МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Стрижова Надежда Александровна

**Гамильтонова геометрия уравнений
ассоциативности**

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Мохов Олег Иванович**,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Царёв Сергей Петрович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, Научно-исследовательская часть,
Сибирский Федеральный Университет,
ведущий научный сотрудник

Красильщик Иосиф Семёнович,
доктор физико-математических наук,
профессор, Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН,
главный научный сотрудник

Тюрин Николай Андреевич,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН, Лаборатория Теоретической
Физики, Объединенный институт ядерных
исследований, начальник сектора

Защита диссертации состоится 25 октября 2019 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «Истина»: <https://istina.msu.ru/dissertations/235361235/>.

Автореферат разослан 25 сентября 2019 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
член-корреспондент РАН

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Уравнения ассоциативности возникли в работах Виттена, Дейкхрафа, Верлинде, Верлинде как уравнения на свободную энергию двумерных топологических теорий поля. Виттен в работе¹ ввел рекурсионные соотношения для n -точечных корреляционных функций в роде 0 и показал, что двухточечные корреляторы определяют метрику, трехточечные — структурные функции. Дейкхраф, Верлинде и Верлинде в статье² доказали, что данные структурные функции могут быть выражены в третьих производных свободной энергии F , а также что условия ассоциативности являются уравнениями в частных производных третьего порядка типа Монжа–Ампера на функцию F . В работе³ Дубровин построил теорию уравнений ассоциативности, доказал их интегрируемость, а также развил геометрический подход к уравнениям ассоциативности — теорию фробениусовых многообразий, возникающих в различных задачах математики и математической физики. Уравнения ассоциативности имеют огромное значение для некоторых задач числительной геометрии, квантовых когомологий, теории инвариантов Громова–Виттена.

Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка играют важную роль в эйлеровой гидродинамике, газовой динамике. В связи с развитием теории интегрируемых систем возрос интерес к уравнениям такого типа — уравнениям Уизема, которые возникают при усреднении для важных интегрируемых уравнений типа уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ), $\sin$ -Гордона и т.п. Дубровин и Новиков⁴ ввели понятие систем гидродинамического типа для описываемого класса уравнений и разработали для них дифференциально-геометрический гамильтонов формализм. На основе этого подхода были развиты методы интегрирования как диагонализуемых систем гидродинамического типа (см. статью⁵), так и недиагонализуемых систем гидродинамического типа (см. работы^{6 7}).

¹Witten, E. On the structure of topological phase of two-dimensional gravity // Nuclear Physics B. – 1990. – V. 340, №2–3. – P. 281–332.

²Dijkgraaf, R., Verlinde, H., Verlinde, E. Topological strings in $d < 1$ // Nuclear Physics B. – 1991. – V. 352, №1. – P. 59–86.

³Dubrovin, B.A. Geometry of 2D topological field theories // Lecture Notes in Math. – 1996. – V.1620. – P. 120–348.

⁴Дубровин, Б.А., Новиков, С.П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 270, №4. – С. 781–785.

⁵Царев, С.П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1990. – Т. 54, №5. – С. 1048–1068.

⁶Ferapontov, E.V. On integrability of 3×3 semi-Hamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemann invariants // Physica D. – 1993. – V. 63. – P. 50–70.

⁷Ferapontov, E.V. Several conjectures and results in the theory of integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants // Theoretical and Mathematical Physics. – 1994. – V. 99, №2. – P. 567–570.

В работе⁸ (см. также обзор⁹) Мохов доказал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Это, в частности, позволило поставить вопрос о гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности в представлении в виде систем гидродинамического типа, которому в основном и посвящена первая часть диссертации. В статье Мохова и Ферапонтова¹⁰ было установлено, что есть и уравнения ассоциативности, обладающие гамильтоновой структурой первого порядка типа Дубровина–Новикова, и уравнения, у которых таких гамильтоновых структур не существует, а также были приведены конкретные примеры уравнений ассоциативности обоих типов. При этом возникла важная проблема описания или классификации уравнений ассоциативности, для которых существует гамильтонова структура Дубровина–Новикова первого порядка.

В дальнейшем был опубликован ряд статей, в которых по той же схеме были найдены другие примеры уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновыми структурами первого порядка типа Дубровина–Новикова (см., например, статьи^{11 12}). Мохов выдвинул гипотезу, что примеры, построенные в работах^{11 12}, связаны с примером из статьи¹⁰ преобразованиями, сохраняющими гамильтоновость рассматриваемого типа.

В диссертации дана полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка в случае трех примарных полей, а также найдены явные преобразования, которые связывают системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, рассмотренные в статьях^{11 12}, и их гамильтонову структуру Дубровина–Новикова первого порядка с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} ⁸, и ее гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка¹⁰.

Вторая часть работы посвящена канонически гамильтоновым редукциям уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла.

Канонически гамильтоновы редукции на множество стационарных точек

⁸Mokhov, O.I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – P. 121–151.

⁹Мохов, О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, №3. – С. 85–192.

¹⁰Мохов, О.И., Ферапонтов, Е.В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, №3. – С. 62–72.

¹¹Kalayci, J., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory // Physics Letters A. – 1997. – V. 227, №3–4. – P. 177–182.

¹²Kalayci, J., Nutku, Y. Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1998. – V. 31, №2. – P. 723–734.

интеграла — общая конструкция Мохова^{13 14}. Связь гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач была обнаружена Новиковым в статье¹⁵, где было показано, что при ограничении уравнения КдФ на множество стационарных решений высших уравнений иерархии КдФ сохраняется свойство гамильтоновости. Позднее этот результат был обобщен Богоявленским и Новиковым¹⁶ для двух коммутирующих однокомпонентных гамильтоновых потоков специального вида с гамильтоновым оператором Гарднера–Захарова–Фаддеева, а именно было доказано, что один из таких коммутирующих потоков является гамильтоновым на множестве стационарных решений другого потока. Также Гельфанд и Дикий (см. статьи^{17 18}) рассматривали обобщение для систем типа Лакса, гамильтоновых относительно пуассоновой структуры Гельфанда–Дикого, ограниченных на множество неподвижных точек высших коммутирующих потоков соответствующей иерархии. Теорема Мохова^{13 14} дает наиболее общий подход к этому вопросу, а именно, имеет место следующий важный принцип: любая эволюционная система, ограниченная на множество стационарных точек своего невырожденного интеграла, является канонически гамильтоновой системой.

Задача ограничения уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла была поставлена в работе¹⁹, однако не была решена в виду большой вычислительной сложности. В работе представлены построенные редукции на множество стационарных точек интеграла уравнений ассоциативности в случае трех и четырех примарных полей, а также доказана интегрируемость по Лиувиллю указанной редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей.

Цели и задачи

Целью работы является исследование гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности, в частности, поиск всех систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей и обладающих гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова перво-

¹³Мохов, О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи математических наук. – 1984. – Т.39, №4. – С. 173–174.

¹⁴Мохов, О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1987. – Т.51, №6. – С. 1345–1352.

¹⁵Новиков, С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза. I // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 54–66.

¹⁶Богоявленский, О.И., Новиков, С.П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач. // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – Т. 10, №1 – С. 9–13.

¹⁷Гельфанд, И.М., Дикий, Л.А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – Т. 10, №1. – С. 13–29.

¹⁸Гельфанд, И.М., Дикий, Л.А. Резольвента и гамильтоновы системы // Функциональный анализ и его приложения. – 1977. – Т. 11, №2. – С. 11–27.

¹⁹Ferapontov, E.V., Galvao, S.A.P., Mikhov, O.I., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Communications in Mathematical Physics. – 1997. – V. 186, №3. – P. 649–669.

го порядка, а также изучение гамильтоновых редукций уравнений ассоциативности.

Научная новизна

Автором диссертации впервые дан исчерпывающий ответ на вопрос о наличии гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для уравнений ассоциативности в виде систем гидродинамического типа в случае трех примарных полей. Также впервые в явном виде построены редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех и четырех примарных полей, доказана интегрируемость по Лиувиллю указанной редукции в случае трех примарных полей.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения уравнений ассоциативности, фробениусовых многообразий, топологических теорий поля, недиагонализуемых систем гидродинамического типа и интегрируемых гамильтоновых динамических систем.

Методология диссертационного исследования

Для доказательства основных результатов работы использованы следующие методы и конструкции: методы теории уравнений ассоциативности²⁰ и их связи с недиагонализуемыми системами гидродинамического типа²¹ ²², методы римановой геометрии, методы гамильтоновой теории систем гидродинамического типа, критерий Богоявленского–Рейнольдса²³ гамильтоновости трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа, конструкция Мохова–Ферапонтова–Гальвао–Нутку²⁴, схема Ленарда–Магри,

²⁰Dubrovin, B.A. Geometry of 2D topological field theories // Lecture Notes in Math. – 1996. – V.1620. – P. 120–348.

²¹Mokhov, O.I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – P. 121–151.

²²Мохов, О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, №3. – С. 85–192.

²³Bogoyavlenskij, O.I., Reynolds, A.P. Criteria for Existence of a Hamiltonian Structure // Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – V. 15, №4–5. – P. 431–439.

²⁴Ferapontov, E.V., Galvao, C.A.P., Mokhov, O.I., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Communications in Mathematical Physics. – 1997. – V. 186, №3. – P. 649–669.

конструкция Мохова²⁵ ²⁶ ограничения эволюционного потока на множество стационарных точек интеграла.

Положения, выносимые на защиту

1. Получена полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры типа Дубровина–Новикова первого порядка в случае трех примарных полей.
2. Найдены все системы гидродинамического типа, которые эквивалентны уравнениям ассоциативности, получающимся из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} заменами, сохраняющими наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка.
 - Показано, что системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, рассмотренным в статьях²⁷ ²⁸, и их гамильтоновы структуры Дубровина–Новикова первого порядка связаны такими заменами с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} , рассмотренной в статье²⁹ (см. также обзор³⁰), и ее гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка³¹.
3. Построена каноническая гамильтонова редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей на множество стационарных точек невырожденного интеграла.
 - Получен явный вид гамильтониана канонической редукции уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей.
 - Обнаружено, что метрика гамильтониана лагранжевой системы, определяемой рассматриваемым интегралом, имеет нулевую скалярную кривизну.

²⁵Мохов, О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи математических наук. – 1984. – Т.39, №4. – С. 173–174.

²⁶Мохов, О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1987. – Т.51, №6. – С. 1345–1352.

²⁷Kalayci, J., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory // Physics Letters A. – 1997. – V. 227, №3–4. – P. 177–182.

²⁸Kalayci, J., Nutku, Y. Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1998. – V. 31, №2. – P. 723–734.

²⁹Mokhov, O.I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – P. 121–151.

³⁰Мохов, О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, №3. – С. 85–192.

³¹Мохов, О.И., Ферапонтов, Е.В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, №3. – С. 62–72.

- Построен интеграл уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, квадратичный по производным второго порядка.
 - Изучена геометрия иерархии потоков, коммутирующих с системой гидродинамического типа, эквивалентной рассматриваемым уравнениям ассоциативности, и их редукций на множество стационарных точек интеграла.
 - Доказана интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции.
4. Построена канонически гамильтонова редукция уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла в случае четырех примарных полей.
- Получен явный вид гамильтонианов канонической гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей.

Соответствие паспорту научной специальности

В диссертации исследуется гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности, а также изучаются канонически гамильтоновы редукции уравнений ассоциативности, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.04 «Геометрия и топология» по направлению «Симплектическая, контактная и пуассонова геометрия».

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях и семинарах:

- Семинар "Геометрия, топология и математическая физика" под руководством С.П. Новикова, В.М. Бухштабера, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, в 2014, 2015 и 2019 годах.
- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством А.Т. Фоменко, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, в 2018 году.
- Семинар "Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений" под руководством И.С. Красильщика, Независимый Московский университет, в 2019 году.
- Семинар "Современная математическая физика", Объединенный институт ядерных исследований, в 2019 году.

- Семинар "Узлы и теория представлений" под руководством В.О. Мантурова, Д.П. Ильютко, И.М. Никонова, Д.А. Федосеева, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, в 2019 году.
- The International Workshop "Geometric Structures in Integrable Systems", 30 October — 2 November 2012, Moscow, Russia.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2014", 7 — 11 апреля 2014, Москва, Россия.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2015", 13 — 17 апреля 2015, Москва, Россия.
- Международная молодежная школа-конференция "Шестая летняя школа по геометрии и математической физике", 24 — 29 июня 2016, Краснови́дово, Московская область, Россия.
- 2nd International Scientific Conference "Science of the Future", 20 — 23 September 2016, Kazan, Russia.
- 4th International Workshop "Analysis, Probability and Geometry", 26 сентября — 1 октября 2016, Москва, Россия.
- International Conference "Dynamics in Siberia", 26 February — 4 March 2017, Novosibirsk, Russia.
- "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena PMNP2017: 50 years of IST", 17 — 24 June 2017, Gallipoli, Italy.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2018", 9 — 13 апреля 2018, Москва, Россия.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов — 2019", 8 — 12 апреля 2019, Москва, Россия.
- 16-th Conference "Mathematics in Technical and Natural Sciences", 30 June — 5 July 2019, Koscielisko, Poland.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации представлены в девяти работах [1]–[9]. Статьи [1]–[3] опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS, Web of Science и RSCI. Также результаты автора по теме диссертации представлены в 6 тезисах конференций [4]–[9]. Вклад автора диссертации и О.И. Мохова в совместных работах равноценный. Список работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 36 наименований. Общий объем диссертации составляет 106 страниц.

Краткое содержание работы

Во **Введении** формулируются основные задачи и дан краткий обзор предшествующих работ и современного состояния исследований уравнений ассоциативности.

В **Главе 1** содержатся определения, результаты и конструкции, необходимые для диссертации.

Определение 1.1.1. Уравнениями ассоциативности или системой Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) называется система уравнений

$$\eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^k \partial t^l} = \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^l} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^j \partial t^k}.$$

на функцию $F(t^1, t^2, \dots, t^n)$, удовлетворяющую двум следующим условиям:

1) матрица

$$\eta_{ij} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

постоянна и невырожденна,

2) функции

$$c_{jk}^i(t) = \eta^{il} \frac{\partial^3 F}{\partial t^l \partial t^j \partial t^k}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

для любого t задают структуру ассоциативной алгебры с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и умножением $e_j \circ e_k = c_{jk}^i(t) e_i$.

Также отметим, что под числом примарных полей понимается количество переменных функции F , т.е. n .

Определение 1.2.1. Системой гидродинамического типа (одномерной) называется система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial u^i(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_j^i(u(x, t)) \frac{\partial u^i(x, t)}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Мохов в статье³² (см. также обзор³³) доказал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Переход к эквивалентной системе гидродинамического типа заключается во введении новых переменных, являющихся третьими частными производными функции $F(t^1, \dots, t^n)$. Новые переменные связаны естественными соотношениями совместности на частные производные одной функции, а также уравнениями ассоциативности.

В **Главе 2** содержатся результаты, связанные с гамильтоновыми структурами Дубровина–Новикова первого порядка систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей.

Утверждение 2.2.1. Невырожденные линейные преобразования независимых переменных в уравнениях ассоциативности, не затрагивающие выделенную первую переменную t^1 :

$$\begin{cases} t^1 = \tilde{t}^1 \\ t^2 = \alpha \tilde{t}^2 + \beta \tilde{t}^3 \\ t^3 = \gamma \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3 \end{cases}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (1)$$

сохраняют наличие гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова для систем гидродинамического типа, эквивалентных соответствующим уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей.

Теорема 2.3.3. Произвольное уравнение ассоциативности в случае трех примарных полей можно свести невырожденными линейными преобразованиями (1), не затрагивающими t^1 и сохраняющими наличие локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова, к одному из следующих четырех типов, заданных матрицами η_{ij} ($\lambda, \mu = const$):

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda^2 = 1; & 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda^2 = 1, \mu \neq 1; & 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \lambda^2 = 1, \mu^2 = 1. \end{array}$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности первого типа ($\eta_{11} = 0$), при $\lambda^2 = 1$ и любых μ имеют гамиль-

³²Mokhov, O.I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in Topology and Mathematical Physics. Ed. S.P. Novikov. Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – P. 121–151.

³³Мохов, О.И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53, №3. – С. 85–192.

тонову структуру первого порядка с плоской метрикой

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 3/2 & -A/2 & \lambda\mu/2 - B \\ -A/2 & \lambda\mu/2 - B & -3C/2 \\ \lambda\mu/2 - B & -3C/2 & 2AC - 2B^2 + 2\lambda\mu B - \lambda^2\mu^2/2 \end{pmatrix}.$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности типов 2) – 4), не имеют локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова.

Следствие 2.3.6. В случае трех примарных полей уравнения ассоциативности с $\eta_{11} = 0$ в форме систем гидродинамического типа, и только они, обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка.

Утверждение 2.4.1. Системы гидродинамического типа, которые эквивалентны уравнениям ассоциативности, получающимся из уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей при произвольном невырожденном преобразовании (1), имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{x}},$$

где

$$q = \frac{\alpha^3\beta^3\Delta^2 + \beta^2\gamma\Delta(\beta\gamma - 3\alpha\delta)\tilde{B} + \alpha^2\delta\Delta(3\beta\gamma - \alpha\delta)\tilde{C} + \gamma\delta^3\tilde{B}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\tilde{B} - \gamma\delta\tilde{A})^2} + \frac{-2\gamma^2\delta^2\tilde{B}\tilde{C} + \gamma^3\delta\tilde{C}^2}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\tilde{B} - \gamma\delta\tilde{A})^2},$$

$$r = \frac{\Delta(\beta^2\gamma(3\alpha\delta - \beta\gamma)\tilde{A} + 2\alpha^3\delta^2\tilde{B} - \alpha^2\gamma(\alpha\delta + 3\beta\gamma)\tilde{C} - 3\alpha^4\beta^2\Delta)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\tilde{B} - \gamma\delta\tilde{A})^2} + \frac{-2\gamma\delta^3\tilde{A}\tilde{B} - \gamma^4\tilde{C}^2 + \gamma^2\delta^2(2\tilde{A}\tilde{C} + \tilde{B}^2)}{(\alpha^3\Delta + \gamma^2\tilde{B} - \gamma\delta\tilde{A})^2},$$

$$s = \frac{3\alpha^2\beta\Delta - \delta^2\tilde{A} - \gamma\delta\tilde{B} + 2\gamma^2\tilde{C}}{\alpha^3\Delta + \gamma^2\tilde{B} - \gamma\delta\tilde{A}}.$$

Оказалось, что системы гидродинамического типа, рассмотренные в статьях^{34 35}, сводятся к системе гидродинамического типа, эквивалентной урав-

³⁴Kalayci, J., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory // Physics Letters A. – 1997. – V. 227, №3–4. – P. 177–182.

³⁵Kalayci, J., Nutku, Y. Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity // Journal

нениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} , преобразованиями вида (1). Приведем явный вид преобразований независимых и полевых переменных для каждого случая.

Преобразования для системы гидродинамического типа³⁴:

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \alpha \tilde{t}^2, \quad t^3 = -\tilde{t}^2 + \tilde{t}^3, \quad \alpha = \pm 1,$$

$$\tilde{A} = \alpha A - 3B + 3\alpha C - B^2 + AC, \quad \tilde{B} = B - 2\alpha C + B^2 - A, \quad \tilde{C} = \alpha C - B^2 + AC.$$

Преобразования для системы гидродинамического типа³⁵, эквивалентной уравнению ассоциативности $f_{xxx} - (f_{xtt})^2 + f_{ttt}f_{xxt} = 0$:

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \beta \tilde{t}^3, \quad t^3 = \tilde{t}^2, \quad \beta = \pm 1,$$

$$\tilde{A} = B^2 - AC, \quad \tilde{B} = \beta C, \quad \tilde{C} = B.$$

Преобразования для системы гидродинамического типа³⁵, эквивалентной уравнению ассоциативности $f_{xxx}f_{ttt} - f_{xxt}f_{xtt} + f_{xtt}f_{xxx} - f_{xxt}^2 + f_{ttt}f_{xxt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} = 0$:

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \beta \tilde{t}^3, \quad t^3 = \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3, \quad \beta = \pm 1, \delta = \pm 1,$$

$$\tilde{A} = B^2 - AC, \quad \tilde{B} = \beta C + \delta(B^2 - AC), \quad \tilde{C} = B + 2\beta\delta C + B^2 - AC.$$

Глава 3 посвящена уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех и четырех примарных полей и их канонически гамильтоновым редукциям на множество стационарных точек интеграла.

В статье³⁶ для системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, были найдены квадратичные по скоростям интегралы I^1, I^2 , произвольная линейная комбинация которых при ненулевых несовпадающих параметрах дает невырожденный интеграл, а также поставлена задача о редукции согласно конструкции Мохова^{37 38} на множество стационарных точек невырожденного интеграла

$$\bar{I} = \lambda I^1 + \mu I^2 + \int V(u) dx = \int L(x, u, u_x) dx, \quad (2)$$

где $V(u)$ — линейная комбинация казимиров гамильтоновых структур Дубровина–Новикова первого и третьего порядка рассматриваемого уравнения,

of Physics A: Mathematical and General. – 1998. – V. 31, №2. – P. 723–734.

³⁶Ferapontov, E.V., Galvao, C.A.P., Mokhov, O.I., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Communications in Mathematical Physics. – 1997. – V. 186, №3. – P. 649–669.

³⁷Мохов, О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи математических наук. – 1984. – Т.39, №4. – С. 173–174.

³⁸Мохов, О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1987. – Т.51, №6. – С. 1345–1352.

однако ограничение не было осуществлено. Описанная редукция построена в диссертации в явном виде.

Теорема 3.2.1. Система гидродинамического типа, эквивалентная уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, ограниченная на множество стационарных точек ее невырожденного интеграла $\bar{I}$ (2), является канонической гамильтоновой системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:

$$\begin{aligned} (q_i^k)_t &= -\{q_i^k, \widehat{Q}\}, \quad (p_k^i)_t = -\{p_k^i, \widehat{Q}\}, \\ \widehat{Q} &= g_{\widehat{Q}}^{ij} p_i p_j + V_{\widehat{Q}}(q), \\ g_{\widehat{Q}}^{11} &= \frac{(q^1 - q^2)(q^1 - q^3)(\mu q^2(q^1 - q^3)^2 - \lambda(q^2 - q^3)((q^1)^2 - q^2 q^3))}{8\lambda(\lambda - \mu)(q^2 - q^3)}, \\ g_{\widehat{Q}}^{12} &= g_{\widehat{Q}}^{21} = -\frac{(q^1 - q^2)^3 q^3}{8(\lambda - \mu)}, \\ g_{\widehat{Q}}^{13} &= g_{\widehat{Q}}^{31} = -\frac{(q^1 - q^3)^3 q^2}{8\lambda}, \\ g_{\widehat{Q}}^{22} &= \frac{(q^1 - q^2)(q^2 - q^3)(\lambda q^1(q^2 - q^3)^2 + \mu(q^3 - q^1)((q^2)^2 - q^1 q^3))}{8\mu(\lambda - \mu)(q^1 - q^3)}, \\ g_{\widehat{Q}}^{23} &= g_{\widehat{Q}}^{32} = -\frac{q^1(q^2 - q^3)^3}{8\mu}, \\ g_{\widehat{Q}}^{33} &= \frac{(\mu q^2(q^1 - q^3)^2 - \lambda q^1(q^2 - q^3)^2)(q^1 - q^3)(-q^2 + q^3)}{8\lambda\mu(q^1 - q^2)}, \\ V_{\widehat{Q}} &= \frac{\alpha_5}{4}((q^1 q^2)^2 + (q^1 q^3)^2 + (q^2 q^3)^2 - 2q^1 q^2 q^3(q^1 + q^2 + q^3)) - 2\alpha_4 q^1 q^2 q^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2}((\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)q^1 q^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)q^1 q^3 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)q^2 q^3). \end{aligned} \tag{3}$$

Гамильтониан $-\widehat{Q}$ находится в инволюции с гамильтонианом H лагранжевой системы, определяемой интегралом $\bar{I}$ (2), относительно стандартной конечномерной скобки Пуассона на фазовом пространстве:

$$\{\widehat{Q}, H\} = 0.$$

В работе изучены гамильтоновы потоки, коммутирующие с рассматриваемой системой гидродинамического типа, и построены их редукции на множество стационарных точек интеграла $\bar{I}$. При этом было доказано следующее.

Теорема 3.3.3. Построенная редукция (3) системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, интегрируема по Лиувиллю.

Система гидродинамического типа, эквивалентная уравнению ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, бигамильтонова³⁹, а именно обладает согласованными гамильтоновыми операторами Дубровина–Новикова первого порядка $M_1^{ij}(u)$ ⁴⁰ и третьего порядка $M_2^{ij}(u)$ ³⁹. В диссертации при помощи схемы Ленарда–Магри, применимой для бигамильтоновых систем, построены первые интегралы второго порядка рассматриваемой системы, а также изучены интегралы, получающиеся при дальнейшем применении схемы Ленарда–Магри:

$$M_1^{ij}(u) \frac{\delta I_{(n)}^m}{\delta u^j} = M_2^{ij}(u) \frac{\delta I_{(n-1)}^m}{\delta u^j},$$

$$I_{(0)}^m = K^m = \int u^m dx, \quad I_{(1)}^m = I^m, \quad m = 1, 2.$$

Утверждение 3.4.1. В явном виде вычислены интегралы $I_{(2)}^m$, следующие за интегралами I^m , $m = 1, 2$, в схеме Ленарда–Магри:

$$I_{(2)}^m = \int \left(G_{ij}^{(2,m)}(u) u_{xx}^i u_{xx}^j + D_{ijk}^{(2,m)}(u) u_x^i u_x^j u_{xx}^k + E_{ijkl}^{(2,m)}(u) u_x^i u_x^j u_x^k u_x^l \right) dx.$$

Метрики $G_{ij}^{(2,m)}$ вырождены. Произвольная линейная комбинация интегралов $\lambda I_{(2)}^1 + \mu I_{(2)}^2$ задает метрику, невырожденную при всех λ, μ , $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$.

Теорема 3.4.2. Интегралы $I_{(n)}^m$, получающиеся на n -ом шаге схемы Ленарда–Магри являются интегралами порядка n :

$$I_{(n)}^m = \int \left(G_{ij}^{(n,m)}(u) u_{(n)}^i u_{(n)}^j + D_{ijk}^{(n,m)}(u) u_x^i u_{(n-1)}^j u_{(n)}^k + \dots + \right. \\ \left. + E_{i_1 \dots i_{2n}}^{(n,m)}(u) u_x^{i_1} u_x^{i_2} \dots u_x^{i_{2n}} \right) dx,$$

где $u_{(j)}^i = \partial_x^j u^i$. Старший коэффициент плотности интеграла $I_{(n)}^m$ определяет метрику $G_{ij}^{(n,m)}$, причем метрика каждого интеграла $I_{(n)}^m$ связана с метрикой предыдущего по формуле:

$$G_{ij}^{(n,m)} = R_i^q G_{qj}^{(n-1,m)}, \quad \text{где}$$

$$R_1^1 = -\frac{1}{(u^1 - u^2)^2} - \frac{1}{(u^1 - u^3)^2}, \quad R_1^2 = -\frac{u^1 - 2u^2 + u^3}{(u^1 - u^2)^2(u^2 - u^3)^2},$$

³⁹Ferapontov, E.V., Galvao, C.A.P., Mokhov, O.I., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Communications in Mathematical Physics. – 1997. – V. 186, №3. – P. 649–669.

⁴⁰Мохов, О.И., Ферапонтов, Е.В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализующие системы гидродинамического типа // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, №3. – С. 62–72.

$$\begin{aligned}
R_1^3 &= \frac{u^1 + u^2 - 2u^3}{(u^1 - u^3)^2(u^2 - u^3)}, & R_2^1 &= -\frac{-2u^1 + u^2 + u^3}{(u^1 - u^2)^2(u^1 - u^3)}, \\
R_2^2 &= -\frac{1}{(u^1 - u^2)^2} - \frac{1}{(u^2 - u^3)^2}, & R_2^3 &= \frac{u^1 + u^2 - 2u^3}{(u^1 - u^3)(u^2 - u^3)^2}, \\
R_3^1 &= -\frac{-2u^1 + u^2 + u^3}{(u^1 - u^2)(u^1 - u^3)^2}, & R_3^2 &= \frac{u^1 - 2u^2 + u^3}{(u^1 - u^2)(u^2 - u^3)^2}, \\
R_3^3 &= -\frac{1}{(u^1 - u^3)^2} - \frac{1}{(u^2 - u^3)^2}.
\end{aligned}$$

Также в работе исследованы уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей. Для систем гидродинамического типа, эквивалентных указанным уравнениям ассоциативности, построена канонически гамильтонова редукция согласно конструкции Мохова^{41 42} на множество стационарных точек интеграла, являющегося невырожденной линейной комбинацией

$$\tilde{I} = \int G_{ij}(u) u_x^i u_x^j dx = \int (\lambda G_{ij}^1(u) + \mu G_{ij}^2(u) + \nu G_{ij}^3(u)) u_x^i u_x^j dx \quad (4)$$

квадратичных по скоростям интегралов из статьи⁴³.

Теорема 3.5.1. *Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей, ограниченные на множество стационарных точек их общего невырожденного интеграла $\tilde{I}$ (4), являются каноническими гамильтоновыми системами с гамильтонианами $-\hat{Q}^y$ и $-\hat{Q}^z$ соответственно.*

$$\begin{aligned}
(q_i^k)_y &= -\{q_i^k, \hat{Q}^y\}, & (p_k^i)_y &= -\{p_k^i, \hat{Q}^y\}, & \hat{Q}^y &= g^{(y)ij}(q) p_i p_j, \\
(q_i^k)_z &= -\{q_i^k, \hat{Q}^z\}, & (p_k^i)_z &= -\{p_k^i, \hat{Q}^z\}, & \hat{Q}^z &= g^{(z)ij}(q) p_i p_j.
\end{aligned}$$

Гамильтонианы $-\hat{Q}^y$, $-\hat{Q}^z$ и гамильтониан лагранжевой системы $H = g_H^{ij}(q) p_i p_j = G^{ij}(q) p_i p_j / 4$, $G^{ij}(q) G_{jk}(q) = \delta_k^i$, находятся в инволюции относительно канонической скобки Пуассона:

$$\{\hat{Q}^y, H\} = \{\hat{Q}^z, H\} = \{\hat{Q}^y, \hat{Q}^z\} = 0.$$

Глава 4 содержит приложения с формулами из предыдущих разделов.

В **Заключении** формулируются полученные результаты, а также описаны возможные обобщения результатов и направления исследования.

⁴¹Мохов, О.И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // Успехи математических наук. – 1984. – Т.39, №4. – С. 173–174.

⁴²Мохов, О.И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1987. – Т.51, №6. – С. 1345–1352.

⁴³Pavlov, M.V., Vitolo, R.F. On the Bi-Hamiltonian Geometry of WDVV Equations // Letters in Mathematical Physics. – 2015. – V. 105, №8. – P. 1135–1163.

Заключение

В этом разделе мы опишем результаты диссертации, а также возможные обобщения и направления исследований.

В первой части работы построена полная классификация уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка, а именно оказалось, что в случае трех примарных полей уравнения ассоциативности с $\eta_{11} = 0$, и только они, обладают указанной гамильтоновой структурой. Были получены преобразования, сохраняющие наличие гамильтоновой структуры указанного типа, а также найдены все системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, которые можно получить такими преобразованиями из уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей. Также было показано, что преобразованиями такого типа системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, рассмотренные в статьях^{44 45}, переводятся в систему гидродинамического типа, эквивалентную уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} , что означает связь гамильтоновых структур Дубровина–Новикова первого порядка указанных систем.

Во второй части диссертации построены канонически гамильтоновы редукции на множество стационарных точек интеграла уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех и четырех примарных полей. Доказано, что вышеописанная редукция уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей интегрируема по Лиувиллю. Также был найден квадратичный по производным второго порядка интеграл уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей и рассмотрена геометрия гамильтоновых потоков, коммутирующих с системой гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, и их редукций.

Перечислим возможные обобщения полученных в работе результатов и направления дальнейших исследований.

1. Определить, какие уравнения ассоциативности в случае четырех примарных полей обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка, а какие не допускают наличия такой структуры, в связи с чем необходимо изучить вопрос о наличии гамильтоновых структур Дубровина–Новикова первого порядка для шестикомпонентных систем гидродинамического типа.

⁴⁴Kalayci, J., Nutku, Y. Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory // *Physics Letters A*. – 1997. – V. 227, №3–4. – P. 177–182.

⁴⁵Kalayci, J., Nutku, Y. Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1998. – V. 31, №2. – P. 723–734.

2. Изучить геометрию построенной редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей.
3. Доказать интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю О.И. Мохову за постановку интересных задач, неустанное внимание и важные замечания. Автор благодарит сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за непринужденную и научную атмосферу.

Исследования выполнены за счет грантов Российского научного фонда (гранты №16-11-10260, №18-11-00316).

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- [1] Мохов, О.И., Павленко, Н.А. Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновым оператором первого порядка // Теоретическая и математическая физика. – 2018. – Т. 197, №1. – с. 124–137. Импакт-фактор: 0.901.
- [2] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова // Успехи математических наук. – 2018. – Т. 73, №1. – С. 183–184. Импакт-фактор: 2.038.
- [3] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Интегрируемость по Лиувиллю редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех примарных полей // Успехи математических наук. – 2019. – Т. 74, №2 (446). – С. 191–192. Импакт-фактор: 2.038.

Тезисы докладов

- [4] Мохов, О.И., Стрижова, Н.А. Интегрируемые по Лиувиллю редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех примарных полей // Океанологические исследования. – 2019. – Т. 47, №1. – С. 88–90.

- [5] Павленко, Н.А. О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2014.
- [6] Павленко, Н.А. О редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2015.
- [7] Стрижова, Н.А. О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности и их редукции // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2018.
- [8] Стрижова, Н.А. О гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей // Океанологические исследования. – 2019. – Том 47, №1. – С. 118–122.
- [9] Стрижова, Н.А. О канонически гамильтоновых редукциях уравнений ассоциативности // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2019» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2019.