

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **Н.А. Стрижовой**
“Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности”,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук
(специальность 01.01.04 – геометрия и топология)

Диссертация Надежды Александровны Стрижовой посвящена одной из важнейших и популярнейших задач современной математики, в которой сходятся интересы как собственно математики, так и математической физики. Предложенное почти тридцать лет назад в работе Дайкграфа и братьев Верлинде уравнение, в дальнейшем получившее собственное краткое название “WDVV equation”, изначально играло важную роль в построении двумерной топологической теории поля, а именно для вводимого нового умножения эти уравнения являлись уравнениями ассоциативности. Однако в дальнейшем этот предмет разросся до теории квантовых когомологий, фробениусовых многообразий, суперсимметричных теорий Янга - Миллса, теории Громова - Виттена и т.д. При этом многие результаты, полученные при этих исследованиях, оказались загадочным образом связанными с многими проблемами “чистой” математики, например с исчислительной алгебраической геометрией (пример М. Концевича 1994 года).

В то же время эти же уравнения оказались тесно связанными с теорией интегрируемых систем: в работах О. Мохова была установлена эквивалентность уравнения ассоциативности и некоторых систем гидродинамического типа, о которых были поставлены задачи определения гамильтоновости в терминах операторов Дубровина - Новикова, а затем в работе О. Мохова и Е. Фералонтова было установлено, что существуют как уравнения ассоциативности, допускающие гамильтоновы структуры на эквивалентных системах гидродинамического типа, так и не допускающие таковых. Отсюда встала проблема возможной классификации уравнений ассоциативности по модулю существования гамильтоновой структуры Дубровина - Новикова первого порядка. Это первая большая задача, которой посвящена настоящая диссертационная работа.

Другая важная тема, изучаемая в диссертации Н. А. Стрижовой, связана с конструкцией О. Мохова канонической гамильтоновой редукции на множество стационарных точек интеграла. Впервые связь гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач была обнаружена С. Новиковым в связи с уравнениями КдФ, а наиболее общий подход к этому вопросу дает теорема Мохова: любая эволюционная система, ограниченная на множество стационарных точек своего невырожденного интеграла, является канонической гамильтоновой системой. Отсюда возникает идея применить эту редукцию к уравнению ассоциативности, однако первая попытка, предпринятая еще двадцать лет назад, не увенчалась успехом в связи с большой вычислительной сложностью. Эта задача является второй большой задачей настоящей диссертации.

Основные результаты настоящей диссертационной работы посвящены ответам на поставленные выше два вопроса. А именно, по первому вопросу была получена полная классификация уравнений ассоциативности по модулю существования гамильтоновой структуры Дубровина - Новикова первого порядка для эквивалентных систем гидродинамического типа в случае

трех примарных полей; также найдены все системы гидродинамического типа, эквивалентные производным уравнениям ассоциативности из уравнения с антидиагональной матрицей. По второй проблеме: была построена каноническая гамильтонова редукция уравнений ассоциативности для антидиагональной матрицы в случае трех примарных полей и было показано, что соответствующая система является интегрируемой по Лиувиллю; также был построен явный вид гамильтониана для случая четырех примарных полей.

Необходимо отметить, что две главные темы диссертационной работы, связанные между собой, потребовали разного теоретического подхода: в первом случае использовался критерий Богоявленского - Рейнольдса вместе с трудными вычислениями тензоров Хаантьеса (поскольку по ходу дела необходимо было явно проверить невырожденность этих тензоров, без чего последний критерий не сработал бы); во второй проблеме использовалась техника Ленарда - Магри, новая и еще не совсем традиционная в этой теме. Многие годы в исследованиях WDVV - уравнений доминировал подход Б. Дубровина в терминах фробениусовых структур, основывающийся на рассмотрении почти римановых метрик, однако недавно Ленардом и Магри был предложен альтернативный подход, основанный на рассмотрении тензоров Хаантьеса. Схема Ленарда - Магри, применяемая к операторам Казимира гамильтоновых структур первого порядка, соответствующих уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} , позволяет получить первые интегралы соответствующей редукции.

Последние результаты диссертационной работы особенно звучат на фоне острого интереса физиков к всевозможным двойственностям, наблюдаемым в разных областях математики и математической физики: они могут быть интерпретированы как "двойственность", связывающая соответствующую топологическую теорию поля и некоторую интегрируемую по Лиувиллю систему классического типа.

Текст диссертации на 106 страницах состоит из Введения, четырех глав, небольшого Заключения и списка публикаций, составленного из публикаций самого автора по теме диссертации, а также литературы, необходимой для чтения диссертации.

Начальный раздел диссертационной работы, озаглавленный как **Введение**, дает короткую перспективу главных задач диссертации и представляет основные результаты диссертации.

В **первой** главе содержатся определения, результаты и конструкции, необходимые для дальнейшего чтения диссертационной работы.

Вторая глава посвящена первому кругу результатов, представленных на защиту, а именно классификации уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей. Сначала дается общая формулировка основных задач и формулируется основной результат; в следующем разделе вводятся преобразования, сохраняющие интересующее нас свойство существования гамильтонова оператора Дубровина - Новикова первого порядка в случае трех примарных полей, и доказывается корректность таких преобразований. Наконец, в третьем разделе представлен основной результат этой главы: введенными выше преобразованиями все случаи сводятся к нескольким

каноническим типам, а затем эти типы исследуются в виду критерия Боявленского - Рейнольдса. Еще один результат содержится в последнем разделе главы, где рассматриваются все системы гидродинамического типа, эквивалентные классу уравнений ассоциативности по модулю допустимых преобразований, найденных выше, который соответствует уравнению ассоциативности с антидиагональной матрицей для трех примарных полей.

Третья глава содержит исследования уравнения ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} в случаях трех и четырех примарных полей. В первом разделе ставится задача ограничения уравнений ассоциативности на множество стационарных точек невырожденного интеграла; затем в следующем разделе строится каноническая гамильтонова редукция и исследуется геометрия полученного пространства. Третий раздел главы посвящен основному результату — интегрируемости по Лиувиллю полученной выше редуцированной системы.

В **четвертую** главу вынесены все выкладки, необходимые для строгого обоснования результатов работы.

В **Заключении** снова формулируются полученные результаты, а также представлена перспектива дальнейшей научной работы диссертанта.

Диссертация Н.А. Стрижовой является научным исследованием высокого уровня, вызывающим интерес у специалистов как в области интегрируемых систем и дифференциальной геометрии, так и математической физики. При этом поставленные задачи были полностью решены.

Диссертация удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - «Геометрия и топология», оформлена согласно приложениям № 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

Текст диссертации очень хорошо проработан и структурирован. Несомненно правильным было решение диссертанта о вынесении всех трудных вычислительных частей в специальную главу 4, что существенно облегчает чтение, но не нарушает доказательной строгости. При чтении были замечены всего несколько опечаток, также обращает на себя внимание упоминание фамилий без инициалов, откуда имеем выражения вида “Верлинде и Верлинде”. Высказанные замечания не меняют высокой положительной оценки как научных результатов, представленных в диссертации, так и не менее высокой оценки работы диссертанта непосредственно над текстом.

Все результаты диссертации являются новыми, оригинальными, своевременно опубликованными в трех статьях в математических журналах, входящих в список ВАК, и представленными автором на различных семинарах в Московском Государственном университете им. Ломоносова, в ЛТФ ОИЯИ (Дубна), на многих международных конференциях в России и зарубежом.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Значительный объем выполненных автором исследований по актуальной и важной теме позволяет рассматривать представленную работу, как

несомненно удовлетворяющую всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, и автора этой работы, Надежду Александровну Стрижову, как заслуживающую присвоения ей искомой учёной степени по специальности 01.01.04.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор РАН, начальник сектора 1
НО СМФ ЛТФ ОИЯИ
08 октября 2019 г.



Н.А. Тюрин

ntyurin@theor.jinr.ru; +7(925)8007367; +7(496)2163005
Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна),
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись Н.А. Тюрина удостоверяю.
Учёный секретарь ЛТФ ОИЯИ



А.В. Андреев

