой вязкости в каждом узле сильно размывает решение, поэтому необходимо наложить некоторые ограничения на области введения вязкости. Для этого нам понадобится определить области ударных волн (волн сжатия), волн растяжения, контактного разрыва [14] и области осцилляции решения.

Предположим, что мы получили предикторное решение $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\varepsilon}$. Аналогично [24], для того чтобы определить, к какой области принадлежит узел x_i, построим линейное приближение $\tilde{\rho}_i^L$, $\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_i^L$ и $\tilde{\mathbf{v}}_i^L$ функций $\tilde{\rho}$, $\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ и найдём их производные в точке x_i по пространственным переменным. Далее по найденным производным вычислим производные функций $\left(\tilde{\mathbf{v}}_i^L\cdot\mathbf{l}\right)$ и $\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)_i^L$ в направлении вектора $\mathbf{l} = \dfrac{\nabla\tilde{\rho}}{|\nabla\tilde{\rho}|}$ в точке x_i. То есть найдём приближённые значения

$$J_i^{\text{кр}} \approx \frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}}\right)\Bigg|_{x_i} \text{ и } J_i^{\text{вс}} \approx \frac{\partial}{\partial\mathbf{l}}(\tilde{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{l})\Bigg|_{x_i}.$$

Теперь проанализируем значения этих производных в каждом узле. Если $J_i^{\text{кр}} > 0$, то в узле x_i нет контактного разрыва, а если $J_O^{\text{вс}} < 0$, узел x_i находится в области ударной волны (волны сжатия). Области осцилляции решения определим следующим образом: если для узла x_i выполнено одно из следующих соотношений

$$\max_{k=\overline{1,4}}\tilde{\rho}_{i_k} < \tilde{\rho}_i \text{ или } \min_{k=\overline{1,4}}\tilde{\rho}_{i_k} > \tilde{\rho}_i,$$

то в узле x_i решение осциллирует.

Аналогично [53], в потоковых узлах, граничащих с областью осцилляции решения, введём схемную вязкость $\nu_{\max,i_k}$, а в потоковых узлах, граничащих с областью ударных волн (волн сжатия), при условии отсутствия контактного разрыва и осцилляций введём вязкость $\nu_{\min,i_k}$. В остальных узлах вязкость вводить не будем. Предложенный метод позволяет подавить осцилля-

ции сеточного решения, однако, стоит отметить, что при расчётах на "плохо" структурированных сетках иногда требуется дополнительно вводить вязкость $\nu_{\max,i_k}$ в соседних потоковых узлах в случае возникновения сильных осцилляций.

5.5 Численный эксперимент

Для оценки работы алгоритма была проведена серия численных экспериментов, результаты которых приведены в сравнении с результатами реального физического эксперимента ниже. Суть теста заключается в следующем: рассмотрим задачу определения давления переключения струйного транзистора. Данный прибор (Рис. 5.1) представляет из себя канал с ответвлениями,

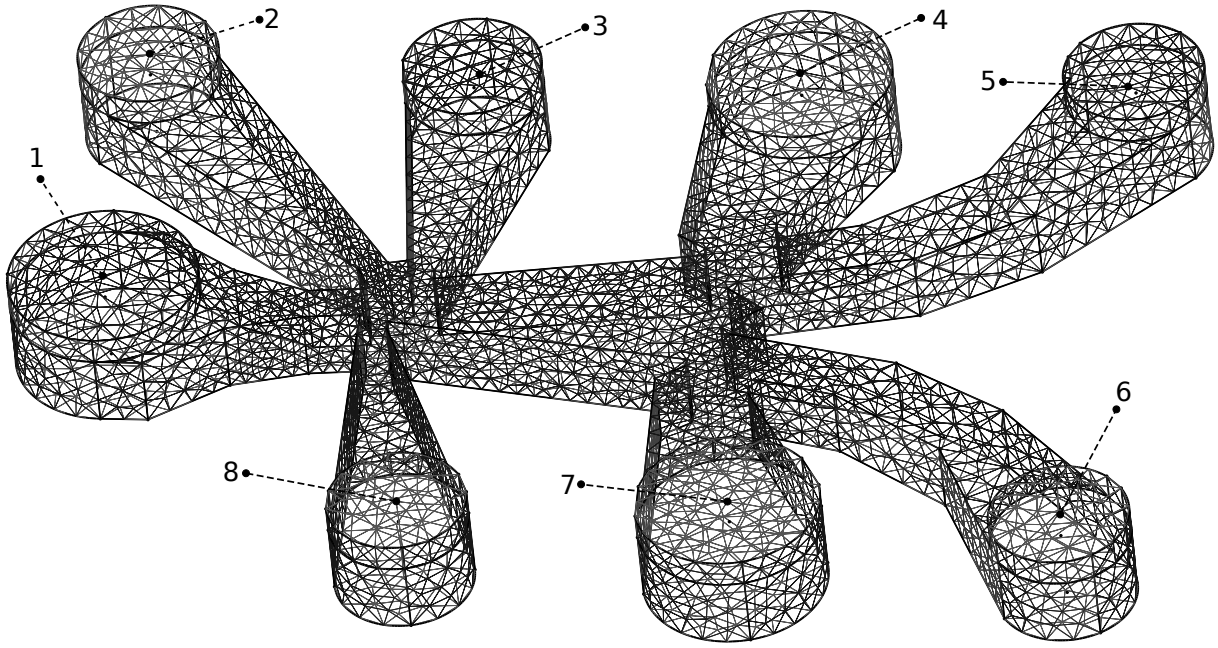

Рис. 5.1: Загрублённая поверхностная сетка струйного элемента. Цифрой 1 обозначен канал питания. Цифрами 2 и 3 обозначаны первый и второй управляющие каналы соответственно. Цифрами 5 и 6 обозначены первое и второе выходное отверстие соответственно. Цифрами 4, 7 и 8 обозначены вентиляционные отверстия.

имеющий несколько входных, выходных и вентиляционных отверстий. Среди входных отверстий имеется одно, на которое, как правило, нагнетается газ постоянного давления. В дальнейшем будем называть этот вход каналом питания. Остальные входные каналы называются каналами управления и служат для перенаправления потока газа с канала питания в различные

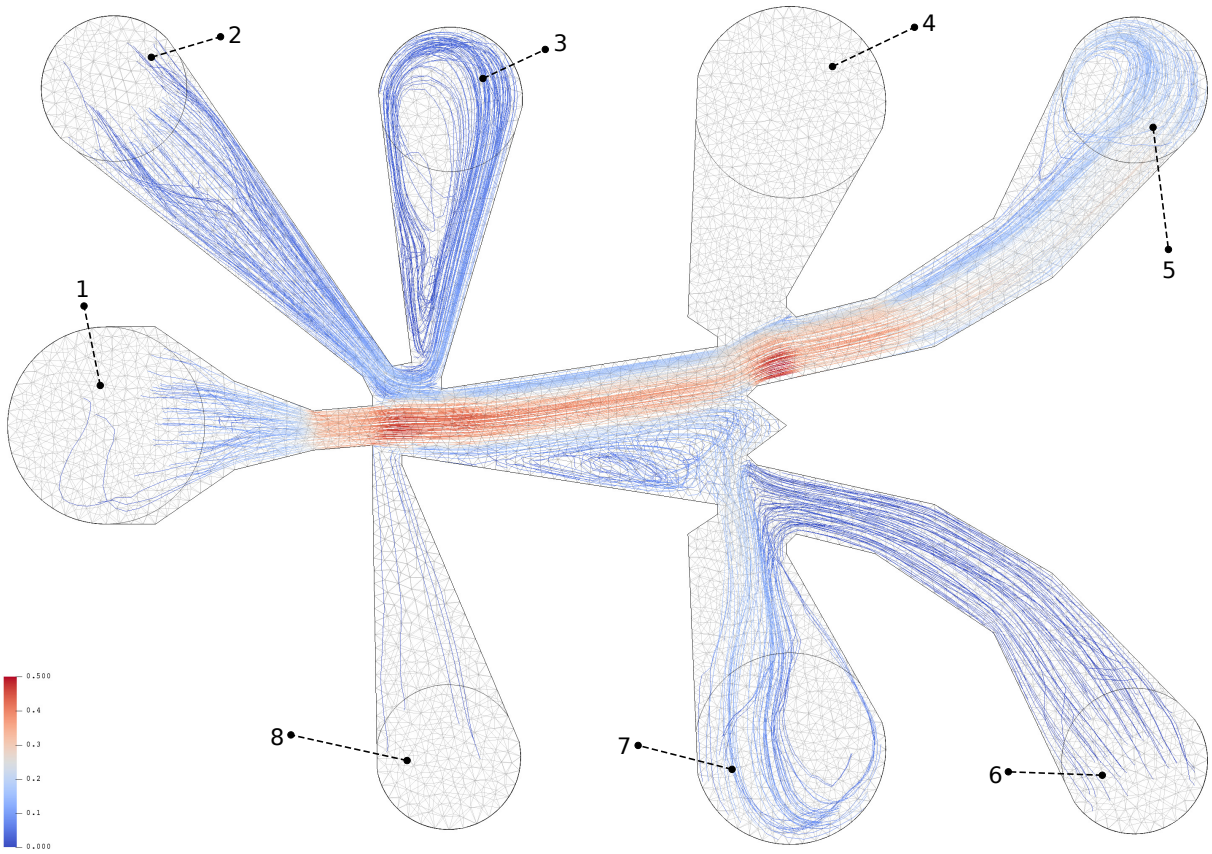

Рис. 5.2: Линии тока до момента переключения, вид сверху. Цифрой 1 обозначен канал питания. Цифрами 2 и 3 обозначаны первый и второй управляющие каналы соответственно. Цифрами 5 и 6 обозначены первое и второе выходное отверстие соответственно. Цифрами 4, 7 и 8 обозначены вентиляционные отверстия.

выходные отверстия. Выходных каналов всего два, причём прибор спроектирован таким образом, что весь поток газа, нагнетаемый на канал питания выходит ровно в одно из двух выходных отверстий. При этом некоторая часть газа может выходить через вентиляционные отверстия. Целью данного эксперимента является численное определение давления газа на управляющих входах, необходимое для перенаправления потока газа во второе выходное отверстие.

Опишем условия проведения физического эксперимента. Характерные размеры области составляют 1см × 1см × 1мм. Рабочим телом служит воздух. Давление окружающей среды составляет 745 мм рт. ст., а температура $15°C$. На канал питания нагнетается газ, давление которого равно 1 $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$ или 2 $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$. После того как течение установилось, на одном из управляющих каналов плавно повышают давление (изначально оно равнялось атмосферному) вплоть до того момента, пока выходной поток не переключится с первого

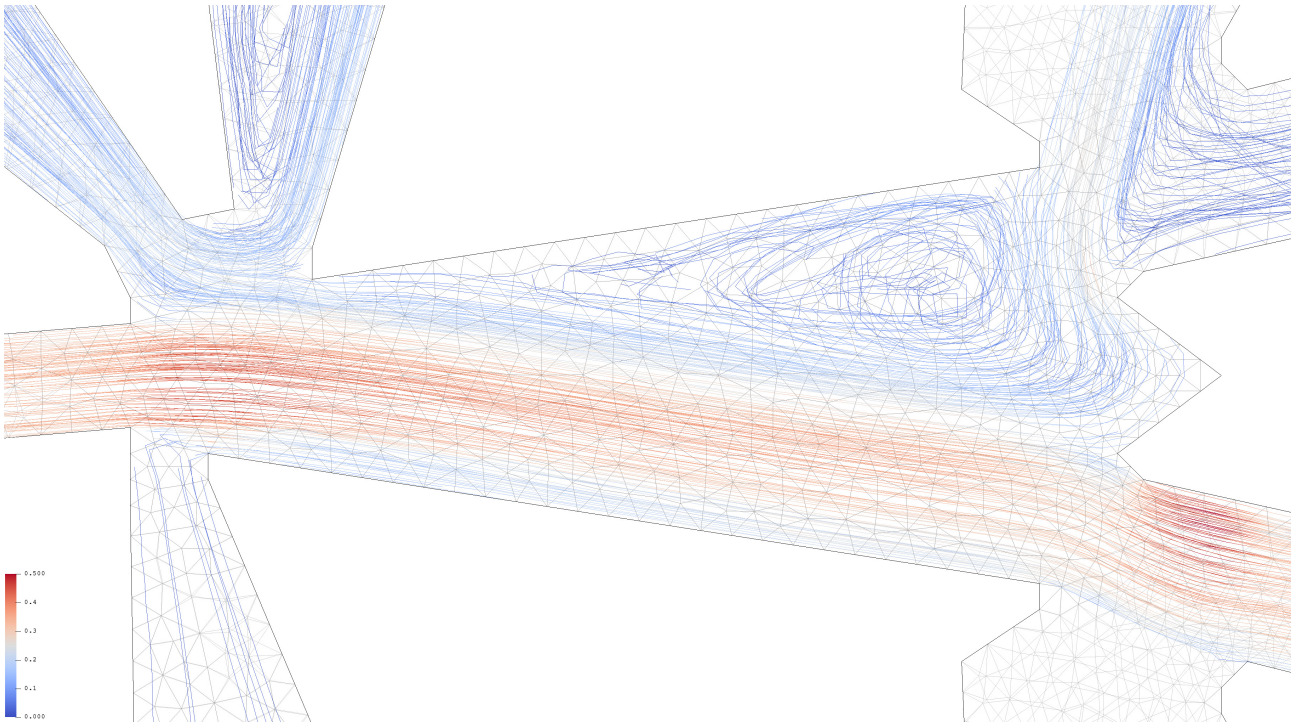

Рис. 5.3: Линии тока после переключения, вид сверху

выходного отверстия на второе. При этом выходные каналы, вентиляционные каналы и оставшиеся управляющие каналы выходят в атмосферу. Ни на какие два управляющих входа давление не нагнетается одновременно.

Численный эксперимент проводился на сетке, состоящей из 1.4 млн тетраэдров. Для построения сетки использовался свободный программный пакет Gmsh [38]. К сожалению, данный пакет не позволяет построить сетку из преимущественно остроугольных тетраэдров. Таким образом, примерно у половины тетраэдров центр описанной сферы находился вне ячейки. Тем не менее, сетка оказалась “хорошо” структурирована, то есть в ней практически отсутствовали “плоские” тетраэдры, а именно средний объём тетраэдра составляет $2.61 \cdot 10^{-5}$, а средняя площадь грани $1.28 \cdot 10^{-3}$, расстояние измеряется в миллиметрах. Граничные условия в эксперименте следующие: на входной границе канала питания задано постоянное давление 1 $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$ или 2 $\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, на участке границы, содержащей выходные и вентиляционные отверстия задано атмосферное давление и атмосферная температура. Температура на жёсткой стенке считается равной атмосферной. Давление и температура на участке границы, содержащей неиспользуемые в текущем эксперименте управляющие входы, задаются атмосферные. Температура на входном отвер-

стии питания и на активном управляющем входе определяется приближённо исходя из баротропной модели газа, а именно $p = C\rho^{\gamma}$, где p —давление газа, ρ —плотность, γ —показатель адиабаты Пуассона, а C —некоторый коэффициент, определяемый температурой и давлением газа при атмосферном давлении. Физические величины, входящие в состав уравнений (5.1.1)–(5.1.4) считаем постоянными и задаём их по таблице в соответствии с физическими свойствами воздуха. Давление на активном управляющем входе повышается линейно от атмосферного давления вплоть до того момента, пока струя не перенаправится в другое выходное отверстие. Характерный физический временной интервал, моделируемый в данном эксперименте составляет около 15 мс.

Расчёт проводился с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса “Ломоносов”. Время расчёта на 128 узлах (1024 ядер) составляет около суток. Результаты численных экспериментов показали, что алгоритм хорошо масштабируется на несколько вычислительных узлов.

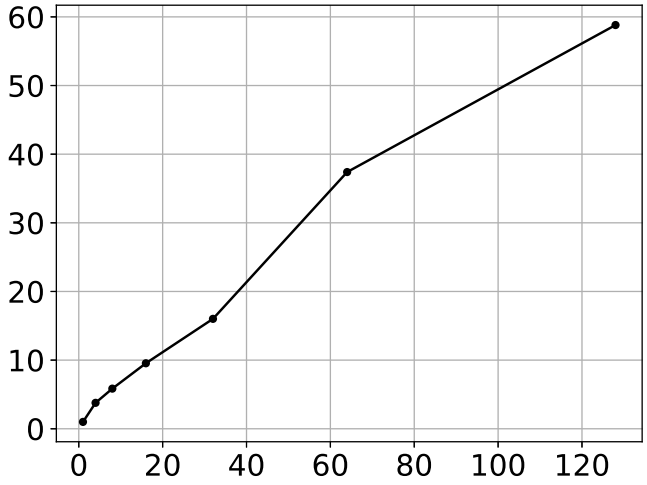

Рис. 5.4: Ускорение работы алгоритма в зависимости от числа узлов

В частности, при использовании 128 узлов удалось достичь ускорения расчётов приблизительно в 60 раз. На рисунке 5.4 показано ускорение работы алгоритма в зависимости от числа вычислительных узлов. Стоит отметить, что в данной работе детально не изучались способы разделения сетки на кластеры таким образом, чтобы количество тетраэдров, соприкасающихся с соседними кластерами было минимально. Исследования в этой области могут

существенно сократить объём пересылок и улучшить масштабируемость метода.

На рисунках 5.2 и 5.3 изображены линии тока до момента переключения и после соответственно. На обоих рисунках в эксперименте учавствует первый управляющий канал, второй управляющий канал выходит в атмосферу. Цветом обозначена скорость газа.

В таблице 5.1 приведены точные значения давления на первом и втором управляющих каналах в зависимости от давления на канале питания, необходимого для перенаправления потока газа во второе выходное отверстие, а также значения, полученные в результате численного эксперимента. Результаты численного расчёта оказались близки к результатам натурных испытаний.

Давление питания, $\left(\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}\right)$	Управляющий канал	Давление переключения в численном эксперименте, $\left(\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}\right)$	Давление переключения в натурном эксперименте, $\left(\frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}\right)$
1	1	0.15-0.16	0.17
1	2	0.15	0.13
2	1	0.34	0.35
2	2	0.32	0.32

Таблица 5.1: Сравнение результатов численного и натурного экспериментов

5.6 Выводы

В данной главе предложено обобщение метода адаптивной искусственной вязкости И. В. Попова и И. В. Фрязинова на случай уравнений вязкого сжимаемого теплопроводного газа, а также введены модификации сеточных операторов, позволяющие обойти требование отсутствия тупоугольных элементов сетки, являющееся критичным в случае тетраэдральных сеток. Предложена комбинация методов МакКормака и Лакса–Вендроффа, позволяющая провести монотонизацию разностной схемы методом замороженных коэффициентов. Кроме того, проведён численный эксперимент по определению давления переключения струйного транзистора, результаты которого количественно совпадают с результатами натурного эксперимента.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus и RSCI

1. Звягин А.В., Кобельков Г.М., Ложников М.А. *Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018 №4. 15–22 (Звягиным А. В. предложена система уравнений в частных производных, описывающая модель движения газа в прямом канале с переменным во времени сечением. Кобельковым Г. М. поставлена задача построения разностной схемы для указанной системы уравнений, обеспечивающей положительность сеточной функции плотности. Ложниковым М. А. предложена разностная схема для поставленной задачи, обеспечивающая положительность сеточной функции плотности и существование разностного решения при любых шагах по времени и пространству.).
2. Ложников М. А. *Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики на треугольных сетках* // Математическое моделирование. 2019. **31**, №1. 3–26.
3. Жуков К. А., Корнев А. А., Ложников М. А., Попов А. В. *Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа методом нулевого приближения* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019 №2. 14–21. (Корневым А. А. поставлена задача численной стабилизации к нулевому решению уравнений динамики вязкого баротропного газа при помощи метода нулевого приближения. Ложниковым М. А. проведены теоретические оценки для случая полунеявной линеаризованной разностной схемы и проведены численные эксперименты для полунеявной нелинейной разностной схемы.).
4. Иванов Д. В., Кобельков Г. М., Ложников М. А., Харисов А. Ф. *Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения уравне-*

ний вязкого сжимаемого теплопроводного газа // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**, №1. 51–62 (Кобельковым Г. М. поставлена задача модифицировать метод адаптивной искусственной вязкости на тетраэдральных сетках на случай вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Ложниковым М. А. предложена модификация, которая сохраняет все свойства оригинального метода адаптивной искусственной вязкости И. В. Попова и И. В. Фрязинова, в том числе позволяет провести частичную монотонизацию не смотря на увеличенный из-за наличия вязких слагаемых шаблон схемы.).

Другие публикации

5. Ложников М.А. Неявные разностные схемы для уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках [Электронный ресурс] // материалы XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". — Москва, 9–13 апреля 2018. – `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13559/77363_uid75196_report.pdf`.
6. Корнев А.А., Ложников М.А. Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, серия Материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2018". 2018. Т. 56. С. 156–159. (Корневым А. А. поставлена задача численной стабилизации к нулевому решению уравнений динамики вязкого баротропного газа при помощи метода нулевого приближения. Ложниковым М. А. проведены теоретические оценки для случая полунеявной линеаризованной разностной схемы и проведены численные эксперименты для полунеявной нелинейной разностной схемы.).
7. Звягин А.В., Кобельков Г.М., Ложников М.А. О численной стабилизации нестационарных задач математической физики // сборник Современные проблемы математики и механики, серия Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего, место издания МАКС Пресс Москва. 2019. С. 474–475. (Звягиным А. В. предложена система уравнений в частных производных, описывающая модель движения газа в прямом канале с переменным во времени се-

чением. Кобельковым Г. М. поставлена задача численной оптимизации. Ложниковым М. А. предложен метод построения оптимального управления для поставленной задачи и проведены численные расчеты.)

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Для задачи динамики вязкого баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением предложена разностная схема, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Для предложенной разностной схемы доказано энергетическое неравенство и существование решения при любых шагах по времени и пространству.
2. Предложен метод стабилизации уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению по начальным данным. Получены теоретические оценки на скорость сходимости для полунеявной линеаризации исходной задачи.
3. Построена разностная аппроксимация уравнений динамики вязкого баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Для предложенной разностной схемы доказано энергетическое неравенство и существование решения при любых шагах по времени и пространству.
4. Предложено обобщение метода адаптивной искусственной вязкости для уравнений динамики вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Предложены модификации сеточных операторов дивергенции и градиента, позволяющие обойти условие отсутствия тупоугольных элементов в сетке, критичного в трехмерном случае. Предложена комбинация поправок Лакса-Вендрофа и МакКормака, позволяющая провести частичную монотонизацию разностного решения тем же способом, что и в ори-

гинальном методе адаптивной искусственной вязкости, не смотря на увеличенный шаблон схемы.

5. Для предложенных схем проведены численные эксперименты на модельных задачах. Проведено сравнение результатов численного эксперимента с результатами натурного эксперимента.

Результаты диссертации могут найти применение в области теории разностных схем, в области вычислительной математики, а также в области численного моделирования.

Список литературы

1. *Звягин А. В.*, *Кобельков Г. М.*, *Ложников М. А.* Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 4. С. 15—22.
2. *Ложников М. А.* Об одной разностной схеме на треугольных сетках для уравнений газовой динамики // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 1. С. 3—26.
3. Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа / К. А. Жуков, А. А. Корнев, М. А. Ложников, А. В. Попов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 2. С. 14—21.
4. Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения уравнений вязкого сжимаемого теплопроводного газа / Д. В. Иванов, Г. М. Кобельков, М. А. Ложников, А. Ф. Харисов // Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 1. С. 51—62.
5. *Ложников М. А.* Неявные разностные схемы для уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках // материалы XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. Москва : Электронный ресурс, 2018. URL: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13559/77363_uid75196_report.pdf`.
6. *Ложников М. А.*, *Корнев А. А.* Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, серия Материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции “Лобачевские чтения-2018”. Т. 56. Казань : Изд-во Академии наук РТ, 2018. С. 156—159.

7. *Звягин А. В.*, *Кобельков Г. М.*, *Ложников М. А.* О численной стабилизации нестационарных задач математической физики // сборник Современные проблемы математики и механики, серия Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего. Москва : МАКС Пресс, 2019. С. 474—475.

8. *Рождественский Б. Л.*, *Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978.

9. *Самарский А. А.*, *Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М. : Наука, 1992.

10. *Von Neumann J.*, *Richtmyer R. D.* A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks // Journal of Applied Physics. 1950. Т. 21. С. 232—237. DOI: 10.1063/1.1699639.

11. *Попов И. В.*, *Фрязинов И. В.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 8. С. 48—60.

12. Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский. Минск, 1996.

13. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271—306.

14. *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin : Springer-Verlag, 2009.

15. *Остапенко В. В.* О монотонности разностных схем // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, вып. 5. С. 1111—1126.

16. *Остапенко В. В.* О сильной монотонности трёхточечных разностных схем // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, вып. 6. С. 1357—1367.

17. *Остапенко В. В.* О сильной монотонности нелинейных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, вып. 7. С. 1170—1185.

18. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Т. 49, № 3. С. 357—393. ISSN 0021-9991. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5.

19. *Straškraba I.*, *Zlotnik A.* On a decay rate for 1D-viscous compressible barotropic fluid equations // Journal of Evolution Equations. 2002. Т. 2, № 1. С. 69—96.

20. *Амосов А. А.*, *Злотник А. А.* Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 7. С. 1032—1049.

21. *Попов А. В.*, *Жуков К. А.* Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 4. С. 516—523.

22. *Имранов Ф. Б.*, *Кобельков Г. М.*, *Соколов А. Г.* О разностной схеме для уравнений баротропного газа // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 4. С. 388—391.

23. *Liska R.*, *Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations : тех. отч. / LANL. Los Alamos, 2001. LA-UR-01-6225.

24. *Попов И. В.*, *Фрязинов И. В.* Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 6. С. 109—127.

25. *Жуков К. А.*, *Корнев А. А.*, *Попов А. В.* Об ускорении процесса выхода на стационар решений линеаризованной системы динамики вязкого газа. I. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 1. С. 26—32.

26. *Chizhonkov E. V.* Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2003. Т. 18, № 5. С. 363—376.

27. *Фокс Д. А.* Гидравлический анализ неустановившихся течений в трубопроводах. М. : Энергоиздат, 1981.

28. *Chaudhry M. H.* Applied Hydraulic Transients. 3-е изд. New York : Springer-Verlag, 2014. ISBN 978-1-4614-8537-7.

29. *Кобельков Г. М.*, *Соколов А. Г.* Об одной неявной разностной схеме для уравнений баротропного газа // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 3. С. 271—279.

30. Разностные схемы на треугольных и тетраэдральных сетках для уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости / И. В. Попов, И. В. Фрязинов, М. Ю. Станиченко, А. В. Тайманов // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 10. С. 94—106.

31. *Liska R.*, *Wendroff B.* Comparison of Several Difference Schemes for the Euler Equations in 1D and 2D // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications / под ред. T. Y. Hou, E. Tadmor. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2003. С. 831—840. ISBN 978-3-642-55711-8.

32. *Попов И. В.*, *Фрязинов И. В.* Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 5. С. 57—66.

33. *Попов И. В.*, *Фрязинов И. В.* Конечно-разностный метод решения трехмерных уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. С. 89—100.

34. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов / М. Головизин В., А. Зайцев М., А. Карабасов С., А. Короткин И. М. : Издательство Московского университета, 2013.

35. *Lax P.*, *Wendroff B.* Systems of conservation laws // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Т. 13, № 2. С. 217—237.

36. *MacCormack R. W.* The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering : тех. отч. / AIAA. 1969. № 69—354.

37. *Василевский Ю. В.*, *Липников К. Н.* Адаптивный алгоритм построения квазиоптимальных сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39, вып. 9. С. 1532—1551.

38. *Geuzaine C.*, *Remacle J. F.* Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Т. 79, № 11. С. 1309—1331.

39. *Si H.* TetGen, a Delaunay-Based Quality Tetrahedral Mesh Generator // ACM Trans. Math. Softw. 2015. Т. 41, № 2. 11:1—11:36. DOI: 10.1145/2629697.

40. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd. Philadelphia, PA, USA : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2003. ISBN 0898715342.

41. *Куликовский А. Г.*, *Погорелов Н. В.*, *Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М. : Наука, 2001.

42. *Лебедев В. И.* Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. II // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 3, № 4. С. 449—465.

43. *Лебедев В. И.* Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4, № 4. С. 649—659.

44. *Милютин С. В.*, *Чижонков Е. В.* О двух методах приближенного проектирования на устойчивое многообразие // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8, № 2. С. 177—182.

45. *Самарский А. А.*, *Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978.

46. *Бахвалов Н. С.*, *Жидков Н. П.*, *Кобельков Г. М.* Численные методы. М. : БИНОМ, 2012.

47. *Жуков К. А.*, *Корнев А. А.*, *Попов А. В.* Об ускорении процесса выхода на стационар решений линеаризованной системы динамики вязкого газа. II. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 3. С. 3—8.

48. *Чижонков Е. В.* Об операторах проектирования для численной стабилизации // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т. 5, № 1. С. 161—169.

49. *Фурсиков А. В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 4. С. 115—160. DOI: `http://dx.doi.org/10.4213/sm560`.

50. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1970.

51. Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries / S. Balay, W. D. Gropp, L. C. McInnes, B. F. Smith // Modern Software Tools in Scientific Computing / под ред. E. Arge, A. M. Bruaset, H. P. Langtangen. Birkhäuser Press, 1997. С. 163—202.

52. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Научный Мир, 2007.

53. *Попов И. В.*, *Фрязинов И. В.* О новом выборе адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 12. С. 23—32.