МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

Стрижова Надежда Александровна

Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор О.И. Мохов

Москва — 2019

Содержание

Введение

1 Актуальность темы и степень ее разработанности

Уравнения ассоциативности возникли в работах Виттена, Дейкхрафа, Верлинде, Верлинде как уравнения на свободную энергию двумерных топологических теорий поля. Виттен в работе [27] ввел рекурсионные соотношения для n-точечных корреляционных функций в роде 0, причем двухточечные корреляторы определяют метрику, трехточечные — структурные функции. Дейкхраф, Верлинде и Верлинде в статье [14] доказали, что данные структурные функции могут быть выражены в третьих производных свободной энергии F, а также что условия ассоциативности являются уравнениями в частных производных третьего порядка типа Монжа–Ампера на функцию F. В работе [15] Дубровин построил теорию уравнений ассоциативности, доказал их интегрируемость, а также развил геометрический подход к уравнениям ассоциативности — теорию фробениусовых многообразий, возникающих в различных задачах математики и математической физики. Уравнения ассоциативности имеют огромное значение для некоторых задач исчислительной геометрии, квантовых когомологий, теории инвариантов Громова–Виттена.

Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка играют важную роль в эйлеровой гидродинамике, газовой динамике. В связи с развитием теории интегрируемых систем возрос интерес к уравнениям такого типа — уравнениям Уизема, которые возникают при усреднении для важных интегрируемых уравнений типа уравнений Кортевега – де Фриза (КдФ), sin-Гордона и т.п. Дубровин и Новиков ввели понятие систем гидродинамического типа для описываемого класса уравнений и разработали для них дифференциально-геометрический гамильтонов формализм [4]. На основе этого подхода были развиты методы интегрирования как диагонализуемых систем гидродинамического типа (см. статью [12]), так и недиагонализуемых систем гидродинамического типа (см. работы [16, 17, 18]).

В работе [25] (см. также обзор [9]) Мохов доказал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Это, в частности, позволило поставить вопрос о гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности в представлении в виде систем гидродинамического типа, которому в основном и посвящена первая часть настоящей работы. В статье Мохова и Ферапонтова [10] было установлено, что есть и уравнения ассоциативности, обладающие гамильтоновой структурой первого порядка типа Дубровина–Новикова, и уравнения, у которых таких гамильтоновых структур не существует, и были приведены конкретные примеры уравнений ассоциативности обоих типов. При этом возникла важная проблема описания или классификации уравнений ассоциативности, для которых существует гамильтонова структура Дубровина–Новикова первого порядка.

В дальнейшем был опубликован ряд статей, в которых по той же схеме были найдены другие примеры уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновыми структурами первого порядка типа Дубровина–Новикова, (см., например, статьи [22, 23]). Мохов выдвинул гипотезу, что примеры, построенные в работах [22, 23], связаны с примером из статьи [10] преобразованиями, сохраняющими гамильтоновость рассматриваемого типа.

В настоящей работе дана полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка в случае трех примарных полей, а также найдены явные преобразования, которые связывают системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, рассмотренные в статьях [22, 23], и их гамильтонову структуру Дубровина–Новикова первого порядка с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} [25], и ее гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка [10].

Вторая часть настоящей работы посвящена канонически гамильтоновым редукциям уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла.

Канонически гамильтоновы редукции на множество стационарных точек интеграла — общая конструкция Мохова [7, 8]. Связь гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач была обнаружена Новиковым в [11], где было показано, что при ограничении уравнения КдФ на множество стационарных решений высших уравнений иерархии КдФ сохраняется свойство гамильтоновости. Позднее этот результат был обобщен Богоявленским и Новиковым [1] для двух коммутирующих однокомпонентных гамильтоновых потоков специального вида с гамильтоновым оператором Гарднера–Захарова–Фаддеева, а именно было доказано, что один из таких коммутирующих потоков является гамильтоновым на множестве стационарных решений другого потока. Также Гельфанд и Дикий (см. статьи [2, 3]) рассматривали обобщение для систем типа Лакса, гамильтоновых относительно пуассоновой структуры Гельфанда–Дикого, ограниченных на множество неподвижных точек высших коммутирующих потоков соответствующей иерархии. Теорема Мохова [7, 8] дает наиболее общий подход к этому вопросу, а именно, имеет место следующий важный принцип: любая эволюционная система, ограниченная на множество стационарных точек своего невырожденного интеграла, является канонической гамильтоновой системой.

Задача ограничения уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла была поставлена в [19], однако не была решена в виду большой вычислительной сложности. В работе представлены построенные редукции на множество стационарных точек интеграла уравнений ассоциативности в случае трех и четырех примарных полей, а также доказана интегрируемость по Лиувиллю указанной редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей.

2 Цели и задачи

Целью работы является исследование гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности, в частности поиск всех систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей и обладающих гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, а также изучение гамильтоновых редукций уравнений ассоциативности.

3 Научная новизна

Автором диссертации впервые дан исчерпывающий ответ на вопрос о наличии гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для уравнений ассоциативности в виде систем гидродинамического типа в случае трех примарных полей. Также впервые в явном виде построены редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех и четырех полей, доказана интегрируемость по Лиувиллю указанной редукции в случае трех примарных полей.

4 Теоретическая и практическая значимость работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения уравнений ассоциативности, фробениусовых многообразий, топологических теорий поля, недиагонализуемых систем гидродинамического типа и интегрируемых гамильтоновых динамических систем.

5 Методология диссертационного исследования

Для доказательства основных результатов диссертации использованы следующие методы и конструкции: методы теории уравнений ассоциативности [15] и их связи с недиагонализуемыми системами гидродинамического типа [25],

[9], методы римановой геометрии, методы гамильтоновой теории систем гидродинамического типа, критерий Богоявленского–Рейнольдса [13] гамильтоновости трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа, конструкция Мохова–Ферапонтова–Гальвао–Нутку [19], схема Ленарда–Магри, конструкция Мохова [7, 8] ограничения эволюционного потока на множество стационарных точек интеграла.

6 Положения, выносимые на защиту

1. Получена полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры типа Дубровина–Новикова первого порядка в случае трех примарных полей.

2. Найдены все системы гидродинамического типа, которые эквивалентны уравнениям ассоциативности, получающимся из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} заменами, сохраняющими наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка.

   - Показано, что системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, рассмотренные в статьях [22, 23], и их гамильтоновы структуры Дубровина–Новикова первого порядка связаны такими заменами с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij}, рассмотренной в статье [25] (см. также обзор [9]), и ее гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка [10].

3. Построена каноническая гамильтонова редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей на множество стационарных точек невырожденного интеграла.

   - Получен явный вид гамильтониана канонической редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей.

- Обнаружено, что метрика гамильтониана лагранжевой системы, определяемой рассматриваемым интегралом, имеет нулевую скалярную кривизну.
- Построен интеграл уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, квадратичный по производным второго порядка.
- Изучена геометрия иерархии потоков, коммутирующих с системой гидродинамического типа, эквивалентной рассматриваемым уравнениям ассоциативности, и их редукций на множество стационарных точек интеграла.
- Доказана интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции.

4. Построена канонически гамильтонова редукция уравнений уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла в случае четырех примарных полей.

    - Получен явный вид гамильтонианов канонической гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей.

7 Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации исследуется гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности, а также изучаются канонически гамильтоновы редукции уравнений ассоциативности, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.04 «Геометрия и топология» по направлению «Симплектическая, контактная и пуассонова геометрия».

8 Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях и семинарах:

- Семинар "Геометрия, топология и математическая физика", механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. С.П. Новиков, В.М. Бухштабер, в 2014, 2015 и 2019 годах.
- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. А.Т.Фоменко, в 2018 году.
- Семинар "Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений", Независимый Московский университет, рук. И.С. Красильщик, в 2019 году.
- Семинар "Современная математическая физика", Объединенный институт ядерных исследований, в 2019 году.
- Семинар "Узлы и теория представлений", механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. В.О. Мантуров, Д.П. Ильютко, И.М. Никонов, Д.А. Федосеев, в 2019 году.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2014", 7 — 11 апреля 2014, Москва, Россия.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2015", 13 — 17 апреля 2015, Москва, Россия.
- Международная молодежная школа-конференция "Шестая летняя школа по геометрии и математической физике", 24 — 29 июня 2016, Красновидово, Московская область, Россия.

- 2nd International Scientific Conference "Science of the Future", 20 — 23 September 2016, Kazan, Russia.
- 4th International Workshop "Analysis, Probability and Geometry", 26 сентября — 1 октября 2016, Москва, Россия.
- International Conference "Dynamics in Siberia", 26 February — 4 March 2017, Novosibirsk, Russia.
- "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena PMNP2017: 50 years of IST", 17 — 24 June 2017, Gallipoli, Italy.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2018", 9 — 13 апреля 2018, Москва, Россия.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2019", 8 — 12 апреля 2019, Москва, Россия.
- 16-th Conference "Mathematics in Technical and Natural Sciences", 30 June — 5 July 2019, Koscielisko, Poland.

9 Публикации

Основные результаты по теме диссертации представлены в девяти работах [28]–[36]. Статьи [28]–[30] опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS, Web of Science и RSCI. Также результаты автора по теме диссертации представлены в 6 тезисах конференций [31]–[36]. Вклад автора диссертации и О.И. Мохова в совместных работах равноценный. Список работ приводится в конце автореферата.

10 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении формулируются основные задачи и дан краткий обзор предшествующих работ и современного состояния исследований уравнений ассоциативности.

В Главе 1 содержатся определения, результаты и конструкции, необходимые для диссертации.

В Главе 2 содержатся результаты, связанные с гамильтоновыми структурами Дубровина–Новикова первого порядка систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей.

В разделе 2.1 кратко поставлена задача и сформулирован основной результат Главы 2.

В разделе 2.2 введены преобразования, сохраняющие наличие гамильтонова оператора Дубровина–Новикова первого порядка для уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей, и дано доказательство этого свойства преобразований.

В разделе 2.3 содержится основной результат первой части работы: уравнения ассоциативности сведены указанными преобразованиями к нескольким каноническим типам и эти типы исследованы при помощи критерия Богоявленского–Рейнольдса относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка, что завершает доказательство полной классификации уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка.

В разделе 2.4 найдены все возможные системы гидродинамического типа, которые эквивалентны уравнениям ассоциативности, полученным при помощи рассматриваемых замен, сохраняющих свойство гамильтоновости, из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей. Также в разделе 2.4 найдены конкретные преобразования, связывающие системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности и рассмотренные в [22, 23], и их гамильтонову структуру Дубровина–Новикова первого порядка с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей [25], и ее гамильтонову структуру Дубровина–Новикова первого порядка [10].

Глава 3 посвящена уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех и четырех примарных полей и ее канонически гамильтоновым редукциям на множество стационарных точек интеграла.

В разделе 3.1 поставлена задача ограничения уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей на множество стационарных точек невырожденного интеграла согласно статье [19].

В разделе 3.2 построена канонически гамильтонова редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей и исследована ее геометрия.

В разделе 3.3 показана интегрируемость по Лиувиллю канонически гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей и изучены редукции потоков специального вида, коммутирующих с системой гидродинамического типа, эквивалентной указанным уравнениям.

В разделе 3.4 построен квадратичный по производным второго порядка интеграл системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, а также изучены первые интегралы рассматриваемой системы гидродинамического типа, получаемые при помощи схемы Ленарда–Магри.

В разделе 3.5 построена канонически гамильтонова редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей.

Глава 4 содержит приложения с формулами из предыдущих разделов.

В Заключении формулируются полученные результаты, а также описаны возможные обобщения результатов и направления исследования.

11 Благодарности

Автор выражает огромную благодарность научному руководителю О.И. Мохову за постановку интересных задач, неустанное внимание и важные замечания. Автор благодарит сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за непринужденную и научную атмосферу.

Исследования выполнены за счет грантов Российского научного фонда (гранты №16-11-10260, №18-11-00316).

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Уравнения ассоциативности

Пусть $F(t^1, t^2, ..., t^n)$ – функция n переменных, удовлетворяющая двум следующим условиям:

1) матрица

$$\eta_{ij} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j}, \qquad i, j = 1, 2, ..., n,$$

постоянна и невырожденна,

2) функции

$$c^i_{jk}(t) = \eta^{il} \frac{\partial^3 F}{\partial t^l \partial t^j \partial t^k}, \qquad i, j, k = 1, 2, ..., n,$$

для любого t задают структуру ассоциативной алгебры с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и умножением $e_j \circ e_k = \ c^i_{jk}(t) e_i$.

Требование ассоциативности умножения

$$e_i \circ (e_j \circ e_k) = (e_i \circ e_j) \circ e_k$$

накладывает на функцию $F(t^1, ..., t^n)$ соотношения:

$$\eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^k \partial t^l} = \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^l} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^j \partial t^k}. \tag{1.1}$$

Определение 1.1.1. *Уравнениями ассоциативности* или *системой Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ)* называется система уравнений (1.1) на функцию $F(t^1, t^2, ..., t^n)$, удовлетворяющую вышеуказанным условиям 1, 2. Также отметим, что под *числом примарных полей* понимается количество переменных функции F, т.е. n.

Зависимость функции $F(t^1, t^2, ..., t^n)$ от переменной t^1 определена постоянной матрицей η_{ij}:

$$F(t^1, ..., t^n) = \frac{1}{6}\eta_{11}(t^1)^3 + \sum_{j\geq 2}\frac{1}{2}\eta_{1j}(t^1)^2t^j + \sum_{i\geq 2}\sum_{j>i}\eta_{ij}t^1t^it^j + \\ + \sum_{i\geq 2}\frac{1}{2}\eta_{ii}t^1(t^i)^2 + f(t^2, ..., t^n). \tag{1.2}$$

Таким образом, уравнения ассоциативности являются уравнениями в частных производных на функцию $f(t^2, ..., t^n)$ от $n-1$ переменной.

Также отметим, что матрица η_{ij} полностью задает уравнения ассоциативности.

1.2 Системы гидродинамического типа

Определение 1.2.1. *Системой гидродинамического типа* (*одномерной*) называется система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^i_j(u(x,t))\frac{\partial u^j(x,t)}{\partial x}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

При локальных заменах переменных в системе гидродинамического типа (1.3) матрица $A^i_j(u(x,t))$ ведет себя как аффинор (тензор типа (1,1)). Это означает, что системы гидродинамического типа — это дифференциально-геометрический объект, и их геометрия определяется геометрией соответствующих аффиноров.

Дубровин и Новиков ввели понятие систем гидродинамического типа и разработали дифференциально-геометрический гамильтонов формализм для них. Они ввели локальный однородный по степеням производных гамильтонов оператор первого порядка [4] (называемый впоследствии *гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова первого порядка*)

$$K^{ij}(u) = g^{ij}(u)\frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u)u^k_x, \tag{1.4}$$

а также изучили его свойства.

Теорема 1.2.2 (Дубровин, Новиков [4]). *Если det* $g^{ij}(u) \neq 0$, *то оператор* $K^{ij}(u)$ (1.4) *является гамильтоновым тогда и только тогда, когда* $g^{ij}(u)$ *является контравариантной плоской псевдоримановой метрикой, а* $b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)$, *где* $\Gamma^j_{sk}(u)$ — *коэффициенты связности Леви-Чивиты, симметричной и согласованной с метрикой* $g^{ij}(u)$.

Также они ввели в статье [6] локальные однородные гамильтоновы операторы произвольного порядка (*гамильтоновы операторы Дубровина–Новикова*):

$$\begin{aligned} K^{ij}(u) = g^{ij}(u)\left(\frac{d}{dx}\right)^n + b^{ij}_k(u)u^k_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \dots + \big(c^{ij}_k(u)u^k_{(n)} + \\ + c^{ij}_{kl}(u)u^k_{(n-1)}u^l_x + \dots + c^{ij}_{k_1\dots k_n}(u)u^{k_1}_x \dots u^{k_n}_x\big), \quad u^k_{(j)} = \frac{\partial^j u^k}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Впоследствии для систем гидродинамического типа были развиты методы интегрирования, причем оказалась существенной такая характеристика системы гидродинамического типа, как диагонализуемость. Диагональные полугамильтоновы системы гидродинамического типа проинтегрированы Царевым методом обобщенного годографа [12]. Интегрируемость недиагонализуемых систем гидродинамического типа исследовалась в работах [16, 17, 18]. Вопрос о диагонализируемости аффинора или возможности приведения системы гидродинамического типа к диагональному виду (приведение к так называемым *инвариантам Римана*) тесно связан с тензорами Нейенхейса и Хантьеса.

Определение 1.2.3. *Тензор Нейенхейса аффинора* $A^i_j(u)$ — тензор типа $(1,2)$, компоненты которого определены следующей формулой:

$$N^i_{jk} = A^\alpha_j \frac{\partial A^i_k}{\partial u^\alpha} - A^\alpha_k \frac{\partial A^i_j}{\partial u^\alpha} + A^i_\alpha \frac{\partial A^\alpha_j}{\partial u^k} - A^i_\alpha \frac{\partial A^\alpha_k}{\partial u^j}.$$

Аналогично, *тензор Хантьеса аффинора* $A^i_j(u)$ — тензор типа $(1,2)$, определяемый при помощи тензора Нейенхейса этого же аффинора:

$$H^i_{jk} = A^i_\alpha A^\alpha_\beta N^\beta_{jk} + N^i_{\alpha\beta} A^\alpha_j A^\beta_k - A^i_\alpha N^\alpha_{\beta k} A^\beta_j - A^i_\alpha N^\alpha_{j\beta} A^\beta_k.$$

Теорема 1.2.4 (Haantjes [21]). *Если в любой точке окрестности у аффинора $A^i_j(u)$ есть полный набор собственных векторов, то аффинор $A^i_j(u)$ диагонализуем в окрестности тогда и только тогда, когда его тензор Хантьеса тождественно равен нулю.*

1.3 Уравнения ассоциативности в форме систем гидродинамического типа, примеры

Мохов в статье [25] (см. также обзор [9]) доказал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Переход к эквивалентной системе гидродинамического типа заключается во введении новых переменных, являющихся третьими частными производными функции $f(t^2, \ldots, t^n)$. Новые переменные связаны естественными соотношениями совместности на частные производные одной функции, а также уравнениями ассоциативности.

Приведем важные примеры уравнений ассоциативности и эквивалентных им систем гидродинамического типа, а также опишем их гамильтонову природу.

Пример 1.3.1 ([25, 9, 10]). Пусть матрица η_{ij} антидиагональна:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности $(x = t^2,\ t = t^3)$

$$f_{ttt} = (f_{xxt})^2 - f_{xxx} f_{xtt}. \tag{1.6}$$

Введем новые переменные $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$, связанные соотношениями совместности

$$
\begin{aligned}
&A_t = B_x,\\
&B_t = C_x,\\
&C_t = D_x = D(A, B, C)_x = (B^2 - AC)_x,
\end{aligned}
$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности (1.6).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид [25, 9]

$$
\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x . \tag{1.7}
$$

Система (1.7) обладает гамильтоновой структурой первого порядка Дубровина–Новикова, порождаемой плоской метрикой:

$$
M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}A & B \\ \frac{1}{2}A & B & \frac{3}{2}C \\ B & \frac{3}{2}C & 2(B^2 - AC) \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_x & B_x \\ 0 & \frac{1}{2}B_x & C_x \\ 0 & \frac{1}{2}C_x & (B^2 - AC)_x \end{pmatrix}, \tag{1.8}
$$

соответствующий гамильтониан имеет вид $H = \int C dx$ [10].

Отметим, что система (1.7) бигамильтонова, а именно, обладает второй гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова третьего порядка, согласованной с первой [19].

Пример 1.3.2 ([25, 9, 10])**.** Рассмотрим матрицу

$$
(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Этой матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{6}(t^1)^3 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности $(x = t^2,\ t = t^3)$

$$
f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} = 1. \tag{1.9}
$$

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} &A_t = B_x, \\ &B_t = C_x, \\ &C_t = D_x = D(A,B,C)_x = \left(\tfrac{1+BC}{A}\right)_x, \end{aligned}$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности (1.9).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид [25, 9]

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1+BC)/A^2 & C/A & B/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x . \tag{1.10}$$

Система (1.10) не допускает никакой гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка [10].

Пример 1.3.3 ([22]). Пусть

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрице η_{ij} соответствуют функция

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 - \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2, t^3)$$

и уравнение ассоциативности $(x = t^2,\ t = t^3)$

$$f_{ttt} + f_{ttt} f_{xxx} - f_{xxt} f_{xtt} + f_{xxt} f_{ttt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} f_{xtt} - f_{xxt}^2 = 0. \tag{1.11}$$

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ получаем

$$\begin{aligned} &A_t = B_x, \\ &B_t = C_x, \\ &C_t = D_x = D(A,B,C)_x = \left(\tfrac{B^2+C^2+BC-AC}{A+B+1}\right)_x, \end{aligned}$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности (1.11).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC-C-B^2-C^2}{(A+B+1)^2} & \frac{2AB+2AC+B^2-C^2+2B+C}{(A+B+1)^2} & \frac{-A+B+2C}{A+B+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x . \quad (1.12)$$

Как и система (1.7), система (1.12) бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

Пример 1.3.4 ([23])**.** Рассмотрим матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

как в примере 1.3.1.

Матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности

$$f_{xxx} - (f_{xtt})^2 + f_{ttt} f_{xxt} = 0, \quad (1.13)$$

где $t = t^2$, $x = t^3$ (в отличие от примера 1.3.1, в котором $x = t^2$, $t = t^3$).

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ получаем

$$\begin{aligned} A_t &= B_x, \\ B_t &= C_x, \\ C_t &= D_x = D(A, B, C)_x = \left(\frac{C^2 - A}{B}\right)_x, \end{aligned}$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности (1.13).

Соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{B} & \frac{A-C^2}{B^2} & \frac{2C}{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x . \quad (1.14)$$

Система (1.14) бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

Пример 1.3.5 ([23]). Пусть

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как в примере 1.3.3.

Матрице η_{ij} соответствуют функция

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2}t^1(t^2)^2 - \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + f(t^2, t^3)$$

и уравнение ассоциативности

$$f_{xxx}f_{ttt} - f_{xxt}f_{xtt} + f_{xtt}f_{xxx} - f_{xxt}^2 + f_{ttt}f_{xxt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} = 0, \tag{1.15}$$

где $t = t^2,\ x = t^3$ (вместо $x = t^2,\ t = t^3$ как в примере 1.3.3).

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ имеем

$$\begin{aligned} A_t &= B_x, \\ B_t &= C_x, \\ C_t &= D_x = D(A, B, C)_x = \left(\tfrac{B^2+C^2+BC-AC-A}{A+B}\right)_x, \end{aligned}$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности (1.15).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC-B-B^2-C^2}{(A+B)^2} & \frac{2AB+2AC+B^2-C^2+A}{(A+B)^2} & \frac{B-A+2C}{A+B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \tag{1.16}$$

Система (1.16) бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

Пример 1.3.6 ([20]). Рассмотрим случай четырех примарных полей и антидиагональную матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3, t^4) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^4 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3, t^4)$ и уравнения ассоциативности ($x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^4$)

$$\begin{aligned} &-2f_{xyz} - f_{xyy}f_{xxy} + f_{yyy}f_{xxx} = 0, \\ &-f_{xzz} - f_{xyy}f_{xxz} + f_{yyz}f_{xxx} = 0, \\ &-2f_{xyz}f_{xxz} + f_{xzz}f_{xxy} + f_{yzz}f_{xxx} = 0, \\ &f_{zzz} - (f_{xyz})^2 + f_{xzz}f_{xyy} - f_{yyz}f_{xxz} + f_{yzz}f_{xxy} = 0, \\ &f_{yyy}f_{xzz} - 2f_{yyz}f_{xyz} + f_{yzz}f_{xyy} = 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

При подстановке f_{yyy}, f_{yyz}, f_{yzz}, выраженных из первых трех уравнений последнее уравнение выполняется тождественно, поэтому можно записать уравнения ассоциативности (1.17) как следующую систему:

$$\begin{aligned} &-2f_{xyz} - f_{xyy}f_{xxy} + f_{yyy}f_{xxx} = 0, \\ &-f_{xzz} - f_{xyy}f_{xxz} + f_{yyz}f_{xxx} = 0, \\ &-2f_{xyz}f_{xxz} + f_{xzz}f_{xxy} + f_{yzz}f_{xxx} = 0, \\ &f_{zzz} - (f_{xyz})^2 + f_{xzz}f_{xyy} - f_{yyz}f_{xxz} + f_{yzz}f_{xxy} = 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Введем новые переменные

$$f_{xxx} = a, \quad f_{xxy} = b, \quad f_{xxz} = c, \quad f_{xyy} = d, \quad f_{xyz} = e, \quad f_{xzz} = f.$$

Тогда уравнения ассоциативности (1.18) можно записать в виде пары коммутирующих шестимерных систем гидродинамического типа:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} b \\ d \\ e \\ R \\ P \\ S \end{pmatrix}_x, \tag{1.19}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \\ P \\ S \\ Q \end{pmatrix}_x, \tag{1.20}$$

где

$$f_{yyz} = P = \frac{cd+f}{a}, \quad f_{yyy} = R = \frac{2e+bd}{a}, \quad f_{yzz} = S = \frac{2ec-bf}{a},$$

$$f_{zzz} = Q = e^2 - fd + \frac{c^2d + cf - 2bec + b^2 f}{a}.$$

Системы (1.19) и (1.20) бигамильтоновы. Гамильтонов оператор Дубровина–Новикова первого порядка, одинаковый для обеих систем, был найден в работе [20]. Второй гамильтонов оператор Дубровина–Новикова третьего порядка, согласованный с первым, также одинаковый для обеих систем, был найден в статье [26].

1.4 Критерий Богоявленского–Рейнольдса

Богоявленский и Рейнольдс [13] предложили эффективный критерий существования гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для специального класса трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа, а также алгоритм построения плоской метрики, задающей эту структуру. Опишем кратко эту конструкцию, следуя изложению в статье [13].

Рассмотрим систему гидродинамического типа

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} A^i_j(u) \frac{\partial u^j}{\partial x} \ , \tag{1.21}$$

где функции $u^i = u^i(t,x), \ i = 1, 2, \ldots, n$, зависят от времени t и пространственной переменной x.

В критерии Богоявленского–Рейнольдса по тензору Хантьеса $H^i_{jk}(u)$ (см. определение 1.2.3) аффинора $A^i_j(u)$ системы гидродинамического типа (1.21) определяется метрика h_{ij}, играющая ключевую роль в построении гамильтоновой структуры:

$$h_{ij} = h_{ji} = H^{\alpha}_{i\beta} H^{\beta}_{j\alpha}. \tag{1.22}$$

Определение 1.4.1. Мы будем называть метрику h_{ij}, построенную по тензору Хантьеса по формуле (1.22), *метрикой Хантьеса.*

Также для формулировки критерия определим вспомогательные тензоры

$$B^i_j = A^i_j - \frac{1}{n}(TrA)\delta^i_j,$$
$$T^k_{ij} = A^k_{i,j} - A^k_{j,i}.$$

Запятая в нижних индексах здесь и далее в разделе означает ковариантное дифференцирование Леви-Чивиты, порожденное метрикой h_{ij}:

$$A^k_{i,j} = \frac{\partial A^k_i}{\partial u^j} + \Gamma^k_{\alpha j} A^{\alpha}_i - \Gamma^{\alpha}_{ij} A^k_{\alpha},$$
$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{is} \left(\frac{\partial h_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{sk}}{\partial u^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^s} \right).$$

В критерии будут использованы следующие обозначения: R_{ij} — тензор Риччи для метрики h_{ij}, R — ее скалярная кривизна.

Теорема 1.4.2 (Bogoyavlenskij, Reynolds [13]). *В случае $n = 3$ система гидродинамического типа*

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} A^i_j(u) \frac{\partial u^j}{\partial x} \tag{1.23}$$

с невырожденной метрикой $h_{ij}(u)$ обладает гамильтоновой структурой с невырожденной плоской метрикой $g_{ij}(u)$ тогда и только тогда, когда

1) *кососимметрический тензор типа (1,2)*

$$V^k_{ij} = Tr(B^2)T^k_{ij} + (A^k_i T^\alpha_{j\beta} - A^k_j T^\alpha_{i\beta} + (A^\gamma_i \delta^k_j - A^\gamma_j \delta^k_i)T^\alpha_{\gamma\beta})B^\beta_\alpha$$

тождественно равен нулю,

2) *1-форма*

$$w_i = \frac{1}{TrB^2} T^\alpha_{i\beta} B^\beta_\alpha$$

точна, и следовательно существует функция $\sigma(u)$ такая, что $\partial\sigma/\partial u^i = w_i$,

3) *функция $\sigma(u)$ удовлетворяет уравнению Вейля–Схоутена*

$$\sigma_{,ij} = \sigma_{,i}\sigma_{,j} + \frac{1}{4}Rh_{ij} - R_{ij} - \frac{1}{2}h_{ij}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}h^{\alpha\beta}.$$

При выполнении условий 1) – 3) метрика $g_{ij} = h_{ij}exp^{2\sigma(u)}$ является плоской и задает гамильтонову структуру типа Дубровина–Новикова для системы гидродинамического типа (1.23).

Замечание 1.4.3. Необходимо отметить, что критерий Богоявленского–Рейнольдса не является общим критерием для всех трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа. Существенно важно, чтобы метрика Хантьеса h_{ij} для аффинора системы гидродинамического типа, была невырожденной.

1.5 Канонически гамильтонова редукция эволюционного потока на множество стационарных точек интеграла

Рассмотрим произвольную одномерную эволюционную систему уравнений

$$u^k_t = F^k(x, u, ..., u^i_{(r)} ...), \tag{1.24}$$

$$x = \left(x^1, \ldots, x^n\right),\ u = \left(u^1, ..., u^N\right),\ u^i_{(r)} = \frac{\partial^r u^i}{\partial x^r},$$

обладающую невырожденным первым интегралом

$$I = \int L(x, u^j, ..., u^i_{(r)}, ...)d^n x, \quad 0 \le r \le n_i, \tag{1.25}$$

$$det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^k_{(n_k)} \partial u^j_{(n_j)}} \right) \neq 0.$$

Лемма 1.5.1 (Lax [24]). Множество стационарных точек интеграла I, т.е. пространство решений лагранжевой системы

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)} = 0, \quad 1 \le k \le N, \tag{1.26}$$

является инвариантным для эволюционного потока (1.24).

В силу инвариантности эволюционного потока на множестве стационарных точек интеграла потока можно рассмотреть соответствующее ограничение.

Невырожденный лагранжиан L определяет $\left(\sum_{s=1}^N 2n_s\right)$-мерное фазовое пространство лагранжевой системы (1.26). Введем фазовые переменные стандартным образом:

$$q^k_i = u^k_{(i-1)}, \qquad p^i_k = \sum_{s=0}^{n_k - i} (-1^s) \frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial L}{\partial u^k_{i+s}}. \tag{1.27}$$

Гамильтониан лагранжевой системы (1.26) имеет вид:

$$H = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{s=1}^{n_k - 1} p^s_k q^k_{s+1} + p^{n_k}_k (q^k_{n_k})_x \right) - L\left(x, q^k_i, \left(q^k_{n_k}\right)_x\right). \tag{1.28}$$

Для невырожденного лагранжиана L из соотношений

$$p^{n_k}_k = \frac{\partial L}{\partial \left(q^k_{n_k}\right)_x}, \quad 1 \le k \le N,$$

можно выразить $\left(q^k_{n_k}\right)_x = f\left(x, q^i_j, p^{n_s}_s\right)$ и получить явное выражение для гамильтониана $H = H(x, p, q)$ (1.28).

На фазовом пространстве определена стандартная конечномерная скобка Пуассона

$$\{h, g\} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q^k_i} \frac{\partial g}{\partial p^i_k} - \frac{\partial h}{\partial p^i_k} \frac{\partial g}{\partial q^k_i} \right). \tag{1.29}$$

Лагранжева система (1.26) приобретает вид конечномерной гамильтоновой системы

$$\left(q_i^k\right)_x = \frac{\partial H}{\partial p_k^i} = \left\{q_i^k, H\right\},$$
$$\left(p_k^i\right)_x = -\frac{\partial H}{\partial q_i^k} = \left\{p_k^i, H\right\}.$$

Из условия того, что I (1.25) является первым интегралом системы (1.24), следует

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)} F^k \equiv \frac{dQ}{dx}, \tag{1.30}$$

где $Q = Q(x, u^k, u_x^l, \ldots, u_{(i)}^j, \ldots)$ — функция пространственной переменной x, полевых переменных $u^i(x,t)$ и конечного числа их производных по x.

При выражении Q через фазовые переменные $\widehat{Q} = \widehat{Q}(q,p)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5.2 (Мохов [7, 8]). *Произвольный одномерный эволюционный поток (1.24), ограниченный на множество стационарных точек его невырожденного интеграла I (1.25), является канонической конечномерной гамильтоновой динамической системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:*

$$\left(q_i^k\right)_t = -\left\{q_i^k, \widehat{Q}\right\},$$
$$\left(p_k^i\right)_t = -\left\{p_k^i, \widehat{Q}\right\},$$

причем в случае трансляционной инвариантности потока (1.24) и интеграла I (1.25) гамильтониан $-\widehat{Q}$ находится в инволюции с гамильтонианом H (1.28) лагранжевой системы (1.26), определяемой интегралом I (1.25), относительно стандартной конечномерной скобки Пуассона (1.29) на фазовом пространстве:

$$\left\{\widehat{Q}, H\right\} = 0.$$

Следствие 1.5.3 (Мохов [8]). Произвольные коммутирующие эволюционные потоки $u_t^i = F^k$ и $u_\tau^i = G^k$, обладающие общим невырожденным интегралом I, порождают интегралы $\widehat{Q}_F$ и $\widehat{Q}_G$ стационарной системы $\frac{\delta I}{\delta u^i(x)} = 0$, причем

$$\left\{\widehat{Q}_F, \widehat{Q}_G\right\} = const$$

для стандартной лагранжевой скобки Пуассона на фазовом пространстве стационарной системы.

Глава 2

Классификация уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей относительно наличия гамильтонова оператора Дубровина–Новикова первого порядка

2.1 Постановка задачи

После того, как в статье [25] уравнения ассоциативности были представлены в виде систем гидродинамического типа, Мохов и Ферапонтов в работе [10] привели примеры как уравнений ассоциативности в форме систем гидродинамического типа, обладающих гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, так и уравнений ассоциативности в форме систем гидродинамического типа, не обладающих никакой гамильтоновой структурой такого типа (см. раздел 1.3). Таким образом, возник вопрос: какие уравнения ассоциативности обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, а какие нет?

В данной работе доказано, что в случае трех примарных полей только уравнения ассоциативности с $\eta_{11} = 0$ в форме систем гидродинамического типа обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка (см. следствие 2.3.6 и теорему 2.3.3). Для доказательства этого факта произвольные уравнения ассоциативности сведены преобразованиями, сохраняющими наличие гамильтонова оператора Дубровина–Новикова первого порядка, к нескольким каноническим случаям, которые удается полностью исследовать при помощи критерия Богоявленского–Рейнольдса. Отметим, что общий случай исследовать при помощи критерия Богоявленского–Рейнольдса невозможно из-за вычислительных сложностей.

2.2 Преобразования, сохраняющие наличие гамильтонова оператора Дубровина–Новикова первого порядка

Утверждение 2.2.1. Невырожденные линейные преобразования независимых переменных в уравнениях ассоциативности, не затрагивающие выделенную первую переменную t^1:

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \alpha\tilde{t}^2 + \beta\tilde{t}^3 \\ t^3 = \gamma\tilde{t}^2 + \delta\tilde{t}^3 \end{cases}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \tag{2.1}$$

сохраняют наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей.

Доказательство. Из конструкции следует, что при линейном преобразовании (2.1) независимых переменных t^1, t^2, t^3 в системе гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности, происходит замена и независимых переменных, и полевых переменных.

Царевым в статье [12] доказано, что при любых допустимых линейных заменах независимых переменных система гидродинамического типа с гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, перейдет в гамильтонову систему того же типа. Таким образом, система гидродинамического типа, эквивалентная уравнениям ассоциативности, при замене (2.1) независимых переменных сохраняет наличие (или отсутствие) гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка. Отметим, что замены в нашем случае допустимы.

Уравнению ассоциативности после линейного преобразования (2.1) будет соответствовать другая система гидродинамического типа с новыми полевыми переменными. Найдем преобразование полевых переменных

$$\widetilde{A} = \frac{\partial^3 \widetilde{F}}{\partial\tilde{t}^2\partial\tilde{t}^2\partial\tilde{t}^2}, \quad \widetilde{B} = \frac{\partial^3 \widetilde{F}}{\partial\tilde{t}^2\partial\tilde{t}^2\partial\tilde{t}^3}, \quad \widetilde{C} = \frac{\partial^3 \widetilde{F}}{\partial\tilde{t}^2\partial\tilde{t}^3\partial\tilde{t}^3},$$

где $\widetilde{F} = F(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))$. Имеем

$$\widetilde{A}(\vec{\tilde{t}}) = \alpha^3 A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + 3\alpha^2\gamma B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + 3\alpha\gamma^2 C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \gamma^3 D(A, B, C),$$

$$\widetilde{B}(\vec{\tilde{t}}) = \alpha^2\beta A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma)B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\alpha\gamma\delta + \gamma^2\beta)C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \\ + \gamma^2\delta D(A, B, C),$$

$$\widetilde{C}(\vec{\tilde{t}}) = \alpha\beta^2 A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma)B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2)C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \\ + \gamma\delta^2 D(A, B, C),$$

где D выражено через A, B и C при помощи уравнения ассоциативности:

$$D(A, B, C) = \frac{-\eta^{12}\eta_{33}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\eta^{12}\eta_{23} - \eta^{13}\eta_{33})B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))} + \\ + \frac{(2\eta^{13}\eta_{23} - \eta^{12}\eta_{22})C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) - \eta^{22}(AC)(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{22}(B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})))^2}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))} + \\ + \frac{\eta^{23}(BC)(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}(C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})))^2 + \eta^{11}((\eta_{23})^2 - \eta_{22}\eta_{33})}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))}.$$

Таким образом, замена полевых переменных является локальной и при этой замене наличие гамильтоновой структуры также сохраняется. ▷

2.3 Классификация уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей относительно наличия гамильтонова оператора Дубровина–Новикова первого порядка

Утверждение 2.3.1. Матрицы η_{ij}, задающие уравнения ассоциативности, можно разбить на следующие четыре группы относительно невырожденных линейных преобразований (2.1), не затрагивающих фиксированную переменную t^1:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda^2 = 1$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \lambda^2 = 1, \ \mu \neq 1; \qquad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \lambda^2 = 1, \ \mu^2 = 1.$$

Замечание 2.3.2. Поскольку матрица η_{ij} полностью определяет уравнения ассоциативности, классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова сводится к соответствующей классификации уравнений ассоциативности, заданных матрицами типов $1) - 4)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную симметричную невырожденную матрицу, определяющую уравнения ассоциативности

$$(\eta_{ij}) = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j}\right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}, \qquad det(\eta_{ij}) = aef + 2bcd - c^2e - b^2f - ad^2 \neq 0,$$

тогда после преобразования (2.1) матрица η_{ij} будет иметь вид:

$$(\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} a & \alpha b + \gamma c & \beta b + \delta c \\ \alpha b + \gamma c & \alpha^2 e + 2\alpha\gamma d + \gamma^2 f & \alpha\beta e + (\alpha\delta + \beta\gamma)d + \gamma\delta f \\ \beta b + \delta c & \alpha\beta e + (\alpha\delta + \beta\gamma)d + \gamma\delta f & \beta^2 e + 2\beta\delta d + \delta^2 f \end{pmatrix}.$$

Приведем явный вид замены для произвольных матриц η_{ij}:

1. $a = 0$:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -sgn\ det(\eta_{ij}) & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{ef-d^2}{det(\eta_{ij})} \end{pmatrix},$$

при линейной замене

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \frac{c}{\sqrt{|det(\eta_{ij})|}}\tilde{t}^2 - \frac{bf-cd}{det(\eta_{ij})}\tilde{t}^3 \\ t^3 = \frac{-b}{\sqrt{|det(\eta_{ij})|}}\tilde{t}^2 - \frac{ce-bd}{det(\eta_{ij})}\tilde{t}^3 \end{cases}$$

2. $a \neq 0$:

Без ограничения общности можно считать, что $a = 1$. В противном случае домножим на $\frac{1}{a}$ исходную функцию F, а следовательно и всю матрицу η_{ij}, что не влияет на уравнения ассоциативности.

(a) $b = c = f = 0$:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

при линейной замене

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \tilde{t}^2 + \tilde{t}^3 \\ t^3 = \frac{1-e}{2d}\tilde{t}^2 - \frac{1+e}{2d}\tilde{t}^3 \end{cases}$$

(b) $b = c = 0,\ f \neq 0$:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & d \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sgn\, \frac{ef-d^2}{f} & 0 \\ 0 & 0 & sgn\, f \end{pmatrix},$$

при линейной замене

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \sqrt{\frac{|f|}{|ef-d^2|}}\tilde{t}^2 \\ t^3 = -\frac{d}{f}\sqrt{\frac{|f|}{|ef-d^2|}}\tilde{t}^2 + \frac{\tilde{t}^3}{\sqrt{|f|}} \end{cases}$$

(c) Пусть хотя бы одно из b и c не равно 0, тогда:

при $c^2e - 2bcd + b^2f = 0$, $c = 0$ (откуда следует, что $f = 0$):

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & e & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \frac{1}{b}\tilde{t}^3 \\ t^3 = \frac{b}{d}\tilde{t}^2 - \frac{e}{2bd}\tilde{t}^3 \end{cases}$$

при $c^2e - 2bcd + b^2f = 0$, $c \neq 0$:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \frac{-c^2}{bf-cd}\tilde{t}^2 + \frac{f}{2(bf-cd)}\tilde{t}^3 \\ t^3 = \frac{bc}{bf-cd}\tilde{t}^2 + \frac{bf-2cd}{2c(bf-cd)}\tilde{t}^3 \end{cases}$$

при $H = c^2e - 2bcd + b^2f \neq 0$:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t(\tilde{t})]{} (\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & sgn\, H & 0 \\ 1 & 0 & \frac{ef-d^2}{H} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \frac{c}{\sqrt{|H|}}\tilde{t}^2 + \frac{bf-cd}{H}\tilde{t}^3 \\ t^3 = \frac{-b}{\sqrt{|H|}}\tilde{t}^2 + \frac{ce-bd}{H}\tilde{t}^3 \end{cases}$$

Отметим, что коэффициент $(ef - d^2)/H \neq 1$, т.к. в противном случае $det\,(\eta_{ij}) = ef - d^2 - H = 0$.

$\triangleright$

Теорема 2.3.3. *Произвольное уравнение ассоциативности в случае трех примарных полей можно свести невырожденными линейными преобразованиями (2.1) , не затрагивающими t^1 и сохраняющими наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка, к одному из следующих четырех типов, заданных матрицами η_{ij} $(\lambda, \mu = const)$:*

$$1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&\lambda&0\\1&0&\mu\end{pmatrix},\ \lambda^2=1; \qquad 3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix};$$

$$2)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\lambda&0\\1&0&\mu\end{pmatrix},\ \lambda^2=1,\ \mu\neq 1; \qquad 4)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix},\ \lambda^2=1,\ \mu^2=1.$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности первого типа ($\eta_{11}=0$), *при* $\lambda^2=1$ *и любых* μ *имеют гамильтонову структуру первого порядка с плоской метрикой*

$$(g^{ij})=\begin{pmatrix}3/2 & -A/2 & \lambda\mu/2-B\\ -A/2 & \lambda\mu/2-B & -3C/2\\ \lambda\mu/2-B & -3C/2 & 2AC-2B^2+2\lambda\mu B-\lambda^2\mu^2/2\end{pmatrix}.$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности типов $2)-4)$, *не имеют гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка.*

Замечание 2.3.4. Метрика g_{ij}, полученная при помощи критерия, совпадает с точностью до знака с метрикой гамильтонова оператора первого порядка (1.8) для системы (1.6) при соответствующем выборе параметров $\lambda=1$, $\mu=0$.

Доказательство. Перейдем от уравнений ассоциативности рассматриваемых четырех типов, заданных матрицами η_{ij}, к соответствующим эквивалентным системам гидродинамического типа. Для исследования гамильтоновости этих систем в смысле наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка был использован критерий Богоявленского–Рейнольдса ([13], см. также раздел 1.4 настоящей работы) для специального класса трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа — трехкомпонентных систем гидродинамического типа с невырожденной метрикой Хантьеса.

Важно отметить, что системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, заданным матрицами η_{ij} вида 1) — 4), являются трехкомпонентными системами гидродинамического типа с невырожденной метрикой Хантьеса. Таким образом, критерий Богоявленского–Рейнольдса применим к рассматриваемым системам.

Замечание 2.3.5. Система гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -BC/A^2 & C/A & B/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{t^1},$$

эквивалентная уравнениям ассоциативности

$$F_{t^1t^1t^1}F_{t^2t^2t^2} = F_{t^1t^1t^2}F_{t^1t^2t^2}$$

с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае двух примарных полей без требования наличия единиц в семействе алгебр (т.е. без условия 1 на функцию F в определении 1.1.1, что означает, что η_{ij} — некоторая произвольная невырожденная симметричная матрица), является трехкомпонентной недиагонализуемой системой гидродинамического типа, но её метрика Хантьеса вырожденна, и соответственно критерий Богоявленского–Рейнольдса к ней неприменим.

Уравнениям ассоциативности типа 1) эквивалентна система гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C/\lambda^2 & (2B-\lambda\mu)/\lambda^2 & -A/\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{x},$$

или с учетом условия $\lambda^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B-\lambda\mu & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_{x}. \tag{2.2}$$

Приведем далее основные промежуточные результаты, полученные в ходе применения критерия Богоявленского–Рейнольдса.

Метрика $h_{ij} = h_{ji} = H^{\alpha}_{i\beta} H^{\beta}_{j\alpha}$, построенная по тензору Хантьеса H^k_{ij} аффинора системы гидродинамического типа (2.2), имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= 18C^2 + 2(\lambda\mu - 2B)\left((\lambda\mu - 2B)^2 - 4AC\right),\\
h_{12} &= 2\left(\lambda^2\mu^2 A + 4AB^2 - 4A^2C - 6BC + \lambda\mu(-4AB + 3C)\right),\\
h_{13} &= 2\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu B + 8B^2 - 6AC,\\
h_{22} &= 8\left(\lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu B + 4B^2 - 3AC\right),\\
h_{23} &= 2(\lambda\mu A - 2AB - 9C),\\
h_{33} &= 2\left(-3\lambda\mu + A^2 + 6B\right).
\end{aligned}
$$

Отметим, что все результаты вычислений приведены без учета условия $\lambda^2 = 1$, которое легко применить при необходимости.

Метрика h_{ij} невырожденна, значит критерий Богоявленского–Рейнольдса применим. Для системы (2.2) первое условие критерия тождественно выполняется, из второго условия мы получаем функцию

$$
\begin{aligned}
&\sigma = -\frac{1}{2}\, ln\, \rho_1, \text{ где}\\
&\rho_1 = 4\lambda^3\mu^3 - 4A^2B^2 - 32B^3 - \lambda^2\mu^2\left(A^2 + 24B\right) + 4A^3C + 36ABC + 27C^2 +\\
&\qquad + 2\lambda\mu\left(2A^2B + 24B^2 - 9AC\right),\\
&8(\rho_1)^2 = -\, det\,(h_{ij}).
\end{aligned}
$$

и третье условие также выполнено. Таким образом система гидродинамического типа (2.2) обладает гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, задаваемой плоской метрикой

$$
(g^{ij}) = (h^{ij}e^{-2\sigma}) = \begin{pmatrix} 3/2 & -A/2 & \lambda\mu/2 - B\\ -A/2 & \lambda\mu/2 - B & -3C/2\\ \lambda\mu/2 - B & -3C/2 & 2AC - 2B^2 + 2\lambda\mu B - \lambda^2\mu^2/2 \end{pmatrix}.
$$

Остальные промежуточные результаты для этого случая указаны в Приложении в разделе 4.1.

Уравнениям ассоциативности типа 2) эквивалентна система гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{(\mu-1)C}{\lambda(\lambda-B)} & \frac{(\mu-1)\left(\lambda^2\mu-2\lambda B+B^2+AC\right)-\lambda C^2}{\lambda(\lambda-B)^2} & \frac{(\mu-1)A-2\lambda C}{\lambda(\lambda-B)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x, \tag{2.3}$$

Метрика $h_{ij} = h_{ji} = H^{\alpha}_{i\beta} H^{\beta}_{j\alpha}$, построенная по тензору Хантьеса H^k_{ij} аффинора системы гидродинамического типа (2.3), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
h_{11} = &- \frac{2(\mu-1)^4}{\lambda^5(\lambda-B)^8}\Big(\lambda^6(\mu-1)\mu^3 + (\mu-1)\left(B^3-ABC\right)^2 - \lambda^5(\mu-1)(6\mu^2 B- \\
&- 9C^2 + 2\mu C^2) - 2\lambda(\mu-1)B\left(3B^4 - 4AB^2C + A^2C^2\right) + \lambda^2\Big(3(-4+ \\
&+ 3\mu + \mu^2)B^4 - 12(\mu-1)AB^2C + (\mu-1)\mu A^2C^2\Big) - \lambda^3(\mu-1)\Big(4(2+ \\
&+ 3\mu)B^3 - 8ABC - 7B^2C^2 + 2AC^3\Big) + \lambda^4\Big(14BC^2 + C^4 + \mu^2(9B^2- \\
&- 6AC) + \mu^3\left(3B^2+2AC\right) - 2\mu\left(6B^2 - 2AC + 7BC^2\right)\Big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{12} = &- \frac{2(\mu-1)^4}{\lambda^5(\lambda-B)^7}\Big(\lambda^5\mu(-3+2\mu)C + (\mu-1)A\left(B^2-AC\right)^2 + \\
&+ \lambda^4\left(-\mu^2A + \mu^3A + 6BC - 2\mu BC - 2C^3\right) + 2\lambda^2\Big(\left(2-3\mu+\mu^2\right)A^2C+ \\
&+ 2B^3C + AB\left(\left(-2+\mu+\mu^2\right)B - 2C^2\right)\Big) + \lambda\left(AC-B^2\right)\Big(B^2C+ \\
&+ A\left(4(\mu-1)B - C^2\right)\Big) + \lambda^3\Big(-4\mu^2AB + \mu B^2C + C\left(-7B^2+AC\right) + \\
&+ \mu A\left(4B+C^2\right)\Big)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{13} = &\frac{2(\mu-1)^4}{\lambda^4(\lambda-B)^6}\Big(\lambda^4\mu^2 + \left(B^2-AC\right)^2 + \lambda^2\left(2(2+\mu)B^2 + (-3+\mu)AC\right) - \\
&- 4\lambda\left(B^3-ABC\right) + \lambda^3\left(-4\mu B + 3C^2\right)\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{22} = &\frac{2(\mu-1)}{\lambda^5(\lambda-B)^8}\Big(\lambda(\mu-1)(\lambda-B)^2\Big(\lambda^2(\mu-1)\mu + (\mu-1)B^2+ \\
&+ \lambda\left(-2(\mu-1)B + C^2\right)\Big)^2 + \Big(\lambda^3\left(-3+7\mu-4\mu^2\right) - (\mu-1)^2A^2+ \\
&+ 2\lambda^2(-1+\mu)B - \lambda(\mu-1)B^2\Big)\Big(\lambda^4(\mu-1)^2\mu^2 + (\mu-1)^2(B^2- \\
&- AC)^2 - \lambda^3(\mu-1)\left(-4\mu B + 4\mu^2B - 5C^2 + 2\mu C^2\right) - \lambda(\mu-1)\Big(4(\mu- \\
&- 1)B^3 - 4(\mu-1)ABC - 3B^2C^2 + 2AC^3\Big) + \lambda^2\Big(2\left(2-3\mu+\mu^3\right)B^2+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2(\mu-2)(\mu-1)^2AC-6(\mu-1)BC^2+C^4))\Big),\\
h_{23}=&\frac{2(\mu-1)^3}{\lambda^4(\lambda-B)^7}\Big(\lambda^5\left(9-14\mu+4\mu^2\right)C+(\mu-1)A(B^2-AC)^2+\\
&+\lambda^4\left(-\mu A+\mu^2A-8BC+12\mu BC-4C^3\right)+\lambda^2\big((3-4\mu+\mu^2)A^2C+\\
&+4B^3C+AB\left(\left(-5+4\mu+\mu^2\right)B-4C^2\right)\big)+\lambda(-B^2+AC)\big(B^2C+\\
&+A\left(4(\mu-1)B-C^2\right)\big)-2\lambda^3\big(3\mu B^2C+A\big(\left(-1+\mu^2\right)B+\\
&+(1-2\mu)C^2)\big)\Big),\\
h_{33}=&\frac{2(1-\mu)^3}{\lambda^3(\lambda-B)^6}\Big(\lambda^4\mu(-3+4\mu)+\lambda^2\left((1+5\mu)B^2-2AC\right)+\left(B^2-AC\right)^2+\\
&+\lambda\left((\mu-1)^2A^2-4B^3+4ABC\right)+\lambda^3\left((6-10\mu)B+4C^2\right)\Big).
\end{aligned}
$$

Метрика h_{ij} невырожденна при $\mu\neq 1$, значит критерий Богоявленского–Рейнольдса применим. Для системы (2.3) первое условие критерия тождественно выполняется, из второго условия мы получаем функцию

$$
\begin{aligned}
&\sigma=4\;ln\left[\lambda-B\right]-\frac{1}{2}\;ln\,\rho_2,\;\text{где}\\
&\rho_2=4\lambda^7(\mu-1)\mu^3+(\mu-1)^2A^2\big(B^2-AC\big)^2+\lambda^6\big(-24\mu^3B-27C^2+36\mu C^2+\\
&\quad+8\mu^2\big(3B-C^2\big)\big)-2\lambda(\mu-1)\big(B^2-AC\big)\big(-2B^4+3AB^2C+A^2\big(2(-1+\\
&\quad+\mu)B-C^2\big)\big)+\lambda^4\big(-2\mu^3A^2+\mu^4A^2+32B^3-36ABC-14B^2C^2+6AC^3+\\
&\quad+\mu^2\big(A^2-48B^3+4ABC\big)+4\mu\big(4B^3+8ABC+5B^2C^2-2AC^3\big)\big)+\\
&\quad+2\lambda^5\big(\mu^2\big(18B^2-13AC\big)+\mu^3\big(6B^2+4AC\big)+\mu\big(-24B^2+9AC-20BC^2\big)+\\
&\quad+2\big(9BC^2+C^4\big)\big)+\lambda^2\big(2(-2+\mu)(\mu-1)^2A^3C+2AB^2C\big(20(\mu-1)B-\\
&\quad-C^2\big)+B^4\big(-24(\mu-1)B+C^2\big)+A^2\big(2\big(2-3\mu+\mu^3\big)B^2-16(\mu-1)BC^2+\\
&\quad+C^4\big)\big)-2\lambda^3\big(2\mu^3A^2B+24B^4-29AB^2C+3A^2C^2+2B^3C^2-2ABC^3+\\
&\quad+2\mu\big(14AB^2C-9B^4+A^2\big(B-C^2\big)\big)-\mu^2\big(6B^4-AB^2C+A^2\big(4B+C^2\big)\big)\big),\\
&(\rho_2)^2=-\frac{\lambda^{10}(\lambda-B)^{22}}{8(\mu-1)^{12}}det\,(h_{ij}),
\end{aligned}
$$

однако третье условие не выполнено. Например, в левой части условия

$$
-\sigma_{,13}+\sigma_{,1}\sigma_{,3}+\frac{1}{4}Rh_{13}-R_{13}-\frac{1}{2}h_{13}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}h^{\alpha\beta}=0,
$$

имеющего вид

$$\frac{1}{2\lambda(\mu-1)\rho_2}\Big(\lambda^6\mu^2\big(\mu^2-1\big)+(\mu-1)\big(B^2-AC\big)^2\big(2B^2-AC\big)-\lambda\big(B^2-$$
$$-AC\big)\big(12(\mu-1)B^3-8(\mu-1)ABC-B^2C^2+AC^3\big)-2\lambda^3\big(10\big(\mu^2-1\big)B^3-$$
$$-10(\mu-1)ABC+(5-8\mu)B^2C^2+(3\mu-2)AC^3\big)+\lambda^2\big(5\big(-5+4\mu+\mu^2\big)B^4-$$
$$-30(\mu-1)AB^2C+4(\mu-1)A^2C^2-4B^3C^2+4ABC^3\big)+\lambda^4\big(2\big(-2-9\mu+$$
$$+9\mu^2+2\mu^3\big)B^2+\big(3+\mu-6\mu^2+2\mu^3\big)AC-4(-7+8\mu)BC^2+5C^4\big)+$$
$$+\lambda^5\big(-8\mu^3B-21C^2+\mu^2\big(4B-6C^2\big)+4\mu\big(B+7C^2\big)\big)\Big)=0,$$

коэффициент при B^6 равен $1/(\lambda\rho_2)$ и является ненулевым при любых λ, μ.

Подробные промежуточные результаты для этого и последующих случаев довольно громоздки и не приведены в настоящей работе.

Уравнениям ассоциативности типа 3) эквивалентна система гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2B-B^2-BC-1}{A^2} & \frac{2B+C-2}{A} & \frac{B-A}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x, \tag{2.4}$$

Метрика $h_{ij}=h_{ji}=H^{\alpha}_{i\beta}H^{\beta}_{j\alpha}$, построенная по тензору Хантьеса H^k_{ij} аффинора системы гидродинамического типа (2.4), имеет следующий вид:

$$h_{11}=2\Big(\big(B+B^3+B^2(C-2)+A(C-4)C\big)^2+A\big(3+B^2+2B(C-2)\big)\big(4-$$
$$-2B^2(C-2)-2B(C-2)^2-2(1+2A)C+AC^2\big)\Big)/A^8,$$

$$h_{12}=-2\Big(B\big(3+B^2\big)\big(1+B^2+B(C-2)\big)+A^2(C-4)C(B+C-2)+A\big(-8-$$
$$-10B(C-2)-2B^3(C-2)-4C+C^2-2B^2\big(8-4C+C^2\big)\big)\Big)/A^7,$$

$$h_{13}=2\Big(A\big(3+B^2+2B(C-2)\big)^2-\big(B+B^3+B^2(C-2)+A(C-4)C\big)\big(B^2+$$
$$+A(B+C-2)\big)\Big)/A^7,$$

$$h_{22}=2\big(9+6B^2+B^4+8B(C-2)+A^2(C-4)C-2A\big(-2+4B+B^2(C-2)+$$
$$+C\big)\big)/A^6,$$

$$h_{23}=\frac{2\big(B^2\big(B^2-1\big)+A\big(6-10B-2B^2(C-2)-3C\big)+A^2(C-4)C\big)}{A^6},$$

$$h_{33} = \frac{2\big(B^4 - 2AB(3 + B(C-2)) + A^2\big(1 - 4C + C^2\big)\big)}{A^6}.$$

Метрика h_{ij} невырожденна, значит критерий Богоявленского–Рейнольдса применим. Для системы (2.4) первое условие критерия тождественно выполняется, из второго условия мы получаем функцию

$$\sigma = \frac{7}{2}\,ln\,A - \frac{1}{2}\,ln\,\rho_3, \text{ где}$$

$$\rho_3 = 4B^3\left(1 + B^2 + B(C-2)\right) + A^3(C-4)C + A\big(-27 + B^4 - 36B(C-2) -$$
$$- 8B^3(C-2) + B^2\left(-62 + 32C - 8C^2\right)\big) + A^2\big(4 - 2B^2(C-2) + 30C -$$
$$- 24C^2 + 4C^3 + 4B\left(-2 - 4C + C^2\right)\big),$$

$$(\rho_3)^2 = -\frac{A^{20}}{8} det\,(h_{ij}),$$

однако третье условие не выполнено. Например, в левой части условия

$$-\sigma_{,33} + \sigma_{,3}\sigma_{,3} + \frac{1}{4}Rh_{33} - R_{33} - \frac{1}{2}h_{33}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}h^{\alpha\beta} = 0,$$

имеющего вид

$$\frac{1}{2\rho_3}\big(2B^5 + AB^2\big(-14 + B^2 - 4B(C-2)\big) + A^3\big(-1 - 4C + C^2\big) - 2A^2\big(3(C -$$
$$- 2) + B^2(C-2) + B\big(6 + 4C - C^2\big)\big)\big) = 0,$$

коэффициент при B^5, равный $1/\rho_3$, является ненулевым.

Уравнениям ассоциативности типа 4) эквивалентна система гидродинамического типа

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu C}{\lambda B} & \frac{\lambda^2\mu^2 + \mu B^2 + \mu AC - \lambda C^2}{\lambda B^2} & \frac{-\mu A + 2\lambda C}{\lambda B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x,$$

или с учетом $\lambda^2 = 1$, $\mu^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mu C}{\lambda B} & \frac{1 + \mu B^2 + \mu AC - \lambda C^2}{\lambda B^2} & \frac{-\mu A + 2\lambda C}{\lambda B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \tag{2.5}$$

Метрика $h_{ij}=h_{ji}=H^{\alpha}_{i\beta}H^{\beta}_{j\alpha}$, построенная по тензору Хантьеса H^k_{ij} аффинора системы гидродинамического типа (2.5), имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
h_{11}=&-\big(2\mu^2\big(\mu^3\big(B^3-ABC\big)^2-2\mu AC\big(-1+\lambda C^2\big)+\big(-1+\lambda C^2\big)^2+\mu B^2\big(3+\\
&+7\lambda C^2\big)+\mu^2\big(3B^4+A^2C^2\big)\big)\big)/\big(\lambda^5B^8\big),\\
h_{12}=&\big(2\mu^2\big(\mu^3A\big(B^2-AC\big)^2-2\lambda C\big(-1+\lambda C^2\big)+\mu\big(A+\lambda B^2C+\lambda AC^2\big)+\\
&+\mu^2\big(-\lambda B^4C+2AB^2\big(1+\lambda C^2\big)+A^2\big(2C-\lambda C^3\big)\big)\big)\big)/\big(\lambda^5B^7\big),\\
h_{13}=&\frac{2\mu^2\big(1+3\lambda C^2+\mu^2\big(B^2-AC\big)^2+\mu\big(2B^2+AC\big)\big)}{\lambda^4B^6},\\
h_{22}=&\big(2\mu\big(\lambda\mu B^2\big(1+\mu B^2+\lambda C^2\big)^2-\big(\mu^2A^2+\lambda\big(4+\mu B^2\big)\big)\big(\mu^2\big(B^2-AC\big)^2-\\
&-2\mu AC\big(-1+\lambda C^2\big)+\big(-1+\lambda C^2\big)^2+\mu B^2\big(2+3\lambda C^2\big)\big)\big)\big)/\big(\lambda^5B^8\big),\\
h_{23}=&-\big(2\mu\big(\mu^3A\big(B^2-AC\big)^2+2\lambda\mu C\big(-3B^2+2AC\big)-4\lambda C\big(-1+\lambda C^2\big)+\\
&+\mu^2\big(-\lambda B^4C+AB^2\big(1+2\lambda C^2\big)+A^2\big(C-\lambda C^3\big)\big)\big)\big)/\big(\lambda^4B^7\big),\\
h_{33}=&-\frac{2\mu\big(\mu^2A^2+4\lambda^2C^2+\lambda\big(4+5\mu B^2+\mu^2\big(B^2-AC\big)^2\big)\big)}{\lambda^4B^6}.
\end{aligned}
$$

Метрика h_{ij} невырожденна, значит критерий Богоявленского–Рейнольдса применим. Для системы (2.5) первое условие критерия тождественно выполняется, из второго условия мы получаем функцию

$$
\begin{aligned}
&\sigma=4\,ln\,B-\frac{1}{2}\,ln\,\rho_4,\ \text{где}\\
&\rho_4=4\lambda^3C^4+\lambda^2C^2\left(-8+4\mu\left(5B^2-2AC\right)+\mu^2\left(B^2-AC\right)^2\right)+\mu^2A^2(1+\\
&\quad+\mu^2\left(B^2-AC\right)^2+2\mu\left(B^2+AC\right))+2\lambda(2+\mu^3\left(B^2-AC\right)^2\left(2B^2-AC\right)+\\
&\quad+\mu\left(6B^2+4AC\right)+\mu^2\left(6B^4-AB^2C+A^2C^2\right)),\\
&(\rho_4)^2=-\frac{\lambda^{14}B^{22}}{8\mu^4}det\,(h_{ij}),
\end{aligned}
$$

однако третье условие не выполнено. Например, в левой части условия

$$
-\sigma_{,13}+\sigma_{,1}\sigma_{,3}+\frac{1}{4}Rh_{13}-R_{13}-\frac{1}{2}h_{13}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}h^{\alpha\beta}=0,
$$

имеющего вид

$$\frac{\lambda\mu}{2\rho_4}\Big(1-6\lambda C^2+5\lambda^2C^4+\mu^3\big(B^2-AC\big)^2\big(2B^2-AC\big)+\mu^2\big(-2\lambda AB^2C^3+$$
$$+\lambda A^2C^4+B^4\big(5+\lambda C^2\big)\big)+2\mu\big(AC\big(1-3\lambda C^2\big)+B^2\big(2+8\lambda C^2\big)\big)\Big)=0,$$

коэффициент при A^2C^4 равен $\lambda^2\mu^3/(2\rho_4)$ и является ненулевым при любых λ и μ таких, что $\lambda^2=1$, $\mu^2=1$. ▷

Следствие 2.3.6. В случае трех примарных полей уравнения ассоциативности с $\eta_{11}=0$ в форме систем гидродинамического типа, и только они, обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка

2.4 Системы гидродинамического типа, получаемые из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей при заменах (2.1)

Рассмотрим функцию $F(t^1,t^2,t^3)=\frac{1}{2}(t^1)^2t^3+\frac{1}{2}t^1(t^2)^2+f(t^2,t^3)$ с антидиагональной матрицей η_{ij} из примера 1.3.1, а также соответствующее ей уравнение ассоциативности (1.6)

$$f_{ttt}=(f_{xxt})^2-f_{xxx}f_{xtt}$$

и эквивалентную ему систему гидродинамического типа (1.7)

$$\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-C&2B&-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}_x.$$

Отметим, что указанная матрица η_{ij} первого типа из теоремы 2.3.3 без необходимости замены (2.1).

Утверждение 2.4.1. Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, получаемым из уравнения ассоциативности (1.6) с антидиагональной матрицей η_{ij} при произвольном невырожденном преобразовании (2.1), имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ \widetilde{B} \\ \widetilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ \widetilde{B} \\ \widetilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{x}},$$

где

$$q = \frac{\alpha^3\beta^3\Delta^2 + \beta^2\gamma\Delta(\beta\gamma - 3\alpha\delta)\widetilde{B} + \alpha^2\delta\Delta(3\beta\gamma - \alpha\delta)\widetilde{C} + \gamma\delta^3\widetilde{B}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2} +$$
$$+ \frac{-2\gamma^2\delta^2\widetilde{B}\widetilde{C} + \gamma^3\delta\widetilde{C}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2},$$

$$r = \frac{\Delta(\beta^2\gamma(3\alpha\delta - \beta\gamma)\widetilde{A} + 2\alpha^3\delta^2\widetilde{B} - \alpha^2\gamma(\alpha\delta + 3\beta\gamma)\widetilde{C} - 3\alpha^4\beta^2\Delta)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2} +$$
$$+ \frac{-2\gamma\delta^3\widetilde{A}\widetilde{B} - \gamma^4\widetilde{C}^2 + \gamma^2\delta^2(2\widetilde{A}\widetilde{C} + \widetilde{B}^2)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A})^2},$$

$$s = \frac{3\alpha^2\beta\Delta - \delta^2\widetilde{A} - \gamma\delta\widetilde{B} + 2\gamma^2\widetilde{C}}{\alpha^3\Delta + \gamma^2\widetilde{B} - \gamma\delta\widetilde{A}}.$$

Доказательство. Фиксируем $F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2}t^1(t^2)^2 + f(t^2, t^3)$. Рассмотрим произвольное невырожденное преобразование (2.1)

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \alpha\tilde{t}^2 + \beta\tilde{t}^3 \\ t^3 = \gamma\tilde{t}^2 + \delta\tilde{t}^3 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = const, \ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

При переходе к переменным $\tilde{t}^i$ в функции $F(t^1, t^2, t^3)$ получим функцию

$$\widetilde{F}(\tilde{t}^1, \tilde{t}^2, \tilde{t}^3) = \frac{\gamma}{2}(\tilde{t}^1)^2\tilde{t}^2 + \frac{\delta}{2}(\tilde{t}^1)^2\tilde{t}^3 + \frac{\alpha^2}{2}\tilde{t}^1(\tilde{t}^2)^2 + \frac{\beta^2}{2}\tilde{t}^1(\tilde{t}^3)^2 + \alpha\beta\tilde{t}^1\tilde{t}^2\tilde{t}^3 + \tilde{f}(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3),$$

где $\tilde{f}(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3) = f(t^2(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3), t^3(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3))$, с матрицей

$$(\widetilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \delta \\ \gamma & \alpha^2 & \alpha\beta \\ \delta & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение ассоциативности сводится к уравнению

$$\beta\Delta\Big(\alpha^2\tilde{f}_{233}+\beta^2\tilde{f}_{222}-2\alpha\beta\tilde{f}_{223}\Big)-\alpha\Delta\Big(\alpha^2\tilde{f}_{333}+\beta^2\tilde{f}_{223}-2\alpha\beta\tilde{f}_{233}\Big)- \\ -\delta^2\Big(\tilde{f}_{222}\tilde{f}_{233}-\tilde{f}^2_{223}\Big)-\gamma^2\Big(\tilde{f}_{223}\tilde{f}_{333}-\tilde{f}^2_{233}\Big)+\gamma\delta\Big(\tilde{f}_{222}\tilde{f}_{333}-\tilde{f}_{223}\tilde{f}_{233}\Big)=0,$$

где

$$\tilde{f}_{ijk}=\frac{\partial^3\tilde{f}}{\partial\tilde{t}^i\partial\tilde{t}^j\partial\tilde{t}^k}.$$

Перейдем к эквивалентной системе гидродинамического типа согласно конструкции. Обозначим $\tilde{t}^2 = \tilde{x}$, $\tilde{t}^3 = \tilde{t}$ и введем новые переменные $\widetilde{A} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}$, $\widetilde{B} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}}$, $\widetilde{C} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{t}\tilde{t}}$, $\widetilde{D} = \tilde{f}_{\tilde{t}\tilde{t}\tilde{t}}$. Согласно конструкции имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} &\widetilde{A}_{\tilde{t}}=\widetilde{B}_{\tilde{x}},\\ &\widetilde{B}_{\tilde{t}}=\widetilde{C}_{\tilde{x}},\\ &\widetilde{C}_{\tilde{t}}=\widetilde{D}_{\tilde{x}}=\widetilde{D}\left(\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\right)_{\tilde{x}}=\widetilde{D}_{\widetilde{A}}\widetilde{A}_{\tilde{x}}+\widetilde{D}_{\widetilde{B}}\widetilde{B}_{\tilde{x}}+\widetilde{D}_{\widetilde{C}}\widetilde{C}_{\tilde{x}}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Выразим $\widetilde{D}$ из уравнения ассоциативности

$$\widetilde{D}=\frac{\beta^3\Delta\widetilde{A}-3\alpha\beta^2\Delta\widetilde{B}+3\alpha^2\beta\Delta\widetilde{C}-\delta^2\widetilde{A}\widetilde{C}+\delta^2\widetilde{B}^2+\gamma^2\widetilde{C}^2-\gamma\delta\widetilde{B}\widetilde{C}}{\alpha^3\Delta+\gamma^2\widetilde{B}-\gamma\delta\widetilde{A}}.$$

Полагая $q=\widetilde{D}_{\widetilde{A}}$, $r=\widetilde{D}_{\widetilde{B}}$, $s=\widetilde{D}_{\widetilde{C}}$ и выписывая систему (2.6) в матричном виде, получаем искомое. ▷

Оказалось, что системы гидродинамического типа из примеров 1.3.3 — 1.3.5, рассмотренные в статьях [22, 23], сводятся к системе гидродинамического типа (1.7), эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij}, преобразованиями вида (2.1), сохраняющими наличие гамильтонового оператора Дубровина–Новикова первого порядка. Приведем явный вид преобразований независимых и полевых переменных для каждого случая.

1. Для системы гидродинамического типа (1.12), рассмотренной в [22], преобразования независимых переменных

$$\begin{cases} t^1=\tilde{t}^1\\ t^2=\alpha\tilde{t}^2\\ t^3=-\tilde{t}^2+\tilde{t}^3\end{cases},\qquad \alpha=\pm1,$$

и полевых переменных

$$\begin{cases} \widetilde{A} = \alpha A - 3B + 3\alpha C - B^2 + AC \\ \widetilde{B} = B - 2\alpha C + B^2 - AC \\ \widetilde{C} = \alpha C - B^2 + AC \end{cases}, \qquad \alpha = \pm 1.$$

2. Для системы гидродинамического типа (1.14), рассмотренной в [23], преобразования независимых переменных

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \beta \tilde{t}^3 \\ t^3 = \tilde{t}^2 \end{cases}, \qquad \beta = \pm 1,$$

и полевых переменных

$$\begin{cases} \widetilde{A} = B^2 - AC \\ \widetilde{B} = \beta C \\ \widetilde{C} = B \end{cases}, \qquad \beta = \pm 1.$$

3. Для системы гидродинамического типа (1.16), рассмотренной в [23], преобразования независимых переменных

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \beta \tilde{t}^3 \\ t^3 = \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3 \end{cases}, \qquad \beta = \pm 1, \delta = \pm 1,$$

и полевых переменных

$$\begin{cases} \widetilde{A} = B^2 - AC \\ \widetilde{B} = \beta C + \delta(B^2 - AC) \\ \widetilde{C} = B + 2\beta\delta C + B^2 - AC \end{cases}, \qquad \beta = \pm 1, \delta = \pm 1.$$

Глава 3

Уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} и их редукции

3.1 Постановка задачи о редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей

В этом пункте следуем изложению в обзоре [9].

Рассмотрим функцию $F(t^1,t^2,t^3)=\frac{1}{2}(t^1)^2t^3+\frac{1}{2}t^1(t^2)^2+f(t^2,t^3)$ с антидиагональной матрицей η_{ij} из примера 1.3.1, а также соответствующее ей уравнение ассоциативности (1.6)

$$f_{ttt}=(f_{xxt})^2-f_{xxx}f_{xtt}$$

и эквивалентную ему систему гидродинамического типа (1.7)

$$\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -C & 2B & -A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix}_x.$$

Система (1.7) является бигамильтоновой. Первая гамильтонова структура (1.8) является однородной локальной гамильтоновой структурой первого порядка, порождаемой плоской метрикой:

$$M_1(A,B,C)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}A & B\\ \frac{1}{2}A & B & \frac{3}{2}C\\ B & \frac{3}{2}C & 2(B^2-AC)\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_x & B_x\\ 0 & \frac{1}{2}B_x & C_x\\ 0 & \frac{1}{2}C_x & (B^2-AC)_x\end{pmatrix},$$

соответствующий гамильтониан имеет вид $H_1=\int C dx$ [10].

Вторая гамильтонова структура, согласованная с первой, построена в статье [19]. Она является гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова третьего порядка

$$M_2(A,B,C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -A \\ 1 & -A & A^2+2B \end{pmatrix} \frac{d^3}{dx^3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2A_x \\ 0 & -A_x & 3(B_x+AA_x) \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{xx} \\ 0 & 0 & B_{xx}+A_x^2+AA_{xx} \end{pmatrix} \frac{d}{dx}, \tag{3.1}$$

с нелокальным гамильтонианом

$$H_2 = -\int \left(\frac{1}{2} A \Big(\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{-1} B \Big)^2 + \Big(\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{-1} B \Big) \Big(\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{-1} C \Big) \right) dx.$$

Также были найдены высшие интегралы первого порядка [19]. В переменных u^1, u^2, u^3, связанных с A, B, C по формулам Виета

$$\begin{aligned} A &= u^1 + u^2 + u^3, \\ B &= -\frac{1}{2}\left(u^1u^2 + u^2u^3 + u^1u^3\right), \\ C &= u^1u^2u^3, \end{aligned}$$

система (1.7) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u^2-u^3 & u^3-u^1 & u^2-u^1 \\ u^3-u^2 & -u^1-u^3 & u^1-u^2 \\ u^2-u^3 & u^1-u^3 & -u^1-u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_x = W(u)u_x. \tag{3.2}$$

Координаты u^1, u^2, u^3 являются плоскими для метрики гамильтоновой структуры первого порядка (1.8) [10]:

$$M_1(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}. \tag{3.3}$$

При помощи схемы Ленарда–Магри, примененной к казимирам гамильтоновой структуры первого порядка $M_1^{ij}(u)$:

$$M_1^{ij}(u)\frac{\delta I^m}{\delta u^j(x)} = M_2^{ij}(u)\frac{\delta K^m}{\delta u^j(x)}, \tag{3.4}$$

$$K^m = \int u^m dx, \quad m = 1, 2, 3,$$

были получены первые интегралы I^m [19], квадратичные по скоростям:

$$\begin{gathered} I^1 = \int g^1_{ij}(u) u^i_x u^j_x \, dx = \int \Bigg(\frac{(2u^1 - u^2 - u^3)/2}{(u^2 - u^1)^3 (u^3 - u^1)^3} \big((u^3 - u^2)^2 (u^1_x)^2 + \\ + ((u^2 u^3)_x - u^1 (u^2 + u^3)_x)^2 \big) + \frac{(u^2 - u^1)^2 + (u^3 - u^1)^2}{(u^2 - u^1)^3 (u^3 - u^1)^3} u^1_x \big((u^2 u^3)_x - \\ - u^1 (u^2 + u^3)_x \big) \Bigg) \, dx, \end{gathered} \tag{3.5}$$

интеграл $I^2 = \int g^2_{ij}(u) u^i_x u^j_x \, dx$ получается из I^1 при перестановке индексов 1 и 2. Первый интеграл $I^3 = -I^1 - I^2$ ввиду того, что $K^1 + K^2 + K^3 = \int A(u) \, dx$ — казимир второй гамильтоновой структуры $M_2^{ij}(u)$.

Произвольная линейная комбинация квадратичных по скоростям первых интегралов I^1, I^2 и казимиров обеих гамильтоновых структур K^m, $m = 1, 2, ..., 5$

$$\begin{aligned} K^m &= \int u^m dx, \quad m = 1, 2, 3, \\ K^4 &= \int \left(u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^1 u^3 \right) dx, \\ K^5 &= \int u^1 u^2 u^3 dx, \end{aligned} \tag{3.6}$$

определяет первый интеграл, также квадратичный по первым производным:

$$\bar{I} = \lambda I^1 + \mu I^2 + \sum_{m=1}^{5} \alpha_m K^m = \int \left(g_{ij}(u) u^i_x u^j_x + V(u) \right) dx = \int L(x, u, u_x) \, dx, \tag{3.7}$$

$$g_{ij}(u) = \lambda g^1_{ij}(u) + \mu g^2_{ij}(u), \quad \lambda, \mu = const,$$

$$V(u) = \sum_{m=1}^{3} \alpha_m u^m + \alpha_4 \left(u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^1 u^3 \right) + \alpha_5 u^1 u^2 u^3, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_5 = const.$$

При любых λ, μ, кроме

$$1)\ \lambda = 0,$$

$$2)\ \mu = 0,$$

$$3)\ \lambda = \mu,$$

метрика $g_{ij}(u)$ невырождена, соответственно интеграл $\bar{I}$ (3.7) также невырожден. Построим в таком случае редукцию рассматриваемой системы (1.7) на множество стационарных точек интеграла $\bar{I}$ (3.7) согласно конструкции [7, 8], описанной в разделе 1.5, а также докажем её интегрируемость по Лиувиллю.

3.2 Редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей

Ограничим рассматриваемую систему гидродинамического типа (3.2)

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u^2 - u^3 & u^3 - u^1 & u^2 - u^1 \\ u^3 - u^2 & -u^1 - u^3 & u^1 - u^2 \\ u^2 - u^3 & u^1 - u^3 & -u^1 - u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_x = W(u) u_x,$$

эквивалентную уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей (1.6)

$$f_{ttt} = (f_{xxt})^2 - f_{xxx} f_{xtt},$$

на множество стационарных точек невырожденного интеграла $\bar{I} = \int L(u, u_x)\, dx$ $= \int \big(g_{ij} u^i_x u^j_x + V(u)\big)\ dx$ (3.7). Перейдем к фазовым переменным стандартным образом:

$$q^k = u^k, \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial u^k_x} = 2 g_{kj} u^j_x.$$

Выразив $q^i_x = u^i_x = \frac{1}{2} g^{ik} p_k$, получим соответствующий гамильтониан, квадратичный по импульсам:

$$H = g^{ij}_H(q)\, p_i p_j - V(q), \qquad g^{ij}_H(q) = \frac{1}{4} g^{ij}(q), \quad g^{ij}(q) g_{jk}(q) = \delta^i_k. \qquad (3.8)$$

$$
\begin{aligned}
g_H^{11} =& \frac{(q^1-q^2)(q^1-q^3)\left(\mu(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-q^3)(-2q^1+q^2+q^3)\right)}{8\lambda(\lambda-\mu)(q^2-q^3)},\\
g_H^{12} =& -\frac{(q^1-q^2)^3}{8(\lambda-\mu)},\\
g_H^{13} =& -\frac{(q^1-q^3)^3}{8\lambda},\\
g_H^{22} =& \frac{(q^1-q^2)(q^2-q^3)\left(\lambda(q^2-q^3)^2-\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\right)}{8(\lambda-\mu)\mu(q^1-q^3)},\\
g_H^{23} =& -\frac{(q^2-q^3)^3}{8\mu},\\
g_H^{33} =& \frac{(q^1-q^3)(q^3-q^2)\left(\mu(q^1-q^3)^2-\lambda(q^2-q^3)^2\right)}{8\lambda\mu(q^1-q^2)},\\
V =& \sum_{m=1}^{3}\alpha_m q^m+\alpha_4\left(q^1q^2+q^2q^3+q^1q^3\right)+\alpha_5 q^1q^2q^3.
\end{aligned}
$$

Замечание 3.2.1. Метрика g_H^{ij} гамильтониана H (3.8), а соответственно и метрика g_{ij} исходного интеграла $\bar{I}$, имеет нулевую скалярную кривизну (в невырожденном случае, т.е. при $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq\mu$).

Из условия того, что $\bar{I}$ является первым интегралом системы

$$
\frac{\delta\bar{I}}{\delta u^i}W^i_j(u)u^j_x=\frac{dQ}{dx},
$$

найдем функцию $Q=g_{Q,ij}(u)u^i_xu^j_x+V_Q(u)$, явный вид которой указан в Приложении в разделе 4.2. Полученная функция Q в фазовых переменных имеет вид $\widehat{Q}(q,p)$.

Теорема 3.2.2. *Система гидродинамического типа* (1.7)*, эквивалентная уравнениям ассоциативности* (1.6) *с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, ограниченная на множество стационарных точек ее невырожденного интеграла $\bar{I}$* (3.7)*, является канонической гамильтоновой системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:*

$$
\begin{aligned}
\left(q^k_i\right)_t &= -\{q^k_i,\widehat{Q}\},\\
\left(p^i_k\right)_t &= -\{p^i_k,\widehat{Q}\},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

гамильтониан $-\widehat{Q}$ *квадратичен по импульсам:*

$$\widehat{Q} \;=\; g^{ij}_{\widehat{Q}}(q)\, p_i p_j + V_{\widehat{Q}}(q), \tag{3.10}$$

$$g^{11}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^1-q^2)(q^1-q^3)\big(\mu q^2(q^1-q^3)^2 - \lambda(q^2-q^3)((q^1)^2-q^2q^3)\big)}{8\lambda(\lambda-\mu)(q^2-q^3)},$$
$$g^{12}_{\widehat{Q}} = g^{21}_{\widehat{Q}} = -\frac{(q^1-q^2)^3q^3}{8(\lambda-\mu)},$$
$$g^{13}_{\widehat{Q}} = g^{31}_{\widehat{Q}} = -\frac{(q^1-q^3)^3q^2}{8\lambda},$$
$$g^{22}_{\widehat{Q}} = \frac{(q^1-q^2)(q^2-q^3)\big(\lambda q^1(q^2-q^3)^2 + \mu(q^3-q^1)((q^2)^2-q^1q^3)\big)}{8\mu(\lambda-\mu)(q^1-q^3)},$$
$$g^{23}_{\widehat{Q}} = g^{32}_{\widehat{Q}} = -\frac{q^1(q^2-q^3)^3}{8\mu},$$
$$g^{33}_{\widehat{Q}} = \frac{\big(\mu q^2(q^1-q^3)^2 - \lambda q^1(q^2-q^3)^2\big)(q^1-q^3)(-q^2+q^3)}{8\lambda\mu(q^1-q^2)},$$
$$\begin{aligned} V_{\widehat{Q}} =& V_Q = \frac{\alpha_5}{4}\big((q^1q^2)^2+(q^1q^3)^2+(q^2q^3)^2-2q^1q^2q^3(q^1+q^2+q^3)\big)-2\alpha_4q^1q^2q^3-\\ &-\frac{1}{2}\big((\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)q^1q^2+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)q^1q^3+(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)q^2q^3\big).\end{aligned}$$

Гамильтониан $-\widehat{Q}$ (3.10) *находится в инволюции с гамильтонианом* H (3.8) *лагранжевой системы, определяемой интегралом* $\bar{I}$ (3.7), *относительно стандартной конечномерной скобки Пуассона на фазовом пространстве:*

$$\big\{\widehat{Q}, H\big\} = 0. \tag{3.11}$$

Замечание 3.2.3. Метрики интеграла $\widehat{Q}$ и гамильтониана лагранжевой системы H связаны с аффинором W^i_k системы гидродинамического типа (3.2) следующим образом:

$$g^{ij}_{\widehat{Q}}(q)\, g_{H,jk}(q) = -W^i_k(q), \quad \text{где } g^{ij}_H(q)\, g_{H,jk}(q) = \delta^i_k.$$

3.3 Интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей

Чтобы найти дополнительный первый интеграл построенной редукции (3.9), помимо интегралов $\widehat{Q}$ и H, рассмотрим гамильтоновы потоки вида

$$u^i_{t_k} = M^{ij}_1(u)\frac{\delta J}{\delta u^j}, \tag{3.12}$$

где $M^{ij}_1(u)$ — гамильтонов оператор Дубровина–Новикова первого порядка (3.3) системы гидродинамического типа (3.2), а J — произвольный интеграл этой же системы.

Если $\bar{I}$ является первым интегралом потока, тогда поток можно ограничить на множество стационарных точек этого интеграла. Редукции системы (3.2)

$$u^i_t = W^i_j(u)u_x = M^{ij}_1(u)\frac{\delta H_1}{\delta u^j}$$

и потока

$$u^i_t = M^{ij}_1(u)\frac{\delta J}{\delta u^j}$$

на множество стационарных точек их общего первого интеграла $\bar{I}$ (3.7) являются каноническими гамильтоновыми системами с гамильтонианами $-\widehat{Q}$ (3.10) и $-\widehat{Q}_J$ соответственно, и по следствию из теоремы Мохова о редукции

$$\{\widehat{Q}, \widehat{Q}_J\} = const.$$

Таким образом мы можем искать первые интегралы редукции (3.9). Построим соответствующие редукции гамильтоновых потоков вида (3.12). Отметим, что интеграл $\bar{I}$ является первым интегралом для потоков вида (3.12) с гамильтонианами I^1 (3.5) и I^2, т.к. эти интегралы в инволюции относительно скобки Пуассона, определенной гамильтоновым оператором $M^{ij}_1(u)$. Это является следствием более общего утверждения: для бигамильтоновой системы все интегралы, порожденные казимирами одного из гамильтоновых операторов при помощи схемы Ленарда–Магри, коммутируют относительно скобок Пуассона, заданных обоими гамильтоновыми операторами.

Утверждение 3.3.1. 1. Для $J = K^m = \int u^m\,dx$, $m = 1,2,3$, гамильтоновы потоки $u^i_t = M^{ij}_1(u)\,\delta K^m/\delta u^j = 0$ вырожденны, поскольку K^m, $m = 1,2,3$, — казимиры гамильтонового оператора $M^{ij}_1(u)$.

2. Для $J = K^4 = \int \left(u^1u^2 + u^1u^3 + u^2u^3\right)\,dx$, гамильтониан редукции $-\widehat{Q}_{K^4}$ совпадает с точностью до знака с гамильтонианом H (3.8) лагранжевой системы, определяемой интегралом $\bar{I}$ (3.7):

$$\widehat{Q}_{K^4} = H.$$

Данное утверждение следует из того, что K^4 является импульсом гамильтоновой структуры $M^{ij}_1(u)$.

3. Для $J = K^5 = H_1 = \int u^1u^2u^3\,dx$, гамильтонов поток (3.12) совпадает с системой гидродинамического типа (3.2), соответственно гамильтониан редукции этого потока равен $-\widehat{Q}_{K^5} = -\widehat{Q}$ (3.10).

4. Для $J = I^1$ (3.5) гамильтонов поток $u^i_t = M^{ij}_1(u)\delta I^1/\delta u^j$ при ограничении на множество стационарных точек интеграла $\bar{I}$ (3.7) является канонически гамильтоновой редукцией уравнений ассоциативности с нетривиальным гамильтонианом $-\widehat{Q}_{I^1}$ четвертой степени по импульсам:

$$\widehat{Q}_{I^1} = G^{ijkl}_{I^1}(q)p_ip_jp_kp_l + B^{ij}_{I^1}(q)p_ip_j + C_{I^1}(q).$$

При $\alpha_i = 0$, $i = 1,\ldots,5$ ($\bar{I} = \int g_{ij}(u)u^i_xu^j_x\,dx$), интеграл $\widehat{Q}_{I^1}$ имеет члены только степени 4 по импульсам, т.е. в этом случае $B^{ij}_{I^1}(q) = 0$ и $C_{I^1}(q) = 0$. Явный вид $\widehat{Q}_{I^1}$ указан в Приложении в разделе 4.3.

5. Аналогично для $J = I^2$ гамильтонов поток $u^i_t = M^{ij}_1(u)\delta I^2/\delta u^j$ при ограничении на множество стационарных точек интеграла $\bar{I}$ (3.7) является кано-

нически гамильтоновой редукцией уравнений ассоциативности с нетривиальным гамильтонианом $-\widehat{Q}_{I^2}$ четвертой степени по импульсам:

$$\widehat{Q}_{I^2} = G^{ijkl}_{I^2}(q)p_ip_jp_kp_l + B^{ij}_{I^2}(q)p_ip_j + C_{I^2}(q).$$

Интеграл $\widehat{Q}_{I^2}$ может быть получен из $\widehat{Q}_{I^1}$ перестановкой индексов 1 и 2, в частности в α_i, и параметров λ и μ.

Заметим, что в последних двух случаях полученные интегралы имеют вид

$$Q_{I^m} = K^m_{ij}(u)u^i_{xx}u^j_{xx} + L^m_{ijk}(u)u^i_{xx}u^j_xu^k_x + M^m_{ijkl}(u)u^i_xu^j_xu^k_xu^l_x + S^m_i(u)u^i_{xx} + T^m_{ij}(u)u^i_xu^j_x.$$

Согласно конструкции редукции u и u_x выражаются через фазовые переменные стандартным образом. Чтобы получить выражение в фазовых переменных для u_{xx}, можно расписать

$$u_{xx}(q,p) = \frac{d}{dx}u_x(q,p),$$

и в фазовом пространстве производные q и p заданы стандартными формулами:

$$\left(q^k\right)_x = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \left(p_k\right)_x = -\frac{\partial H}{\partial q^k},$$

где H — гамильтониан лагранжевой системы, определенной интегралом $\bar{I}$.

Также приведем старший член интеграла Q_{I^1}:

$$\begin{aligned}
K^1_{11} =& \frac{(u^2-u^3)\left((\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 - \lambda(u^1-u^2)^5\right)}{(u^1-u^2)^6(u^1-u^3)^6},\\
K^1_{12} =& K^1_{21} = -\frac{(\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 + \lambda(u^1-u^2)^5}{(u^1-u^2)^6(u^1-u^3)^5},\\
K^1_{13} =& K^1_{31} = -\frac{(\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 + \lambda(u^1-u^2)^5}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^6},\\
K^1_{22} =& \frac{(\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 - \lambda(u^1-u^2)^5}{(u^1-u^2)^6(u^1-u^3)^4(u^2-u^3)},\\
K^1_{23} =& K^1_{32} = \frac{(\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 - \lambda(u^1-u^2)^5}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^5(u^2-u^3)},\\
K^1_{33} =& \frac{(\lambda-\mu)(u^1-u^3)^5 - \lambda(u^1-u^2)^5}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^6(u^2-u^3)}.
\end{aligned}$$

Утверждение 3.3.2. Интеграл $\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2}=\kappa\widehat{Q}_{I^1}+\nu\widehat{Q}_{I^2}$ находится в инволюции с гамильтонианом $-\widehat{Q}$ редукции (3.9) и гамильтонианом H лагражевой системы, заданной интегралом $\bar{I}$, относительно канонической скобки Пуассона:

$$\left\{\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2},\widehat{Q}\right\}=0,\qquad \left\{\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2},H\right\}=0,$$

а также функционально независим с ними.

Доказательство. Данное утверждение проверяется прямым вычислением.

Чтобы доказать функциональную независимость, рассмотрим определитель

$$det\begin{pmatrix} d\widehat{Q}/dp_1 & d\widehat{Q}/dp_2 & d\widehat{Q}/dp_3\\ dH/dp_1 & dH/dp_2 & dH/dp_3\\ d\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2}/dp_1 & d\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2}/dp_2 & d\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2}/dp_3\end{pmatrix}.$$

Он является полиномом пятой степени по импульсам p_i. Коэффициенты соответствующего определителя при p_1^5

$$\frac{(\lambda\nu-\kappa\mu)(q^1-q^2)^5(q^1-q^3)^5(\lambda(q^3-q^2)+\mu(q^1-q^3))}{256\lambda^3(\lambda-\mu)^3\mu}$$

являются ненулевыми при всех $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq\mu$, а также $(\kappa,\nu)\neq(\rho\lambda,\rho\mu)$, для $\rho=const$, значит интеграл $\widehat{Q}_{\kappa I^1+\nu I^2}$ функционально независим с $\widehat{Q}$, H. □

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 3.3.3. *Редукция* (3.9) *системы гидродинамического типа* (3.2)*, эквивалентной уравнениям ассоциативности* (1.6) *с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, интегрируема по Лиувиллю.*

3.4 Интегралы уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей

Рассмотрим схему Ленарда–Магри (3.4), стартующую с казимиров K^m, $m=1,2$, гамильтонового оператора первого порядка M_1 для бигамильтоновой системы гидродинамического типа (3.2), эквивалентной уравнениям ассоциативности (1.6) с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей:

$$M_1^{ij}(u)\frac{\delta I^m_{(n)}}{\delta u^j} = M_2^{ij}(u)\frac{\delta I^m_{(n-1)}}{\delta u^j},$$

$$I^m_{(0)} = K^m = \int u^m\,dx, \quad m = 1, 2,$$

Как упомянуто ранее, интегралы

$$I^m_{(1)} = I^m, \quad m = 1, 2,$$

были получены в [19]. Автором были найдены следующие интегралы.

Утверждение 3.4.1. В явном виде вычислены интегралы, следующие за интегралами I^m (3.5) в схеме Ленарда–Магри для системы (3.2):

$$I^m_{(2)} = \int \left(G^{(2,m)}_{ij}(u)u^i_{xx}u^j_{xx} + D^{(2,m)}_{ijk}(u)u^i_x u^j_x u^k_{xx} + E^{(2,m)}_{ijkl}(u)u^i_x u^j_x u^k_x u^l_x \right) dx$$

Явный вид интеграла $I^1_{(2)}$ приведен в разделе 4.4. Интеграл $I^2_{(2)}$ совпадает с $I^1_{(2)}$ при перестановке индексов 1 и 2.

Метрики $G^{(2,m)}_{ij}$ вырождены. Произвольная линейная комбинация интегралов $\lambda I^1_{(2)} + \mu I^2_{(2)}$ задает невырожденную метрику при всех λ, μ, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$.

Теорема 3.4.2. *Интегралы $I^m_{(n)}$, получающиеся на n-ом шаге схемы Ленарда–Магри для системы* (3.2)*, являются интегралами порядка n:*

$$I^m_{(n)} = \int (G^{(n,m)}_{ij}(u)u^i_{(n)}u^j_{(n)} + D^{(n,m)}_{ijk}(u)u^i_x u^j_{(n-1)}u^k_{(n)} + \dots + \\ + E^{(n,m)}_{i_1\dots i_{2n}}(u)u^{i_1}_x u^{i_2}_x \dots u^{i_{2n}}_x)\,dx, \tag{3.13}$$

где $u^i_{(n)} = \partial^n_x u^i$. Старший коэффициент плотности интеграла $I^m_{(n)}$ определяет метрику $G^{(n,m)}_{ij}$, причем метрика каждого интеграла $I^m_{(n)}$ связана с метрикой предыдущего по формуле:

$$G^{(n,m)}_{ij} = R^q_i\, G^{(n-1,m)}_{qj}, \ \textit{где}$$

$$R_1^1 = -\frac{1}{(u^1-u^2)^2} - \frac{1}{(u^1-u^3)^2}, \qquad R_1^2 = -\frac{u^1-2u^2+u^3}{(u^1-u^2)^2(u^2-u^3)},$$
$$R_1^3 = \frac{u^1+u^2-2u^3}{(u^1-u^3)^2(u^2-u^3)}, \qquad R_2^1 = -\frac{-2u^1+u^2+u^3}{(u^1-u^2)^2(u^1-u^3)},$$
$$R_2^2 = -\frac{1}{(u^1-u^2)^2} - \frac{1}{(u^2-u^3)^2}, \qquad R_2^3 = \frac{u^1+u^2-2u^3}{(u^1-u^3)(u^2-u^3)^2},$$
$$R_3^1 = -\frac{-2u^1+u^2+u^3}{(u^1-u^2)(u^1-u^3)^2}, \qquad R_3^2 = \frac{u^1-2u^2+u^3}{(u^1-u^2)(u^2-u^3)^2},$$
$$R_3^3 = -\frac{1}{(u^1-u^3)^2} - \frac{1}{(u^2-u^3)^2}.$$

Доказательство. Докажем по индукции, что верна формула (3.13).

Интегралы $I^m_{(0)} = K^m$ и $I^m_{(1)} = I^m$ (3.5) являются интегралами вида (3.13) нулевого и первого порядков соответственно. Пусть интеграл $I^m_{(n)}$ — интеграл вида (3.13). Тогда его вариационная производная $\delta I^m_{(n)}/\delta u^k$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{\substack{i,j:\ i_s, j_s > 0,\\ j_1+\dots+j_k = 2n}} a^{(i,j)}_{i_1 \dots i_k} u^{i_1}_{(j_1)} u^{i_2}_{(j_2)} \dots u^{i_k}_{(j_k)}, \qquad i = (i_1, \dots, i_k), j = (j_1, \dots, j_k).$$

По схеме Ленарда–Магри

$$\frac{\delta I^m_{(n+1)}}{\delta u^s} = M_{1,si}(u) M_2^{ij}(u) \frac{\delta I^m_{(n)}}{\delta u^j}, \tag{3.14}$$

где $M_{1,si}(u) M_1^{ij}(u) = \delta^j_s$. Операторы Дубровина–Новикова $M_1^{ij}(u)$ и $M_2^{ij}(u)$ являются операторами первого и третьего порядка соответственно, следовательно выражение $M_{1,si}(u) M_2^{ij}(u) \delta I^m_{(n)}/\delta u^j$, а значит и вариационная производная $\delta I^m_{(n+1)}/\delta u^k$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \sum_{\substack{i,j:\ i_s, j_s > 0,\\ j_1+\dots+j_k = 2n+2}} a^{(i,j)}_{i_1 \dots i_k} u^{i_1}_{(j_1)} u^{i_2}_{(j_2)} \dots u^{i_k}_{(j_k)}, \qquad i = (i_1, \dots, i_k), j = (j_1, \dots, j_k).$$

Интегрированием по частям избавимся от членов со степенями производных u^i, больших $n+1$, и получим интеграл $I^m_{(n+1)}$ вида (3.13).

Чтобы получить связь метрик интегралв, распишем (3.14):

$$2(-1)^{n+1} G^{(n+1,m)}_{si}(u)\, u^i_{(2n+2)} + \dots =$$
$$= g_{M_1,si}(u) \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \left(g^{ij}_{M_2}(u) \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots \right) \left(2(-1)^n G^{(n,m)}_{jl}(u)\, u^l_{(2n)} + \dots \right),$$

где $g^{ij}_{M_k}$ — метрика соответствующего гамильтонового оператора Дубровина–Новикова M_k системы (3.2) и $g_{M_1,si}(u)g^{ij}_{M_1}(u) = \delta^j_s$. Отсюда следует, что

$$G^{(n+1,m)}_{si}(u) = R^j_s(u)G^{(n,m)}_{jl}(u), \qquad R^s_j(u) = -g_{M_1,si}(u)g^{ij}_{M_2}(u).$$

▷

3.5 Редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей

Аналогично случаю трех примарных полей построим редукцию систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей. В качестве плотности первого интеграла, на множество стационарных точек которого ограничим рассматриваемые системы, возьмем линейную комбинацию квадратичных по скоростям законов сохранения, полученных в статье [26]. Опишем известные результаты об уравнениях ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей.

Рассмотрим функцию $F(t^1,t^2,t^3,t^4) = \frac{1}{2}(t^1)^2t^4 + t^1t^2t^3 + f(t^2,t^3,t^4)$ с антидиагональной матрицей η_{ij} из примера 1.3.6, а также соответствующие ей уравнения ассоциативности (1.18)

$$-2f_{xyz} - f_{xyy}f_{xxy} + f_{yyy}f_{xxx} = 0,$$

$$-f_{xzz} - f_{xyy}f_{xxz} + f_{yyz}f_{xxx} = 0,$$

$$-2f_{xyz}f_{xxz} + f_{xzz}f_{xxy} + f_{yzz}f_{xxx} = 0,$$

$$f_{zzz} - (f_{xyz})^2 + f_{xzz}f_{xyy} - f_{yyz}f_{xxz} + f_{yzz}f_{xxy} = 0,$$

и эквивалентные им коммутирующие системы гидродинамического типа (1.19),

(1.20)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} b \\ d \\ e \\ R \\ P \\ S \end{pmatrix}_x, \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \\ P \\ S \\ Q \end{pmatrix}_x,$$

где

$$P = \frac{cd+f}{a}, \ R = \frac{2e+bd}{a}, \ S = \frac{2ec-bf}{a}, \ Q = e^2 - fd + \frac{c^2d + cf - 2bec + b^2 f}{a}.$$

Системы (1.19) и (1.20) связаны со спектральной задачей:

$$\Psi_x = \lambda A \Psi, \qquad \Psi_y = \lambda B \Psi, \qquad \Psi_z = \lambda C \Psi, \tag{3.15}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ e & d & b & 1 \\ f & e & c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & d & b & 1 \\ P & R & d & 0 \\ S & P & e & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ f & e & c & 0 \\ S & P & e & 0 \\ Q & S & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия совместности для спектральной задачи (3.15) заключаются в следующей системе уравнений:

$$[A, B] = [B, C] = [A, C] = 0$$

$$A_y = B_x, \quad A_z = C_x, \quad B_z = C_x,$$

которые выполнены тождественно в силу систем (1.19) и (1.20).

Следуя статье [20], перейдем к новым координатам, связанным с собственными значениями матрицы A. Обозначим эти собственные значения как $u^2, \ldots, u^5$, тогда их связь с прежними переменными можно определить из характеристического полинома

$$det\,(A - \rho E) = \rho^4 - 2b\rho^3 + (b^2 - ad - 2c)\rho^2 + 2(bc - ae)\rho + c^2 - af = 0$$

по формулам Виета:

$$b = \frac{1}{2}(u^2 + u^3 + u^4 + u^5),$$

$$c = \frac{1}{4}\left((u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2\right) - \frac{1}{8}(u^2 + u^3 + u^4 + u^5)^2 - \frac{1}{2}ad,$$

$$e = \frac{2bc + u^2u^3u^4 + u^2u^3u^5 + u^2u^4u^5 + u^3u^4u^5}{2a},$$

$$f = \frac{c^2 - u^2u^3u^4u^5}{a}.$$

Обозначим также $a = u^1$, $d = u^6$. Системы (1.19) и (1.20) представляются в следующей гамильтоновой форме [20]

$$u^i_y = M^{ij}\frac{\partial e}{\partial u^j}, \qquad u^i_z = M^{ij}\frac{\partial (f/2)}{\partial u^j},$$

$$\left(M^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}.$$

В статье [26] был найден гамильтонов оператор Дубровина–Новикова третьего порядка, согласованный с первым, одинаковый для обеих систем, а также квадратичные по скоростям первые интегралы, необходимые для построения редукции. Опишем построение интегралов [26].

Из уравнения $\Psi_x = \lambda A\Psi$, $\Psi^t = (\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, спектральной задачи (3.15) при выражении ψ_1, ψ_2, ψ_3 через ψ получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\lambda^2\frac{c}{a}\psi_{xx} + \lambda^3\left(e - \frac{bc}{a}\right)\psi_x + \lambda^4\left(f - \frac{c^2}{a}\right)\psi = \left(\frac{1}{a}\psi_{xx} - \lambda\frac{b}{a}\psi_x -\right.\\ \left. - \lambda^2\frac{c}{a}\psi\right)_{xx} + \left(\lambda^3\left(\frac{bc}{a} - e\right)\psi + \lambda^2\left(\frac{b^2}{a} - d\right)\psi_x - \lambda\frac{b}{a}\psi_{xx}\right)_x\end{aligned} \tag{3.16}$$

При замене

$$\psi = e^{\int r\,dx}, \qquad r = \lambda h_{-1} + h_0 + \frac{h_1}{\lambda} + \frac{h_2}{\lambda^2} + \ldots$$

уравнение (3.16) перейдет в

$$\lambda^4\left(\frac{h_{-1}^4-2bh_{-1}^3+(b^2-ad-2c)h_{-1}^2+2(bc-ae)h_{-1}+c^2-af}{a}\right)+\dots=0,$$

где многоточием обозначены члены при λ^3 и меньшей степени. При приравнивании к 0 коэффициента при λ^4 получаем уравнение на h_{-1}, совпадающее с характеристическим полиномом матрицы A. Соответственно h_{-1} — собственное значение матрицы A, т.е. оно совпадет с u^2, u^3, u^4 или u^5. Таким образом, уравнение (3.16) будет иметь 4 ветки решений:

$$r_{(k)}=\lambda u^{k+1}+h_{0k}+\frac{h_{1k}}{\lambda}+\frac{h_{2k}}{\lambda^2}+\dots,\qquad k=1,\dots,4.$$

Постепенно выражая коэффициенты при различных степенях λ в уравнении (3.16), получаем все коэффициенты h_{ik}, $i=0,\dots,3$ [26]. Нам же необходимы плотности законов сохранения, квадратичные по скоростям:

$$h_{1k}=G_{ij}^{(k)}u_x^iu_x^j.$$

Явный вид метрики $G_{ij}^{(1)}$ можно увидеть в разделе 4.5. Закон сохранения h_{12} получается из h_{11} перестановкой индексов 2 и 3, а h_{13} получается из h_{11} перестановкой индексов 2 и 4. Метрика $G_{ij}^{(4)}$ выражается через остальные

$$G_{ij}^{(4)}=-\left(G_{ij}^{(1)}+G_{ij}^{(2)}+G_{ij}^{(3)}\right).$$

Отметим также, что законы сохранения h_{1k} также могут быть получены при помощи схемы Ленарда–Магри при старте с казимиров $K^m=\int u^m\,dx$, $m=2,\dots,5$, гамильтоновой структуры первого порядка.

Произвольная линейная комбинация метрик $G_{ij}=\lambda G_{ij}^{(1)}+\mu G_{ij}^{(2)}+\nu G_{ij}^{(3)}$ невырожденна при несовпадающих ненулевых значениях λ, μ, ν. Соответственно, при таких значениях параметров мы получим невырожденный интеграл

$$\widetilde{I}=\int G_{ij}u_x^iu_x^j\,dx=\int\left(\lambda G_{ij}^{(1)}+\mu G_{ij}^{(2)}+\nu G_{ij}^{(3)}\right)u_x^iu_x^j\,dx,\tag{3.17}$$

$$\lambda\neq0,\quad \mu\neq0,\quad \nu\neq0,\quad \lambda\neq\mu,\quad \lambda\neq\nu,\quad \mu\neq\nu,$$

на стационарное множество которого можно ограничить системы (1.19) и (1.20).

Перейдем к фазовым переменным (1.27) лагранжевой системы, определяемой интегралом $\widetilde{I}$ (3.17):

$$q^k = u^k, \qquad p_k = 2G_{kj}u^j_x.$$

Редукции на множество стационарных точек интеграла (3.17) для систем (1.19) и (1.20) были осуществлены при помощи Wolfram Mathematica.

Теорема 3.5.1. *Системы гидродинамического типа* (1.19), (1.20)*, эквивалентные уравнениям ассоциативности* (1.18) *с антидиагональной матрицей* η_{ij} *в случае четырех примарных полей, ограниченные на множество стационарных точек их общего невырожденного интеграла* $\widetilde{I}$ (3.17)*, являются каноническими гамильтоновыми системами с гамильтонианами* $-\widehat{Q}^y$ *и* $-\widehat{Q}^z$ *соответственно:*

$$\left(q_i^k\right)_y = -\left\{q_i^k, \widehat{Q}^y\right\}, \quad \left(p_k^i\right)_y = -\left\{p_k^i, \widehat{Q}^y\right\}, \qquad \widehat{Q}^y = g^{(y)ij}(q)p_ip_j,$$

$$\left(q_i^k\right)_z = -\left\{q_i^k, \widehat{Q}^z\right\}, \quad \left(p_k^i\right)_z = -\left\{p_k^i, \widehat{Q}^z\right\}, \qquad \widehat{Q}^z = g^{(z)ij}(q)p_ip_j.$$

Гамильтонианы $-\widehat{Q}^y$ *и* $-\widehat{Q}^z$ *и гамильтониан лагранжевой системы* $H = G^{ij}(q)p_ip_j/4,\ G^{ij}(q)G_{jk}(q) = \delta^i_k$*, находятся в инволюции относительно канонической скобки Пуассона:*

$$\left\{\widehat{Q}^y, H\right\} = \left\{\widehat{Q}^z, H\right\} = \left\{\widehat{Q}^y, \widehat{Q}^z\right\} = 0.$$

Интеграл $\widehat{Q}^y$ указан в разделе 4.6, $\widehat{Q}^z$ не включен в диссертацию ввиду большого объема.

Глава 4

Приложение

4.1 Промежуточные вычисления в теореме о классификации 2.3.3 для уравнений ассоциативности типа 1)

Система (2.2)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B-\lambda\mu & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x$$

эквивалентна уравнениям ассоциативности типа 1) из классификации.

Ненулевые компоненты тензора Нейенхейса аффинора системы гидродинамического типа (2.2):

$$N^3_{12} = -\lambda\mu + 2B, \qquad N^3_{13} = -A, \qquad N^3_{23} = -3,$$

Ненулевые компоненты тензора Хантьеса аффинора системы гидродинамического типа (2.2):

$$H^1_{12} = -\lambda\mu + 2B, \qquad H^1_{13} = -A, \qquad H^1_{23} = -3,$$
$$H^2_{12} = 3C, \qquad H^2_{13} = \lambda\mu - 2B, \qquad H^2_{23} = A,$$
$$H^3_{12} = (\lambda\mu - 2B)^2 - 4AC, \qquad H^3_{13} = -3C, \qquad H^3_{23} = 2B - \lambda\mu.$$

Метрика $h_{ij} = h_{ji}$, построенная по тензору Хантьеса аффинора системы гидродинамического типа (2.2):

$$h_{11} = 18C^2 + 2(\lambda\mu - 2B)\left((\lambda\mu - 2B)^2 - 4AC\right),$$
$$h_{12} = 2\left(\lambda^2\mu^2 A + 4AB^2 - 4A^2C - 6BC + \lambda\mu(-4AB + 3C)\right),$$
$$h_{13} = 2\lambda^2\mu^2 - 8\lambda\mu B + 8B^2 - 6AC,$$
$$h_{22} = 8\left(\lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu B + 4B^2 - 3AC\right),$$
$$h_{23} = 2(\lambda\mu A - 2AB - 9C),$$
$$h_{33} = 2\left(-3\lambda\mu + A^2 + 6B\right).$$

Коэффициенты Кристоффеля метрики h_{ij} системы (2.2):

$$\Gamma^1_{11} =-2\left(\lambda^2\mu^2 A+4AB^2-6A^2C-18BC+\lambda\mu(-4AB+9C)\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^1_{12} =2\left(-6\lambda^2\mu^2-2A^2B-24B^2+\lambda\mu\left(A^2+24B\right)+9AC\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^1_{13} =(-9\lambda\mu A+2A^3+18AB+27C)/\rho_1,$$

$$\Gamma^1_{22} =\Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{33}=0,$$

$$\Gamma^2_{11} =4\left(\lambda^3\mu^3-6\lambda^2\mu^2B-8B^3+8ABC+9C^2+4\lambda\mu\left(3B^2-AC\right)\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^2_{12} =\left(3\lambda^2\mu^2A+3\lambda\mu(-4AB+C)-2\left(-6AB^2+5A^2C+3BC\right)\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^2_{13} =4\left(\lambda^2\mu^2-4\lambda\mu B+4B^2-3AC\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^2_{22} =-4\left(2\lambda^2\mu^2+2A^2B+8B^2-\lambda\mu\left(A^2+8B\right)+3AC\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^2_{23} =(-5\lambda\mu A+2A^3+10AB-9C)/\rho_1,$$

$$\Gamma^2_{33} =4\left(-3\lambda\mu+A^2+6B\right)/\rho_1,$$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{11} =&-2\big(\lambda^3\mu^3A+8A^2BC+4B^2C+\lambda^2\mu^2(-6AB+C)-4\lambda\mu\big(-3AB^2+\\&+A^2C+BC\big)+A\left(-8B^3+6C^2\right)\big)/\rho_1,\end{aligned}$$

$$\Gamma^3_{12} =2\left(-\lambda^2\mu^2A^2-4A^2B^2+4\lambda\mu A(AB-C)+4A^3C+8ABC+9C^2\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^3_{13} =\left(-3\lambda^2\mu^2A+12\lambda\mu AB-12AB^2-3\lambda\mu C+10A^2C+6BC\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^3_{22} =-8\left(\lambda^2\mu^2A+4AB^2-2A^2C+6BC-\lambda\mu(4AB+3C)\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^3_{23} =-2\left(2\lambda^2\mu^2+\lambda\mu\left(A^2-8B\right)-2A^2B+8B^2-15AC\right)/\rho_1,$$

$$\Gamma^3_{33} =\left(-4\lambda\mu A+8AB+36C\right)/\rho_1.$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned}\rho_1 =& 4\lambda^3\mu^3-4A^2B^2-32B^3-\lambda^2\mu^2\left(A^2+24B\right)+4A^3C+36ABC+27C^2+\\&+2\lambda\mu\left(2A^2B+24B^2-9AC\right),\end{aligned}$$

$$8(\rho_1)^2 =-\,det\,h.$$

Тензор римановой кривизны метрики h_{ij} системы (2.2):

$$\begin{aligned}R^1_{112} =&-4\big(7\lambda^4\mu^4A+4A^5B^2-4A^6C-50A^4BC-72A^2B^2C+\\&+216B^3C-\lambda^3\mu^3\left(6A^3+56AB+27C\right)+\lambda^2\mu^2\big(A^5+36A^3B+168AB^2-\\&-18A^2C+162BC\big)+6A^3\left(8B^3-9C^2\right)+8A\left(14B^4-27BC^2\right)+\end{aligned}$$

$$+\lambda\mu\big(-4A^5B-72A^3B^2+25A^4C+72A^2BC-324B^2C-4A\big(56B^3-$$
$$-27C^2\big)\big)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{113}=-4\big(3\lambda^4\mu^4+4A^4B^2-\lambda^3\mu^3\left(5A^2+24B\right)-5A^5C-60A^3BC-$$
$$-108AB^2C+\lambda^2\mu^2\left(A^4+30A^2B+72B^2-27AC\right)+A^2\left(40B^3-54C^2\right)+$$
$$+6B\left(8B^3-27C^2\right)+\lambda\mu\big(-4A^4B-60A^2B^2-96B^3+30A^3C+$$
$$+108ABC+81C^2\big)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{123}=0,$$
$$R^1_{212}=8\big(6\lambda^4\mu^4+3\lambda^3\mu^3\left(A^2-16B\right)-4A^4B^2+96B^4-\lambda^2\mu^2\big(A^4+$$
$$+18A^2B-144B^2\big)+6A^5C+60A^3BC+162BC^2+\lambda\mu\big(4A^4B+36A^2B^2-$$
$$-192B^3-30A^3C-81C^2\big)+A^2\left(-24B^3+81C^2\right)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{213}=4\big(33\lambda^3\mu^3A-2A^5B-48A^3B^2+15A^4C+108A^2BC-$$
$$-324B^2C-3\lambda^2\mu^2\left(4A^3+66AB+27C\right)+\lambda\mu\big(A^5+48A^3B+396AB^2-$$
$$-54A^2C+324BC\big)-6A\left(44B^3-27C^2\right)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{223}=0,$$
$$R^1_{312}=4\big(33\lambda^3\mu^3A-2A^5B-48A^3B^2+15A^4C+108A^2BC-324B^2C-$$
$$-3\lambda^2\mu^2\left(4A^3+66AB+27C\right)+\lambda\mu\big(A^5+48A^3B+396AB^2-54A^2C+$$
$$+324BC\big)-6A\left(44B^3-27C^2\right)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{313}=4\big(9\lambda^3\mu^3+A^6+18\lambda^2\mu^2\left(A^2-3B\right)+18A^4B+72A^2B^2-72B^3+$$
$$+36A^3C+324ABC+243C^2-9\lambda\mu\left(A^4+8A^2B-12B^2+18AC\right)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^1_{323}=0,$$
$$R^2_{112}=-4\big(\lambda^5\mu^5+2\lambda^4\mu^4\left(2A^2-5B\right)-32B^5-8A^5BC-56A^3B^2C+$$
$$+108B^2C^2-\lambda^3\mu^3\left(A^4+32A^2B-40B^2+24AC\right)+A^4\left(8B^3-15C^2\right)+$$
$$+\lambda^2\mu^2\left(6A^4B+96A^2B^2-80B^3-14A^3C+144ABC+27C^2\right)+$$
$$+8A^2\left(8B^4-27BC^2\right)+6A\left(32B^3C-27C^3\right)+4\lambda\mu\big(-3A^4B^2+20B^4+$$
$$+A^5C+14A^3BC-72AB^2C-27BC^2+A^2\left(-32B^3+27C^2\right)\big)\big)/(\rho_1)^2,$$
$$R^2_{113}=(-8\lambda\mu A+16AB+36C)/\rho_1,$$

$$
\begin{aligned}
R^2_{123} =&4\left(-3\lambda\mu+A^2+6B\right)^2\left(\lambda^2\mu^2-4\lambda\mu B+4B^2-3AC\right)/(\rho_1)^2,\\
R^2_{212} =&-4\big(\lambda^4\mu^4A+\lambda^3\mu^3\left(4A^3-8AB+27C\right)-\lambda^2\mu^2(A^5+24A^3B-\\
&-24AB^2+18A^2C+162BC)+\lambda\mu\big(4A^5B+48A^3B^2-17A^4C+\\
&+72A^2BC+324B^2C-2A\left(16B^3+27C^2\right)\big)+2\big(-2A^5B^2+2A^6C+\\
&+17A^4BC-36A^2B^2C-108B^3C+A^3\left(-16B^3+27C^2\right)+A(8B^4+\\
&+54BC^2)\big)\big)/(\rho_1)^2,\\
R^2_{213} =&-8A^2/\rho_1,\\
R^2_{223} =&4\left(-3\lambda\mu+A^2+6B\right)^2(\lambda\mu A-2AB-9C)/(\rho_1)^2,\\
R^2_{312} =&=-4\big(9\lambda^4\mu^4+2\lambda^3\mu^3\left(A^2-36B\right)-4A^4B^2+144B^4+5A^5C+\\
&+36A^3BC-108AB^2C+2\lambda\mu\left(A^2-6B\right)\left(2A^2B+24B^2-9AC\right)-\\
&-\lambda^2\mu^2\left(A^4+12A^2B-216B^2+27AC\right)+A^2\left(-16B^3+54C^2\right)\big)/(\rho_1)^2,\\
R^2_{313} =&-12A/\rho_1,\\
R^2_{323} =&-4\left(3\lambda\mu-A^2-6B\right)^3/(\rho_1)^2,\\
R^3_{112} =&8\left(\lambda^2\mu^2A+4AB^2-A^2C+6BC-\lambda\mu(4AB+3C)\right)/\rho_1,\\
R^3_{113} =&4\big(3\lambda^5\mu^5+3\lambda^4\mu^4\left(A^2-10B\right)-96B^5-8A^5BC-24A^3B^2C-\\
&-\lambda^3\mu^3\left(A^4+24A^2B-120B^2+42AC\right)+6\lambda^2\mu^2(A^4B+12A^2B^2-40B^3-\\
&-A^3C+42ABC)+A^4\left(8B^3-33C^2\right)+12A^2\left(4B^4-27BC^2\right)+\\
&+6A\left(56B^3C-27C^3\right)+2\lambda\mu\big(-6A^4B^2+120B^4+2A^5C+12A^3BC-\\
&-252AB^2C+A^2\left(-48B^3+81C^2\right)\big)\big)/(\rho_1)^2,\\
R^3_{123} =&=-4\left(-3\lambda\mu+A^2+6B\right)^2\big(\lambda^2\mu^2A+4AB^2-4A^2C-6BC+\\
&+\lambda\mu(-4AB+3C)\big)/(\rho_1)^2,\\
R^3_{212} =&-8\left(\lambda^2\mu^2+2B\left(A^2+2B\right)-\lambda\mu\left(A^2+4B\right)\right)/\rho_1,\\
R^3_{213} =&-4\big(\lambda^4\mu^4A+4A^5B^2+32A^3B^3-4A^6C-38A^4BC-72A^2B^2C-\\
&-216B^3C+\lambda^3\mu^3\left(-4A^3-8AB+27C\right)+\lambda^2\mu^2(A^5+24A^3B+24AB^2-\\
&-18A^2C-162BC)+4A\left(4B^4+27BC^2\right)+\lambda\mu\big(-4A^5B-48A^3B^2+\\
&+19A^4C+72A^2BC+324B^2C-2A\left(16B^3+27C^2\right)\big)\big)/(\rho_1)^2,
\end{aligned}
$$

$$R^3_{223} = -16\left(-3\lambda\mu + A^2 + 6B\right)^2\left(\lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu B + 4B^2 - 3AC\right)/(\rho_1)^2,$$

$$R^3_{312} = 8A(\lambda\mu - 2B)/\rho_1,$$

$$R^3_{313} = 4\big(3\lambda^4\mu^4 + 3\lambda^3\mu^3\left(A^2 - 8B\right) - 4A^4B^2 - 24A^2B^3 + 48B^4 + 3A^5C +$$
$$+ 12A^3BC - 108AB^2C - 162BC^2 - \lambda^2\mu^2\left(A^4 + 18A^2B - 72B^2 + 27AC\right) +$$
$$+ \lambda\mu\left(4A^4B + 36A^2B^2 - 96B^3 - 6A^3C + 108ABC + 81C^2\right)\big)/(\rho_1)^2,$$

$$R^3_{323} = -4\left(-3\lambda\mu + A^2 + 6B\right)^2(\lambda\mu A - 2AB - 9C)/(\rho_1)^2.$$

Тензор Риччи метрики h_{ij} системы (2.2):

$$R_{11} = \big(8\lambda^5\mu^5 - 4\lambda^4\mu^4\left(A^2 + 20B\right) + 8\lambda^3\mu^3\left(4A^2B + 40B^2 - 9AC\right) + 4\lambda^2\mu^2(8A^3C -$$
$$- 24A^2B^2 - 160B^3 + 108ABC - 27C^2) + 8\lambda\mu\big(80B^4 - 16A^3BC -$$
$$- 108AB^2C + 54BC^2 + A^2\left(16B^3 + 27C^2\right)\big) - 8\big(32B^5 - 16A^3B^2C -$$
$$- 72AB^3C + 9A^4C^2 + 54B^2C^2 + A^2\left(8B^4 + 54BC^2\right)\big)\big)/(\rho_1)^2,$$

$$R_{12} = -8\big(\lambda^4\mu^4A - 2A^4BC - 72A^2B^2C - 216B^3C + 27A^3C^2 + \lambda^3\mu^3(27C -$$
$$- 8AB) - 6\lambda^2\mu^2\left(-4AB^2 + 3A^2C + 27BC\right) + 4A\left(4B^4 + 27BC^2\right) +$$
$$+ \lambda\mu\left(A^4C + 72A^2BC + 324B^2C - 2A\left(16B^3 + 27C^2\right)\right)\big)/(\rho_1)^2,$$

$$R_{13} = -4\big(6\lambda^4\mu^4 + 6\lambda^2\mu^2B\left(A^2 + 24B\right) - \lambda^3\mu^3\left(A^2 + 48B\right) - 3\lambda\mu(4A^2B^2 +$$
$$+ 64B^3 + 4A^3C + 27C^2) + 2\big(48B^4 + A^5C + 12A^3BC + 81BC^2 +$$
$$+ A^2\left(4B^3 + 27C^2\right)\big)\big)/(\rho_1)^2,$$

$$R_{22} = -8\big(24\lambda^4\mu^4 + 4A^4B^2 - 3\lambda^3\mu^3\left(3A^2 + 64B\right) - 12A^3BC - 216AB^2C +$$
$$+ \lambda^2\mu^2\left(A^4 + 54A^2B + 576B^2 - 54AC\right) + 9A^2\left(8B^3 + 9C^2\right) + 6B(64B^3 +$$
$$+ 27C^2) - \lambda\mu\left(4A^4B + 108A^2B^2 + 768B^3 - 6A^3C - 216ABC + 81C^2\right)\big)/$$
$$/(\rho_1)^2,$$

$$R_{23} = -8\big(21\lambda^3\mu^3A - 2A^5B - 36A^3B^2 + 3A^4C - 324B^2C - 9\lambda^2\mu^2(A^3 +$$
$$+ 14AB + 9C) + \lambda\mu\left(A^5 + 36A^3B + 252AB^2 + 324BC\right) + A(-168B^3 +$$
$$+ 81C^2)\big)/(\rho_1)^2,$$

$$R_{33} = 4\big(18\lambda^3\mu^3 - 2A^6 - 36A^4B - 180A^2B^2 - 9\lambda^2\mu^2\left(5A^2 + 12B\right) - 324ABC -$$
$$- 36A^3C + 18\lambda\mu\left(A^4 + 10A^2B + 12B^2 + 9AC\right) - 9\left(16B^3 + 27C^2\right)\big)/(\rho_1)^2.$$

Скалярная кривизна метрики h_{ij} системы (2.2):

$$R = -4\left(-3\lambda\mu + A^2 + 6B\right)^2/(\rho_1)^2.$$

А также вспомогательные тензоры:

$$\left(B^i_j\right) = \left(A^i_j - \frac{1}{n} tr\, A\delta^i_j\right) = \begin{pmatrix} A/3 & 1 & 0 \\ 0 & A/3 & 1 \\ -C & 2B - \lambda\mu & -2A/3 \end{pmatrix},$$

$T^i_{jk} = -T^i_{kj} = A^i_{j,k} - A^i_{k,j}$, где A^i_j — аффинор системы (2.2), а запятая означает ковариантное дифференцирование, согласованное с метрикой h_{ij}:

$$\begin{aligned}
T^1_{12} = &\big(-7\lambda^2\mu^2 A + \lambda\mu\left(2A^3 + 28AB + 45C\right) - 2(2A^3B + 14AB^2 + 6A^2C + \\
&+ 45BC)\big)/\rho_1, \\
T^1_{13} = &\big(12\lambda^2\mu^2 + 2A^4 + 22A^2B + 48B^2 - \lambda\mu\left(11A^2 + 48B\right) + 9AC\big)/\rho_1, \\
T^1_{23} = &\big(-9\lambda\mu A + 2A^3 + 18AB + 27C\big)/\rho_1, \\
T^2_{12} = &\left(9\lambda\mu A - 2A^3 - 18AB - 27C\right) C/\rho_1, \\
T^2_{13} = &\big(\lambda^2\mu^2 A + 4AB^2 - 6A^2C - 18BC + \lambda\mu(-4AB + 9C)\big)/\rho_1, \\
T^2_{23} = &\big(24\lambda^2\mu^2 + 2A^4 + 26A^2B + 96B^2 - \lambda\mu\left(13A^2 + 96B\right) - 9AC\big)/\rho_1, \\
T^3_{12} = &\big(-\lambda^3\mu^3 A - 8A^2BC + 12B^2C + 3\lambda^2\mu^2(2AB + C) + 4\lambda\mu(-3AB^2 + A^2C - \\
&- 3BC) + 2A\left(4B^3 - 9C^2\right)\big)/\rho_1, \\
T^3_{13} = &\left(\lambda\mu A(4AB + 9C) - \lambda^2\mu^2A^2 + 2\left(A^3C - 2A^2B^2 - 9ABC - 27C^2\right)\right)/\rho_1, \\
T^3_{23} = &\big(5\lambda^2\mu^2 A + 4A^3B + 20AB^2 + 24A^2C + 126BC - \lambda\mu(2A^3 + 20AB + \\
&+ 63C)\big)/\rho_1.
\end{aligned}$$

Условия 1, 2 критерия Богоявленского—Рейнольдса выполнены.

Функция $\sigma = -\frac{1}{2}\, ln\, \rho_1$.

Условие 3 критерия Богоявленского–Рейнольдса выполнено, система (2.2), эквивалентная уравнениям ассоциативности типа 1) из теоремы классификации, обладает гамильтоновым оператором Дубровина–Новикова первого порядка.

Плоская метрика, задающая гамильтонов оператор Дубровина–Новикова первого порядка системы (2.2):

$$(g^{ij}) = (h^{ij}e^{-2\sigma}) = \begin{pmatrix} 3/2 & -A/2 & \lambda\mu/2 - B \\ -A/2 & \lambda\mu/2 - B & -3C/2 \\ \lambda\mu/2 - B & -3C/2 & 2AC - 2B^2 + 2\lambda\mu B - \lambda^2\mu^2/2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Функция $Q(u, u_x)$ для интеграла $\bar{I}$ (3.7) системы (3.2)

$Q = g_{Q,ij}(u)u_x^i u_x^j + V_Q(u)$,

Метрика g_Q симметрична.

$$\begin{aligned} g_{Q,11} =& \big(\mu(u^1)^5 - 2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) + \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) - (u^2- \\ &- u^3)^2(\lambda(u^2)^3 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) - (u^1)^2(\lambda(u^2)^3 + 3(-\lambda+\mu)(u^2)^2u^3+ \\ &+ 3\lambda u^2(u^3)^2 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) + u^1(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 + 3\mu(u^2)^2(u^3)^2+ \\ &+ 4(\lambda-\mu)u^2(u^3)^3 + 2(-\lambda+\mu)(u^3)^4)\big)/\big(2(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^3(u^2-u^3)\big), \\ g_{Q,12} =& \big(\mu(u^1)^5 - 2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) + \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) - (u^2- \\ &- u^3)^2\left(\lambda(u^2)^3 + (\lambda-\mu)(u^3)^3\right) + (u^1)^2(-\lambda(u^2)^3 + (\lambda-\mu)(u^2)^2u^3 + (\lambda- \\ &- 4\mu)u^2(u^3)^2 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) + u^1(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 + (4\lambda- \\ &- \mu)(u^2)^2(u^3)^2 + 4(-\lambda+\mu)u^2(u^3)^3 + 2(\lambda-\mu)(u^3)^4)\big)/\big(2(u^1-u^2)^3(u^1- \\ &- u^3)^2(u^2-u^3)^2\big), \\ g_{Q,13} =& \big(2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) - \mu(u^1)^5 - \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) - (u^2- \\ &- u^3)^2(\lambda(u^2)^3 + (\lambda-\mu)(u^3)^3) + (u^1)^2\big(-\lambda(u^2)^3 + (\lambda+3\mu)(u^2)^2u^3+ \\ &+ \lambda u^2(u^3)^2 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3\big) + u^1\big(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 + (4\lambda- \\ &- 3\mu)(u^2)^2(u^3)^2 + 4(-\lambda+\mu)u^2(u^3)^3 + 2(\lambda-\mu)(u^3)^4)\big)/\big(2(u^1-u^2)^2(u^1- \\ &- u^3)^3(u^2-u^3)^2\big), \\ g_{Q,22} =& \big(\mu(u^1)^5 - 2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) + \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) - (u^2- \\ &- u^3)^2(\lambda(u^2)^3 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) - (u^1)^2(\lambda(u^2)^3 + 3(-\lambda+\mu)(u^2)^2u^3+ \\ &+ 3\lambda u^2(u^3)^2 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) + u^1(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 + 3\mu(u^2)^2(u^3)^2+ \end{aligned}$$

$$+ 4(\lambda-\mu)u^2(u^3)^3 + 2(-\lambda+\mu)(u^3)^4)\big)/\big(2(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)(u^2-u^3)^3\big),$$

$$g_{Q,23} =\big(- \mu(u^1)^5 + 2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) - \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) +$$

$$+ (u^1)^2\big((3\lambda+\mu)(u^2)^2u^3 - \lambda(u^2)^3 + (-3\lambda+4\mu)u^2(u^3)^2 + (\lambda-\mu)(u^3)^3\big) -$$

$$- (u^2-u^3)^2(\lambda(u^2)^3 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) + u^1\big(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 +$$

$$+ \mu(u^2)^2(u^3)^2 + 4(\lambda-\mu)u^2(u^3)^3 + 2(-\lambda+\mu)(u^3)^4\big)\big)/\big(2(u^1-u^2)^2(u^1-$$

$$- u^3)^2(u^2-u^3)^3\big),$$

$$g_{Q,33} =\big(\mu(u^1)^5 - 2\mu(u^1)^4(u^2+u^3) + \mu(u^1)^3\left((u^2)^2 + 4u^2u^3 + (u^3)^2\right) - (u^2-$$

$$- u^3)^2(\lambda(u^2)^3 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) - (u^1)^2(\lambda(u^2)^3 + 3(-\lambda+\mu)(u^2)^2u^3 +$$

$$+ 3\lambda u^2(u^3)^2 + (-\lambda+\mu)(u^3)^3) + u^1(2\lambda(u^2)^4 - 4\lambda(u^2)^3u^3 + 3\mu(u^2)^2(u^3)^2 +$$

$$+ 4(\lambda-\mu)u^2(u^3)^3 + 2(-\lambda+\mu)(u^3)^4)\big)/\big(2(u^1-u^2)(u^1-u^3)^3(u^2-u^3)^3\big),$$

$$V_Q = \frac{\alpha_5}{4}\big((u^1u^2)^2 + (u^1u^3)^2 + (u^2u^3)^2 - 2u^1u^2u^3(u^1+u^2+u^3)\big) - 2\alpha_4u^1u^2u^3 -$$

$$- \frac{1}{2}\big((\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)u^1u^2 + (\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)u^1u^3 + (-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)u^2u^3\big)$$

4.3 Гамильтониан редукции потока вида (3.12) с гамильтонианом I^1

$$\widehat{Q}_{I^1} = G^{ijkl}_{I^1}(q)p_ip_jp_kp_l + B^{ij}_{I^1}(q)p_ip_j + C_{I^1}(q)$$

Коэффициенты $G^{ijkl}_{I^1}(q)$ и $B^{ij}_{I^1}(q)$ симметричны.

$$G^{1111}_{I^1} =\frac{(q^1-q^2)(q^1-q^3)}{256\lambda^3(\lambda-\mu)^3(q^2-q^3)^3}\big(- \mu^3(q^1-q^3)^5 + \lambda^3(q^2-q^3)^5 + \lambda\mu^2(q^1-$$

$$- q^3)^2(q^2-q^3)\big(5(q^1)^2 - 6q^1q^2 + 4(q^2)^2 - 2(2q^1+q^2)q^3 + 3(q^3)^2\big) -$$

$$- \lambda^2\mu(q^1-q^3)(q^2-q^3)^2\big(4(q^1)^2 + 5(q^2)^2 - 4q^2q^3 + 3(q^3)^2 -$$

$$- 2q^1(3q^2+q^3)\big)\big),$$

$$G^{1112}_{I^1} =\frac{(q^1-q^2)^2\big(\lambda(q^2-q^3)^2 + \mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\big)}{256\lambda^2(\lambda-\mu)^3(q^2-q^3)^2}\big(\mu(q^1-q^3)^2 + \lambda(q^2-$$

$$- q^3)(-2q^1+q^2+q^3)\big),$$

$$G^{1113}_{I^1} =\frac{\big(\mu(q^1-q^3)^2 - \lambda(q^2-q^3)^2\big)(q^1-q^3)^2}{256\lambda^3(\lambda-\mu)^2(q^2-q^3)^2}\big(\mu(q^1-q^3)^2 + \lambda(q^2-q^3)(-2q^1+$$

$$+ q^2 + q^3)\big),$$

$$G^{1122}_{I^1} = \frac{(q^1-q^2)}{768\lambda^2(\lambda-\mu)^3\mu(q^1-q^3)(-q^2+q^3)}\big(\lambda^3(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^4+\mu^3(q^1-$$
$$-q^3)^4(q^1-2q^2+q^3)+\lambda^2\mu(4q^1-q^2-3q^3)(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^2(q^1-$$
$$-2q^2+q^3)+\lambda\mu^2(q^1-q^3)^2(2q^1-q^2-q^3)(q^1-2q^2+q^3)(q^1-4q^2+3q^3)\big),$$

$$G^{1123}_{I^1} = \frac{-2q^1+q^2+q^3}{768\lambda^2(\lambda-\mu)^2\mu(q^2-q^3)}\big(2\lambda\mu(q^1-q^3)(q^2-q^3)^3-\lambda^2(q^2-q^3)^4+\mu^2(q^1-$$
$$-q^3)^3(q^1-2q^2+q^3)\big),$$

$$G^{1133}_{I^1} = \frac{(q^1-q^3)}{768\lambda^3(\lambda-\mu)^2(q^1-q^2)(q^2-q^3)}\big(3\mu^2(q^1-q^3)^5+\lambda^2(4q^1+q^2-5q^3)(q^1-$$
$$-q^3)(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^2-\frac{\lambda^3(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^4}{\mu}-\lambda\mu(q^1-$$
$$-q^3)^2(2q^1-q^2-q^3)\big((q^1)^2+4(q^2)^2+2q^1(q^2-2q^3)-10q^2q^3+7(q^3)^2\big)\big),$$

$$G^{1222}_{I^1} = \frac{(q^1-q^2)^2\big(\lambda(q^2-q^3)^2+\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\big)}{256\lambda(\lambda-\mu)^3\mu(q^1-q^3)^2}\big(\mu(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-$$
$$-q^3)(-2q^1+q^2+q^3)\big),$$

$$G^{1223}_{I^1} = \frac{q^1-2q^2+q^3}{768\lambda^2(\lambda-\mu)^2\mu(q^1-q^3)}\big(\mu^2(q^1-q^3)^4+\lambda^2(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^3+$$
$$+2\lambda\mu(q^1-q^3)^3(-q^2+q^3)\big),$$

$$G^{1233}_{I^1} = -\frac{(q^1+q^2-2q^3)\big(\lambda(q^2-q^3)^2+\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\big)}{768\lambda^2(\lambda-\mu)^2\mu(q^1-q^2)}\big(\mu(q^1-q^3)^2+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)(-2q^1+q^2+q^3)\big),$$

$$G^{1333}_{I^1} = \frac{-(q^1-q^3)^2}{256\lambda^3(\lambda-\mu)\mu(q^1-q^2)^2}\big(\mu^2(q^1-q^3)^4+\lambda^2(2q^1-q^2-q^3)(q^2-q^3)^3+$$
$$+2\lambda\mu(q^1-q^3)^3(-q^2+q^3)\big)$$

$$G^{2222}_{I^1} = \frac{(q^1-q^2)(q^2-q^3)}{256\lambda(\lambda-\mu)^3\mu^2(q^1-q^3)^3}\big(\lambda^3(q^2-q^3)^5-\mu^3(q^1-q^3)^5+\lambda\mu^2(q^1-q^3)^2(q^2-$$
$$-q^3)\big(5(q^1)^2-6q^1q^2+4(q^2)^2-2(2q^1+q^2)q^3+3(q^3)^2\big)-\lambda^2\mu(q^1-$$
$$-q^3)(q^2-q^3)^2\big(4(q^1)^2+5(q^2)^2-4q^2q^3+3(q^3)^2-2q^1(3q^2+q^3)\big)\big),$$

$$G^{2223}_{I^1} = \frac{-(q^2-q^3)^2}{256\lambda(\lambda-\mu)^2\mu^2(q^1-q^3)^2}\big(\lambda^2(q^2-q^3)^4-\mu^2(q^1-q^3)^3(q^1-2q^2+q^3)+$$
$$+2\lambda\mu(q^1-q^3)(-q^2+q^3)^3\big),$$

$$
\begin{aligned}
G_{I^1}^{2233} =& \frac{(q^2-q^3)}{768\lambda^2(\lambda-\mu)^2\mu^2(q^1-q^2)(q^1-q^3)}\big(3\lambda^3(q^2-q^3)^5+\mu^3(q^1-q^3)^4(q^1-\\
&-2q^2+q^3)+\lambda\mu^2(q^1+4q^2-5q^3)(q^1-q^3)^2(q^1-2q^2+q^3)(-q^2+q^3)+\\
&+\lambda^2\mu(q^2-q^3)^2(q^1-2q^2+q^3)\big(4(q^1)^2+(q^2)^2+2q^1(q^2-5q^3)-4q^2q^3+\\
&+7(q^3)^2\big)\big),\\
G_{I^1}^{2333} =& \frac{-(q^2-q^3)^2}{256\lambda^2(\lambda-\mu)\mu^2(q^1-q^2)^2}\big(\lambda^2(q^2-q^3)^4-\mu^2(q^1-q^3)^3(q^1-2q^2+q^3)+\\
&+2\lambda\mu(q^1-q^3)(-q^2+q^3)^3\big),\\
G_{I^1}^{3333} =& \frac{(q^1-q^3)(-q^2+q^3)}{256\lambda^3(\lambda-\mu)\mu^2(q^1-q^2)^3}\big(\mu^3(q^1-q^3)^5-\lambda^3(q^2-q^3)^5+\lambda\mu^2(q^1-q^3)^2(q^3-\\
&-q^2)\big(5(q^1)^2-6q^1q^2+4(q^2)^2-2(2q^1+q^2)q^3+3(q^3)^2\big)+\lambda^2\mu(q^1-\\
&-q^3)(q^2-q^3)^2\big(4(q^1)^2+5(q^2)^2-4q^2q^3+3(q^3)^2-2q^1(3q^2+q^3)\big)\big),\\
B_{I^1}^{11} =& \frac{1}{16\lambda^2(\lambda-\mu)^2(q^2-q^3)^2}\big(2\alpha_4\big(\mu^2q^2(q^1-q^3)^3(q^1-2q^2+q^3)+\lambda\mu(q^1-\\
&-q^3)(q^3-q^2)\big((q^1)^3-3q^1q^2(q^2-2q^3)-3(q^1)^2q^3+q^2(q^2-2q^3)q^3\big)-\\
&-\lambda^2(q^2-q^3)^2\big(-2(q^1)^3-6q^1q^2q^3+3(q^1)^2(q^2+q^3)+q^2q^3(q^2+q^3)\big)\big)+\\
&+\alpha_5\big(\mu^2(q^2)^2(q^1-q^3)^3(q^1-2q^2+q^3)-\lambda^2(q^2-q^3)^2\big(-2(q^1)^4+(q^1)^2(q^2-\\
&-q^3)^2+2(q^2)^2(q^3)^2+2(q^1)^3(q^2+q^3)-2q^1q^2q^3(q^2+q^3)\big)+\lambda\mu(q^1-\\
&-q^3)(q^2-q^3)\big(-(q^2)^2(q^2-3q^3)q^3+(q^1)^3(-3q^2+q^3)+q^1q^2\big((q^2)^2-\\
&-5q^2q^3-2(q^3)^2\big)+(q^1)^2\big(4(q^2)^2+q^2q^3+(q^3)^2\big)\big)\big)+\mu^2(q^1)^4\alpha_1-\\
&-2\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_1-\mu^2(q^1)^3q^2\alpha_1+3\lambda\mu(q^1)^2(q^2)^2\alpha_1-\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_1+\\
&+2\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_1-3\mu^2(q^1)^3q^3\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2q^2q^3\alpha_1-3\lambda\mu q^1(q^2)^2q^3\alpha_1+\\
&+\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_1-3\lambda\mu(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_1-\\
&-3\mu^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_1+\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_1-\mu^2q^1(q^3)^3\alpha_1-\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_1+\\
&+\mu^2q^2(q^3)^3\alpha_1+\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_2-3\lambda\mu(q^1)^2(q^2)^2\alpha_2+\lambda^2q^1(q^2)^3\alpha_2+\\
&+2\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_2-\lambda^2(q^2)^4\alpha_2-\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_2+3\lambda\mu(q^1)^2q^2q^3\alpha_2-\\
&-3\lambda^2q^1(q^2)^2q^3\alpha_2+3\lambda^2(q^2)^3q^3\alpha_2-2\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_2+3\lambda^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_2-\\
&-3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_2-3\lambda^2(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2+3\lambda\mu(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2-\lambda^2q^1(q^3)^3\alpha_2+
\end{aligned}
$$

$$+\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_2+\lambda^2q^2(q^3)^3\alpha_2-\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_2+(\lambda-\mu)\big(-\mu(q^1-q^3)^2+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)^2\big)(q^1-q^3)(-q^2+q^3)\alpha_3\big),$$

$$B^{12}_{I^1}=\frac{(q^1-q^2)}{16\lambda(\lambda-\mu)^2(q^1-q^3)(q^2-q^3)}\big(2\alpha_4(q^1-q^2)\big(-\mu q^2(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-$$
$$-q^3)\big((q^1)^2-2q^1q^3+q^2q^3\big)\big)+\alpha_5(q^1-q^2)q^3\big(\mu(q^1-q^3)^2(-2q^2+q^3)+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)\big(2(q^1)^2-4q^1q^3+q^3(q^2+q^3)\big)\big)-(q^1-q^3)\big(\lambda(q^2-q^3)^2+$$
$$+\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\big)\alpha_1+(-q^2+q^3)\big(\mu(q^1-q^3)^2+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)(-2q^1+q^2+q^3)\big)\alpha_2\big),$$

$$B^{13}_{I^1}=\frac{(q^1-q^3)}{16\lambda^2(\lambda-\mu)(q^1-q^2)(q^2-q^3)}\big(2\alpha_4(q^1-q^3)\big(-\mu q^2(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)\big((q^1)^2-2q^1q^2+q^2q^3\big)\big)+\alpha_5q^2(q^1-q^3)\big(-\mu q^2(q^1-q^3)(q^1-$$
$$-2q^2+q^3)+\lambda(q^2-q^3)\big(2(q^1)^2-4q^1q^2+q^2(q^2+q^3)\big)\big)-(q^1-q^2)\big(\mu(q^1-$$
$$-q^3)^2-\lambda(q^2-q^3)^2\big)\alpha_1+(q^2-q^3)\big(\mu(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-q^3)(-2q^1+q^2+$$
$$+q^3)\big)\alpha_3\big),$$

$$B^{22}_{I^1}=\frac{1}{16\lambda(\lambda-\mu)^2\mu(q^1-q^3)^2}\big(2\alpha_4\big(\mu(q^1-q^3)^2-\lambda(q^2-q^3)^2\big)\big(\mu q^2(q^1-q^3)^2+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)\big(q^2q^3-(q^1)^2\big)\big)+\alpha_5\big(\mu(q^1-q^3)^2-\lambda(q^2-q^3)^2\big)\big(\mu(q^2)^2(q^1-$$
$$-q^3)^2-\lambda q^1(q^2-q^3)(-2q^2q^3+q^1(q^2+q^3))\big)+\mu^2(q^1)^4\alpha_1-$$
$$-2\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_1-\mu^2(q^1)^3q^2\alpha_1+3\lambda\mu(q^1)^2(q^2)^2\alpha_1-\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_1+$$
$$+2\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_1-3\mu^2(q^1)^3q^3\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2q^2q^3\alpha_1-3\lambda\mu q^1(q^2)^2q^3\alpha_1+$$
$$+\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_1-3\lambda\mu(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_1-$$
$$-3\mu^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_1+\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_1-\mu^2q^1(q^3)^3\alpha_1-\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_1+$$
$$+\mu^2q^2(q^3)^3\alpha_1+\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_2-3\lambda\mu(q^1)^2(q^2)^2\alpha_2+\lambda^2q^1(q^2)^3\alpha_2+$$
$$+2\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_2-\lambda^2(q^2)^4\alpha_2-\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_2+3\lambda\mu(q^1)^2q^2q^3\alpha_2$$
$$-3\lambda^2q^1(q^2)^2q^3\alpha_2+3\lambda^2(q^2)^3q^3\alpha_2-2\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_2+3\lambda^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_2-$$
$$-3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_2-3\lambda^2(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2+3\lambda\mu(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2-\lambda^2q^1(q^3)^3\alpha_2+$$
$$+\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_2+\lambda^2q^2(q^3)^3\alpha_2-\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_2-(\lambda-\mu)\big(-\mu(q^1-q^3)^2+$$
$$+\lambda(q^2-q^3)^2\big)(q^1-q^3)(-q^2+q^3)\alpha_3\big),$$

$$B^{23}_{I^1} = \frac{(q^2-q^3)}{16\lambda(\lambda-\mu)\mu(q^1-q^2)(q^1-q^3)}\big(2\alpha_4(q^2-q^3)\big(\mu q^2(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-$$
$$-q^3)\big(q^2q^3-(q^1)^2\big)\big)-\alpha_5 q^1(q^2-q^3)\big(\mu(q^1-2q^2)(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-$$
$$-q^3)(-2q^2q^3+q^1(q^2+q^3))\big)+(q^1-q^2)\big(\mu(q^1-q^3)^2-\lambda(q^2-q^3)^2\big)\alpha_2-$$
$$-(q^1-q^3)\big(\lambda(q^2-q^3)^2+\mu(q^1-q^3)(q^1--2q^2+q^3)\big)\alpha_3\big),$$
$$B^{33}_{I^1} = -\frac{1}{16\lambda^2(\lambda-\mu)\mu(q^1-q^2)^2}\big(2\alpha_4\big(\lambda(q^2-q^3)^2+\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+$$
$$+q^3)\big)\big(\mu q^2(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-q^3)\big(-(q^1)^2+q^2q^3\big)\big)+\alpha_5\big(\lambda(q^2-q^3)^2+$$
$$+\mu(q^1-q^3)(q^1-2q^2+q^3)\big)\big(\mu(q^2)^2(q^1-q^3)^2-\lambda q^1(q^2-q^3)(-2q^2q^3+$$
$$+q^1(q^2+q^3))\big)+\mu^2(q^1)^4\alpha_1-2\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_1-\mu^2(q^1)^3q^2\alpha_1+3\lambda\mu(q^1q^2)^2\alpha_1-$$
$$-\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_1+2\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_1-3\mu^2(q^1)^3q^3\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2q^2q^3\alpha_1-$$
$$-3\lambda\mu q^1(q^2)^2q^3\alpha_1+\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_1-3\lambda\mu(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+3\mu^2(q^1)^2(q^3)^2\alpha_1+$$
$$+3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_1-3\mu^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_1+\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_1-\mu^2q^1(q^3)^3\alpha_1-$$
$$-\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_1+\mu^2q^2(q^3)^3\alpha_1-\lambda\mu(q^1)^3q^2\alpha_2+3\lambda\mu(q^1)^2(q^2)^2\alpha_2-$$
$$-\lambda^2q^1(q^2)^3\alpha_2-2\lambda\mu q^1(q^2)^3\alpha_2+\lambda^2(q^2)^4\alpha_2+\lambda\mu(q^1)^3q^3\alpha_2-$$
$$-3\lambda\mu(q^1)^2q^2q^3\alpha_2+3\lambda^2q^1(q^2)^2q^3\alpha_2-3\lambda^2(q^2)^3q^3\alpha_2+2\lambda\mu(q^2)^3q^3\alpha_2-$$
$$-3\lambda^2q^1q^2(q^3)^2\alpha_2+3\lambda\mu q^1q^2(q^3)^2\alpha_2+3\lambda^2(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2-3\lambda\mu(q^2)^2(q^3)^2\alpha_2+$$
$$+\lambda^2q^1(q^3)^3\alpha_2-\lambda\mu q^1(q^3)^3\alpha_2-\lambda^2q^2(q^3)^3\alpha_2+\lambda\mu q^2(q^3)^3\alpha_2+(\lambda-$$
$$-\mu)\big(-\mu(q^1-q^3)^2+\lambda(q^2-q^3)^2\big)(q^1-q^3)(-q^2+q^3)\alpha_3\big),$$
$$C_{I^1} = \frac{1}{4\lambda(\lambda-\mu)(q^1-q^2)(q^1-q^3)(q^2-q^3)}\big(\alpha_5^2\big(-\mu(q^2)^4(q^1-q^3)^3+\lambda\big((q^1)^3(q^2)^4-$$
$$-3(q^1)^2(q^2)^4q^3+3q^1(q^2)^4(q^3)^2-(q^2)^4(q^3)^3-(q^1-q^2)^3(q^3)^4\big)\big)+$$
$$+4\alpha_4^2\big(-\mu(q^2)^2(q^1-q^3)^3+\lambda(q^2-q^3)\big(-3(q^1)^2q^2q^3+(q^2)^2(q^3)^2+$$
$$+(q^1)^3(q^2+q^3)\big)\big)-\mu(q^1)^3\alpha_1^2-\lambda(q^1)^2q^2\alpha_1^2+2\mu(q^1)^2q^2\alpha_1^2+\lambda q^1(q^2)^2\alpha_1^2-$$
$$-\mu q^1(q^2)^2\alpha_1^2+\lambda(q^1)^2q^3\alpha_1^2+\mu(q^1)^2q^3\alpha_1^2-2\mu q^1q^2q^3\alpha_1^2-\lambda(q^2)^2q^3\alpha_1^2+$$
$$+\mu(q^2)^2q^3\alpha_1^2-\lambda q^1(q^3)^2\alpha_1^2+\lambda q^2(q^3)^2\alpha_1^2+2\lambda(q^1)^2q^2\alpha_1\alpha_2-$$
$$-2\lambda q^1(q^2)^2\alpha_1\alpha_2-2\lambda(q^1)^2q^3\alpha_1\alpha_2+2\lambda(q^2)^2q^3\alpha_1\alpha_2+2\lambda q^1(q^3)^2\alpha_1\alpha_2-$$
$$-2\lambda q^2(q^3)^2\alpha_1\alpha_2-\lambda q^1(q^2)^2\alpha_2^2+\lambda(q^2)^3\alpha_2^2+2\lambda q^1q^2q^3\alpha_2^2-2\lambda(q^2)^2q^3\alpha_2^2-$$

$$- \lambda q^1(q^3)^2\alpha_2^2 + \lambda q^2(q^3)^2\alpha_2^2 + 2(\lambda-\mu)(q^1-q^2)(q^1-q^3)(q^2-q^3)\alpha_1\alpha_3 +$$
$$+ (\lambda-\mu)(q^1-q^3)(q^2-q^3)^2\alpha_3^2 + 4\alpha_4\big(\alpha_5\big(-\mu(q^2)^3(q^1-q^3)^3 +$$
$$+ \lambda q^1\big(3(q^2)^2(q^2-q^3)(q^3)^2 + 3q^1q^2q^3\big(-(q^2)^2+(q^3)^2\big) + (q^1)^2\big((q^2)^3 -$$
$$- (q^3)^3\big)\big)\big) + \lambda(q^2-q^3)\big((q^1-q^2)(q^1(q^1-q^3)\alpha_1 + (q^1-q^2)q^3\alpha_2) +$$
$$+ q^2(q^1-q^3)^2\alpha_3\big) + \mu q^2(q^1-q^3)^2(-q^1\alpha_1 + q^2(\alpha_1-\alpha_3) + q^3\alpha_3)\big) +$$
$$+ 2\alpha_5\big(\lambda(q^2-q^3)\big((q^1-q^2)\big((q^1-q^3)(-q^2q^3 + q^1(q^2+q^3))\alpha_1 + (q^1 -$$
$$- q^2)(q^3)^2\alpha_2\big) + (q^2)^2(q^1-q^3)^2\alpha_3\big) + \mu(q^2)^2(q^1-q^3)^2(-q^1\alpha_1 + q^2(\alpha_1 -$$
$$- \alpha_3) + q^3\alpha_3)\big)\big).$$

4.4 Интеграл второго порядка уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей

$I^1_{(2)} = \int \big(G^{(2,1)}_{ij}(u)u^i_{xx}u^j_{xx} + D^{(2,1)}_{ijk}(u)u^i_xu^j_xu^k_{xx} + E^{(2,1)}_{ijkl}(u)u^i_xu^j_xu^k_xu^l_x\big)\,dx$

Коэффициенты $G^{(2,1)}_{ij}(u)$ и $E^{(2,1)}_{ijkl}(u)$ симметричны по всем индексам, а компоненты $D^{(2,1)}_{ijk}(u)$ симметричны по первым двум.

$$G^{(2,1)}_{11} = \frac{2(u^2-u^3)^2(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^5},$$
$$G^{(2,1)}_{12} = \frac{2((u^1-u^2)^4+(u^1-u^3)^4)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^4},$$
$$G^{(2,1)}_{13} = \frac{2((u^1-u^2)^4+(u^1-u^3)^4)}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^5},$$
$$G^{(2,1)}_{22} = \frac{2(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^3},$$
$$G^{(2,1)}_{23} = \frac{2(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^4},$$
$$G^{(2,1)}_{33} = \frac{2(u^2-2u^1+u^3)((u^1-u^2)^2+(u^1-u^3)^2)}{(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^5},$$
$$D^{(2,1)}_{ij1} = 0, \quad i,j = 1,2,3,$$
$$D^{(2,1)}_{112} = \frac{1}{(u^2-u^1)^5(u^1-u^3)^5}\big(10(u^1)^4 + 3(u^2)^4 + (u^2)^3u^3 + (u^2)^2(u^3)^2 + 2u^2(u^3)^3 +$$

$$
\begin{aligned}
&+3(u^3)^4-(u^1)^3(19u^2+21u^3)+(u^1)^2\big(22(u^2)^2+13u^2u^3+25(u^3)^2\big)-\\
&-u^1\big(13(u^2)^3+5(u^2)^2u^3+8u^2(u^3)^2+14(u^3)^3\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{122}=&\frac{1}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^4}\big(3(u^1)^3+(u^2)^3+(u^1)^2(2u^2-11u^3)-u^2(u^3)^2-\\
&-3(u^3)^3+u^1\big(-3(u^2)^2+2u^2u^3+10(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{132}=&\frac{1}{(u^1-u^2)^4(u^3-u^1)^5}\big(-7(u^1)^3+3(u^2)^3+2(u^2)^2u^3+u^2(u^3)^2+(u^3)^3+\\
&+7(u^1)^2(2u^2+u^3)-u^1\big(11(u^2)^2+6u^2u^3+4(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{222}=&D^{(2,1)}_{232}=D^{(2,1)}_{332}=0,\\
D^{(2,1)}_{113}=&\frac{1}{(u^2-u^1)^5(u^1-u^3)^5}\big(10(u^1)^4+3(u^2)^4+2(u^2)^3u^3+(u^2)^2(u^3)^2+u^2(u^3)^3+\\
&+3(u^3)^4-(u^1)^3(21u^2+19u^3)+(u^1)^2\big(25(u^2)^2+13u^2u^3+22(u^3)^2\big)-\\
&-u^1\big(14(u^2)^3+8(u^2)^2u^3+5u^2(u^3)^2+13(u^3)^3\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{123}=&\frac{1}{(u^2-u^1)^5(u^1-u^3)^4}\big(-7(u^1)^3+(u^2)^3+(u^2)^2u^3+2u^2(u^3)^2+3(u^3)^3+\\
&+7(u^1)^2(u^2+2u^3)-u^1\big(4(u^2)^2+6u^2u^3+11(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{133}=&\frac{1}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^5}\big(3(u^1)^3-3(u^2)^3-(u^2)^2u^3+(u^3)^3+(u^1)^2(-11u^2+\\
&+2u^3)+u^1\big(10(u^2)^2+2u^2u^3-3(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{223}=&\frac{1}{(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^4}\big(-8(u^1)^3+(u^2)^3+2(u^2)^2u^3+2u^2(u^3)^2+\\
&+3(u^3)^3+3(u^1)^2(3u^2+5u^3)-u^1\big(5(u^2)^2+8u^2u^3+11(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{233}=&-\frac{1}{(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^5}\big(-8(u^1)^3+3(u^2)^3+2(u^2)^2u^3+2u^2(u^3)^2+(u^3)^3+\\
&+3(u^1)^2(5u^2+3u^3)-u^1\big(11(u^2)^2+8u^2u^3+5(u^3)^2\big)\big),\\
D^{(2,1)}_{333}=&0,\\
E^{(2,1)}_{1111}=&\frac{1}{4(u^1-u^2)^7(u^1-u^3)^7}(u^2-u^3)^2\big(-112(u^1)^5+15(u^2)^5+20(u^2)^4u^3+\\
&+21(u^2)^3(u^3)^2+21(u^2)^2(u^3)^3+20u^2(u^3)^4+15(u^3)^5+280(u^1)^4(u^2+\\
&+u^3)-2(u^1)^3\big(177(u^2)^2+206u^2u^3+177(u^3)^2\big)+(u^1)^2\big(251(u^2)^3+\\
&+309(u^2)^2u^3+309u^2(u^3)^2+251(u^3)^3\big)-u^1\big(95(u^2)^4+122(u^2)^3u^3+\\
&+126(u^2)^2(u^3)^2+122u^2(u^3)^3+95(u^3)^4\big)\big),
\end{aligned}
$$

$$E^{(2,1)}_{1112} = \frac{(u^2-u^3)\big(21(u^1)^2+(u^2)^2+5u^2u^3+15(u^3)^2-7u^1(u^2+5u^3)\big)}{4(u^1-u^2)^7(u^1-u^3)^3},$$

$$E^{(2,1)}_{1113} = -\frac{(u^2-u^3)\big(21(u^1)^2+15(u^2)^2+5u^2u^3+(u^3)^2-7u^1(5u^2+u^3)\big)}{4(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^7},$$

$$\begin{aligned}
E^{(2,1)}_{1122} =& \frac{1}{12(u^1-u^2)^7(u^1-u^3)^5}\big(-22(u^1)^5+5(u^2)^5+6(u^2)^4u^3+3(u^2)^3(u^3)^2-\\
&-7(u^2)^2(u^3)^3-30u^2(u^3)^4+45(u^3)^5+2(u^1)^4(7u^2+48u^3)-\\
&-4(u^1)^3\big(22(u^2)^2-30u^2u^3+63(u^3)^2\big)+(u^1)^2\big(77(u^2)^3+33(u^2)^2u^3-\\
&-213u^2(u^3)^2+323(u^3)^3\big)+u^1\big(-31(u^2)^4-30(u^2)^3u^3+12(u^2)^2(u^3)^2+\\
&+134u^2(u^3)^3-195(u^3)^4\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1123} =& \frac{1}{12(u^2-u^1)^5(u^1-u^3)^5}\big(-22(u^1)^3+5(u^2)^3+6(u^2)^2u^3+6u^2(u^3)^2+\\
&+5(u^3)^3+33(u^1)^2(u^2+u^3)-3u^1\big(7(u^2)^2+8u^2u^3+7(u^3)^2\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1133} =& \frac{1}{12(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^7}\big(45(u^2)^5-22(u^1)^5-30(u^2)^4u^3-7(u^2)^3(u^3)^2+\\
&+3(u^2)^2(u^3)^3+6u^2(u^3)^4+5(u^3)^5+2(u^1)^4(48u^2+7u^3)-4(u^1)^3\big(63(u^2)^2-\\
&-30u^2u^3+22(u^3)^2\big)+(u^1)^2\big(323(u^2)^3-213(u^2)^2u^3+33u^2(u^3)^2+\\
&+77(u^3)^3\big)+u^1\big(-195(u^2)^4+134(u^2)^3u^3+12(u^2)^2(u^3)^2-30u^2(u^3)^3-\\
&-31(u^3)^4\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1222} =& \frac{1}{4(u^1-u^2)^7(u^1-u^3)^4}\big(18(u^1)^4+3(u^2)^4+3(u^2)^3u^3+2(u^2)^2(u^3)^2-\\
&-5u^2(u^3)^3+15(u^3)^4-4(u^1)^3(5u^2+13u^3)+(u^1)^2\big(29(u^2)^2+2u^2u^3+\\
&+77(u^3)^2\big)-u^1\big(15(u^2)^3+13(u^2)^2u^3-11u^2(u^3)^2+55(u^3)^3\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1223} =& \frac{1}{12(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^5}\big(-14(u^1)^3-(u^2)^3+5(u^2)^2u^3+4u^2(u^3)^2+6(u^3)^3+\\
&+(u^1)^2(11u^2+31u^3)-2u^1\big((u^2)^2+9u^2u^3+11(u^3)^2\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1233} =& \frac{1}{12(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^6}\big(34(u^1)^4+15(u^2)^4+5(u^2)^3u^3+6(u^2)^2(u^3)^2+\\
&+3u^2(u^3)^3+5(u^3)^4-2(u^1)^3(45u^2+23u^3)+3(u^1)^2\big(37(u^2)^2+16u^2u^3+\\
&+15(u^3)^2\big)-u^1\big(65(u^2)^3+27(u^2)^2u^3+21u^2(u^3)^2+23(u^3)^3\big)\big),\\
E^{(2,1)}_{1333} =& \frac{1}{4(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^7}\big(18(u^1)^4+15(u^2)^4-5(u^2)^3u^3+2(u^2)^2(u^3)^2+
\end{aligned}$$

$$+3u^2(u^3)^3+3(u^3)^4-4(u^1)^3(13u^2+5u^3)+(u^1)^2\big(77(u^2)^2+2u^2u^3+$$
$$+29(u^3)^2\big)-u^1\big(55(u^2)^3-11(u^2)^2u^3+13u^2(u^3)^2+15(u^3)^3\big)\big),$$

$$E^{(2,1)}_{2222}=\frac{1}{4(u^1-u^2)^7(u^1-u^3)^3}\big(-34(u^1)^3+3(u^2)^3+6(u^2)^2u^3+10u^2(u^3)^2+$$
$$+15(u^3)^3+(u^1)^2(31u^2+71u^3)-u^1\big(15(u^2)^2+32u^2u^3+55(u^3)^2\big)\big),$$

$$E^{(2,1)}_{2223}=-\frac{1}{4(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^4},$$

$$E^{(2,1)}_{2233}=\frac{1}{12(u^1-u^2)^5(u^1-u^3)^5}\big(-12(u^1)^3+3(u^2)^3+4u^2(u^3)^2+5(u^3)^3+$$
$$+(u^1)^2(13u^2+23u^3)-u^1\big(9(u^2)^2+8u^2u^3+19(u^3)^2\big)\big),$$

$$E^{(2,1)}_{2333}=\frac{1}{4(u^1-u^2)^4(u^1-u^3)^6}\big(-32(u^1)^3+15(u^2)^3+8(u^2)^2u^3+6u^2(u^3)^2+$$
$$+3(u^3)^3+(u^1)^2(67u^2+29u^3)-u^1\big(53(u^2)^2+28u^2u^3+15(u^3)^2\big)\big),$$

$$E^{(2,1)}_{3333}=\frac{1}{4(u^1-u^2)^3(u^1-u^3)^7}\big(-34(u^1)^3+15(u^2)^3+10(u^2)^2u^3+6u^2(u^3)^2+$$
$$+3(u^3)^3+(u^1)^2(71u^2+31u^3)-u^1\big(55(u^2)^2+32u^2u^3+15(u^3)^2\big)\big),$$

$I^2_{(2)}$ получается из $I^1_{(2)}$ перестановкой индексов 1 и 2.

4.5 Первый интеграл уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей, квадратичный по скоростям

$$I=\int G^{(1)}_{ij}(u)u^i_xu^j_x\,dx$$

$$G^{(1)}_{11}=\frac{3(u^2)^2+(u^3)^2+(u^4)^2+(u^5)^2-2u^2(u^3+u^4+u^5)}{8(u^1)^2(u^2-u^3)(u^2-u^4)(u^2-u^5)},$$

$$G^{(1)}_{12}=-\frac{(3u^2-u^3-u^4-u^5)}{16u^1(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)^2(u^2-u^5)^2}\big(3(u^2)^3-(u^3)^2(u^4+u^5)-u^4u^5(u^4+$$
$$+u^5)-3(u^2)^2(u^3+u^4+u^5)-u^3\left((u^4)^2-3u^4u^5+(u^5)^2\right)+u^2\big(2(u^3)^2+$$
$$+2(u^4)^2+u^4u^5+2(u^5)^2+u^3(u^4+u^5)\big)\big),$$

$$G^{(1)}_{13}=\frac{7(u^2)^2+3(u^3)^2+(u^4+u^5)^2-2u^2(3u^3+2(u^4+u^5))}{16u^1(u^2-u^3)^2(u^2-u^4)(u^2-u^5)},$$

$$G^{(1)}_{14} = \frac{7(u^2)^2 + (u^3)^2 + 3(u^4)^2 + 2u^3u^5 + (u^5)^2 - 2u^2(2u^3 + 3u^4 + 2u^5)}{16u^1(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{15} = \frac{7(u^2)^2 + (u^3)^2 + 2u^3u^4 + (u^4)^2 + 3(u^5)^2 - 2u^2(2u^3 + 2u^4 + 3u^5)}{16u^1(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{16} = \frac{1}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5),}$$

$$G^{(1)}_{22} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u^2 - u^3)^3} + \frac{1}{(u^2 - u^4)^3} + \frac{1}{(u^2 - u^5)^3} + \frac{1}{(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)}\right),$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{23} = &- \frac{1}{8(u^2 - u^3)^3(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)^2}\big(6(u^2)^4 + 2(u^4)^2(u^5)^2 + (u^3)^3(u^4 + u^5) + \\ &+ (u^3)^2\big((u^4)^2 + (u^5)^2\big) - (u^2)^3(10u^3 + 7(u^4 + u^5)) + (u^2)^2\big(8(u^3)^2 + 3(u^4)^2 + \\ &+ 8u^4u^5 + 3(u^5)^2 + 7u^3(u^4 + u^5)\big) - u^2\big(2(u^3)^3 + 5(u^3)^2(u^4 + u^5) + \\ &+ 4u^4u^5(u^4 + u^5) + 2u^3\big((u^4)^2 + (u^5)^2\big)\big)\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{24} = &- \frac{1}{8(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)^3(u^2 - u^5)^2}\big(6(u^2)^4 + u^3(u^4)^3 + (u^4)^2u^5(u^4 + u^5) - \\ &- (u^2)^3(7u^3 + 10u^4 + 7u^5) + (u^3)^2\big((u^4)^2 + 2(u^5)^2\big) + (u^2)^2\big(3(u^3)^2 + \\ &+ 8(u^4)^2 + 7u^4u^5 + 3(u^5)^2 + u^3(7u^4 + 8u^5)\big) - u^2\big(2(u^3)^2(u^4 + 2u^5) + \\ &+ u^4\big(2(u^4)^2 + 5u^4u^5 + 2(u^5)^2\big) + u^3\big(5(u^4)^2 + 4(u^5)^2\big)\big)\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{25} = &- \frac{1}{8(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)^3}\big(6(u^2)^4 + u^3(u^5)^3 + u^4(u^5)^2(u^4 + u^5) - \\ &- (u^2)^3(7u^3 + 7u^4 + 10u^5) + (u^3)^2\big(2(u^4)^2 + (u^5)^2\big) + (u^2)^2\big(3(u^3)^2 + \\ &+ 3(u^4)^2 + 7u^4u^5 + 8(u^5)^2 + u^3(8u^4 + 7u^5)\big) - u^2\big(2(u^3)^2(2u^4 + u^5) + \\ &+ u^5\big(2(u^4)^2 + 5u^4u^5 + 2(u^5)^2\big) + u^3\big(4(u^4)^2 + 5(u^5)^2\big)\big)\big), \end{aligned}$$

$$G^{(1)}_{26} = -\frac{u^1\left(3(u^2)^2 + u^4u^5 + u^3(u^4 + u^5) - 2u^2(u^3 + u^4 + u^5)\right)}{4(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{33} = \frac{2(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^4u^5 - u^2(2u^3 + u^4 + u^5)}{4(u^2 - u^3)^3(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{34} = \frac{4(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^3u^5 + u^4(u^4 + u^5) - u^2(3u^3 + 3u^4 + 2u^5)}{8(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)},$$

$$G^{(1)}_{35} = \frac{4(u^2)^2 + (u^3)^2 + u^3u^4 + u^5(u^4 + u^5) - u^2(3u^3 + 2u^4 + 3u^5)}{8(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)^2},$$

$$G^{(1)}_{36} = \frac{u^1}{4(u^2 - u^3)^2(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)},$$

$$G_{44}^{(1)} = \frac{2(u^2)^2 + (u^4)^2 + u^3u^5 - u^2(u^3 + 2u^4 + u^5)}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)^3(u^2 - u^5)},$$
$$G_{45}^{(1)} = \frac{4(u^2)^2 + (u^4)^2 + (u^5)^2 + u^3(u^4 + u^5) - u^2(2u^3 + 3(u^4 + u^5))}{8(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)^2},$$
$$G_{46}^{(1)} = \frac{u^1}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)^2(u^2 - u^5)},$$
$$G_{55}^{(1)} = \frac{2(u^2)^2 + u^3u^4 + (u^5)^2 - u^2(u^3 + u^4 + 2u^5)}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)^3},$$
$$G_{56}^{(1)} = \frac{u^1}{4(u^2 - u^3)(u^2 - u^4)(u^2 - u^5)^2},$$
$$G_{66}^{(1)} = 0.$$

4.6 Гамильтониан редукции уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей

$$\widehat{Q}^{(y)} = g^{(y)ij}(q)p_ip_j$$

$$g^{(y)11} = \frac{q^1}{8}\Big(\frac{\mu\nu(q^3 - q^4)(q^2 - q^5)^4 - \lambda\nu(q^2 - q^4)(q^3 - q^5)^4 + \lambda\mu(q^2 - q^3)(q^4 - q^5)^4}{\lambda\mu\nu(q^2 - q^3)(q^2 - q^4)(q^3 - q^4)} -$$
$$- \frac{1}{\mu}\big((q^2)^2 - 4q^2q^3 + 6(q^3)^2 + q^2q^4 - 4q^3q^4 + (q^4)^2 + (q^2 - 4q^3 + q^4)q^5 +$$
$$+ (q^5)^2 + \frac{\lambda(q^2 - q^3)^4}{(\lambda - \mu)(q^2 - q^4)(-q^2 + q^5)} + \frac{\nu(q^3 - q^4)^4}{(\mu - \nu)(q^2 - q^4)(-q^4 + q^5)}\big) -$$
$$- \big(\lambda(\lambda - \nu)(q^3)^4(q^4 - q^5) + (q^2)^4((-\lambda + \mu)\nu q^3 + \mu(\lambda - \nu)q^4 + \lambda(\nu -$$
$$- \mu)q^5) + (\lambda - \mu)q^4q^5\big(\lambda(q^4)^3 + (-\lambda + \nu)(q^5)^3\big) - (\lambda - \mu)q^3\big(\lambda(q^4)^4 + (\nu -$$
$$- \lambda)(q^5)^4\big) - 4(q^2)^3((\lambda - \mu)\nu q^4q^5 + q^3(\lambda(\mu - \nu)q^4 + \mu(-\lambda + \nu)q^5)) +$$
$$+ 6(q^2)^2\big(\lambda(\lambda - \nu)(q^3)^2(q^4 - q^5) + (\lambda - \mu)q^4q^5(\lambda q^4 + (-\lambda + \nu)q^5) - (\lambda -$$
$$- \mu)q^3\big(\lambda(q^4)^2 + (-\lambda + \nu)(q^5)^2\big)\big) - 4q^2\big(\lambda(\lambda - \nu)(q^3)^3(q^4 - q^5) + (\lambda -$$
$$- \mu)q^4q^5\big(\lambda(q^4)^2 + (-\lambda + \nu)(q^5)^2\big) - (\lambda - \mu)q^3\big(\lambda(q^4)^3 + (-\lambda +$$
$$+ \nu)(q^5)^3\big)\big)\big)/(\lambda(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(q^3 - q^4)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5)) + \big(\nu(q^3 -$$
$$- q^5)\big(\nu(q^2 - q^3)(q^2 - q^5)\big((q^2)^2 + (q^3)^2 + 6(q^4)^2 - 4q^4q^5 + (q^5)^2 + q^3(q^5 -$$
$$- 4q^4) + q^2(q^3 - 4q^4 + q^5)\big) + \lambda\big((q^4)^4 - 6q^3(q^4)^2q^5 + 4q^3q^4q^5(q^3 + q^5) -$$

$$- q^3q^5\big((q^3)^2 + q^3q^5 + (q^5)^2\big) + q^2(q^3 - 2q^4 + q^5)\big((q^3)^2 - 2q^3q^4 + 2(q^4)^2 -$$
$$- 2q^4q^5 + (q^5)^2\big)\big)\big) + \mu\big(\lambda(q^2 - q^3)(q^4 - q^5)^4 + \nu\big(4(q^2)^3q^4(q^3 - q^5) +$$
$$+ (q^2)^4(-q^3 + q^5) + 6(q^2)^2(q^4)^2(-q^3 + q^5) + q^2\big(4q^3(q^4)^3 - (q^4)^4 -$$
$$- 6(q^4)^2(q^5)^2 + 4q^4(q^5)^3 - (q^5)^4\big) + q^5\big((q^4)^4 + q^3\big(-4(q^4)^3 + 6(q^4)^2q^5 -$$
$$- 4q^4(q^5)^2 + (q^5)^3\big)\big)\big)\big)\big)/((\lambda - \nu)\nu(-\mu + \nu)(q^2 - q^3)(q^2 - q^5)(q^3 - q^5))\Bigg),$$

$$g^{(y)12} = \Bigg(\frac{(q^2 - q^3)^3}{\lambda - \mu} + \frac{(q^2 - q^4)^3}{\lambda - \nu} + \frac{(q^2 - q^5)^3}{\lambda} + \big((q^2 - q^3)(q^2 - q^4)(q^2 - q^5)\big(\mu\nu(q^4 -$$
$$- q^3)(q^2 - q^5)^2 - \lambda^2(q^3 - q^4)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5) + \lambda\nu(q^3 - q^5)\big((q^2)^2 -$$
$$- 2q^2q^4 + q^3(q^4 - q^5) + q^4q^5\big) - \lambda\mu(q^4 - q^5)\big((q^2)^2 - 2q^2q^3 - q^4q^5 + q^3(q^4 +$$
$$+ q^5)\big)\big)\big)\big)/(\lambda(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(q^3 - q^4)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5))\Bigg)/8,$$

$$g^{(y)13} = \frac{1}{8}\Bigg(\frac{(q^2 - q^3)^3}{\lambda - \mu} + \frac{(q^3 - q^4)^3}{\mu - \nu} + \frac{(q^3 - q^5)^3}{\mu} + \big((q^2 - q^3)(q^3 - q^4)(q^3 -$$
$$- q^5)\big(\lambda\big(-\nu(q^2 - q^4)(q^3 - q^5)^2 + \mu(q^4 - q^5)\big(-(q^3)^2 + q^2(2q^3 - q^4 - q^5) +$$
$$+ q^4q^5\big)\big) + \mu(q^2 - q^5)\big(-\mu(q^2 - q^4)(q^4 - q^5) + \nu\big((q^3)^2 - 2q^3q^4 + q^2(q^4 -$$
$$- q^5) + q^4q^5\big)\big)\big)\big)/((\lambda - \mu)\mu(\mu - \nu)(q^2 - q^4)(q^2 - q^5)(q^4 - q^5))\Bigg),$$

$$g^{(y)14} = \frac{1}{8}\Bigg(\frac{(q^2 - q^4)^3}{\lambda - \nu} + \frac{(q^3 - q^4)^3}{\mu - \nu} + \frac{(q^4 - q^5)^3}{\nu} + \big((q^2 - q^4)(-q^3 + q^4)(q^4 -$$
$$- q^5)\big(\mu\big(-\lambda(q^2 - q^3)(q^4 - q^5)^2 + \nu(q^2 - q^5)\big((q^4)^2 + q^2(q^3 - q^5) + q^3(q^5 -$$
$$- 2q^4)\big)\big) - \nu(q^3 - q^5)\big(\nu(q^2 - q^3)(q^2 - q^5) + \lambda\big((q^4)^2 - q^3q^5 + q^2(q^3 - 2q^4 +$$
$$+ q^5)\big)\big)\big)\big)\big)/((\lambda - \nu)\nu(-\mu + \nu)(q^2 - q^3)(q^2 - q^5)(q^3 - q^5))\Bigg),$$

$$g^{(y)15} = \frac{1}{8}\Bigg(-\frac{(q^2 + q^3 - q^4 - q^5)(q^4 - q^5)^4}{\nu(q^2 - q^4)(q^3 - q^4)} + \frac{(q^3 - q^5)^4(q^2 - q^3 + q^4 - q^5)}{\mu(q^2 - q^3)(q^3 - q^4)} +$$
$$+ \frac{(q^2 - q^5)^4(q^2 - q^3 - q^4 + q^5)}{\lambda(q^2 - q^3)(q^2 - q^4)}\Bigg),$$

$$g^{(y)16} = \frac{1}{32q^1}\big(\big(\lambda\mu(q^2 - q^3)(q^2 + q^3 - q^4 - q^5)^2(q^4 - q^5)^4 - \lambda\nu(q^2 - q^4)(q^3 -$$
$$- q^5)^4(q^2 - q^3 + q^4 - q^5)^2 + \mu\nu(q^3 - q^4)(q^2 - q^5)^4(q^2 - q^3 - q^4 + q^5)^2\big)/$$
$$/(\lambda\mu\nu(q^2 - q^3)(q^2 - q^4)(q^3 - q^4)) - \big(\mu(-\mu + \nu)(q^2)^6(q^4 - q^5) + 2\mu(\mu -$$

$$
\begin{aligned}
&-\nu)(q^2)^5(q^4-q^5)(q^3+q^4+q^5)+(q^3)^6(\lambda(-\mu+\nu)q^4+\mu(\lambda-\nu)q^5)+\\
&+2(q^3)^5(q^4+q^5)(\lambda(\mu-\nu)q^4+\mu(-\lambda+\nu)q^5)+4(\lambda-\mu)(q^3)^3q^4q^5\big((2\mu-\\
&-\nu)(q^4)^2-\nu q^4q^5+(-2\mu+\nu)(q^5)^2\big)+(q^3)^4\big(\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^3+\big(-7\lambda\mu+\\
&+6\mu^2+6\lambda\nu-5\mu\nu\big)(q^4)^2q^5+\big(7\lambda\mu-6\mu^2-\lambda\nu\big)q^4(q^5)^2+\mu(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)+\\
&+(\lambda-\mu)q^4(q^4-q^5)^2q^5\big(\mu(q^4)^3+(\nu-\mu)(q^5)^3\big)+\mu(\nu-\mu)(q^2)^4(q^4-\\
&-q^5)\big(-(q^3)^2+6q^3(q^4+q^5)+(q^4+q^5)^2\big)-2(\lambda-\mu)q^3q^4(q^4-\\
&-q^5)q^5\big(\nu(2q^4-q^5)(q^5)^2+\mu(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)-(\lambda-\\
&-\mu)(q^3)^2q^4q^5\big(\nu q^5\big(-6(q^4)^2+4q^4q^5+(q^5)^2\big)+\mu(q^4-q^5)\big((q^4)^2+\\
&+11q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)+(q^2)^3\big((-\lambda+\mu)\nu(q^3)^4+4(q^3)^3(\mu(\lambda-2\mu+\nu)q^4-\\
&-(\lambda-2\mu)(\mu-\nu)q^5)-2(q^3)^2\big(\mu(3\lambda-5\mu+2\nu)(q^4)^2-(3\lambda-5\mu)(\mu-\\
&-\nu)(q^5)^2\big)+4q^3\big(\mu(\lambda-\nu)(q^4)^3+\mu(\mu-\nu)(q^4)^2q^5+\mu(-\mu+\nu)q^4(q^5)^2+\lambda(\nu-\\
&-\mu)(q^5)^3\big)-(\lambda-\mu)\big(\mu(q^4)^4+(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)\big)+q^2\big((-\lambda+\mu)\nu(q^3)^6+\\
&+2(q^3)^5(\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(-\mu+\nu)q^5)+(q^3)^4\big(\big(-6\mu^2+\lambda\nu+5\mu\nu\big)(q^4)^2+\big(6\mu^2+\\
&+\lambda\nu-7\mu\nu\big)(q^5)^2\big)-4(q^3)^3\big(\mu(\lambda-2\mu+\nu)(q^4)^3+\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^2q^5+\mu(\lambda-\\
&-\nu)q^4(q^5)^2-(\lambda-2\mu)(\mu-\nu)(q^5)^3\big)-(\lambda-\mu)\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)\big(\mu(q^4)^4+(\mu-\\
&-\nu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(\mu(q^4)^4+6\nu(q^4)^2(q^5)^2+(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)+2(\lambda-\\
&-\mu)q^3\big(\mu(q^4)^5-2\mu(q^4)^3(q^5)^2+2(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+(-\mu+\nu)(q^5)^5\big)\big)+\\
&+(q^2)^2\big(2(\lambda-\mu)\nu(q^3)^5+4(q^3)^3(q^4+q^5)(\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(-\mu+\nu)q^5)-\\
&-(q^3)^4\big(\big(-6\mu^2+\lambda(5\mu+\nu)\big)q^4+\big(-5\lambda\mu+6\mu^2+6\lambda\nu-7\mu\nu\big)q^5\big)+\\
&+2(q^3)^2\big(\mu(2\lambda-5\mu+3\nu)(q^4)^3+3\mu(-\lambda+\nu)(q^4)^2q^5+3\lambda(\mu-\nu)q^4(q^5)^2-(2\lambda-\\
&-5\mu)(\mu-\nu)(q^5)^3\big)-2(\lambda-\mu)q^3\big(3\mu(q^4)^4-2\mu(q^4)^3q^5+2(\mu-\nu)q^4(q^5)^3+3(\nu-\\
&-\mu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)\big(2\mu(q^4)^5-\mu(q^4)^4q^5+(\mu-\nu)q^4(q^5)^4+2(-\mu+\nu)(q^5)^5\big)\big)\big)/\\
&/((\lambda-\mu)\mu(\mu-\nu)(q^2-q^4)(q^2-q^5)(q^4-q^5))-\big(\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^6(q^4-q^5)+\\
&+\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^4(q^4-q^5)(q^4+q^5)^2+2(q^2)^5(q^3+q^4+q^5)((\lambda-\mu)\nu q^3+\mu(\nu-\\
&-\lambda)q^4+\lambda(\mu-\nu)q^5)+(q^2)^6((-\lambda+\mu)\nu q^3+\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(-\mu+\nu)q^5)-\\
&-2\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^5\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)+(\lambda-\mu)q^4(q^4-q^5)^2q^5\big(\lambda(q^4)^3+(\nu-\lambda)(q^5)^3\big)-
\end{aligned}
$$

$$- (\lambda - \mu)q^3\big((q^4)^2 - (q^5)^2\big)\big(\lambda(q^4)^4 + (\lambda - \nu)(q^5)^4\big) - (\lambda - \mu)(q^3)^3\big(\lambda(q^4)^4 +$$

$$+ (-\lambda + \nu)(q^5)^4\big) + (\lambda - \mu)(q^3)^2\big(2\lambda(q^4)^5 - \lambda(q^4)^4q^5 + (\lambda - \nu)q^4(q^5)^4 + 2(\nu -$$

$$- \lambda)(q^5)^5\big) + 4(q^2)^3\big((q^3)^3(\lambda(2\lambda - \mu - \nu)q^4 - (2\lambda - \mu)(\lambda - \nu)q^5) - (q^3)^2(q^4 +$$

$$+ q^5)(\lambda(\mu - \nu)q^4 + \mu(-\lambda + \nu)q^5) + (\lambda - \mu)q^4q^5\big((2\lambda - \nu)(q^4)^2 - \nu q^4q^5 + (\nu -$$

$$- 2\lambda)(q^5)^2\big) + q^3\big(\lambda(-2\lambda + \mu + \nu)(q^4)^3 + \mu(-\lambda + \nu)(q^4)^2q^5 + \lambda(\mu - \nu)q^4(q^5)^2 +$$

$$+ (2\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(q^5)^3\big)\big) - 2q^2\big(\lambda(\lambda - \nu)(q^3)^5(q^4 - q^5) - 3\lambda(\lambda - \nu)(q^3)^4\big((q^4)^2 -$$

$$- (q^5)^2\big) + 2(q^3)^3\big(\lambda(\mu - \nu)(q^4)^3 + \lambda(\lambda - \nu)(q^4)^2q^5 + \lambda(\nu - \lambda)q^4(q^5)^2 + \mu(\nu -$$

$$- \lambda)(q^5)^3\big) + (\lambda - \mu)(q^3)^2\big(3\lambda(q^4)^4 - 2\lambda(q^4)^3q^5 + 2(\lambda - \nu)q^4(q^5)^3 + 3(-\lambda +$$

$$+ \nu)(q^5)^4\big) - (\lambda - \mu)q^3\big(\lambda(q^4)^5 - 2\lambda(q^4)^3(q^5)^2 + 2(\lambda - \nu)(q^4)^2(q^5)^3 + (-\lambda +$$

$$+ \nu)(q^5)^5\big) + (\lambda - \mu)q^4(q^4 - q^5)q^5\big(\nu(2q^4 - q^5)(q^5)^2 + \lambda(q^4 + q^5)\big((q^4)^2 - 3q^4q^5 +$$

$$+ (q^5)^2\big)\big)\big) + (q^2)^4\big(- 6\lambda^2(q^3 - q^4)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5) + \mu\nu(q^3 - q^4)\big((q^3 + q^4)^2 +$$

$$+ 6(q^3 + q^4)q^5 - (q^5)^2\big) + \lambda\big(- \nu(q^3 - q^5)\big((q^3)^2 + 5(q^4)^2 + 8q^3q^5 + (q^5)^2\big) +$$

$$+ \mu(q^4 - q^5)\big(5(q^3)^2 + (q^4)^2 + 8q^4q^5 + (q^5)^2\big)\big)\big) + (q^2)^2\big(- \lambda(\lambda - \nu)(q^3)^4(q^4 -$$

$$- q^5) - 2(q^3)^3\big(\lambda(5\lambda - 3\mu - 2\nu)(q^4)^2 - (5\lambda - 3\mu)(\lambda - \nu)(q^5)^2\big) + 2(q^3)^2\big(\lambda(5\lambda -$$

$$- 2\mu - 3\nu)(q^4)^3 + 3\lambda(\mu - \nu)(q^4)^2q^5 + 3\mu(-\lambda + \nu)q^4(q^5)^2 - (5\lambda - 2\mu)(\lambda -$$

$$- \nu)(q^5)^3\big) + (\lambda - \mu)q^3\big(\lambda(q^4)^4 + 6\nu(q^4)^2(q^5)^2 + (-\lambda + \nu)(q^5)^4\big) - (\lambda -$$

$$- \mu)q^4q^5\big(\nu q^5\big(- 6(q^4)^2 + 4q^4q^5 + (q^5)^2\big) + \lambda(q^4 - q^5)\big((q^4)^2 + 11q^4q^5 +$$

$$+ (q^5)^2\big)\big)\big)\big)/(\lambda(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(q^3 - q^4)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5)) + \big(\nu(q^3 - q^5)\big(\nu(q^2 -$$

$$- q^3)(q^2 - q^5)\big((q^2)^4 + (q^3)^4 - 6(q^4)^4 - (q^3)^2q^4(q^4 - 4q^5) + 8(q^4)^3q^5 - (q^4)^2(q^5)^2 -$$

$$- 2q^4(q^5)^3 + (q^5)^4 - (q^3)^3(2q^4 + q^5) - (q^2)^3(q^3 + 2q^4 + q^5) + q^3(q^4 - q^5)\big(8(q^4)^2 -$$

$$- 3q^4q^5 + (q^5)^2\big) - q^2(q^3 - q^4 + q^5)\big((q^3)^2 - 3q^3q^4 + 8(q^4)^2 - 3q^4q^5 + (q^5)^2\big) -$$

$$- (q^2)^2(q^4(q^4 - 4q^5) + q^3(-4q^4 + q^5))\big)\big) + \lambda\big((q^4)^4(q^4 - q^5)^2 - (q^3)^5q^5 +$$

$$+ (q^3)^3q^4(q^4 - 4q^5)q^5 + (q^3)^4q^5(2q^4 + q^5) + (q^2)^3(q^3 - 2q^4 + q^5)\big((q^3)^2 - 2q^3q^4 +$$

$$+ 2(q^4)^2 - 2q^4q^5 + (q^5)^2\big) - q^3(q^4 - q^5)\big(2(q^4)^4 - 6(q^4)^3q^5 + 2(q^4)^2(q^5)^2 + q^4(q^5)^3 -$$

$$- (q^5)^4\big) + (q^3)^2\big((q^4)^4 - 8(q^4)^3q^5 + 11(q^4)^2(q^5)^2 - 4q^4(q^5)^3 + (q^5)^4\big) -$$

$$- (q^2)^2\big(2(q^3)^4 - 6(q^3)^3q^4 + 4(q^3)^2(q^4)^2 + 4q^3(q^4)^3 - 5(q^4)^4 + (q^3 - 2q^4)\big((q^3)^2 -$$

$$
\begin{aligned}
&-2(q^4)^2\big)q^5+\big((q^3)^2-2q^3q^4+4(q^4)^2\big)(q^5)^2+(q^3-6q^4)(q^5)^3+2(q^5)^4\big)+\\
&+q^2(q^3+q^4+q^5)\big((q^3)^4-3(q^3)^3q^4+(q^3)^2q^4(2q^4+q^5)+q^3q^4\big(2(q^4)^2-\\
&-4q^4q^5+(q^5)^2\big)-(q^4-q^5)\big(2(q^4)^3-2q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)\big)\big)\big)+\mu\big(\lambda(q^2-\\
&-q^3)(q^2+q^3-q^4-q^5)^2(q^4-q^5)^4-\nu(q^2-q^5)\big((q^2)^5(q^3-q^5)+\\
&+(q^2)^3\big((q^3)^2+6q^3q^4-q^4(q^4-4q^5)\big)(q^3-q^5)+(q^4)^4(q^4-q^5)^2-\\
&-(q^2)^4(q^3-q^5)(2(q^3+q^4)+q^5)+(q^3)^3\big(-4(q^4)^3+6(q^4)^2q^5-4q^4(q^5)^2+\\
&+(q^5)^3\big)-q^3(q^4-q^5)(q^4+q^5)\big(2(q^4)^3-2q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)+(q^3)^2\big(5(q^4)^4-\\
&-4(q^4)^3q^5-4(q^4)^2(q^5)^2+6q^4(q^5)^3-2(q^5)^4\big)+(q^2)^2\big((q^4)^4-8(q^4)^3q^5+\\
&+11(q^4)^2(q^5)^2-4q^4(q^5)^3+(q^5)^4+(q^3)^3(q^5-4q^4)-(q^3)^2\big(4(q^4)^2-2q^4q^5+\\
&+(q^5)^2\big)+q^3q^4\big(4(q^4)^2-q^4q^5+2(q^5)^2\big)\big)+q^2\big(-(q^3)^2(2q^4-q^5)\big(2(q^4)^2-\\
&-(q^5)^2\big)+(q^3)^3\big(6(q^4)^2-4q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^3(q^5)^2\big((q^5)^2-(q^4)^2-2q^4q^5\big)-\\
&-(q^4-q^5)\big(2(q^4)^4-6(q^4)^3q^5+2(q^4)^2(q^5)^2+q^4(q^5)^3-(q^5)^4\big)\big)\big)\big)\big)/((\lambda-\\
&-\nu)\nu(\nu-\mu)(q^2-q^3)(q^2-q^5)(q^3-q^5))\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(y)22}=&\big((q^2-q^3)(q^2-q^4)(q^2-q^5)\big(\mu\nu(q^3-q^4)(q^2-q^5)^2(-q^2+q^3+q^4-q^5)-\\
&-\lambda^2(q^3-q^4)(q^3-q^5)(q^4-q^5)(-3q^2+q^3+q^4+q^5)-\lambda\nu(q^3-\\
&-q^5)\big(-(q^2)^3+q^4(q^4-q^5)q^5+(q^3)^2(-q^4+q^5)+(q^2)^2(q^3+q^4+q^5)+\\
&+q^3\big((q^4)^2-q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^2(q^3(q^4-3q^5)+q^4(-2q^4+q^5))\big)+\lambda\mu(q^4-\\
&-q^5)\big(-(q^2)^3+(q^3)^2(q^4+q^5)+q^4q^5(q^4+q^5)+(q^2)^2(q^3+q^4+q^5)-\\
&-q^3\big((q^4)^2+q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^2\big(-2(q^3)^2-3q^4q^5+q^3(q^4+q^5)\big)\big)\big)\big)/\\
&/(8\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)q^1(q^3-q^4)(q^3-q^5)(q^4-q^5)),
\end{aligned}
$$

$$
g^{(y)23}=\frac{(q^2-q^3)^3(q^2+q^3-q^4-q^5)}{8(\lambda-\mu)q^1},
$$

$$
g^{(y)24}=\frac{(q^2-q^4)^3(q^2-q^3+q^4-q^5)}{8(\lambda-\nu)q^1},
$$

$$
g^{(y)25}=\frac{(q^2-q^5)^3(q^2-q^3-q^4+q^5)}{8\lambda q^1},
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(y)26}=&\big(\mu\nu(q^3-q^4)(q^2-q^5)^4(-q^2+q^3+q^4-q^5)^3-\lambda^2(q^3-q^4)(q^3-q^5)(q^4-\\
&-q^5)\big(-6(q^2)^5+(q^3)^5-2(q^3)^4(q^4+q^5)+10(q^2)^4(q^3+q^4+q^5)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(q^3)^3\big((q^4)^2+q^4q^5+(q^5)^2\big)+(q^3)^2(q^4+q^5)\big((q^4)^2+q^4q^5+(q^5)^2\big)-\\
&-q^3(q^4-q^5)^2\big(2(q^4)^2+3q^4q^5+2(q^5)^2\big)+(q^4-q^5)^2\big((q^4)^3+(q^5)^3\big)-\\
&-(q^2)^3\big((q^3)^2+(q^4)^2+19q^4q^5+(q^5)^2+19q^3(q^4+q^5)\big)-3(q^2)^2\big((q^3)^3-\\
&-2(q^3)^2(q^4+q^5)+(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)-q^3\big(2(q^4)^2+11q^4q^5+\\
&+2(q^5)^2\big)\big)-q^2\big((q^3)^4-5(q^3)^3(q^4+q^5)+(q^4-q^5)^2\big((q^4)^2-3q^4q^5+\\
&+(q^5)^2\big)-q^3(q^4+q^5)\big(5(q^4)^2-16q^4q^5+5(q^5)^2\big)+(q^3)^2\big(8(q^4)^2+11q^4q^5+\\
&+8(q^5)^2\big)\big)\big)+\lambda\big(\nu(q^3-q^5)\big((q^2)^7+(q^3)^3(q^3-q^4)^3q^4-(q^3)^2(q^3-\\
&-q^4)^2\big((q^3)^2+q^3q^4+(q^4)^2\big)q^5+q^3(q^3-q^4)\big(2(q^3)^3+(q^4)^3\big)(q^5)^2-\\
&-\big((q^3)^4-q^3(q^4)^3+(q^4)^4\big)(q^5)^3-\big((q^3)^3+2(q^3)^2q^4-3(q^4)^3\big)(q^5)^4+\\
&+(q^3-q^4)(2q^3+3q^4)(q^5)^5+(-q^3+q^4)(q^5)^6-(q^2)^6(3q^3+q^4+3q^5)+\\
&+3(q^2)^5\big((q^3)^2+(q^4)^2+4q^3q^5+(q^5)^2\big)+3(q^2)^2\big(-q^3(q^3-q^4)q^4\big((q^3)^2-\\
&-2(q^4)^2\big)+\big((q^3)^4-(q^3)^3q^4+3(q^3)^2(q^4)^2-2q^3(q^4)^3-2(q^4)^4\big)q^5+\\
&+\big(-2(q^3)^3-7(q^3)^2q^4+3q^3(q^4)^2+2(q^4)^3\big)(q^5)^2+(-2q^3+q^4)(q^3+\\
&+q^4)(q^5)^3+(q^3-q^4)(q^5)^4\big)-(q^2)^4\big((q^3)^3+7(q^4)^3-(q^3)^2(q^4-13q^5)-\\
&-3(q^4)^2q^5-q^4(q^5)^2+(q^5)^3+q^3\big(-3(q^4)^2+8q^4q^5+13(q^5)^2\big)\big)+\\
&+(q^2)^3\big((q^3)^3(3q^4+q^5)+(q^3)^2\big(-12(q^4)^2+11q^4q^5+19(q^5)^2\big)+\\
&+q^3\big(6(q^4)^3-6(q^4)^2q^5+11q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)+q^4\big(4(q^4)^3+6(q^4)^2q^5-\\
&-12q^4(q^5)^2+3(q^5)^3\big)\big)+q^2\big(q^4(q^4-q^5)^2(4q^4-q^5)(q^5)^2+(q^3)^5(-q^4+\\
&+q^5)+(q^3)^4(q^4-q^5)(6q^4+5q^5)+q^3(q^4-q^5)q^5\big(4(q^4)^3+3(q^4)^2q^5-\\
&-(q^5)^3\big)+(q^3)^3\big(8(q^5)^3-9(q^4)^3-3(q^4)^2q^5+8q^4(q^5)^2\big)+(q^3)^2\big(4(q^4)^4-\\
&-(q^4)^3q^5-3(q^4)^2(q^5)^2+8q^4(q^5)^3-5(q^5)^4\big)\big)\big)+\mu(q^4-q^5)\big(-(q^2)^7+\\
&+(q^3)^4(q^4+q^5)\big((q^4)^2+(q^5)^2\big)-3(q^2)^5\big((q^3)^2+(q^4)^2+4q^4q^5+(q^5)^2\big)+\\
&+q^4(q^4-q^5)^2q^5\big((q^4)^3+(q^5)^3\big)-(q^3)^3\big(3(q^4)^4+(q^4)^3q^5+(q^4)^2(q^5)^2+\\
&+q^4(q^5)^3+3(q^5)^4\big)+3(q^3)^2\big((q^4)^5+(q^5)^5\big)-q^3\big((q^4)^6+(q^4)^5q^5-\\
&-2(q^4)^4(q^5)^2-2(q^4)^2(q^5)^4+q^4(q^5)^5+(q^5)^6\big)+(q^2)^6(q^3+3(q^4+q^5))+\\
&+(q^2)^4\big(7(q^3)^3-3(q^3)^2(q^4+q^5)-q^3\big((q^4)^2-8q^4q^5+(q^5)^2\big)+(q^4+
\end{aligned}
$$

$$+q^5)\big((q^4)^2+12q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)-(q^2)^3\big(4(q^3)^4+6(q^3)^3(q^4+q^5)+$$
$$+q^4q^5\big((q^4)^2+19q^4q^5+(q^5)^2\big)-6(q^3)^2\big(2(q^4)^2+q^4q^5+2(q^5)^2\big)+q^3(q^4+$$
$$+q^5)\big(3(q^4)^2+8q^4q^5+3(q^5)^2\big)\big)+q^2\big(-q^4(q^4-q^5)^2q^5\big((q^4)^2-3q^4q^5+$$
$$+(q^5)^2\big)-4(q^3)^4\big((q^4)^2+q^4q^5+(q^5)^2\big)+(q^3)^3(q^4+q^5)\big(9(q^4)^2-8q^4q^5+$$
$$+9(q^5)^2\big)+3(q^3)^2\big(-2(q^4)^4+(q^4)^3q^5+(q^4)^2(q^5)^2+q^4(q^5)^3-2(q^5)^4\big)+$$
$$+q^3(q^4+q^5)\big((q^4)^4-8(q^4)^2(q^5)^2+(q^5)^4\big)\big)+3(q^2)^2\big(2(q^3)^4(q^4+q^5)-$$
$$-(q^3)^2(q^4+q^5)^3-q^4q^5(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)-2(q^3)^3\big((q^4)^2-$$
$$-q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^3\big((q^4)^4+(q^4)^3q^5+7(q^4)^2(q^5)^2+q^4(q^5)^3+(q^5)^4\big)\big)\big)\big)\big)/$$
$$/\big(32\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(q^1)^2(q^3-q^4)(q^3-q^5)(q^4-q^5)\big),$$

$$g^{(y)33}=-\big(\big(\big((q^2-q^3)(q^3-q^4)(q^3-q^5)\big(-\mu(q^2-q^5)\big(\mu(q^2-q^4)(q^4-q^5)(q^2-$$
$$-3q^3+q^4+q^5)+\nu\big(-(q^3)^3+q^4(q^4-q^5)q^5+q^3q^4(-2q^4+q^5)+$$
$$+(q^2)^2(-q^4+q^5)+(q^3)^2(q^4+q^5)+q^2\big((q^3)^2+q^3q^4+(q^4)^2-(3q^3+$$
$$+q^4)q^5+(q^5)^2\big)\big)\big)+\lambda\big(\nu(q^2-q^4)(q^3-q^5)^2(q^2-q^3+q^4-q^5)+\mu(q^4-$$
$$-q^5)\big(-(q^3)^3-3q^3q^4q^5+(q^3)^2(q^4+q^5)+q^4q^5(q^4+q^5)+(q^2)^2(-2q^3+$$
$$+q^4+q^5)+q^2\big((q^3)^2-(q^4)^2-q^4q^5-(q^5)^2+q^3(q^4+q^5)\big)\big)\big)\big)\big)/(8\mu(\mu-$$
$$-\lambda)(\mu-\nu)q^1(q^2-q^4)(q^2-q^5)(q^4-q^5)\big)\big),$$

$$g^{(y)34}=\frac{(q^3-q^4)^3(-q^2+q^3+q^4-q^5)}{8(\mu-\nu)q^1},$$

$$g^{(y)35}=\frac{(q^3-q^5)^3(-q^2+q^3-q^4+q^5)}{8\mu q^1},$$

$$g^{(y)36}=\big(-\mu(q^2-q^5)\big(-\mu(q^2-q^4)(q^4-q^5)\big((q^2)^5-6(q^3)^5+10(q^3)^4(q^4+q^5)-$$
$$-q^3(q^4-q^5)^2\big((q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)-3(q^3)^2(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+$$
$$+(q^5)^2\big)-(q^3)^3\big((q^4)^2+19q^4q^5+(q^5)^2\big)+(q^4-q^5)^2\big((q^4)^3+(q^5)^3\big)-$$
$$-(q^2)^4(q^3+2(q^4+q^5))+(q^2)^3\big(-3(q^3)^2+(q^4)^2+q^4q^5+(q^5)^2+$$
$$+5q^3(q^4+q^5)\big)+q^2\big(10(q^3)^4-19(q^3)^3(q^4+q^5)-(q^4-q^5)^2\big(2(q^4)^2+$$
$$+3q^4q^5+2(q^5)^2\big)+q^3(q^4+q^5)\big(5(q^4)^2-16q^4q^5+5(q^5)^2\big)+(q^3)^2\big(6(q^4)^2+$$
$$+33q^4q^5+6(q^5)^2\big)\big)+(q^2)^2\big(-(q^3)^3+6(q^3)^2(q^4+q^5)+(q^4+q^5)\big((q^4)^2+$$
$$+q^4q^5+(q^5)^2\big)-q^3\big(8(q^4)^2+11q^4q^5+8(q^5)^2\big)\big)\big)+\nu\big((q^3)^7+(q^2)^6(q^4-$$

$$- q^5) + q^3q^4(q^4 - q^5)^2(4q^4 - q^5)(q^5)^2 - q^4(q^4 - q^5)^3(q^5)^3 - (q^2)^5(q^4 -$$
$$- q^5)(q^3 + 3q^4 + 2q^5) - (q^3)^6(q^4 + 3q^5) - 3(q^3)^2q^4(q^4 - q^5)q^5\big(2(q^4)^2 -$$
$$- (q^5)^2\big) + 3(q^3)^5\big((q^4)^2 + (q^5)^2\big) + (q^3)^4\big(- 7(q^4)^3 + 3(q^4)^2q^5 + q^4(q^5)^2 -$$
$$- (q^5)^3\big) + (q^3)^3q^4\big(4(q^4)^3 + 6(q^4)^2q^5 - 12q^4(q^5)^2 + 3(q^5)^3\big) -$$
$$- q^2\big(3(q^3)^2(q^3 - q^4)^2\big((q^3)^2 + 2q^3q^4 + 2(q^4)^2\big) + 2q^3\big(- 6(q^3)^4 +$$
$$+ 4(q^3)^3q^4 + 3(q^3)^2(q^4)^2 + 3q^3(q^4)^3 - 2(q^4)^4\big)q^5 + \big(13(q^3)^4 - 11(q^3)^3q^4 -$$
$$- 9(q^3)^2(q^4)^2 + q^3(q^4)^3 + (q^4)^4\big)(q^5)^2 - (q^3 + q^4)\big((q^3)^2 - 4q^3q^4 +$$
$$+ (q^4)^2\big)(q^5)^3 + q^3(-3q^3 + q^4)(q^5)^4 - (q^3 + q^4)(q^5)^5 + (q^5)^6\big) + (q^2)^4(q^4 -$$
$$- q^5)\big(- 3(q^3)^2 + 3(q^4)^2 + 3q^4q^5 + (q^5)^2 + q^3(6q^4 + 5q^5)\big) - (q^2)^3\big((q^3)^4 +$$
$$+ (q^4)^4 - (q^4)^3q^5 + (q^5)^4 - 3(q^3)^2(q^4 - 2q^5)(q^4 + q^5) - (q^3)^3(3q^4 + q^5) +$$
$$+ q^3\big(9(q^4)^3 + 3(q^4)^2q^5 - 8q^4(q^5)^2 - 8(q^5)^3\big)\big) + (q^2)^2\big(3(q^3)^5 + (q^3)^4(q^4 -$$
$$- 13q^5) + (q^3)^3\big(- 12(q^4)^2 + 11q^4q^5 + 19(q^5)^2\big) + 3(q^3)^2\big(2(q^4)^3 +$$
$$+ 3(q^4)^2q^5 - 7q^4(q^5)^2 - 2(q^5)^3\big) - (q^4 - q^5)q^5\big((q^4)^3 + 2(q^5)^3\big) +$$
$$+ q^3\big(4(q^4)^4 - (q^4)^3q^5 - 3(q^4)^2(q^5)^2 + 8q^4(q^5)^3 - 5(q^5)^4\big)\big)\big)\big) + \lambda\big(\nu(q^4 -$$
$$- q^2)(q^3 - q^5)^4(q^2 - q^3 + q^4 - q^5)^3 + \mu(q^4 - q^5)\big((q^3)^7 - 3(q^3)^6(q^4 +$$
$$+ q^5) + q^3q^4(q^4 - q^5)^2q^5\big((q^4)^2 - 3q^4q^5 + (q^5)^2\big) + 3(q^3)^2q^4q^5(q^4 +$$
$$+ q^5)\big((q^4)^2 - 3q^4q^5 + (q^5)^2\big) + 3(q^3)^5\big((q^4)^2 + 4q^4q^5 + (q^5)^2\big) - (q^3)^4(q^4 +$$
$$+ q^5)\big((q^4)^2 + 12q^4q^5 + (q^5)^2\big) + (q^3)^3q^4q^5\big((q^4)^2 + 19q^4q^5 + (q^5)^2\big) -$$
$$- q^4(q^4 - q^5)^2q^5\big((q^4)^3 + (q^5)^3\big) + (q^2)^4(2q^3 - q^4 - q^5)\big(2(q^3)^2 + (q^4)^2 +$$
$$+ (q^5)^2 - 2q^3(q^4 + q^5)\big) + (q^2)^3\big(- 7(q^3)^4 + 3(q^4)^4 + (q^4)^3q^5 +$$
$$+ (q^4)^2(q^5)^2 + q^4(q^5)^3 + 3(q^5)^4 + 6(q^3)^3(q^4 + q^5) + 6(q^3)^2\big((q^4)^2 - q^4q^5 +$$
$$+ (q^5)^2\big) - q^3(q^4 + q^5)\big(9(q^4)^2 - 8q^4q^5 + 9(q^5)^2\big)\big) + q^2\big(- (q^3)^6 + (q^4)^6 +$$
$$+ (q^4)^5q^5 - 2(q^4)^4(q^5)^2 - 2(q^4)^2(q^5)^4 + q^4(q^5)^5 + (q^5)^6 + (q^3)^4\big((q^4)^2 -$$
$$- 8q^4q^5 + (q^5)^2\big) + (q^3)^3(q^4 + q^5)\big(3(q^4)^2 + 8q^4q^5 + 3(q^5)^2\big) - q^3(q^4 +$$
$$+ q^5)\big((q^4)^4 - 8(q^4)^2(q^5)^2 + (q^5)^4\big) - 3(q^3)^2\big((q^4)^4 + (q^4)^3q^5 + 7(q^4)^2(q^5)^2 +$$
$$+ q^4(q^5)^3 + (q^5)^4\big)\big) + 3(q^2)^2\big((q^3)^5 - (q^4)^5 - (q^5)^5 + (q^3)^4(q^4 + q^5) +$$

$$
\begin{aligned}
&+(q^3)^2(q^4+q^5)^3-2(q^3)^3\big(2(q^4)^2+q^4q^5+2(q^5)^2\big)+q^3\big(2(q^4)^4-(q^4)^3q^5-\\
&-(q^4)^2(q^5)^2-q^4(q^5)^3+2(q^5)^4\big)\big)\big)\big)\big)\big/\big(32(\lambda-\mu)\mu(\mu-\nu)(q^1)^2(q^2-\\
&-q^4)(q^2-q^5)(q^4-q^5)\big),\\
g^{(y)44}=&\big((q^2-q^4)(q^3-q^4)(q^4-q^5)\big(-\nu(q^3-q^5)\big(\nu(q^2-q^3)(q^2-q^5)(q^2+q^3-\\
&-3q^4+q^5)-\lambda\big((q^3)^2q^5+(q^2)^2(q^3-2q^4+q^5)+(q^4)^2(-q^4+q^5)+\\
&+q^2\big(-(q^3)^2+(q^4)^2+q^3(q^4-q^5)+q^4q^5-(q^5)^2\big)+q^3\big((q^4)^2-3q^4q^5+\\
&+(q^5)^2\big)\big)\big)+\mu\big(\lambda(q^2-q^3)(q^2+q^3-q^4-q^5)(q^4-q^5)^2-\nu(q^2-\\
&-q^5)\big((q^2)^2(-q^3+q^5)+(q^3)^2(-2q^4+q^5)+(q^4)^2(-q^4+q^5)+q^3\big((q^4)^2+\\
&+q^4q^5-(q^5)^2\big)+q^2\big((q^3)^2+q^3q^4+(q^4)^2-(q^3+3q^4)q^5+(q^5)^2\big)\big)\big)\big)\big)\big/\\
&\big/(8\nu(-\lambda+\nu)(-\mu+\nu)q^1(q^2-q^3)(q^2-q^5)(q^3-q^5)),\\
g^{(y)45}=&-\frac{(q^2+q^3-q^4-q^5)(q^4-q^5)^3}{8\nu q^1},\\
g^{(y)46}=&\big(\nu(q^3-q^5)\big(\nu(q^2-q^3)(q^2-q^5)\big((q^2)^5+(q^3-q^4)^2\big((q^3)^3+(q^3)^2q^4-\\
&-2q^3(q^4)^2-6(q^4)^3\big)-(2q^3-5q^4)(q^3-q^4)^2(q^3+2q^4)q^5+\big((q^3)^3-\\
&-8(q^3)^2q^4+6q^3(q^4)^2-(q^4)^3\big)(q^5)^2+\big((q^3)^2+5q^3q^4-3(q^4)^2\big)(q^5)^3-\\
&-(2q^3+q^4)(q^5)^4+(q^5)^5-(q^2)^4(2q^3+q^4+2q^5)+(q^2)^3\big((q^3)^2-3(q^4)^2+\\
&+5q^4q^5+(q^5)^2+q^3(5q^4+q^5)\big)+(q^2)^2\big((q^3)^3-(q^4)^3+6(q^4)^2q^5-\\
&-8q^4(q^5)^2+(q^5)^3+2(q^3)^2(-4q^4+q^5)+q^3\big(6(q^4)^2-11q^4q^5+2(q^5)^2\big)\big)+\\
&+q^2\big(-2(q^3)^4+(5q^4-2q^5)(q^4-q^5)^2(2q^4+q^5)+(q^3)^3(5q^4+q^5)+\\
&+(q^3)^2\big(6(q^4)^2-11q^4q^5+2(q^5)^2\big)+q^3\big(-19(q^4)^3+33(q^4)^2q^5-\\
&-11q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)\big)\big)+\lambda\big((q^4)^4(q^4-q^5)^3-(q^3)^6q^5+(q^3)^5q^5(q^4+\\
&+2q^5)-(q^2)^4(q^3-2q^4+q^5)\big((q^3)^2-2q^3q^4+2(q^4)^2-2q^4q^5+(q^5)^2\big)-\\
&-(q^3)^4q^5\big(-3(q^4)^2+5q^4q^5+(q^5)^2\big)+(q^3)^2(q^4-q^5)\big(3(q^4)^4-\\
&-10(q^4)^3q^5+9(q^4)^2(q^5)^2+3q^4(q^5)^3-2(q^5)^4\big)-(q^3)^3\big((q^4)^4-(q^4)^3q^5+\\
&+6(q^4)^2(q^5)^2-8q^4(q^5)^3+(q^5)^4\big)-q^3(q^4-q^5)^2\big(3(q^4)^4-6(q^4)^3q^5-\\
&-2(q^4)^2(q^5)^2+q^4(q^5)^3+(q^5)^4\big)+(q^2)^3\big(3(q^3)^4-9(q^3)^3q^4+6(q^3)^2(q^4)^2+\\
&+6q^3(q^4)^3-7(q^4)^4+(q^3-q^4)\big((q^3)^2-6(q^4)^2\big)q^5+\big((q^3)^2-q^3q^4+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6(q^4)^2\big)(q^5)^2+(q^3-9q^4)(q^5)^3+3(q^5)^4\big)+q^2\big((q^3-q^4)^2\big((q^3)^4+(q^3)^3q^4-\\
&-2(q^3)^2(q^4)^2-2q^3(q^4)^3-(q^4)^4\big)+q^3(q^3-q^4)\big((q^3)^3-3q^3(q^4)^2+\\
&+8(q^4)^3\big)q^5+\big(-2(q^3)^4+8(q^3)^3q^4-21(q^3)^2(q^4)^2+11q^3(q^4)^3+\\
&+(q^4)^4\big)(q^5)^2+q^4\big(8(q^3)^2-3q^3q^4+3(q^4)^2\big)(q^5)^3-\big(2(q^3)^2+q^3q^4+\\
&+3(q^4)^2\big)(q^5)^4+(q^3-q^4)(q^5)^5+(q^5)^6\big)-3(q^2)^2\big((q^3)^5-2(q^3)^4q^4+\\
&+(q^3)^3q^4(-q^4+q^5)+(q^3)^2q^4\big(4(q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^3q^4\big(-(q^4)^3+\\
&+2(q^4)^2q^5-3q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)-(q^4-q^5)\big((q^4)^4+2(q^4)^3q^5-\\
&-2(q^4)^2(q^5)^2-q^4(q^5)^3+(q^5)^4\big)\big)\big)\big)+\mu\big(-\lambda(q^2-q^3)(q^2+q^3-q^4-\\
&-q^5)^3(q^4-q^5)^4+\nu(q^2-q^5)\big(-(q^4)^4(q^4-q^5)^3+(q^2)^6(-q^3+q^5)+\\
&+(q^2)^5(q^3-q^5)(3q^3+q^4+2q^5)+(q^3)^4\big(-4(q^4)^3+6(q^4)^2q^5-\\
&-4q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)+(q^3)^3\big(7(q^4)^4-6(q^4)^3q^5-6(q^4)^2(q^5)^2+9q^4(q^5)^3-\\
&-3(q^5)^4\big)+q^3(q^4-q^5)^2\big((q^4)^4+2(q^4)^3q^5+2(q^4)^2(q^5)^2-q^4(q^5)^3-\\
&-(q^5)^4\big)+(q^2)^3\big((q^3)^4+9(q^3)^3q^4-3(q^3)^2(q^4)^2-3q^3(q^4)^3+(q^4)^4-(q^3+\\
&+q^4)\big((q^3)^2-4q^3q^4+(q^4)^2\big)q^5+2q^4(-4q^3+3q^4)(q^5)^2-8q^4(q^5)^3+\\
&+(q^5)^4\big)-3(q^3)^2(q^4-q^5)\big((q^4)^4+2(q^4)^3q^5-2(q^4)^2(q^5)^2-q^4(q^5)^3+\\
&+(q^5)^4\big)-(q^2)^4(q^3-q^5)\big(3(q^3)^2-3(q^4)^2+5q^4q^5+(q^5)^2+3q^3(2q^4+\\
&+q^5)\big)+(q^2)^2\big((q^3)^4(-4q^4+q^5)+3(q^3)^2q^4\big(4(q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)-\\
&-(q^3)^3\big(6(q^4)^2-q^4q^5+(q^5)^2\big)-(q^4-q^5)\big(3(q^4)^4-10(q^4)^3q^5+\\
&+9(q^4)^2(q^5)^2+3q^4(q^5)^3-2(q^5)^4\big)-q^3\big((q^4)^4+11(q^4)^3q^5-21(q^4)^2(q^5)^2+\\
&+8q^4(q^5)^3-2(q^5)^4\big)\big)+q^2\big(-(q^3)^3(q^4-q^5)\big(6(q^4)^2-(q^5)^2\big)+\\
&+(q^3)^4\big(6(q^4)^2-4q^4q^5+(q^5)^2\big)+q^3(q^4-q^5)q^5\big(8(q^4)^3-3(q^4)^2q^5+\\
&+(q^5)^3\big)+3(q^3)^2q^4\big(-(q^4)^3+2(q^4)^2q^5-3q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)+(q^4-\\
&-q^5)^2\big(3(q^4)^4-6(q^4)^3q^5-2(q^4)^2(q^5)^2+q^4(q^5)^3+(q^5)^4\big)\big)\big)\big)\big)\big/\big(32(\lambda-\\
&-\nu)\nu(-\mu+\nu)(q^1)^2(q^2-q^3)(q^2-q^5)(q^3-q^5)\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^{(y)55}=&-\big(\big(\big((q^2-q^5)(-q^3+q^5)(-q^4+q^5)\big(-\lambda\mu(q^2-q^3)(q^2+q^3-q^4-q^5)(q^4-\\
&-q^5)^2+\lambda\nu(q^2-q^4)(q^3-q^5)^2(q^2-q^3+q^4-q^5)+\mu\nu(q^3-q^4)(q^2-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- q^5)^2(q^2-q^3-q^4+q^5))\big)/(8\lambda\mu\nu q^1(q^2-q^3)(q^2-q^4)(q^3-q^4))\big),\\
g^{(y)56} =&\big(-\lambda\mu(q^2-q^3)(q^2+q^3-q^4-q^5)^3(q^4-q^5)^4+\lambda\nu(q^2-q^4)(q^3-q^5)^4(q^2-\\
&- q^3+q^4-q^5)^3+\mu\nu(q^3-q^4)(q^2-q^5)^4(q^2-q^3-q^4+q^5)^3\big)/\\
&/\big(32\lambda\mu\nu(q^1)^2(q^2-q^3)(q^2-q^4)(q^3-q^4)\big),\\
g^{(y)66} =&\big((-\lambda+\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^2-q^5)(q^3-q^5)(q^4-q^5)\big((q^2)^2+(q^3-q^4)^2-\\
&- 2q^2(q^3+q^4-q^5)+2(q^3+q^4)q^5-3(q^5)^2\big)\big(\lambda\mu(q^2-q^3)(q^2+q^3-q^4-\\
&- q^5)^2(q^4-q^5)^4-\lambda\nu(q^2-q^4)(q^3-q^5)^4(q^2-q^3+q^4-q^5)^2+\mu\nu(q^3-\\
&- q^4)(q^2-q^5)^4(q^2-q^3-q^4+q^5)^2\big)+\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^2-q^3)(q^3-q^4)(q^3-\\
&- q^5)\big((q^2)^2-3(q^3)^2+(q^4-q^5)^2+2q^3(q^4+q^5)-2q^2(-q^3+q^4+\\
&+ q^5)\big)\big(\mu(-\mu+\nu)(q^2)^6(q^4-q^5)+2\mu(\mu-\nu)(q^2)^5(q^4-q^5)(q^3+q^4+q^5)+\\
&+ (q^3)^6(\lambda(\nu-\mu)q^4+\mu(\lambda-\nu)q^5)+2(q^3)^5(q^4+q^5)(\lambda(\mu-\nu)q^4+\mu(\nu-\\
&- \lambda)q^5)+4(\lambda-\mu)(q^3)^3q^4q^5\big((2\mu-\nu)(q^4)^2-\nu q^4q^5+(\nu-2\mu)(q^5)^2\big)+\\
&+ (q^3)^4\big(\lambda(\nu-\mu)(q^4)^3+\big(6\mu^2-7\lambda\mu+6\lambda\nu-5\mu\nu\big)(q^4)^2q^5+\big(7\lambda\mu-6\mu^2-\\
&- \lambda\nu\big)q^4(q^5)^2+\mu(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)+(\lambda-\mu)q^4(q^4-q^5)^2q^5\big(\mu(q^4)^3+(\nu-\\
&- \mu)(q^5)^3\big)+\mu(\nu-\mu)(q^2)^4(q^4-q^5)\big(6q^3(q^4+q^5)-(q^3)^2+(q^4+q^5)^2\big)-\\
&- 2(\lambda-\mu)q^3q^4(q^4-q^5)q^5\big(\nu(2q^4-q^5)(q^5)^2+\mu(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+\\
&+ (q^5)^2\big)\big)-(\lambda-\mu)(q^3)^2q^4q^5\big(\nu q^5\big(-6(q^4)^2+4q^4q^5+(q^5)^2\big)+\mu(q^4-\\
&- q^5)\big((q^4)^2+11q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)+(q^2)^3\big((-\lambda+\mu)\nu(q^3)^4+4(q^3)^3(\mu(\lambda-\\
&- 2\mu+\nu)q^4-(\lambda-2\mu)(\mu-\nu)q^5)-2(q^3)^2\big(\mu(3\lambda-5\mu++2\nu)(q^4)^2-(3\lambda-\\
&- 5\mu)(\mu-\nu)(q^5)^2\big)+4q^3\big(\mu(\lambda-\nu)(q^4)^3+\mu(\mu-\nu)(q^4)^2q^5+\mu(-\mu+\\
&+ \nu)q^4(q^5)^2+\lambda(-\mu+\nu)(q^5)^3\big)-(\lambda-\mu)\big(\mu(q^4)^4+(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)\big)+\\
&+ q^2\big((-\lambda+\mu)\nu(q^3)^6+2(q^3)^5(\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(\nu-\mu)q^5)+(q^3)^4\big(\big(-6\mu^2+\\
&+ \lambda\nu+5\mu\nu\big)(q^4)^2+\big(6\mu^2+\lambda\nu-7\mu\nu\big)(q^5)^2\big)-4(q^3)^3\big(\mu(\lambda-2\mu+\nu)(q^4)^3+\\
&+ \lambda(-\mu+\nu)(q^4)^2q^5+\mu(\lambda-\nu)q^4(q^5)^2-(\lambda-2\mu)(\mu-\nu)(q^5)^3\big)-(\lambda-\\
&- \mu)\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)\big(\mu(q^4)^4+(\mu-\nu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(\mu(q^4)^4+\\
&+ 6\nu(q^4)^2(q^5)^2+(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)+2(\lambda-\mu)q^3\big(\mu(q^4)^5-2\mu(q^4)^3(q^5)^2+
\end{aligned}
$$

$$+2(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+(-\mu+\nu)(q^5)^5)\big)+(q^2)^2\big(2(\lambda-\mu)\nu(q^3)^5+$$
$$+4(q^3)^3(q^4+q^5)(\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(-\mu+\nu)q^5)-(q^3)^4\big(\big(-6\mu^2+\lambda(5\mu+\nu)\big)q^4+$$
$$+\big(-5\lambda\mu+6\mu^2+6\lambda\nu-7\mu\nu\big)q^5\big)+2(q^3)^2\big(\mu(2\lambda-5\mu+3\nu)(q^4)^3+3\mu(-\lambda+$$
$$+\nu)(q^4)^2q^5+3\lambda(\mu-\nu)q^4(q^5)^2-(2\lambda-5\mu)(\mu-\nu)(q^5)^3\big)-2(\lambda-\mu)q^3\big(3\mu(q^4)^4-$$
$$-2\mu(q^4)^3q^5+2(\mu-\nu)q^4(q^5)^3+3(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)\big(2\mu(q^4)^5-\mu(q^4)^4q^5+$$
$$+(\mu-\nu)q^4(q^5)^4+2(-\mu+\nu)(q^5)^5\big)\big)\big)-\mu(\mu-\nu)\nu(q^2-q^3)(q^2-q^4)(q^2-$$
$$-q^5)\big(3(q^2)^2-(q^3)^2-(q^4-q^5)^2+2q^3(q^4+q^5)-2q^2(q^3+q^4+q^5)\big)\big(\lambda(\lambda-$$
$$-\nu)(q^3)^6(q^4-q^5)+\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^4(q^4-q^5)(q^4+q^5)^2+2(q^2)^5(q^3+q^4+q^5)((\lambda-$$
$$-\mu)\nu q^3+\mu(-\lambda+\nu)q^4+\lambda(\mu-\nu)q^5)+(q^2)^6((-\lambda+\mu)\nu q^3+\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(\nu-$$
$$-\mu)q^5)-2\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^5\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)+(\lambda-\mu)q^4(q^4-q^5)^2q^5\big(\lambda(q^4)^3+(-\lambda+$$
$$+\nu)(q^5)^3\big)-(\lambda-\mu)q^3\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)\big(\lambda(q^4)^4+(\lambda-\nu)(q^5)^4\big)-(\lambda-$$
$$-\mu)(q^3)^3\big(\lambda(q^4)^4+(-\lambda+\nu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(2\lambda(q^4)^5-\lambda(q^4)^4q^5+(\lambda-$$
$$-\nu)q^4(q^5)^4+2(-\lambda+\nu)(q^5)^5\big)+4(q^2)^3\big((q^3)^3(\lambda(2\lambda-\mu-\nu)q^4-(2\lambda-\mu)(\lambda-$$
$$-\nu)q^5)-(q^3)^2(q^4+q^5)(\lambda(\mu-\nu)q^4+\mu(-\lambda+\nu)q^5)+(\lambda-\mu)q^4q^5\big((2\lambda-$$
$$-\nu)(q^4)^2-\nu q^4q^5+(-2\lambda+\nu)(q^5)^2\big)+q^3\big(\lambda(-2\lambda+\mu+\nu)(q^4)^3+\mu(-\lambda+$$
$$+\nu)(q^4)^2q^5+\lambda(\mu-\nu)q^4(q^5)^2+(2\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)\big)-2q^2\big(\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^5(q^4-$$
$$-q^5)-3\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^4\big((q^4)^2-(q^5)^2\big)+2(q^3)^3\big(\lambda(\mu-\nu)(q^4)^3+\lambda(\lambda-\nu)(q^4)^2q^5+$$
$$+\lambda(-\lambda+\nu)q^4(q^5)^2+\mu(-\lambda+\nu)(q^5)^3\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(3\lambda(q^4)^4-2\lambda(q^4)^3q^5+$$
$$+2(\lambda-\nu)q^4(q^5)^3+3(-\lambda+\nu)(q^5)^4\big)-(\lambda-\mu)q^3\big(\lambda(q^4)^5-2\lambda(q^4)^3(q^5)^2+$$
$$+2(\lambda-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+(-\lambda+\nu)(q^5)^5\big)+(\lambda-\mu)q^4(q^4-q^5)q^5\big(\nu(2q^4-q^5)(q^5)^2+$$
$$+\lambda(q^4+q^5)\big((q^4)^2-3q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)\big)+(q^2)^4\big(-6\lambda^2(q^3-q^4)(q^3-q^5)(q^4-q^5)+$$
$$+\mu\nu(q^3-q^4)\big((q^3+q^4)^2+6(q^3+q^4)q^5-(q^5)^2\big)+\lambda\big(-\nu(q^3-q^5)\big((q^3)^2+$$
$$+5(q^4)^2+8q^3q^5+(q^5)^2\big)+\mu(q^4-q^5)\big(5(q^3)^2+(q^4)^2+8q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)\big)+$$
$$+(q^2)^2\big(-\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^4(q^4-q^5)-2(q^3)^3\big(\lambda(5\lambda-3\mu-2\nu)(q^4)^2-(5\lambda-$$
$$-3\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^2\big)+2(q^3)^2\big(\lambda(5\lambda-2\mu-3\nu)(q^4)^3+3\lambda(\mu-\nu)(q^4)^2q^5+3\mu(\nu-$$
$$-\lambda)q^4(q^5)^2-(5\lambda-2\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)+(\lambda-\mu)q^3\big(\lambda(q^4)^4+6\nu(q^4)^2(q^5)^2+(\nu-$$

$$-\lambda)(q^5)^4\big)-(\lambda-\mu)q^4q^5\big(\nu q^5\big(-6(q^4)^2+4q^4q^5+(q^5)^2\big)+\lambda(q^4-q^5)\big((q^4)^2+$$
$$+11q^4q^5+(q^5)^2\big)\big)\big)\big)+\lambda\mu(q^2-q^4)(q^3-q^4)(q^4-q^5)\big((q^2)^2+(q^3)^2-3(q^4)^2+$$
$$+2q^3(q^4-q^5)+2q^4q^5+(q^5)^2-2q^2(q^3-q^4+q^5)\big)\big((\mu-\lambda)(\mu-\nu)\nu(q^2)^6(q^3-$$
$$-q^5)-(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^6q^5-(\lambda-\mu)^2\nu(q^4)^4(q^4-q^5)^2q^5+2(\lambda-\mu)(\lambda-$$
$$-\nu)\nu(q^3)^5q^5(q^4+q^5)+2(\lambda-\mu)(\mu-\nu)\nu(q^2)^5(q^3-q^5)(q^3+q^4+q^5)+(\lambda-$$
$$-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4q^5\big((q^4)^2-6q^4q^5-(q^5)^2\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^3\big(\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^4+$$
$$+4(\mu-2\nu)(\lambda-\nu)(q^4)^3q^5+2(3\mu-5\nu)(-\lambda+\nu)(q^4)^2(q^5)^2+4\mu(\lambda-\nu)q^4(q^5)^3+$$
$$+(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)(q^5)^4\big)+(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(2\lambda(\mu-\nu)(q^4)^5+\big(-6\lambda\mu+7\lambda\nu+$$
$$+5\mu\nu-6\nu^2\big)(q^4)^4q^5+4\mu(\lambda-\nu)(q^4)^3(q^5)^2+2(2\mu-5\nu)(\lambda-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+$$
$$+6(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)q^4(q^5)^4+2(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^5)^5\big)-(\lambda-\mu)q^3(q^4-q^5)\big(\lambda(\mu-$$
$$-\nu)(q^4)^5-(-2\mu\nu+\lambda(\mu+\nu))(q^4)^4q^5+2(\mu-3\nu)(-\lambda+\nu)(q^4)^3(q^5)^2+$$
$$+2(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+(\lambda-\nu)(\mu-\nu)q^4(q^5)^4+(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)(q^5)^5\big)-$$
$$-(\lambda-\mu)(\mu-\nu)\nu(q^2)^4(q^3-q^5)\big((q^3)^2-(q^4)^2+6q^4q^5+(q^5)^2+2q^3(3q^4+q^5)\big)+$$
$$+(\lambda-\mu)(q^2)^3\big((\lambda-\nu)\nu(q^3)^4+4(-\lambda+\mu)\nu(q^3)^3q^4+\mu(\lambda-\nu)(q^4)^4+4(\lambda-$$
$$-2\nu)(-\mu+\nu)(q^4)^3q^5+2(3\lambda-5\nu)(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^2+4\lambda(-\mu+\nu)q^4(q^5)^3+$$
$$+(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^5)^4+2\nu(q^3)^2q^4((3\lambda+2\mu-5\nu)q^4+2(\mu-\nu)q^5)-$$
$$-4\nu q^3q^4\big((\lambda+\mu-2\nu)(q^4)^2+(\mu-\nu)(q^5)^2\big)\big)+(q^2)^2\big(-2(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^5-$$
$$-2(\lambda-\mu)\mu(\lambda-\nu)(q^4)^5-2(\lambda-\mu)^2\nu(q^3)^2(q^4)^2(2q^4-3q^5)+(\lambda-\mu)\big(6\lambda\mu-$$
$$-5\lambda\nu-7\mu\nu+6\nu^2\big)(q^4)^4q^5-4\lambda(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(q^4)^3(q^5)^2-2(\lambda-\mu)(2\lambda-$$
$$-5\nu)(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^3+6(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)q^4(q^5)^4-2(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-$$
$$-\nu)(q^5)^5+(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4(6q^4+q^5)-2(\lambda-\mu)\nu(q^3)^3q^4((2\lambda+3\mu-$$
$$-5\nu)q^4+2(\lambda-\nu)q^5)+(-\lambda+\mu)q^3\big(\big(6\nu^2-\lambda(\mu+5\nu)\big)(q^4)^4+4\mu(\lambda-$$
$$-\nu)(q^4)^3q^5+6\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^2(q^5)^2+4(\lambda-\nu)(\mu-\nu)q^4(q^5)^3+(\mu-\nu)(-\lambda+$$
$$+\nu)(q^5)^4\big)\big)+(\lambda-\mu)q^2\big(\nu\big((-q^3+q^4)\big(-\mu(q^4)^3\big(4(q^3)^2-q^3q^4+(q^4)^2\big)+$$
$$+\nu(q^3)^2\big((q^3)^3-(q^3)^2q^4-2q^3(q^4)^2+6(q^4)^3\big)\big)+\big(\mu(q^4)^2\big(6(q^3)^2-4q^3q^4+$$
$$+7(q^4)^2\big)+\nu\big((q^3)^4-4(q^3)^3q^4-6(q^4)^4\big)\big)(q^5)^2+4(-\mu+\nu)q^4\big((q^3)^2+$$

$$
\begin{aligned}
&+2(q^4)^2\big)(q^5)^3+(\mu-\nu)\big((q^3)^2+(q^4)^2\big)(q^5)^4+2(\mu-\nu)q^4(q^5)^5+(-\mu+\\
&+\nu)(q^5)^6\big)+\lambda\big(\mu(q^4-q^5)^4\big(-(q^3)^2+(q^4+q^5)^2\big)+\nu(q^3-q^5)(q^3+q^4+\\
&+q^5)\big((q^3)^4-3(q^3)^3q^4+(q^3)^2q^4(2q^4+q^5)+q^3q^4\big(2(q^4)^2-4q^4q^5+(q^5)^2\big)-(q^4-\\
&-q^5)\big(2(q^4)^3-2q^4(q^5)^2+(q^5)^3\big)\big)\big)\big)\big)-2(q^2+q^3-q^4-q^5)(q^2-q^3+q^4-\\
&-q^5)(q^2-q^3-q^4+q^5)\big(\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^3)^8(\lambda(-\mu+\nu)q^4+\mu(\lambda-\nu)q^5)-\mu(\mu-\\
&-\nu)\nu(q^2)^8((-\lambda+\mu)\nu q^3+\mu(\lambda-\nu)q^4+\lambda(-\mu+\nu)q^5)-2\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^3)^7\big(\lambda(\nu-\\
&-\mu)(q^4)^2+2(\lambda-\mu)\nu q^4q^5+\mu(\lambda-\nu)(q^5)^2\big)+2\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^5q^4q^5\big((5\mu-\\
&-3\nu)(q^4)^2-9\nu q^4q^5+(-5\mu+2\nu)(q^5)^2\big)+\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^3)^6\big(\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^3+\\
&+\big(-6\lambda\mu+5\mu^2+10\lambda\nu-9\mu\nu\big)(q^4)^2q^5+(-5\mu(\mu+\nu)+\lambda(6\mu+4\nu))q^4(q^5)^2+\\
&+\mu(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)-5\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4q^4q^5\big(2\mu(q^4)^3+(\mu-3\nu)(q^4)^2q^5-\\
&-(\mu+2\nu)q^4(q^5)^2+2(-\mu+\nu)(q^5)^3\big)+(\lambda-\mu)^2\nu q^4(q^4-q^5)^2q^5\big(\lambda\mu(q^4)^5+\\
&+(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)(q^5)^5\big)-(\lambda-\mu)(q^3)^3\big(\lambda^2\mu(-\mu+\nu)(q^4)^6+2\lambda\mu(3\mu-5\nu)(\lambda-\\
&-\nu)(q^4)^5q^5+5\lambda\mu(\lambda-\nu)(-3\mu+\nu)(q^4)^4(q^5)^2+20\lambda(\lambda-\nu)\big(\mu^2-\mu\nu+\\
&+\nu^2\big)(q^4)^3(q^5)^3-5\lambda(3\mu-2\nu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^2(q^5)^4-2\lambda(\lambda-\nu)(\nu-\mu)(3\mu+\\
&+2\nu)q^4(q^5)^5+\mu(\lambda-\nu)^2(-\mu+\nu)(q^5)^6\big)-(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(2\lambda^2\mu(\mu-\nu)(q^4)^7+\\
&+\lambda\mu\big(-10\lambda\mu+6\lambda\nu+9\mu\nu-5\nu^2\big)(q^4)^6q^5+18\lambda\mu^2(\lambda-\nu)(q^4)^5(q^5)^2-5\lambda\mu(\lambda-\\
&-\nu)(2\mu+\nu)(q^4)^4(q^5)^3-5\lambda(2\mu-3\nu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^3(q^5)^4+18\lambda(\lambda-\nu)(\mu-\\
&-\nu)^2(q^4)^2(q^5)^5+(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(-10\lambda\mu+4\lambda\nu+\mu\nu)q^4(q^5)^6+2\mu(\lambda-\nu)^2(\mu-\\
&-\nu)(q^5)^7\big)+(q^2)^2\big(2\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu^2(q^3)^7-\lambda(\lambda-\nu)\nu(-5\mu(\mu+\nu)+\lambda(9\mu+\\
&+\nu))(q^3)^6q^4+18\lambda\mu(\lambda-\nu)^2\nu(q^3)^5(q^4)^2-5\lambda\mu(2\lambda+\mu-3\nu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4(q^4)^3-\\
&-5\lambda(\lambda-\mu)\mu\nu(2\lambda-3\mu+\nu)(q^3)^3(q^4)^4+18\lambda(\lambda-\mu)^2\mu\nu(q^3)^2(q^4)^5-\lambda(\lambda-\\
&-\mu)\mu(-5\nu(\mu+\nu)+\lambda(\mu+9\nu))q^3(q^4)^6+2\lambda^3\mu^2(q^4)^7-2\lambda^2\mu^3(q^4)^7-\\
&-2\lambda^2\mu^2\nu(q^4)^7+2\lambda\mu^3\nu(q^4)^7+\lambda\big(\nu(-\lambda+\nu)\big(-9\lambda\mu+5\mu^2+10\lambda\nu-\\
&-6\mu\nu\big)(q^3)^6+6(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu^2(q^3)^5q^4-15\mu(\lambda-\nu)^2\nu(q^3)^4(q^4)^2+20(\lambda-\\
&-\mu)\mu(\lambda-\nu)\nu(q^3)^3(q^4)^3-15(\lambda-\mu)^2\mu\nu(q^3)^2(q^4)^4+6(\lambda-\mu)\mu^2(\lambda-\nu)q^3(q^4)^5+\\
&+\mu(-\lambda+\mu)\big(10\lambda\mu-9\lambda\nu-6\mu\nu+5\nu^2\big)(q^4)^6\big)q^5+3\lambda^2(\nu-\mu)\big(6(\lambda-\nu)\nu(q^3)^5+
\end{aligned}
$$

$$+ 5\nu(-\lambda+\nu)(q^3)^4q^4 + 5(\lambda-\mu)\mu q^3(q^4)^4 + 6\mu(-\lambda+\mu)(q^4)^5\big)(q^5)^2 + 5\lambda(\mu-$$
$$-\nu)\big((2\lambda+\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4 - 4(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^3q^4 + 4(\lambda-\mu)\mu(\lambda-$$
$$-\nu)q^3(q^4)^3 + \mu(-\lambda+\mu)(2\lambda+\nu)(q^4)^4\big)(q^5)^3 - 5(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)\big(3\mu\nu(q^3-$$
$$-q^4)(q^3+q^4)^2 + \lambda\mu(q^4)^2(3q^3+2q^4) - \lambda\nu(q^3)^2(2q^3+3q^4)\big)(q^5)^4 + 6(\lambda-\mu)(\lambda-$$
$$-\nu)(\mu-\nu)\big(3(-\lambda+\mu)\nu(q^3)^2 + \lambda(\mu-\nu)q^3q^4 + 3\mu(\lambda-\nu)(q^4)^2\big)(q^5)^5 - (\lambda-$$
$$-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)((\lambda(\mu-10\nu)+4\mu\nu)q^3 + (10\lambda\mu-(\lambda+4\mu)\nu)q^4)(q^5)^6+$$
$$+ 2\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)^2(q^5)^7\big) + (\lambda-\mu)q^3(q^4-q^5)\big(\lambda^2\mu(\mu-\nu)(q^4)^7-$$
$$-\lambda\mu(-4\mu\nu+\lambda(3\mu+\nu))(q^4)^6q^5 + \lambda\mu(\lambda-\nu)(\mu+5\nu)(q^4)^5(q^5)^2 + 5\lambda\mu(\lambda-$$
$$-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^4(q^5)^3 - 5\lambda\mu(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^3(q^5)^4 - \lambda(\mu-6\nu)(\lambda-\nu)(\mu-$$
$$-\nu)(q^4)^2(q^5)^5 + (\lambda-\nu)(\mu-\nu)(3\lambda\mu-4\lambda\nu+\mu\nu)q^4(q^5)^6 + \mu(\lambda-\nu)^2(-\mu+$$
$$+\nu)(q^5)^7\big) + 2\mu(\mu-\nu)\nu(q^2)^7(\lambda\mu(q^4-q^5)(2q^3+q^4+q^5) - \lambda\nu(q^3-q^5)(q^3+$$
$$+ 2q^4+q^5) + \mu\nu(q^3-q^4)(q^3+q^4+2q^5)) - 2\mu(\mu-\nu)\nu(q^2)^5\big((q^3)^3(\lambda(5\lambda-3\mu-$$
$$-2\nu)q^4 - (5\lambda-3\mu)(\lambda-\nu)q^5) + (q^3)^2\big(9\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^2 + 3(\lambda-\mu)\nu q^4q^5+$$
$$+ 9\mu(\lambda-\nu)(q^5)^2\big) + (\lambda-\mu)q^4q^5\big((5\lambda-3\nu)(q^4)^2 - 9\nu q^4q^5 + (-5\lambda+2\nu)(q^5)^2\big)+$$
$$+ q^3\big(\lambda(-5\lambda+2\mu+3\nu)(q^4)^3 + 3\mu(-\lambda+\nu)(q^4)^2q^5 + 3\lambda(\mu-\nu)q^4(q^5)^2 + (5\lambda-$$
$$-2\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)\big) - 5\mu(\mu-\nu)\nu(q^2)^4\big(-2\lambda(\lambda-\nu)(q^3)^4(q^4-q^5)-$$
$$-(q^3)^3\big(\lambda(\lambda-3\mu+2\nu)(q^4)^2 - (\lambda-3\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^2\big) + (q^3)^2\big(\lambda(\lambda+2\mu-$$
$$-3\nu)(q^4)^3 + 3\lambda(\mu-\nu)(q^4)^2q^5 + 3\mu(-\lambda+\nu)q^4(q^5)^2 - (\lambda+2\mu)(\lambda-\nu)(q^5)^3\big)-$$
$$-(\lambda-\mu)q^4q^5\big(2\lambda(q^4)^3 + (\lambda-3\nu)(q^4)^2q^5 - (\lambda+2\nu)q^4(q^5)^2 + 2(-\lambda+\nu)(q^5)^3\big)+$$
$$+(\lambda-\mu)q^3\big(2\lambda(q^4)^4 + 3\nu(q^4)^2(q^5)^2 + 2(-\lambda+\nu)(q^5)^4\big)\big) - q^2\big(\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-$$
$$-\nu)\nu^2(q^3)^8 - 4\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^3)^7(\mu(\lambda-\nu)q^4 + \lambda(-\mu+\nu)q^5) + \lambda(\lambda-$$
$$-\nu)\nu(q^3)^6\big((5\mu(\lambda+\mu)-(\lambda+9\mu)\nu)(q^4)^2 + (-5\mu(\lambda+\mu)+4\lambda\nu+6\mu\nu)(q^5)^2\big)+$$
$$+ 2\lambda(\lambda-\nu)\nu(q^3)^5\big(\mu(2\lambda-5\mu+3\nu)(q^4)^3 + 3\lambda(-\mu+\nu)(q^4)^2q^5 + 3\mu(\lambda-$$
$$-\nu)q^4(q^5)^2 - (2\lambda-5\mu)(\mu-\nu)(q^5)^3\big) - 5\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\nu(q^3)^4\big(2\mu(q^4)^4+$$
$$+ 3\nu(q^4)^2(q^5)^2 + 2(-\mu+\nu)(q^5)^4\big) + 2(\lambda-\mu)\nu(q^3)^3\big(\lambda\mu(2\lambda+3\mu-5\nu)(q^4)^5+$$
$$+ 10\lambda\mu(\lambda-\nu)(q^4)^3(q^5)^2 + 10\lambda(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)(q^4)^2(q^5)^3 - (2\lambda+3\mu)(\lambda-$$

$$-\nu)(\mu-\nu)(q^5)^5\big)-(\lambda-\mu)(q^3)^2\big(\lambda\mu(\lambda(\mu-5\nu)+(9\mu-5\nu)\nu)(q^4)^6+6\lambda^2\mu(\nu-$$

$$-\mu)(q^4)^5q^5+15\lambda\mu^2(\lambda-\nu)(q^4)^4(q^5)^2-20\lambda\mu(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^3(q^5)^3+$$

$$+15\lambda(\lambda-\nu)(\mu-\nu)^2(q^4)^2(q^5)^4-6\mu(\lambda-\nu)^2(\mu-\nu)q^4(q^5)^5+(\lambda-\nu)(\mu-$$

$$-\nu)(-10\mu\nu+\lambda(\mu+4\nu))(q^5)^6\big)+(\lambda-\mu)(q^4-q^5)\big(\lambda\mu^2(\lambda-\nu)(q^4)^7-\lambda\mu(3\lambda\mu-$$

$$-4\lambda\nu+\mu\nu)(q^4)^6q^5+\lambda\mu(\mu-\nu)(\lambda+5\nu)(q^4)^5(q^5)^2+5\lambda\mu(\lambda-\nu)(\mu-$$

$$-\nu)(q^4)^4(q^5)^3-5\lambda\mu(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(q^4)^3(q^5)^4-\mu(\lambda-6\nu)(\lambda-\nu)(\mu-$$

$$-\nu)(q^4)^2(q^5)^5+(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(-4\mu\nu+\lambda(3\mu+\nu))q^4(q^5)^6-\lambda(\lambda-\nu)(\mu-$$

$$-\nu)^2(q^5)^7\big)-2(\lambda-\mu)^2\nu q^3\big(2\lambda\mu(q^4)^7-3\lambda\mu(q^4)^5(q^5)^2+3(\lambda-\nu)(\mu-$$

$$-\nu)(q^4)^2(q^5)^5+2(\lambda-\nu)(-\mu+\nu)(q^5)^7\big)\big)-\mu(\mu-\nu)\nu(q^2)^6\big(-5\lambda^2(q^3-$$

$$-q^4)(q^3-q^5)(q^4-q^5)+\mu\nu(q^3-q^4)\big((q^3+q^4)^2+10(q^3+q^4)q^5+4(q^5)^2\big)+$$

$$+\lambda\big(\mu(q^4-q^5)\big(9(q^3)^2+(q^4)^2+7q^4q^5+(q^5)^2+5q^3(q^4+q^5)\big)-\nu(q^3-q^5)\big((q^3)^2+$$

$$+9(q^4)^2+5q^4q^5+(q^5)^2+q^3(5q^4+7q^5)\big)\big)\big)-(q^2)^3\big(2\mu^2(\mu-\nu)\nu^2(q^5)^3\big(-10(q^3-$$

$$-q^4)(q^3+q^4)^2+5\big((q^3)^2-(q^4)^2\big)q^5+2(q^3-q^4)(q^5)^2\big)+\lambda\mu\nu\big(\nu^2(q^3)^6-$$

$$-10\mu\nu(q^3)^5q^4+4\nu^2(q^3)^5q^4+5\mu\nu(q^3)^4(q^4)^2+10\nu^2(q^3)^4(q^4)^2-20\mu^2(q^3)^3(q^4)^3+$$

$$+20\mu\nu(q^3)^3(q^4)^3-20\nu^2(q^3)^3(q^4)^3+10\mu^2(q^3)^2(q^4)^4+5\mu\nu(q^3)^2(q^4)^4+$$

$$+4\mu^2q^3(q^4)^5-10\mu\nu q^3(q^4)^5+\mu^2(q^4)^6-10(\mu-\nu)\big(\mu(q^4)^3\big(2(q^3)^2+(q^4)^2\big)-$$

$$-\nu\big((q^3)^5+2(q^3)^3(q^4)^2\big)\big)q^5+5(\mu-\nu)\big(\mu(q^4)^3(4q^3+q^4)-\nu(q^3)^3(q^3+$$

$$+4q^4)\big)(q^5)^2+20(\mu-\nu)(\mu+\nu)(q^3-q^4)(q^3+q^4)^2(q^5)^3+5(-\mu+\nu)\big((2\mu+$$

$$+5\nu)(q^3)^2-(5\mu+2\nu)(q^4)^2\big)(q^5)^4-2(\mu-\nu)(\mu(2q^3+q^4)-\nu(q^3+2q^4))(q^5)^5+$$

$$+(\mu-\nu)^2(q^5)^6\big)+\lambda^3\big(\nu^2(q^3-q^5)^6+\mu^2(q^4-q^5)^6+\mu\nu\big(q^3q^4\big(-6(q^3)^4+$$

$$+15(q^3)^3q^4-20(q^3)^2(q^4)^2+15q^3(q^4)^3-6(q^4)^4\big)+6\big((q^3)^5+(q^4)^5\big)q^5-$$

$$-15\big((q^3)^4+(q^4)^4\big)(q^5)^2+20\big((q^3)^3+(q^4)^3\big)(q^5)^3-15\big((q^3)^2+(q^4)^2\big)(q^5)^4+$$

$$+6(q^3+q^4)(q^5)^5-2(q^5)^6\big)\big)+\lambda^2\big(-\nu^3(q^3-q^5)^6-\mu^3(q^4-q^5)^6-\mu\nu^2(q^3-$$

$$-q^5)\big((q^3)^5-10(q^4)^5+5(q^4)^4q^5-20(q^4)^3(q^5)^2+25(q^4)^2(q^5)^3-2q^4(q^5)^4+$$

$$+(q^5)^5-(q^3)^4(2q^4+3q^5)+(q^3)^3\big(25(q^4)^2-2q^4q^5-13(q^5)^2\big)+$$

$$+(q^3)^2\big(-20(q^4)^3+5(q^4)^2q^5+18q^4(q^5)^2-13(q^5)^3\big)+q^3\big(5(q^4)^4+5(q^4)^2(q^5)^2-$$

$$- 2q^4(q^5)^3 - 3(q^5)^4)\big) - \mu^2\nu(q^4 - q^5)\big(- 10(q^3)^5 + 5(q^3)^4(q^4 + q^5) -$$
$$- 20(q^3)^3\big((q^4)^2 + (q^5)^2\big) + 5(q^3)^2(q^4 + q^5)\big(5(q^4)^2 - 4q^4q^5 + 5(q^5)^2\big) + (q^4 +$$
$$+ q^5)\big((q^4)^4 - 4(q^4)^3q^5 - 9(q^4)^2(q^5)^2 - 4q^4(q^5)^3 + (q^5)^4\big) - 2q^3\big((q^4)^4 + (q^4)^3q^5 -$$
$$- 9(q^4)^2(q^5)^2 + q^4(q^5)^3 + (q^5)^4\big)\big)\big)\big)\big)\big)/\big(128\lambda(\lambda - \mu)\mu(\lambda - \nu)(\mu - \nu)\nu(q^1)^3(q^2 -$$
$$- q^3)(q^2 - q^4)(q^3 - q^4)(q^2 - q^5)(q^3 - q^5)(q^4 - q^5)\big).$$

Заключение

В этом разделе мы опишем результаты диссертации.

В первой части настоящей работы построена полная классификация уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка, а именно, оказалось, что в случае трех примарных полей уравнения ассоциативности с $\eta_{11} = 0$, и только они, обладают указанной гамильтоновой структурой. Были получены преобразования, сохраняющие наличие гамильтоновой структуры указанного типа, а также найдены все системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, которые можно получить такими преобразованиями из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей. Также было показано, что преобразованиями такого типа системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности и рассмотренные в статьях [22, 23], переводятся в систему гидродинамического типа, эквивалентную уравнениям с антидиагональной матрицей η_{ij}, что означает связь гамильтоновых структур Дубровина–Новикова первого порядка указанных систем.

Во второй части диссертации построены канонически гамильтоновы редукции на множество стационарных точек интеграла уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех и четырех примарных полей. Доказано, что вышеописанная редукция уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей интегрируема по Лиувиллю. Также был найден квадратичный по производным второго порядка интеграл уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей и рассмотрена геометрия гамильтоновых потоков, коммутирующих с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, и их редукций.

Перечислим возможные обобщения полученных в работе результатов и направления дальнейших исследований.

1. Определить какие уравнения ассоциативности в случае четырех примарных полей обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, а какие не допускают наличия такой структуры, в связи с чем необходимо изучить вопрос о построении гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для шестикомпонентных систем гидродинамического типа.

2. Изучить геометрию построенной редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей.

3. Доказать интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей.

Список литературы

[1] Богоявленский, О.И., Новиков, С.П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач. // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – Т. 10, №1 – С. 9–13.

[2] Гельфанд, И.М., Дикий, Л.А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – Т. 10, №4. – С. 13–29.

[3] Гельфанд, И.М., Дикий, Л.А. Резольвента и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. – 1977. – Т. 11, №2. – С. 11–27.

[4] Дубровин, Б.А., Новиков, С.П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, №4. – С. 781–785.

[5] Дубровин, Б.А., Новиков, С.П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // Успехи Математических наук. – 1989. – Т. 44, №6. – С. 29–98.

[6] Дубровин, Б.А., Новиков, С.П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 279, №2. – С. 294–297.

[7] Мохов, О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи математических наук. – 1984. – Т.39, №4. – С. 173–174.

[8] Мохов, О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1987. – Т.51, №6. – С. 1345–1352.

[9] Мохов, О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, №3. – С. 85–192.

[10] Мохов, О.И., Ферапонтов, Е.В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, №3. – С. 62–72.

[11] Новиков, С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза. I // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 54–66.

[12] Царев, С.П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1990. – Т. 54, №5. – С. 1048–1068.

[13] Bogoyavlenskij, O.I., Reynolds, A.P. Criteria for Existence of a Hamiltonian Structure // Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – V. 15, №4–5. – P. 431–439.

[14] Dijkgraaf, R., Verlinde, H., Verlinde, E. Topological strings in $d < 1$ // Nuclear Physics B. – 1991. – V. 352, №1. – P. 59–86.

[15] Dubrovin, B.A. Geometry of 2D topological field theories // Lecture Notes in Math. – 1996. – V.1620. – P. 120–348.

[16] Ferapontov, E.V. On integrability of 3×3 semi-Hamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemann invariants // Physica D. – 1993. – V. 63. – P. 50–70.

[17] Ferapontov, E.V. Several conjectures and results in the theory of integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann

invariants // Theoretical and Mathematical Physics. – 1994. – V. 99, №2. – P. 567–570.

[18] Ferapontov, E.V. Dupin hypersurfaces and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type which do not possess Riemann invariants // Differential Geometry and its Applications. – 1995. – V. 5, №2. – P. 121–152.

[19] Ferapontov, E.V., Galvao, C.A.P., Mokhov, O.I., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Communications in Mathematical Physics. – 1997. – V. 186, №3. – P. 649–669.

[20] Ferapontov, E.V., Mokhov, O.I. On the Hamiltonian representation of the associativity equations // Algebraic aspects of integrable systems. In memory of Irene Dorfman. Editors: I.M. Gelfand, A.S. Fokas. – Birkhäuser. Boston. – 1996. – P. 75–91.

[21] Haantjes, A. On X_{n-1}-forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. – 1955. – V. 17, №2. – P. 158–162.

[22] Kalayci, J., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory // Physics Letters A. – 1997. – V. 227, №3–4. – P. 177–182.

[23] Kalayci, J., Nutku, Y. Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1998. – V. 31, №2. – P. 723–734.

[24] Lax, P.D. Periodic solutions of the KdV equation // Lectures in Applied Math. – 1974. – V.15. – P. 85–96.

[25] Mokhov, O.I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – P. 121–151.

[26] Pavlov, M.V., Vitolo, R.F. On the Bi-Hamiltonian Geometry of WDVV Equations // Letters in Mathematical Physics. – 2015. – V. 105, №8. – P. 1135–1163.

[27] Witten, E. On the structure of topological phase of two-dimensional gravity // Nuclear Physics B. – 1990. – V. 340, №2–3. – P. 281–332.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[28] Мохов, О.И., Павленко, Н.А. Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновым оператором первого порядка // Теоретическая и математическая физика. – 2018. – Т. 197, №1. – С. 124–137. Импакт-фактор: 0.901.

[29] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова // Успехи математических наук. – 2018. – Т. 73, №1. – С. 183–184. Импакт-фактор: 2.038.

[30] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Интегрируемость по Лиувиллю редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех примарных полей // Успехи математических наук. – 2019. – Т. 74, №2 (446). – С. 191–192. Импакт-фактор: 2.038.

Тезисы докладов

[31] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Интегрируемые по Лиувиллю редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в слу-

чае трех примарных полей // Океанологические исследования. – 2019. – Т. 47, №1. – С. 88–90.

[32] Павленко, Н.А. О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2014.

[33] Павленко, Н.А. О редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015.

[34] Стрижова, Н.А. О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности и их редукции // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2018.

[35] Стрижова, Н.А. О гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей // Океанологические исследования. – 2019. – Том 47, №1. – С. 118–122.

[36] Стрижова, Н.А. О канонически гамильтоновых редукциях уравнений ассоциативности // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2019.