

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Стрижовой Надежды Александровны
«Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — «Геометрия и топология»

Диссертация Н.А. Стрижовой посвящена теории широко известных в современной теоретической физике уравнений ассоциативности Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде. Уравнения ассоциативности, возникшие в 1990-х годах, имеют огромное значение в теории интегрируемых систем, квантовых когомологиях, теории инвариантов Громова–Виттена и т.д. Тем самым тематика представленной диссертационной работы актуальна.

Приведем краткий обзор современного состояния гамильтоновой теории уравнений ассоциативности, которой и посвящена работа Н.А. Стрижовой. Б.А. Дубровин в широко цитируемой работе 1996 г. доказал интегрируемость уравнений ассоциативности, построил их геометрическую интерпретацию — теорию фробениусовых многообразий, а также получил большой класс точных решений уравнений ассоциативности. Как показал в дальнейшем О.И. Мохов, уравнения ассоциативности эквивалентны недиагнализуемым интегрируемым системам гидродинамического типа. Для системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей ($n = 3$), О.И. Мохов и Е.В. Ферапонтов построили гамильтонову структуру Дубровина–Новикова первого порядка. Именно теория Дубровина и Новикова гамильтоновых структур первого порядка, представленная в геометрическом виде и определяемая через некоторую плоскую псевдориманову метрику и приводит к необходимости геометрического подхода к изучению гамильтоновых структур уравнений ассоциативности. Позднее в работе Е.В. Ферапонтова, О.И. Мохова, К.А. Гальвао, Я. Нутку была показана бигамильтоновость этой системы (была найдена однородная гамильтонова структура Дубровина–Новикова третьего порядка, согласованная с первой). Также Калайджи и Нутку привели ещё несколько бигамильтоновых примеров уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей в форме систем гидродинамического типа с согласованными гамильтоновыми операторами Дубровина–Новикова первого и третьего порядков. О.И. Мохов и Е.В. Ферапонтов также привели пример системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей и не обладающей никакой гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка.

Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности исследовалась и в случае четырех примарных полей. В этом случае уравнениям ассоциативности эквивалентна пара коммутирующих шестикомпонентных систем гидродинамического типа. О.И. Мохов и Е.В. Ферапонтов построили в этом случае для уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} (в форме двух систем гидродинамического типа) гамильтонов оператор Дубровина–Новикова первого порядка, общий для обеих систем, а М.В. Павлов и Р. Витоло показали бигамильтоновость таких систем, построив согласованный с

первым гамильтонов оператор Дубровина–Новикова третьего порядка.

Перейдем к краткому обзору содержания диссертации и основных ее результатов.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 36 наименований.

В **первой главе** содержатся определения, приводятся примеры и формулируются ранее известные результаты, необходимые для данного диссертационного исследования.

Во **второй главе** исследуется, какие уравнения ассоциативности в форме систем гидродинамического типа в случае трех примарных полей обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка. Отметим в этой связи, что до сих пор была исследована гамильтоновость только отдельных примеров уравнений ассоциативности, полного исследования гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности не было. Автор диссертации Н.А. Стрижова рассмотрела и полностью решила вопрос о наличии гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для уравнений ассоциативности в форме систем гидродинамического типа в случае трех примарных полей. Для ответа на данный вопрос автором были рассмотрены линейные преобразования, не затрагивающие фиксированную переменную t^1 , а также было показано, что при таких преобразованиях в уравнениях ассоциативности сохраняется наличие гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка для соответствующих систем гидродинамического типа (утверждение 2.2.1). После чего данными преобразованиями уравнения ассоциативности были разбиты на четыре различных класса и к системам гидродинамического типа, эквивалентным каждому полученному классу, был применен критерий гамильтоновости Богоявленского–Рейнольдса. Основным результатом данной главы сформулирован в теореме 2.3.3 и переформулирован в следствии 2.3.6, а именно дан исчерпывающий ответ на поставленный вопрос: в случае трех примарных полей уравнения ассоциативности с $\eta_{11} = 0$, и только они, обладают гамильтоновой структурой Дубровина–Новикова первого порядка.

Также в данной главе указан явный вид замен, сохраняющих наличие гамильтоновой структуры первого порядка, связывающих уравнения ассоциативности, рассмотренные О.И. Моховым и Е.В. Фералонтовым, и их гамильтонову структуру первого порядка, и уравнения ассоциативности, рассмотренные Я. Калайджи и Я. Нутку, и их гамильтонову структуру первого порядка.

Третья глава содержит результаты, связанные с уравнениями ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех и четырех примарных полей и их редукциями на множество стационарных точек интеграла. Редукции на множество стационарных точек интеграла и их гамильтоновость — известный результат О.И. Мохова, позволяющий строить каноническим образом гамильтоновы редукции для произвольных эволюционных потоков, обладающих невырожденным первым интегралом (этот результат ведет свое начало с работ С.П.Новикова и др. по гамильтоновости стационарных редукций интегрируемых уравнений). Ещё в работе Е.В. Фералонтова, О.И. Мохова, К.А. Гальвао, Я. Нутку 1997 года было предложено построить редукцию уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла, полученного в указанной работе. Однако в указанной статье и в более поздних работах сама редукция не была построена. В диссертации Н.А. Стрижовой описанная редукция явно построена, а также доказано, что она интегрируема по Лиувиллю. Более того, в диссертации построена редукция уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей. В

теореме 3.2.2 построена в явном виде редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей. В теореме 3.3.3 и в предыдущих утверждениях того же раздела доказана интегрируемость по Лиувиллю построенной редукции, для чего необходимо было найти три функционально независимых интеграла в инволюции. В качестве таких интегралов были взяты гамильтониан исходной редукции, гамильтониан лагранжевой системы, задаваемой интегралом, на множество стационарных точек которого ограничивали систему, а также линейная комбинация гамильтонианов редукций на множество стационарных точек того же интеграла для некоторых потоков, коммутирующих с исходной системой.

Также в диссертации для системы гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае трех примарных полей, исследуются первые интегралы, получаемые схемой Ленарда–Магри, начиная с казимиров гамильтонового оператора первого порядка рассматриваемой системы. В утверждении 3.4.1 построены первые интегралы второго порядка рассматриваемых уравнений ассоциативности, что также позволяет построить новые редукции с полученным интегралом более высокого порядка. В теореме 3.4.2 получен общий вид интегралов в рассматриваемой схеме Ленарда–Магри, а также выявлено интересное семейство метрик (задаваемых старшими коэффициентами таких интегралов), связанное с уравнениями ассоциативности. В теореме 3.5.1 построена редукция уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случае четырех примарных полей.

В **четвертой главе** приведены некоторые явные формулы из предыдущих разделов, а также некоторые промежуточные результаты. Отметим, что в рассматриваемом диссертационном исследовании Н.А.Стрижовой практически все результаты потребовали весьма трудоемких и аккуратных вычислений, и, как очевидно, были весьма громоздки, что и потребовало отдельной главы с объемными формульными результатами.

По представленной диссертационной работе имеются следующие замечания:

1. В диссертации подробно исследуется случай, когда матрица η_{ij} антидиагональна. Соответствующее определение приводится в разделе 1.3 диссертации (и повторяется далее для удобства читателя). Однако в автореферате четкого определения антидиагональности нет, что несколько затруднит чтение автореферата при отсутствии самого текста диссертации.
2. На стр. 12 в последней строке имеется ненужная отсылка к тексту автореферата.
3. На стр. 16 утверждается, что «Дубровин и Новиков ввели понятие систем гидродинамического типа...», однако в действительности системы гидродинамического типа были давно и широко известны и до них, Дубровину и Новикову же принадлежит действительно выдающийся результат о гамильтоновых структурах таких систем, и положивший начало гамильтоновой геометрии систем гидродинамического типа.
4. В вопросах невырожденности различных матриц (например, метрики h_{ij} на стр. 39 и далее) следовало бы оговорить, что невырожденность имеет место лишь в точках общего положения (что очевидно из явного вида определителя матрицы h_{ij} на стр. 67). Впрочем, это почти общепринятая неявная договоренность, практически повсеместно употребляемая в теории интегрируемых систем.

5. Также имеется очень небольшое число несущественных опечаток, например, слово «интегралв» перед последней формулой на стр. 60.

Однако приведенные выше замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации.

В диссертации исследуются важные, актуальные задачи теории уравнений ассоциативности и теории интегрируемых систем. Сама диссертация написана ясным и четким математическим языком, содержит все необходимые предварительные сведения по современным аспектам теории гамильтоновых систем гидродинамического типа. Все утверждения и положения, выносимые на защиту, являются новыми и снабжены доказательствами, которые либо приведены полностью, либо (ввиду большого объема вычислений) могут быть легко воспроизведены с помощью любой системы компьютерной алгебры. Часть результатов получена автором лично, часть — в равноценном соавторстве с О.И. Моховым. Основные результаты опубликованы в 3 работах в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базе Web of Science. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — «Геометрия и топология», оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

Считаю, что соискатель Стрижова Надежда Александровна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — «Геометрия и топология».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник,
Сибирский Федеральный Университет

СШВ 10.10.2019

Царёв Сергей Петрович

+7 391 291-28-48, STsarev@sfu-kras.ru
660041, Красноярск, пр-т Свободный, д. 79.



ФГАОУ ВО СФУ
Подпись *Царёв* заверяю
Начальник общего отдела
«14» _____ 20__ г.