

Отзыв
научного руководителя на диссертационную работу
Стрижовой Надежды Александровны
«Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности»,

представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.04 — геометрия и топология
(физико-математические науки)

Диссертация Надежды Александровны Стрижовой посвящена изучению гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности, появившихся в двумерных топологических теориях поля в работах Виттена, Дейкхрафа и братьев Верлинде и играющих важную роль в современной математике и математической физике, в частности, в теории фробениусовых многообразий, исчислительной геометрии, теории инвариантов Громова–Виттена, квантовых когомологиях, теории особенностей, теории подмногообразий, теории интегрируемых систем, в теории систем гидродинамического типа и других областях. Дубровин глубоко развил теорию уравнений ассоциативности, доказал их интегрируемость, продемонстрировал многие удивительные свойства и большой запас важных точных решений этих уравнений и создал тесно связанную с ними теорию фробениусовых многообразий. Уравнениям ассоциативности посвящено большое число статей и книг ведущих математиков, тем не менее в теории уравнений ассоциативности остается много вопросов и далеко не все их удивительные свойства открыты и исследованы на настоящий момент, включая проблемы гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности, это очень актуальная тематика в современной математике и математической физике.

Форма уравнений ассоциативности не позволяет исследовать их гамильтонову природу напрямую. В работах Мохова была открыта связь уравнений ассоциативности с интегрируемыми недиагонализуемыми системами гидродинамического типа, например, в случае трех примарных полей уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа, а в случае четырех примарных полей — парам коммутирующих интегрируемых недиагонализуемых систем гидродинамического типа. В частности, это позволило поставить вопрос о гамильтоновости уравнений ассоциативности в представлении в виде систем гидродинамического типа. Для систем гидродинамического типа в работах Дубровина и Новикова был развит локальный гамильтонов подход, порождаемый плоскими метриками (в дальнейшем в работах Мохова и Ферапонтова было открыто нелокальное обобщение гамильтонова подхода Дубровина–Новикова, связанное с неплоскими метриками). В работе Мохова и Ферапонтова была найдена гамильтонова структура типа Дубровина–Новикова для важного уравнения ассоциативности

в случае трех примарных полей, а также доказано, что не все уравнения ассоциативности в случае трех примарных полей обладают гамильтоновыми структурами типа Дубровина–Новикова, и указан явный пример такого уравнения ассоциативности. Это привело к проблеме описания и классификации уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова в представлении в виде систем гидродинамического типа, которая оказалась весьма нетривиальной и интересной. В дальнейшем в ряде статей зарубежных авторов по той же схеме были найдены другие примеры уравнений ассоциативности, обладающие гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова, при этом Моховым была выдвинута гипотеза, что все эти примеры связаны с примером Мохова–Ферапонтова специальными преобразованиями, сохраняющими наличие гамильтоновой структуры такого типа. В диссертации в результате развитой нетривиальной теории эта трудная гипотеза, остававшаяся недоказанной два десятилетия, полностью доказана и найдены явные преобразования, связывающие уравнения ассоциативности и их гамильтоновы структуры. Это замечательный результат. Более того, в диссертации удалось получить полное описание и классификацию уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова в представлении в виде систем гидродинамического типа. Ответ очень интересный, простой и загадочный для специалистов: уравнения ассоциативности в случае трех примарных полей обладают гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова в представлении в виде систем гидродинамического типа тогда и только тогда, когда элемент η_{11} метрики уравнений ассоциативности равен нулю. Очень интересно, что в результате полученной в диссертации классификации удалось найти целое однопараметрическое семейство уравнений ассоциативности, которые обладают гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова, но не сводятся друг к другу, то есть найдено однопараметрическое семейство принципиально новых примеров, не связанных с примером Мохова–Ферапонтова.

Вторая часть диссертации посвящена изучению редукций уравнений ассоциативности на множество стационарных точек их интегралов, используя общую конструкцию Мохова о канонической гамильтоновой редукции эволюционных систем на множество стационарных точек их интегралов. Эта задача была поставлена более двух десятилетий назад в статье Ферапонтова, Гальвао, Мохова и Нутку, где для уравнений ассоциативности было найдено семейство невырожденных интегралов, квадратичных по первым производным, но редукции не были получены в виду больших технических сложностей, хотя такие редукции и связанные с ними решения уравнений ассоциативности представляют большой интерес в теории уравнений ассоциативности и их приложений. В рамках диссертации Н.А.Стрижовой удалось найти явный вид редукций уравнений ассоциативности и в случае трех примарных полей, и в случае четырех примарных полей. В случае трех примарных полей были найдены и высшие интегралы уравнений ассоциативности, изучена геометрия иерархии потоков уравнений ассоциативности, доказана интегрируемость по Лиувиллю полученной редукции. Таким образом, получены замечательные и важные результаты.

Все результаты диссертации являются новыми, интересными, важными и получены автором самостоятельно. При их получении автор продемонстрировал высокий математический уровень и преодолел ряд серьезных трудностей. В диссертации используются фундаментальные современные результаты теории уравнений ассоциативности, римановой геометрии, гамильтоновой геометрии теоретико-полевых систем, теории интегрируемых систем, теории систем гидродинамического типа. Результаты диссертации являются существенным вкладом в теорию уравнений ассоциативности и фробениусовых многообразий, в теорию интегрируемых систем. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в трех научных статьях в журналах из списка ВАК. Результаты докладывались на научных семинарах и на многих российских и международных конференциях, результаты признаны специалистами.

Считаю, что работа Н.А.Стрижовой удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.04 (геометрия и топология), а ее автор безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Диссертация Н.А.Стрижовой соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ 01.17 ФГБОУ ВО МГУ по специальности 01.01.04 — геометрия и топология (физико-математические науки).

Научный руководитель,
профессор кафедры высшей геометрии и топологии
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук

О.И.Мохов

Подпись профессора О.И.Мохова удостоверяю

И.о. декана механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор

В.Н.Чубариков

