

Определение линейного нормированного пространства. Примеры классических линейных нормированных пространств. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство Гёльдера. Неравенство Минковского

Линейные подпространства и многообразия. Выпуклые множества. Выпуклые множества в линейных пространствах. Теорема о выпуклости надграфика выпуклого функционала. Выпуклость множества $\{x \in X \mid p(x - x_0) < c\}$, где $p(\cdot)$ – выпуклый функционал.

Сходимость в линейном нормированном пространстве. Предел последовательности. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Классические примеры нормированных пространств. Определение нормы, проверка аксиом нормы.

Банаховы пространства. Последовательность Коши. Пример неполного пространства. Показать, что всякая последовательность Коши ограничена. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

Примеры банаховых пространств. Теорема о полноте пространства $C[a, b]$. Теорема: линейное многообразие банахова пространства является банаховым если и только если оно замкнуто.

Определение банахова пространства. Теорема о полноте пространства ℓ^p , $p \in [1, \infty]$. Полнота пространства c_0 .

Теорема о полноте конечномерного линейного нормированного пространства, Эквивалентность норм в конечномерном пространстве.

Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пример вложенной последовательности замкнутых шаров с пустым пересечением. Теорема о пополнении метрического пространства (формулировка).

Сжимающие отображения. Теорема Банаха о существовании неподвижной точки у сжимающего отображения. Принцип Шаудера (формулировка). Пример непрерывного отображения выпуклого замкнутого множества в себя без неподвижной точки.

Понятие наилучшего приближения. Теорема о существовании наилучшего приближения при приближении конечномерным подпространством. Теорема: метрическая проекция на компактное чебышёвское множество непрерывна.

Лемма Рисса. Теорема о некомпактности единичного шара бесконечномерного пространства. Выпуклость функции расстояния $f(x) := \|x - y\|$ ($y \in X$ – фиксированная точка).

Сепарабельность. Примеры сепарабельных пространств. Сепарабельность пространства ℓ^p , $p < \infty$. Несепарабельность пространства ℓ^∞ .

Компактность. Вполне ограниченность. Существование конечной ε -сети. Теорема об эквивалентности понятий счетной компактности, компактности и вполне ограниченности в метрических пространствах.

Теорема Асколи–Арцела. Критерий компактности в ℓ^p и c_0 (формулировка).

Компактность и конечномерность. Теорема о компактности единичного шара в конечномерном пространстве. Следствие: в бесконечномерном нормированном пространстве любое предкомпактное множество нигде не плотно.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Геометрический смысл нормы линейного функционала. Гиперплоскость ■

Функционал Минковского. Теорема.

Теорема Хана–Банаха и ее следствия.

Отделимость выпуклых множеств. Теоремы об отделимости выпуклых множеств (формулировка). Пример множества, для которого точку на его границе нельзя отделить от множества.

Общий вид линейного функционала в c_0 и ℓ^1 . Сопряженное пространство к пространствам ℓ^p и в $C[a, b]$ (формулировка теорем).

Задачи

Изобразить единичный шар в пространствах ℓ_3^2 , ℓ_3^1 , ℓ_2^1 , ℓ_2^∞ , ℓ_3^∞ .

Привести пример последовательности (x_n) , которая сходится в ℓ^∞ , но не сходится в ℓ^1 ;

Проверить, что $\ell^p \subset c_0$, $\forall p \geq 1$, $p < \infty$.

Показать, что для $f \in C(\mathbb{R})$ множество $\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) < 1\}$ открыто в $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{P}_n$ – множество всех алгебраических многочленов степени $\leq n$, заданных на отрезке $[0, 1]$. Будет ли множество $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ открыто (замкнуто) в $C[0, 1]$?

Замкнуто ли в $C[0, 1]$ множество $\mathcal{P}_n$? Пусть $\mathcal{R}_n$ – множество всех алгебраических многочленов степени $= n$, заданных на отрезке $[0, 1]$? Замкнуто ли в $C[0, 1]$ множество $\mathcal{R}_n$?

Выпуклы ли следующие множества: а) $\mathcal{P}_n$? б) $\mathcal{R}_n$?

в) $\{f \in C[0, 1] \mid \int_0^1 |x(t)| dt \leq 1\}$ г) $\{f \in C[0, 1] \mid \int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1\}$

Покажите, что всякое линейное многообразие в X является выпуклым множеством.

Пусть M – выпуклое множество, $x_0 \in M$. Покажите, что множество $x_0 + M$ выпукло.

Пусть $p(x)$ – выпуклый функционал, $x_0 \in X$, $c \in \mathbb{R}$. Докажите выпуклость множества $\bar{Q} = \{x \in X \mid p(x - x_0) \leq c\}$.

Покажите, что пересечение произвольного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Показать, что

$$B(x, r) \subset B(x', r') \iff \|x - x'\| \leq r' - r;$$

$$\overset{\circ}{B}(x, r) \subset \overset{\circ}{B}(x', r') \iff \|x - x'\| < r' - r.$$

Показать, что шары $B(x, r)$ и $\overset{\circ}{B}(x, r)$ являются выпуклыми множествами. Будет ли $S(x, r)$ выпуклым множеством?

Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Докажите, что если подпоследовательность последовательности Коши сходится к x , то и сама последовательность сходится к x .

Докажите, что если $\sum \|x_n - x_{n+1}\| < \infty$, то (x_n) – последовательности Коши.

Показать, что пространство ℓ_0^2 , состоящее из бесконечных финитных последовательностей (т.е. последовательностей, имеющих конечное число ненулевых членов) не является полным в норме $\|\cdot\|_2$

Доказать, что множество $\Pi = \{x \in \ell^2 \mid |x_n| \leq 1/2^{n-1}\}$ (гильбертов кирпич) служит примером бесконечномерного вполне ограниченного множества.

Показать, что в метрическом пространстве замкнутый шар является замкнутым множеством (открытый шар является открытым множеством).

Доказать, что шар в линейном нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.

Пусть $L \subset X$ – линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.

Доказать, что две нормы, введенные на одном линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из этих норм вытекает ее сходимость по другой норме.

Будут ли эквивалентны на линейном пространстве непрерывных на $C[a, b]$ функций нормы $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ и $\|\cdot\|_{C_2[a,b]}$?

Доказать, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.

Доказать, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

Пусть X – метрическое пространство и $M \subset X$. Показать, что множество $\{x \in X \mid \text{dist}(x, M) < r\}$ открыто.

Показать, что $\overline{M} = \{x \mid \text{dist}(x, M) = 0\}$.

Предположим, что в пространстве X существует несчетное множество A такое, что для некоторого $\delta > 0$ и всех $x, y \in A$ выполнено $\|x - y\| \geq \delta$. Доказать, что X не сепарабельно.

Показать, что замыкание предкомпактного множества компактно.

Показать, что любое подмножество компактного множества предкомпактно.

Проверить, что в X_n всякое ограниченное множество предкомпактно.

Является ли компактным в $C[0, 1]$ множество

$$\{x \in C^1[0, 1] \mid x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad |x(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1\}?$$

Пусть M – равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[a, b]$. Доказать, что множество Φ функций вида $\{y(t) = \int_0^t x(s) ds, \quad x \in M\}$ предкомпактно

Доказать, что равномерно ограниченное множество функций $\Phi \subset C[a, b]$, удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, компактно в пространстве $C[a, b]$.

Доказать, что $\|f\| = \sup_{x \in B} f(x)$.

Будет ли ограниченными в пространстве $C[0, 1]$ линейный функционал $f(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt$; ■

Показать, что функционал $X = \ell^1$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k})x_k$, не достигает своей нормы.

Докажите, что в пространстве ℓ^2 компактный эллипсоид $\Pi = \{x = (x_i) \in \ell^2 \mid |x_k| \leq 1/k\}$ и луч $L = \{te\}$, где $e = (1, (1/2)^{2/3}, \dots, (1/k)^{2/3}, \dots)$ нельзя разделять никаким непрерывным линейным функционалом.