

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Николаенко Станислав Сергеевич

**Топологическая классификация интегрируемых систем
типа Чаплыгина–Горячева**

Специальность 01.01.04 —
геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:

Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, академик РАН

Официальные оппоненты:

Мищенко Александр Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО “МГУ имени М. В. Ломоносова”,
механико-математический факультет,
кафедра высшей геометрии и топологии, профессор
Рябов Павел Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО “Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации”,
департамент анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий, профессор
Лимонченко Иван Юрьевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО “Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»”,
факультет математики, научный сотрудник

Защита диссертации состоится 06 декабря 2019 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС "ИСТИНА": <http://istina.msu.ru/dissertations/245082082/>

Автореферат разослан 06 ноября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН



Шафаревич А. И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертация посвящена исследованию одного классического интегрируемого случая динамики твёрдого тела.

В 1902 году С. А. Чаплыгиным¹ был обнаружен новый случай интегрируемости в задаче о движении твёрдого тела в жидкости. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, заполняет бесконечный объём, обладает однозначным потенциалом скоростей и покоятся на бесконечности. При этих условиях движение твёрдого тела описывается системой шести обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Кирхгофа. В гамильтоновой форме эта система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}; \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ – трёхмерные векторы *импульсивного момента* и *импульсивной силы* в проекциях на оси, жёстко связанные с телом. Эти векторы связаны соответственно с угловой и линейной скоростью твёрдого тела преобразованием Лежандра. Гамильтониан H имеет смысл суммарной кинетической энергии тела и жидкости и записывается в переменных \mathbf{s} , \mathbf{r} в виде положительно определённой квадратичной формы:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{s}, \mathbf{s}) + (\mathbf{B}\mathbf{s}, \mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{r}, \mathbf{r}),$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы, причём в подходящей системе координат, связанной с твёрдым телом, матрица \mathbf{A} диагональна, а \mathbf{B} – симметрична. Физический смысл матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} связан с присоединёнными массами и моментами инерции тела в жидкости.

В найденном С. А. Чаплыгиным интегрируемом случае гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + c(r_1^2 - r_2^2)), \quad (2)$$

где c – произвольная постоянная. В той же работе¹ С. А. Чаплыгиным найдено вещественное разделение переменных, позволяющее решить задачу в квадратурах.

В 1916 году Д. Н. Горячевым² был обнаружен новый случай интегрируемости уравнений Эйлера, описывающих движение твёрдого тела в потенциальном поле. В гамильтоновой форме уравнения Эйлера имеют такой же вид, как и уравнения (1), но в этом случае вектор \mathbf{s} имеет смысл кинетического момента, а \mathbf{r} – неподвижный в объемлющем пространстве единичный вектор, записанный в системе координат, жёстко связанной с телом. В интегрируемом случае, найденном Горячевым, потенциальная функция имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \left(c(r_1^2 - r_2^2) + \frac{b}{r_3^2} \right),$$

¹С. А. Чаплыгин, *Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости*, Отдельный оттиск из XI тома Трудов Отделения физических наук Императорского Московского Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, М.: Типолитогр. Н.Н. Шарапова, 1902

²Д. Н. Горячев, *Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера*, Изв. Варшавского ун-та, 1916, № 3, сс. 1–13

а это означает, что гамильтониан в данном случае отличается от гамильтониана (2) лишь слагаемым $\frac{b}{2r_3^2}$. Таким образом, в частном случае $b = 0$ система Горячева превращается в систему Чаплыгина. Параметр c в обеих задачах можно исключить надлежащей линейной заменой переменных, поэтому случай Горячева – это однопараметрическое семейство систем, задаваемое параметром b . Мы будем называть это семейство систем системами типа Чаплыгина–Горячева и выделять три качественно различных случая: $b = 0$ (случай Чаплыгина), $b > 0$ (случай Горячева с компактными лиувиллевыми слоями) и $b < 0$ (случай Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями).

В данной работе системы типа Чаплыгина–Горячева изучаются с точки зрения теории топологической классификации невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы, созданной А. Т. Фоменко и его школой. Основы этой теории заложены в работах А. Т. Фоменко, Х. Цишанга, С. В. Матвеева, А. В. Болсинова^{3, 4, 5}, а наиболее полное её изложение в современной терминологии содержится в монографии А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко⁶. Основные результаты теории А. Т. Фоменко связаны с построением полного топологического инварианта слоения Лиувилля интегрируемой системы с двумя степенями свободы на инвариантном 3-мерном подмногообразии. Напомним, что *слоением Лиувилля*, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение фазового пространства на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов. В типичном (нерезонансном) случае слоение Лиувилля является важным инвариантом системы, позволяющим понять многие её качественные характеристики (такие как устойчивость особых траекторий, смена различных режимов движения и др.). Согласно классической теореме Лиувилля, в компактном случае слоение Лиувилля три-тиально в окрестности почти всех слоёв, однако наличие особых слоёв делает его глобально нетривиальным. Поэтому важной составной частью топологического анализа слоения Лиувилля является описание бифуркаций регулярных слоёв через особые. Окончательный инвариант слоения Лиувилля имеет вид графа (молекулы) с числовыми метками, рёбра которого отвечают семействам регулярных слоёв, а вершины – их перестройкам (атомам).

Инварианты, построенные в теории Фоменко, были применены его учениками и другими авторами к топологическому анализу слоений Лиувилля многих классических интегрируемых систем, в частности, интегрируемых случаев в динамике твёрдого тела (А. А. Ошемков, А. В. Болсинов, П. Й. Топалов, П. В. Морозов, Н. С. Славина и др.), интегрируемых геодезических потоков (Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова, Е. Н. Селиванова, В. В. Калашников (мл.), В. С. Матвеев), интегрируемых биллиардов (В. В. Ведюшкина (Фокичева)). В результате выявлена топологическая эквивалентность многих интегрируемых систем, часто имеющих разное физическое происхождение.

Топологический анализ семейства интегрируемых систем Чаплыгина–Горячева был начат

³ А. Т. Фоменко, *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*, Функц. анализ и его прил., 1988, **22**, № 4, сс. 38–51

⁴ А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, Успехи матем. наук, 1990, **45**, № 2, сс. 49–77

⁵ А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Известия АН СССР, 1990, **54**, № 3, сс. 546–575

⁶ А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Ижевск, изд. дом “Удмуртский университет”, 1999

О. Е. Орёл и П. Е. Рябовым^{7, 8}. Для случая Чаплыгина ($b = 0$) ими⁷ была найдена бифуркационная диаграмма отображения момента, определены топологические типы неособых изоэнергетических многообразий, исследованы бифуркции лиувиллевых торов и построен грубый лиувиллев инвариант (молекула). П. Е. Рябовым⁸ был исследован случай Горячева при $b > 0$: найдено вещественное разделение переменных (дающее решение задачи в квадратурах), найдена бифуркационная диаграмма отображения момента, изучены типы особых точек отображения момента ранга 0 и 1, исследованы бифуркции торов Лиувилля.

Настоящая работа завершает решение задачи топологического анализа систем типа Чаплыгина–Горячева при всех значениях параметра $b \in \mathbb{R}$. В случае $b \geq 0$ для всех неособых топологически устойчивых уровней энергии вычисляется полный инвариант лиувиллевой эквивалентности (инвариант Фоменко–Цишанга, или меченая молекула). Кроме того, в случае $b = 0$ вычисляются инварианты траекторной эквивалентности. Как оказалось, случай Чаплыгина ($b = 0$) на всех неособых уровнях энергии топологически эквивалентен хорошо известному случаю Эйлера в динамике твёрдого тела, а при больших энергиях – также системе Якоби (геодезическому потоку трёхсного эллипсоида). Кроме того, на соответствующих уровнях энергии система Чаплыгина оказывается также траекторно эквивалентной системам Эйлера и Якоби (точную формулировку см. ниже).

Случай $b < 0$ интересен тем, что все лиувиллевы слои оказываются некомпактными. Отметим, что теория А. Т. Фоменко существенно использует компактность слоёв. “Некомпактная” теория топологической классификации интегрируемых систем сейчас активно разрабатывается, что связано с наличием большого числа реальных механических систем с некомпактными слоениями Лиувилля. Случай Горячева при $b < 0$ пополняет этот список. В данной работе для него выполняется грубый лиувиллев анализ, на всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии вычисляется инвариант Фоменко (молекула).

Одним из основным методов топологического анализа, используемых в данной работе, является метод булевых функций М. П. Харламова⁹, позволяющий эффективно исследовать топологию слоений Лиувилля интегрируемых систем с разделяющимися переменными. При этом требуется, чтобы фазовые переменные “достаточно хорошо” выражались через переменные разделения. При этих условиях нахождение образа отображения момента, а также числа лиувиллевых слоёв в прообразе его точек сводится к анализу некоторой системы \mathbb{Z}_2 -линейных уравнений.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. лиувиллева и топологическая траекторная классификация системы Чаплыгина ($b = 0$) на неособых уровнях энергии в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга (меченой молекулы) и Болсинова–Фоменко (t -молекулы);
2. лиувиллева классификация систем типа Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$) на неособых топологически устойчивых уровнях энергии в терминах инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы);

⁷O. E. Orel, P. E. Ryabov, *Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid in the generalization of this problem*, Regul. Chaotic Dyn., 1998, **3**, № 2, pp. 82–91

⁸П. Е. Рябов, *Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Горячева в динамике твёрдого тела*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 7, сс. 115–134

⁹М. П. Харламов, *Топологический анализ и булевы функции. I. Методы и приложения к классическим системам*, Нелинейная динамика, 2010, **6**, № 4, сс. 769–805

3. грубая лиувиллева классификация систем типа Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$) на неособых топологически устойчивых уровнях энергии в терминах инварианта Фоменко (молекулы);
4. выявление среди исследованных систем лиувиллевых и траекторных эквивалентностей с ранее изученными интегрируемыми системами.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Впервые демонстрируется применение метода булевых функций М. П. Харламова для вычисления тонких инвариантов Фоменко–Цишанга.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

- 1) для системы Чаплыгина ($b = 0$):
 - имеется 6 особых точек ранга ноль, две из которых невырождены;
 - слоение Лиувилля на неособых уровнях энергии описывается инвариантами Фоменко–Цишанга (меченными молекулами) трёх типов;
 - топологический траекторный портрет на неособых уровнях энергии описывается инвариантами Болсинова–Фоменко (t -молекулами) четырёх типов;
- 2) для систем типа Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$):
 - слоение Лиувилля на неособых топологически устойчивых уровнях энергии описывается инвариантами Фоменко–Цишанга (меченными молекулами) трёх типов;
- 3) для систем типа Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$):
 - при $b \in (-1, 0)$ имеется шесть, а при $b \leq -1$ – две особые точки ранга ноль, которые невырождены при $b \neq -1$ и вырождены при $b = -1$;
 - бифуркационная диаграмма отображения момента состоит двух парабол, двух лучей, касающихся парабол в их вершинах, и отрезка, касающегося обеих парабол;
 - слоение Лиувилля на неособых топологически устойчивых уровнях энергии (грубо) описывается инвариантами Фоменко (молекулами) семи типов;
- 4) при подходящих значениях энергии системы Чаплыгина и Горячева при $b > 0$ лиувиллево эквивалентны основным классическим случаям интегрируемости в динамике твёрдого тела (случаю Эйлера, Лагранжа, Ковалевской–Яхьи, Сретенского, Жуковского, Клебша, Соколова), а также некоторым интегрируемым биллиардам (при соответствующих значениях энергии и параметров этих систем);
- 5) при подходящих значениях энергии система Чаплыгина топологически траекторно эквивалентна геодезическому потоку трёхсного эллипсоида, а также случаю Эйлера в динамике твёрдого тела (при соответствующих значениях энергии и параметров этих систем).

Методы исследования

В диссертации используются методы топологии, математического анализа, линейной алгебры и алгебраической геометрии. Для описания топологии лиувиллевых слоений используются методы теории топологической классификации интегрируемых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой, а также методы топологического анализа, разработанные М. П. Харламовым. Для экспериментального анализа функций вращения привлекается программный пакет “Wolfram Mathematica”.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при изучении топологии интегрируемых гамильтоновых систем, в частности, для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем. Использованные в диссертации приёмы вычисления топологических инвариантов могут быть применены при исследованиях других интегрируемых случаев. Рассмотренные примеры некомпактных лиувиллевых слоений могут быть полезны для построения общей теории топологической классификации интегрируемых систем с некомпактными лиувиллевыми слоями.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

- международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского (Москва, 30 мая – 4 июня, 2011);
- International Topological Conference “Alexandroff Readings” (Moscow, May 21-25, 2012);
- XVII Geometrical Seminar (Zlatibor, Serbia, September 3-8, 2012);
- XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва, 8-12 апреля 2013 г.);
- международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. С. Г. Крейна” (Воронеж, 26-31 января 2014 г.);
- XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2014» (Москва, 7-11 апреля 2014 г.);
- XIII Serbian Mathematical Congress (Vrnjačka Banja, Serbia, May 22-25, 2014);
- XVIII Geometrical Seminar (Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014);
- XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015» (Москва, 13-17 апреля 2015 г.);
- международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. С. Г. Крейна” (Воронеж, 25-31 января 2016 г.);

- 4th International Workshop “Geometry, Analysis and Probability” (Moscow, September 26 – October 1, 2016);
- 4th International Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (Barcelona, Spain, July 3-7, 2017);
- International Conference on Topology and its Applications (Nafpaktos, Greece, July 7-11, 2018);
- 5th International Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (Shanghai, China, May 6-12, 2019);
- International Conference “Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin (Nonholonomic Mechanics, Vortex Structures and Hydrodynamics)” (Cheboksary, June 2-6, 2019);
- семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);
- семинар “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);
- семинар “Некоммутативная геометрия и топология” под руководством проф. А. С. Мищенко, проф. В. М. Мануйлова, проф. И. К. Бабенко, доц. А. А. Ирматова (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова).

Публикации автора

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах [1-5] (см. стр. 24), из которых пять опубликованы в журналах, удовлетворяющих пункту 2.3 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из оглавления, введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 189 страницах, содержит 4 таблицы и 93 рисунка. Библиографический список содержит 94 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

В **главе 1** даётся краткий обзор теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем А. Т. Фоменко. Приводятся определения гамильтоновой системы, интегрируемости по Лиувиллю, слоения Лиувилля, лиувиллевой эквивалентности, отображения момента, его особых точек и бифуркационной диаграммы, атома, инварианта Фоменко (молекулы), инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы), траекторной эквивалентности, инварианта Болсинова–Фоменко (t -молекулы). Даётся краткое описание метода булевых функций

М. П. Харламова, а также алгоритма определения топологического типа изоэнергетического многообразия гамильтоновой системы.

Определение 1. Гамильтоновой системой с n степенями свободы – это тройка (M^{2n}, ω, H) , где

- M^{2n} – симплектическое многообразие с симплектической структурой ω ;
- $H \in C^\infty(M^{2n})$ – функция Гамильтона (гамильтониан), порождающая гамильтоново векторное поле $sgrad H = \omega^{-1}dH$.

Определение 2. Гамильтонова система (M^{2n}, ω, H) называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если она обладает n первыми интегралами f_1, \dots, f_n , такими, что

1. f_1, \dots, f_n функционально независимы на M^{2n} (т.е. их дифференциалы df_1, \dots, df_n линейно независимы почти всюду на M^{2n});
2. $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, \dots, n$ (т.е. интегралы f_1, \dots, f_n находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, порождённой симплектической структурой ω).

Замечание 1. Часто в определение интегрируемости по Лиувиллю включают требование, чтобы гамильтоновы потоки, порождённые векторными полями $sgrad f_1, \dots, sgrad f_n$, были полны, т. е. чтобы естественный параметр (время) на их интегральных траекториях был определён на всей числовой прямой

Определение 3. Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе, называется разбиение фазового многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов f_1, \dots, f_n , называемые *лиувиллевыми слоями*.

Определение 4. Две интегрируемые гамильтоновы системы $(M_1^{2n}, \omega_1, H_1)$ и $(M_2^{2n}, \omega_2, H_2)$ называются *лиувиллево* (или *топологически*) *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм M_1^{2n} на M_2^{2n} , переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы. Имеет смысл также говорить о лиувиллевой эквивалентности систем, ограниченных на некоторые инвариантные подмногообразия (например, изоэнергетические подмногообразия $\{H = const\}$).

Определение 5. Слой L слоения Лиувилля называется *регулярным*, или *неособым*, если дифференциалы df_1, \dots, df_n линейно независимы всюду на L . В противном случае слой называется *особым*.

Как следует из классической теоремы Лиувилля, слоение Лиувилля тривиально в окрестности неособого компактного слоя. Однако из-за наличия особых слоёв оно не является, вообще говоря, глобально тривиальным. В связи с этим исследование особых слоёв составляет наиболее существенную часть задачи описания глобальной топологии слоения Лиувилля.

В случае полноты гамильтоновых потоков, порождённых полями $sgrad f_1, \dots, sgrad f_n$, на каждом лиувиллевом слое определено гамильтоново действие группы \mathbb{R}^n сдвигами вдоль интегральных траекторий этих полей. Каждый слой состоит из одной или нескольких орбит этого действия. При этом неособый слой представляет собой единственную орбиту.

Определение 6. Отображение $\mathfrak{F} = (f_1, \dots, f_n): M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением момента*.

Определение 7. Точка $P \in M^{2n}$ называется *особой*, если $\text{rank } d\mathfrak{F}(P) < n$, то есть дифференциалы df_1, \dots, df_n линейно зависимы в точке P . Число $\text{rank } d\mathfrak{F}(P)$ называется *рангом* особой точки P . Также можно говорить о ранге особой орбиты гамильтонова действия группы \mathbb{R}^n .

Далее рассматриваются интегрируемые системы с двумя степенями свободы.

Определение 8. Бифуркационной диаграммой отображения момента называется образ $\mathfrak{F}(C) \subset \mathbb{R}^2$ множества C его особых точек.

Как правило, бифуркационная диаграмма состоит из нескольких гладких дуг, разбивающих образ отображения момента на несколько областей (камер), и особых точек. Прообразы точек камер состоят из некоторого числа регулярных слоёв, в то время как прообразы точек бифуркационной диаграммы всегда содержат особые слои. Смысл бифуркационной диаграммы состоит в том, что она позволяет понять, при каких значениях первых интегралов происходят перестройки (бифуркации) регулярных слоёв.

Далее изучается топология слоения Лиувилля при фиксированном уровне энергии (т. е. фиксированном значении гамильтониана). Пусть (M^4, ω, H) – интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы, и K – её дополнительный первый интеграл.

Определение 9. Подмногообразие $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ называется *изоэнергетическим многообразием* (или *изоэнергетической поверхностью*).

Изоэнергетическое многообразие Q_h^3 называется *неособым*, если $dH|_x \neq 0$ для любой точки $x \in Q_h^3$.

Определение 10. Интеграл K называется *функцией Ботта* на неособом изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , если множество критических точек его ограничения $K|_{Q_h^3}$ представляет собой несвязное объединение невырожденных критических подмногообразий. Невырожденность означает, что K является функцией Морса на трансверсалах к критическим подмногообразиям во всех их точках.

В частности, если все содержащиеся в Q_h^3 орбиты ранга 1 гамильтонова действия группы \mathbb{R}^2 являются невырожденными, то это автоматически влечёт боттовость интеграла K на Q_h^3 .

Определение 11. Интегрируемая система, ограниченная на изоэнергетическое многообразие Q_h^3 (а также соответствующее значение энергии h), называется *топологически устойчивой*, если топология слоения Лиувилля не меняется при возмущении значения энергии h (т. е. системы на близких изоэнергетических многообразиях лиувиллево эквивалентны данной).

Всюду далее предполагается, что Q_h^3 – связное неособое изоэнергетическое многообразие интегрируемой системы с боттовским дополнительным интегралом, все критические подмногообразия функции $K|_{Q_h^3}$ одномерны, а система топологически устойчива на Q_h^3 .

Определение 12. *З-атомом* называется малая связная инвариантная окрестность в Q_h^3 особыго слоя слоения Лиувилля, рассматриваемая с точностью до послойного диффеоморфизма.

Таким образом, 3-атом – это инвариант слоения Лиувилля вблизи особого слоя, описывающий бифуркацию (перестройку) регулярных слоёв. С топологической точки зрения атом представляет собой 3-мерное многообразие с краем, состоящим из некоторого числа регулярных слоёв. Как показано А. Т. Фоменко¹⁰, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами, описывающими, по определению, перестройки слоений двумерных многообразий на линии уровня функций Морса. А именно, каждый компактный 3-атом представляет собой расслоение ЗейфERTA над некоторым компактным 2-атомом, который может содержать отмеченные точки (“звёздочки”). На рисунке 1 изображены компактные 2-атомы A , B , C_2 , P_4 . 2-атом A является минимаксным, т. е. соответствует локальному минимуму или максимуму функции f , задающей слоение. 2-атомы B , C_2 , P_4 содержат лишь седловые критические точки функции f . На рисунке 2 изображён пример некомпактного 2-атома B'' , представляющего собой окрестность невырожденной седловой особой точки. 3-атомы, отвечающие 2-атомам на рисунках 1, 2, представляют собой их прямое произведение с окружностью (тривиальное расслоение ЗейфERTA) и имеют те же буквенные обозначения.

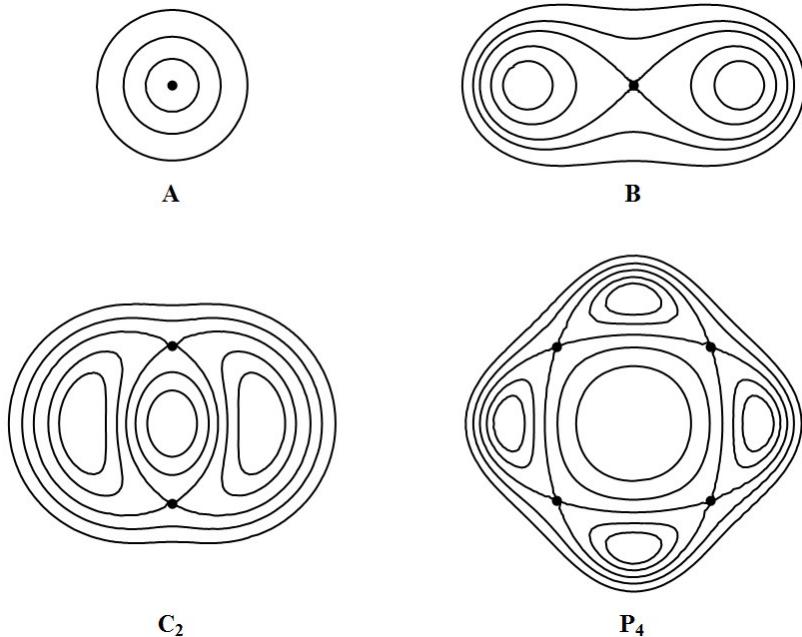


Рис. 1: Примеры компактных 2-атомов

Рассмотрим граф Кронрада–Риба функции K на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , т. е. факторпространство многообразия Q_h^3 по такому отношению эквивалентности: точки $x, y \in Q_h^3$ эквивалентны, если они принадлежат одному слою слоения Лиувилля. Рёбра графа отвечают однопараметрическим семействам регулярных слоёв, а вершины – особым слоям. Сопоставим теперь каждой вершине графа атом, кодирующий перестройку регулярных слоёв вблизи соответствующего особого слоя. При этом для каждой вершины подразумевается взаимно однозначное соответствие между инцидентными ей рёбрами и компонентами края соответствующего атома. Получившийся в результате граф с вершинами–атомами называется *инвариантом Фоменко, или молекулой*.

¹⁰А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Докл. АН СССР, 1986, **287**, № 5, сс. 1071–1075

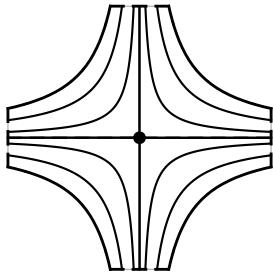


Рис. 2: Некомпактный 2-атом B''

Определение 13. Две интегрируемые гамильтоновы системы называются *грубо лиувиллево эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между базами соответствующих слоений Лиувилля, который в окрестности каждой точки базы поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

Молекула является полным инвариантом грубой лиувиллевой эквивалентности, т. е. две интегрируемые системы на изоэнергетических многообразиях грубо лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие молекулы совпадают. В связи с этим молекулу иногда называют *грубым лиувиллевым инвариантом*, а классификацию с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности – *грубым лиувиллевым анализом*.

Если многообразие Q_h^3 компактно, то чтобы снабдить молекулу полной информацией о топологии слоения Лиувилля, нужно добавить к ней некоторые числовые метки $r_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $n_k \in \mathbb{Z}$, показывающие, как именно отдельные атомы “склеиваются” вдоль рёбер молекулы. Молекула, снабжённая числовыми метками r_i, ε_i, n_k , называется *инвариантом Фоменко–Цишанга* (или *меченой молекулой*) интегрируемой системы на данном изоэнергетическом многообразии.

Теорема 1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг⁵). *Две интегрируемые системы на неособых трёхмерных компактных связных изоэнергетических поверхностях лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.*

В силу теоремы 1 меченую молекулу часто называют *тонким лиувиллевым инвариантом* (противопоставляя её грубому инварианту – молекуле), а классификацию с точностью до лиувиллевой эквивалентности – *тонким лиувиллевым анализом*.

Определение 14. Две динамические системы называются *топологически (гладко) траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм (диффеоморфизм) между их фазовыми пространствами, переводящий ориентированные интегральные траектории первой системы в ориентированные интегральные траектории второй системы. Параметр на траекториях (время) при этом не обязан сохраняться.

Для построения полного траекторного инварианта интегрируемой системы на изоэнергетическом многообразии к меченой молекуле нужно добавить некоторые дополнительные инварианты. В результате получим *t-молекулу* (*инвариант Болсинова–Фоменко*) в топологическом

случае^{11,12} и *st*-молекулу в гладком¹³. В простейшем случае *t*-молекула получается из меченої молекулы добавлением инвариантов двух типов: *R*-инвариантов на рёбрах молекулы и *b*-инвариантов на некоторых группах атомов.

Для более подробного ознакомления с инвариантами лиувиллевой и траекторной эквивалентности см. монографию А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко⁶.

В главе 2 ставится задача топологического анализа семейства интегрируемых систем типа Чаплыгина–Горячева. Для этих систем исследуются особые точки отображения момента ранга 0 и 1, находится бифуркационная диаграмма, определяются топологические типы неособых изоэнергетических многообразий.

Рассматривается семейство интегрируемых гамильтоновых систем на двойственном пространстве $e(3)^*$ к алгебре Ли $e(3)$, снабжённом стандартной скобкой Ли–Пуассона. В подходящих координатах $s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3$ на $e(3)^*$ скобка Ли–Пуассона задаётся формулами

$$\{s_i, s_j\} = -\varepsilon_{ijk}s_k, \quad \{s_i, r_j\} = -\varepsilon_{ijk}r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$, и имеет две независимые функции Казимира (т. е. такие функции, скобка которых с любой другой функцией равна нулю):

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3.$$

Гамильтонова система уравнений на $e(3)^*$ (как и на всяком пуассоновом многообразии) имеет вид:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где H – функция Гамильтона (гамильтониан).

Функции f_1 и f_2 являются первыми интегралами любой гамильтоновой системы на $e(3)^*$ и называются *геометрическим интегралом* и *интегралом площадей* соответственно. На 4-мерных симплектических листах $M_{a,g}^4 = \{x \in e(3)^* \mid f_1(x) = a, f_2(x) = g\}$, $a > 0$, скобка (3) определяет симплектическую структуру. При этом на $M_{a,g}^4$ гамильтонова система из определения 1 совпадает с системой (4). Ограничение тензора Пуассона на $M_{a,g}^4$ (корректно определённое в силу того, что f_1, f_2 – функции Казимира, и задаваемое матрицей, обратной к матрице симплектической формы) будем обозначать через \mathfrak{A} .

Рассматриваемое однопараметрическое семейство систем Чаплыгина–Горячева на $e(3)^*$ задаётся гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 + \frac{b}{r_3^2} \right).$$

¹¹Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II*, Матем. сборник, 1994, **185**, № 4, 5, сс. 27–80, 27–78

¹²Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Траекторные инварианты интегрируемых гамильтоновых систем. Случай простых систем. Траекторная классификация систем типа Эйлера в динамике твёрдого тела*, Известия РАН, сер. матем., 1995, **59**, № 1, сс. 65–102

¹³Болсинов А. В., *Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Матем. сборник, 1995, **186**, № 1, сс. 3–28

На симплектическом листе $M_{1,g}^4$ эти системы имеют две степени свободы. При нулевом значении интеграла площадей (т.е. на $M_{1,0}^4$) они интегрируемы при помощи дополнительного интеграла

$$K = \left(s_1^2 + s_2^2 + \frac{b}{r_3^2} \right)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + r_3^4.$$

В семействе систем Чаплыгина–Горячева выделяется три случая:

- $b = 0$ – случай Чаплыгина;
- $b > 0$ – компактный случай Горячева;
- $b < 0$ – некомпактный случай Горячева.

Теорема 2 (см. теорему 2.1; П. Е. Рябов⁸ ($b > 0$), С. С. Николаенко [2] ($b \leq 0$)).

1. Гамильтониан H имеет на многообразии $M_{1,0}^4$ следующие критические точки:

$$P_1^{\pm\pm}(0, 0, 0, \pm\sqrt{1-\sqrt{-b}}, 0, \pm\sqrt[4]{-b}) \text{ при } -1 \leq b \leq 0;$$

$$P_2^{\pm\pm}(0, 0, 0, 0, \pm\sqrt{1-\sqrt{b}}, \pm\sqrt[4]{b}) \text{ при } 0 \leq b \leq 1;$$

$$P_3^{\pm}(0, 0, 0, 0, 0, \pm 1) \text{ при } b \in \mathbb{R}.$$

2. Эти точки критические также для интеграла K , следовательно, они являются особыми точками ранга ноль отображения момента $\mathfrak{F} = (H, K)$. Других особых точек ранга ноль нет.

3. Точки $P_1^{\pm\pm}$ имеют тип седло-седло при $-1 < b < 0$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 0$;

точки $P_2^{\pm\pm}$ имеют тип центр-центр при $0 < b < 1$ и вырождены при $b = 0$ и $b = 1$;

точки P_3^{\pm} имеют тип седло-седло при $b < -1$, центр-седло при $-1 < b < 1$, центр-центр при $b > 1$ и вырождены при $b = -1$ и $b = 1$.

4. На бифуркационной диаграмме точкам $P_1^{\pm\pm}, P_2^{\pm\pm}, P_3^{\pm}$ соответствуют точки

$$\mathfrak{F}(P_1^{\pm\pm}) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -2b \right); \quad \mathfrak{F}(P_2^{\pm\pm}) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}, 2b \right); \quad \mathfrak{F}(P_3^{\pm}) = \left(\frac{b}{2}, b^2 + 1 \right).$$

Положим:

- $l_+ = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 2b\};$
- $l_- = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = -2b\};$
- $l = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 4bh - b^2\};$
- $\pi_+ = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h + 1)^2 - 2b\};$
- $\pi_- = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k = (2h - 1)^2 + 2b\}.$

Теорема 3 (см. теорему 2.2; О. Е. Орёл, П. Е. Рябов⁷ ($b = 0$), П. Е. Рябов⁸ ($b > 0$), С. С. Николаенко [5] ($b < 0$)). Бифуркационная диаграмма отображения момента для систем типа Чаплыгина–Горячева состоит из следующих кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ значений первых интегралов H, K :

npu $b = 0$:

$$\pi_+ \text{ npu } h \geq -\frac{1}{2}; \quad \pi_- \text{ npu } h \geq 0; \quad l \text{ npu } h \geq -\frac{1}{2};$$

npu $0 < b < 1$:

$$\begin{aligned} \pi_+ \text{ npu } h &\geq \sqrt{b} - \frac{1}{2}; & \pi_- \text{ npu } h &\geq \frac{b}{2}; \\ l_+ \text{ npu } h &\in \left[\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]; & l \text{ npu } h &\geq \frac{b+1}{2}; \end{aligned}$$

npu $b \geq 1$:

$$\pi_+ \text{ npu } h \geq \frac{b}{2}; \quad \pi_- \text{ npu } h \geq \frac{b}{2}; \quad l \text{ npu } h \geq \frac{b+1}{2};$$

npu $b < 0$:

$$\begin{aligned} \pi_+ \text{ npu } h &\in \mathbb{R}; & \pi_- \text{ npu } h &\in \mathbb{R}; \\ l_+ \text{ npu } h &\geq \frac{1}{2}; & l_- \text{ npu } h &\geq -\frac{1}{2}; & l \text{ npu } h &\in \left[\frac{b-1}{2}, \frac{b+1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Теорема 4 (см. теорему 2.8; П. Е. Рябов⁸ ($b > 0$), С. С. Николаенко [2] ($b \leq 0$)).

1. В случае Горячева ($b \neq 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе точек касания прямых l, l_+, l_- с параболами π_+, π_- на бифуркационной диаграмме являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.
2. В случае Чаплыгина ($b = 0$) особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l на бифуркационной диаграмме являются вырожденными. Все остальные особые орбиты ранга 1 являются невырожденными.

Замечание 2. При $b = 0$ особые орбиты ранга 1 в прообразе прямой l при $h \in (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ становятся невырожденными, если в качестве дополнительного интеграла рассмотреть функцию \sqrt{K} .

Следствие 5. На всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии интеграл K (или \sqrt{K} при $b = 0$) является функцией Ботта.

В главе 3 проводится тонкий лиувиллев и траекторный анализ для случая Чаплыгина ($b = 0$). Вычисляются инварианты лиувиллевой (меченные молекулы) и топологической траекторной (t -молекулы) эквивалентности на всех неособых уровнях энергии. Устанавливается лиувиллева и траекторная эквивалентность системы Чаплыгина некоторым другим ранее изученным классическим интегрируемым системам, в частности, случаю Эйлера в динамике твёрдого тела и геодезическому потоку трёхосного эллипсоида.

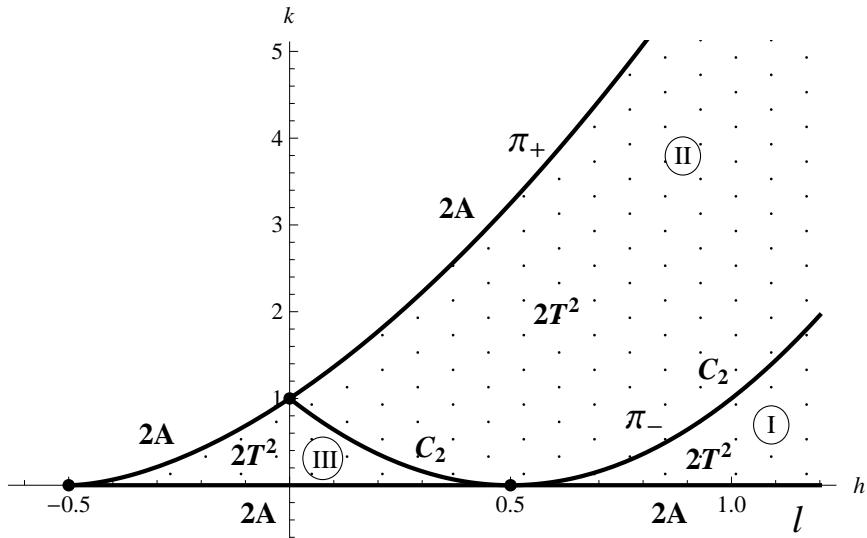


Рис. 3: Образ отображения момента, бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций для случая Чаплыгина

В случае Чаплыгина бифуркационная диаграмма на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ разбивает образ отображения момента на три области (камеры) I, II, III (рис. 3):

$$\begin{aligned} I : \quad & h > 1/2, \quad 0 < k < (2h - 1)^2; \\ II : \quad & h > 0, \quad (2h - 1)^2 < k < (2h + 1)^2; \\ III : \quad & -1/2 < h < 1/2, \quad 0 < k < \min\{(2h - 1)^2, (2h + 1)^2\}. \end{aligned}$$

Можно выделить три зоны регулярных значений энергии:

$$(1) = (-1/2, 0), \quad (2) = (0, 1/2), \quad (3) = (1/2, +\infty).$$

Теорема 6 (О. Е. Орёл, П. Е. Рябов⁷). *Параболе π_+ и прямой l на бифуркационной диаграмме в случае Чаплыгина соответствуют бифуркации типа атома A , а параболе π_- – бифуркации типа атома C_2 . Прообразы точек каждой из трёх камер I, II, III состоят из двух торов Лиувилля (рис. 3).*

Теорема 7 (см. теорему 3.2; [2]). *Меченные молекулы для системы Чаплыгина, отвечающие зонам энергии (1), (2), (3), имеют вид, показанный на рисунке 4.*

В работе приводятся два доказательства этой теоремы. Одно из них основано на некоторых стандартных приёмах вычисления меток (метод круговых молекул¹⁴, формула Топалова¹⁵). Другое доказательство использует явную параметризацию торов Лиувилля. Также показано, как некоторые метки можно вычислить с помощью метода булевых функций М. П. Харламова.

Следствие 8.

¹⁴ А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко, *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сборник, 2000, **191**, № 2, сс. 3–42

¹⁵ П. Топалов, *Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твёрдого тела*, Матем. сборник, 1996, **187**, № 3, сс. 143–160

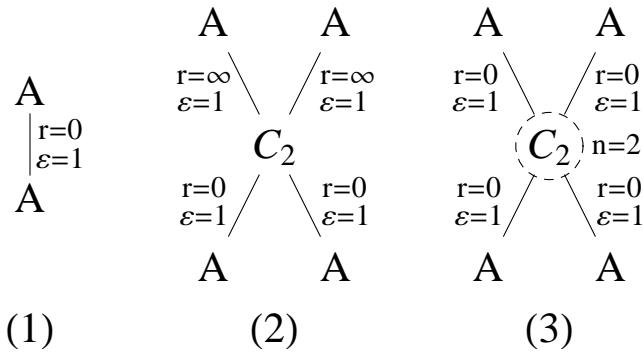


Рис. 4: Меченные молекулы для случая Чаплыгина

- a) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (1), ли-
чески эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности,
случаям Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Сретенского, Клебша, Соколова в
динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других
параметров этих систем), а также интегрируемым биллиардам в плоских областях,
ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фо-
кальной прямой.
- б) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2), ли-
чески эквивалентна интегрируемым случаем Клебша и Соколова (при подходящих
значениях энергии и параметров), а также геодезическому биллиарду в эллипсоидаль-
ной области, ограниченной конфокальным гиперболоидом;
- в) Система Чаплыгина, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (3), ли-
чески эквивалентна интегрируемому случаю Клебша (при подходящих значениях энер-
гии и параметров), а также геодезическому потоку двумерного эллипса.

Теорема 9 (см. теорему 3.22; [3]). Для систем Чаплыгина имеется 4 типа t -молекул, которые показаны на рисунках 5, 6, 7, 8.

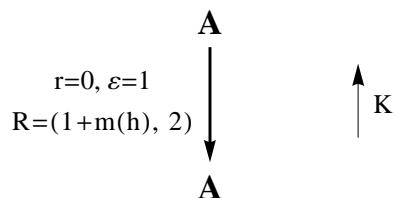


Рис. 5: t -молекула для случая Чаплыгина, зона (1)

Здесь

$$m(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(2h+1)t^2)}},$$

$$n(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2h+1-t^2)}},$$

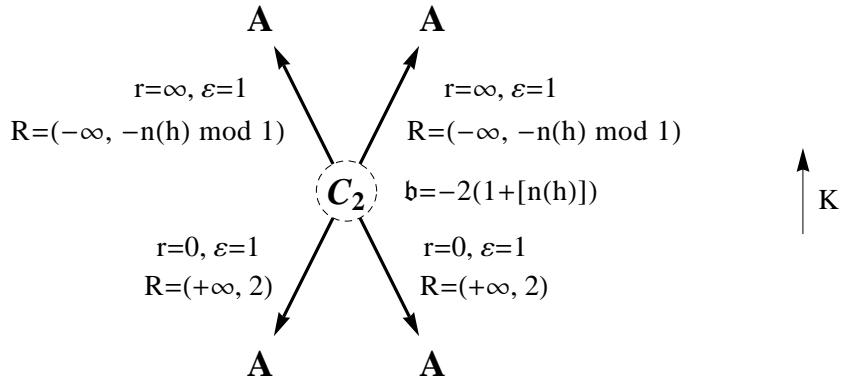


Рис. 6: t -молекула для случая Чаплыгина, зона (2)

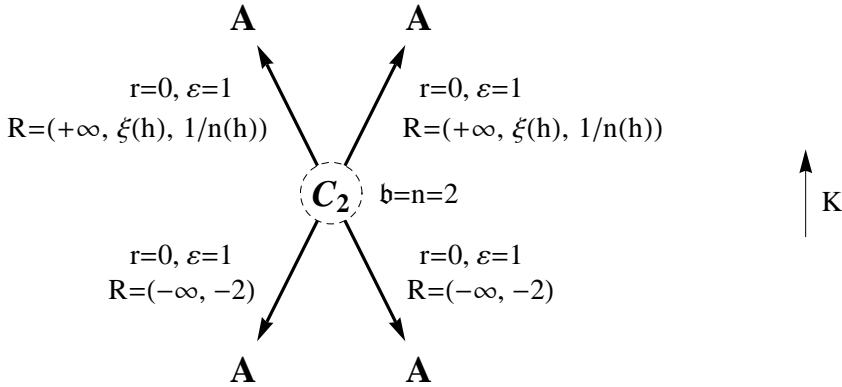


Рис. 7: t -молекула для случая Чаплыгина, зона (3) : $h < h_0$

$h_0 > 1/2$ – некоторая константа, $\xi(h)$ – локальный минимум функции вращения при $h \in (1/2, h_0)$.

Теоремы 7 и 9 используются для доказательства более общего утверждения о различных типах эквивалентности системы Чаплыгина системам типа Эйлера, описывающим движение твёрдого тела, закреплённого в центре масс, в поле тяжести, и геодезическому потоку двумерного эллипсоида (задача Якоби). Параметрами системы Эйлера являются обратные величины A, B, C к главным моментам инерции твёрдого тела, а параметрами задачи Якоби – квадраты полуосей a, b, c эллипсоида. Как и в случае Чаплыгина, в случае Эйлера можно выделить три зоны регулярных значений энергии $(1)_E, (2)_E, (3)_E$ (номер возрастает с возрастанием энергии).

Теорема 10 (см. теорему 3.21; [3]). *Пусть $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ – соответственно системы Чаплыгина и Эйлера на регулярных изоэнергетических поверхностях $\{H_{Ch} = h\}$ и $\{H_E = \chi\}$. Предположим, что значения энергии h и χ принадлежат зонам с одним и тем же номером. Пусть $v_J(a, b, c)$ – система Якоби на ненулевом уровне энергии (тройки (A, B, C) и (a, b, c) рассматриваются с точностью до пропорциональности). Тогда выполняются следующие утверждения.*

- 1) Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне (1), то она либо эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C, \chi)$ для любых значений A, B, C и для

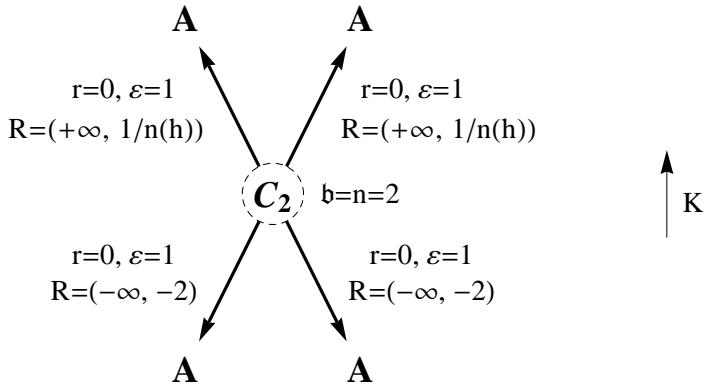


Рис. 8: t -молекула для случая Чаплыгина, зона (3) : $h \geq h_0$

любого значения энергии χ из зоны $(1)_E$. Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, траекторно (топологически и гладко) эквивалентных системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Эта траекторная эквивалентность может быть продолжена на 4-мерные окрестности изоэнергетических многообразий. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются топологически сопряжёнными (т. е. не существует гомеоморфизма, переводящего фазовый поток системы Чаплыгина в фазовый поток системы Эйлера).

- 2) Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне (2), то она лиувилево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C, \chi)$ для любых значений A, B, C и для любого значения энергии χ из зоны $(2)_E$. Кроме того, имеется однопараметрическое семейство систем Эйлера $v_E(A, B(A), C = 1, \chi(A))$, топологически траекторно эквивалентных системе Чаплыгина $v_{Ch}(h)$. Но для любых значений A, B, C, χ системы $v_{Ch}(h)$ и $v_E(A, B, C, \chi)$ не являются гладко траекторно эквивалентными (да же в смысле C^1 -гладкости) и не являются топологически сопряжёнными.
- 3) Если значение энергии h системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ принадлежит зоне (3), то она лиувилево эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ для любых значений A, B, C (со значением энергии из зоны $(3)_E$) и системе Якоби $v_J(a, b, c)$ для любых значений a, b, c . При достаточно больших значениях h существуют единственные с точностью до пропорциональности тройки (A, B, C) и (a, b, c) такие, что система Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ топологически траекторно эквивалентна системе Эйлера $v_E(A, B, C)$ и системе Якоби $v_J(a, b, c)$. Но эту траекторную эквивалентность нельзя сделать гладкой (да же в смысле C^1 -гладкости). Кроме того, для любых троек значений системы Чаплыгина $v_{Ch}(h)$ не является топологически сопряжённой ни с системой Эйлера $v_E(A, B, C)$, ни с системой Якоби $v_J(a, b, c)$.

В главе 4 проводится тонкий лиувиллев анализ для случая Горячева с компактными лиувиллевыми слоями ($b > 0$). На всех неособых топологически устойчивых уровнях энергии вычисляются инварианты лиувиллевой эквивалентности (меченные молекулы).

Бифуркационная диаграмма отображения момента для случая Горячева при $0 < b < 1$

разбивает образ отображения момента на три камеры (рис. 9):

$$\begin{aligned} I : \quad & h > (b+1)/2, \quad 4bh - b^2 < k < (2h-1)^2 + 2b; \\ II : \quad & h > b/2, \quad (2h-1)^2 + 2b < k < (2h+1)^2 - 2b; \\ III : \quad & \sqrt{b} - 1/2 < h < 1/2, \quad 0 < k < \min\{(2h-1)^2 + 2b, (2h+1)^2 - 2b\}. \end{aligned}$$

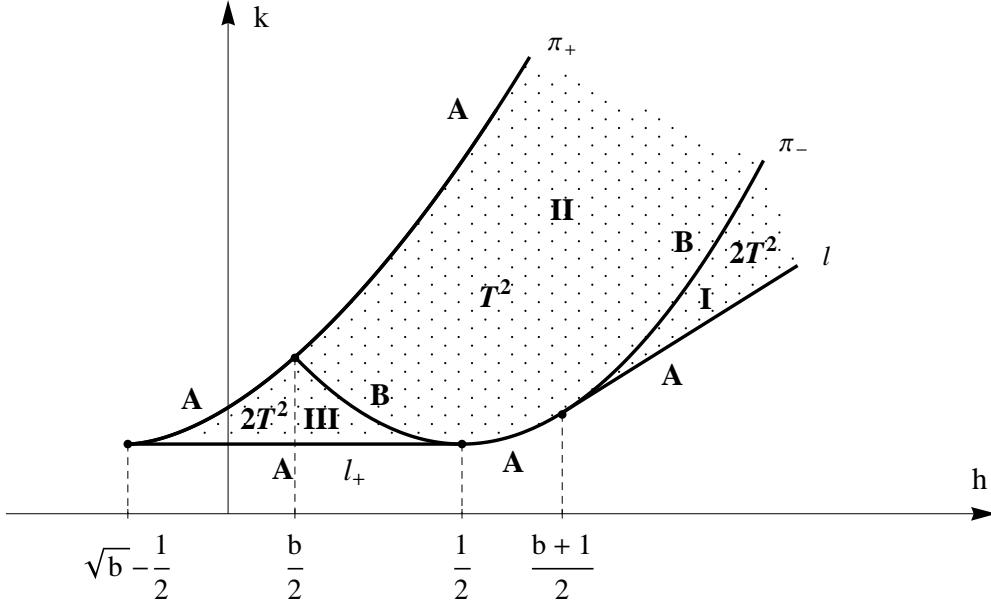


Рис. 9: Бифуркационная диаграмма для случая Горячева

Можно выделить четыре зоны регулярных значений энергии:

$$(1) = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2}, \frac{b}{2} \right), \quad (2) = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{b+1}{2} \right), \quad (4) = \left(\frac{b+1}{2}, +\infty \right).$$

Теорема 11 (П. Е. Рябов⁸). *Дуги бифуркационной диаграммы, находящиеся внутри образа отображения момента (т.е. разделяющие камеры), отвечают седловым перестройкам лиувиллевых торов типа атома B. Дуги на границе образа отображения момента соответствуют вырождению торов в окружность (т.е. отвечают атому A). Прообразы точек камер I и III состоят из двух торов Лиувилля, камеры II – из одного тора (рис. 9).*

В случае $b \geq 1$ исчезают камера III и зоны энергии (1) и (2). Топология слоения Лиувилля для зон (3) и (4) при этом не меняется.

Теорема 12 (см. теорему 4.2; [4]). *Меченные молекулы в компактном случае Горячева для четырёх зон энергии (1) – (4) имеют вид, показанный на рисунке 10.*

Следствие 13.

- a) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зон (1), (3), лиувиллево эквивалентна многим классическим интегрируемым системам, в частности, случаям Эйлера, Лагранжса, Ковалевской, Жуковского, Сретенского,

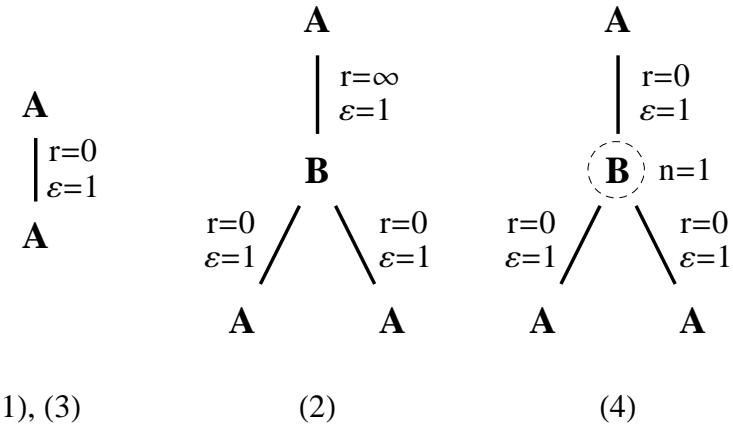


Рис. 10: Меченные молекулы для компактного случая Горячева

Клебша, Чаплыгина в динамике твёрдого тела (рассматриваемым при подходящих значениях энергии и других параметров), а также интегрируемым биллиардом в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками и не имеющих общих внутренних точек с фокальной прямой.

- б) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (2), лиувиллево эквивалентна интегрируемому случаю Жуковского (при подходящих значениях параметров), а также двум интегрируемым биллиардам в плоских областях, ограниченных софокусными квадриками: эллипсом и двумя гиперболами либо двумя эллипсами и одной ветвью гиперболы.

в) Компактная система типа Горячева, рассматриваемая на постоянном уровне энергии из зоны (4), лиувиллево эквивалентна интегрируемым случаям Клебша, Соколова, Ковалевской–Яхьи (при подходящих значениях параметров), а также интегрируемому биллиарду в плоской области, ограниченной эллипсом.

В **главе 5** проводится грубый лиувиллев анализ для случая Горячева с некомпактными лиувиллевыми слоями ($b < 0$). Находится образ отображения момента, вычисляется количество связных компонент в прообразе его точек, а также исследуются типы бифуркаций регулярных слоёв, позволяющие построить инварианты Фоменко при фиксированных неособых топологически устойчивых значениях энергии.

Теорема 14 (см. теоремы 5.1, 5.2; [5]).

- a) Образ отображения момента \mathfrak{F} для случая Горячева при $b < 0$ представляет собой следующее множество:

$$\left\{ k \geq (2h+1)^2 - 2b, h \leq \frac{b-1}{2} \right\} \cup \left\{ k \geq 4bh - b^2, \frac{b-1}{2} < h \leq \frac{b+1}{2} \right\} \cup \\ \cup \left\{ k \geq (2h-1)^2 + 2b, \frac{b+1}{2} < h \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ k \geq 2b, h > \frac{1}{2} \right\} \text{ (рис. 11, 12).}$$

б) Прообраз любого регулярного значения отображения момента \mathfrak{F} состоит из двух или четырёх цилиндров $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ в зависимости от области в $\text{Im } \mathfrak{F}$ (см. рис. 11, 12).

в) Бифуркации регулярных цилиндров имеют тип атомов \overline{A} , \overline{B} , \overline{C}_2 , \overline{P}_4 и B'' (соответствие между кривыми бифуркационной диаграммы и атомами указано на рисунках 11, 12). Здесь 3-атомы \overline{A} , \overline{B} , \overline{C}_2 , \overline{P}_4 представляют собой прямое произведение 2-атомов A , B , C_2 , P_4 (рис. 1) и прямой \mathbb{R}^1 , а 3-атом B'' – прямое произведение некомпактного 2-атома B'' (рис. 2) и окружности.

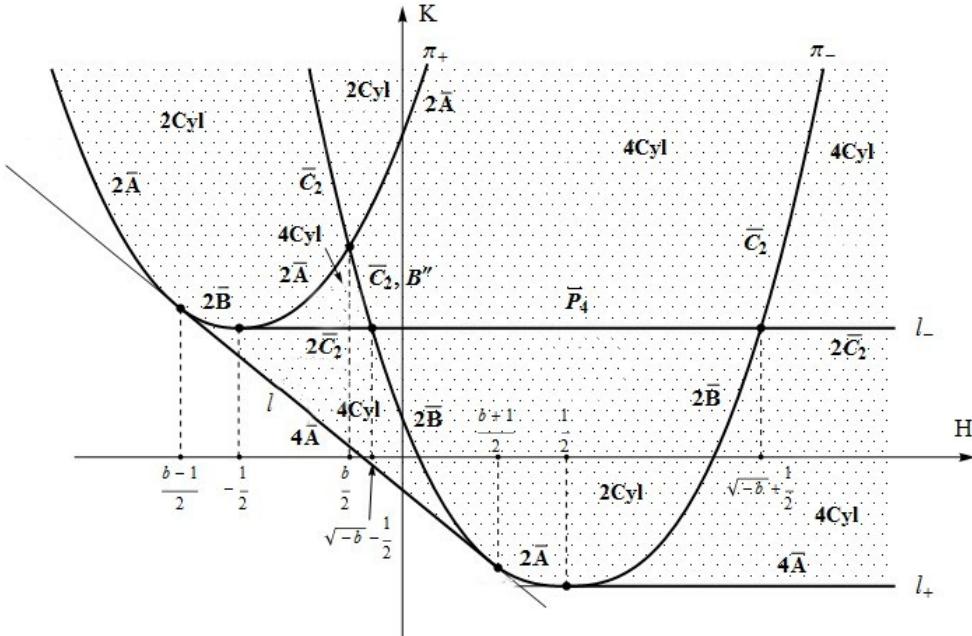


Рис. 11: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b \in (-1, 0)$

Теорема 14 позволяет выписать грубые лиувиллевы инварианты на неособых топологически устойчивых уровнях энергии.

Положим

$$I_1 = \left(-\infty, \frac{b-1}{2} \right), \quad I_2 = \left(\frac{b-1}{2}, \frac{\min\{-1, b\}}{2} \right), \quad I_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{b}{2} \right),$$

$$I_4 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{-b} \right) \text{ (в случае } -1 < b < 0), \quad I_5 = \left(\frac{b}{2}, \frac{1 + \min\{-2, b\}}{2} \right),$$

$$I_6 = \left(\max \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{-b}, -\frac{1}{2} \right\}, \frac{b+1}{2} \right), \quad I_7 = \left(\frac{b+1}{2}, -\frac{1}{2} \right),$$

$$I_8 = \left(\frac{1 + \max\{-2, b\}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad I_9 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{-b} \right), \quad I_{10} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-b}, +\infty \right).$$

В зависимости от значения параметра b получаем следующие зоны неособых топологически устойчивых значений энергии:

$$\begin{aligned} I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_8, I_9, I_{10} \text{ при } -1 < b < 0; & \quad I_1, I_2, I_6, I_8, I_9, I_{10} \text{ при } b = -1; \\ I_1, I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{10} \text{ при } -2 < b < -1; & \quad I_1, I_2, I_5, I_8, I_9, I_{10} \text{ при } b = -2; \\ I_1, I_2, I_5, I_7, I_8, I_9, I_{10} \text{ при } b < -2. & \end{aligned}$$

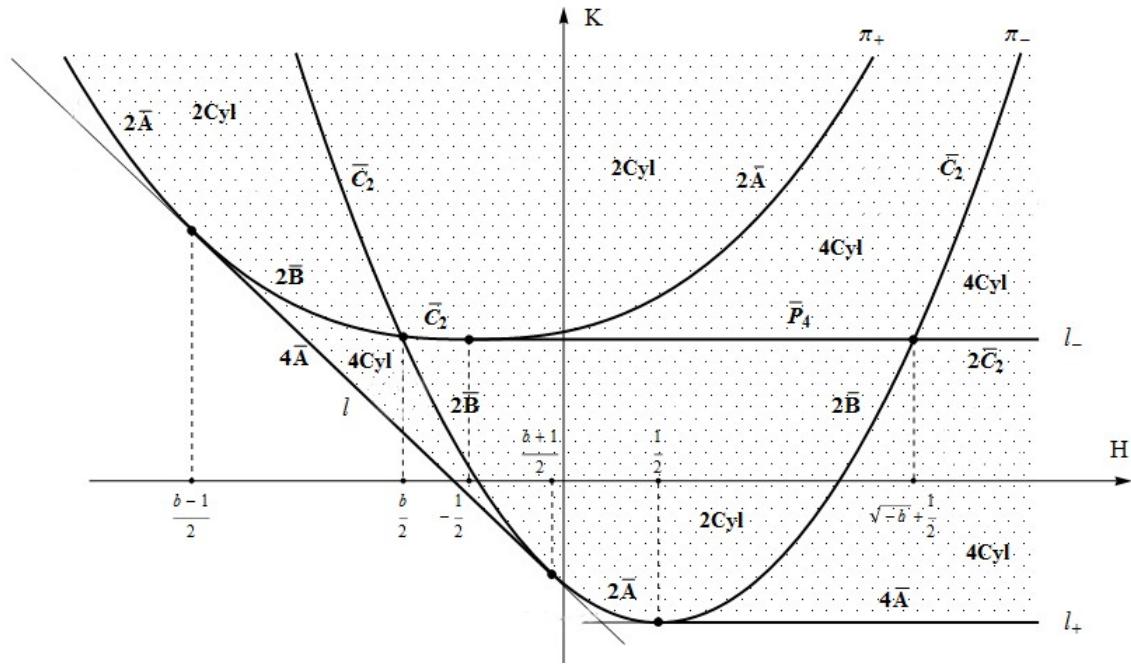


Рис. 12: Бифуркационная диаграмма и типы бифуркаций, $b < -1$

Следствие 15. Слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей для случая Горячева при $b < 0$, соответствующих зонам энергии I_1-I_{10} , описываются молекулами семи типов, представленными на рисунках 13-19.

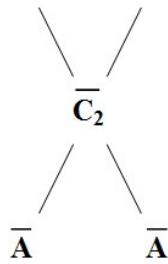


Рис. 13: Молекула для зон энергии I_1, I_7

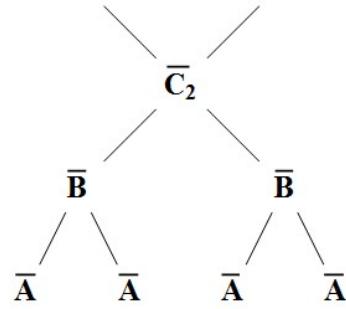


Рис. 14: Молекула для зон энергии I_2, I_5

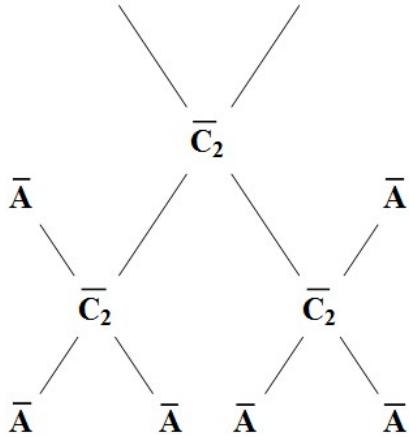


Рис. 15: Молекула для зоны энергии I_3

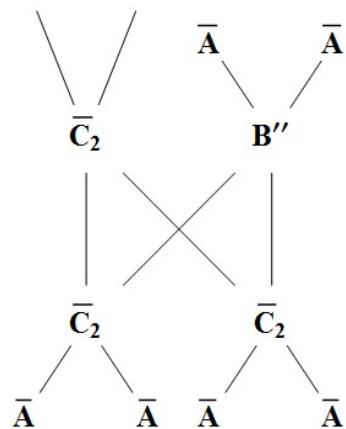


Рис. 16: Молекула для зоны энергии I_4

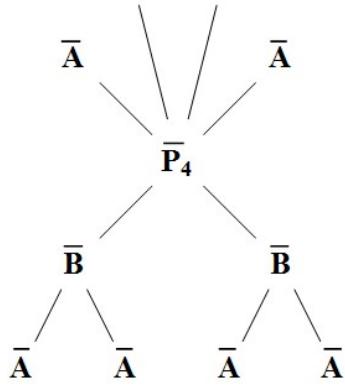


Рис. 17: Молекула для зон энергии I_6, I_9

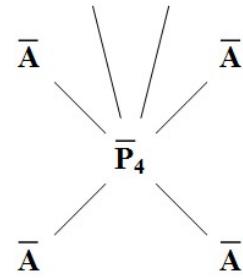


Рис. 18: Молекула для зоны энергии I_8

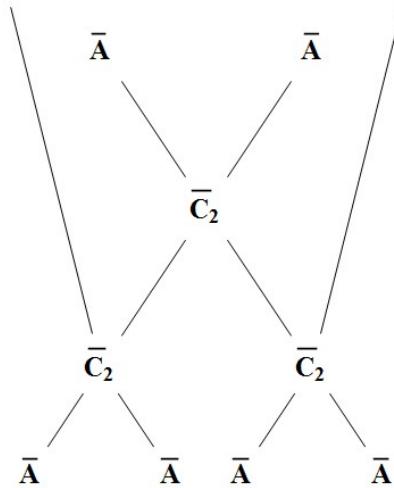


Рис. 19: Молекула для зоны энергии I_{10}

В заключении подводится итог полученным результатам, а также намечаются дальнейшие направления исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю академику РАН А. Т. Фоменко за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, а также за терпение и искреннее отношение.

Автор благодарит профессора Е. А. Кудрявцеву и профессора А. А. Ошемкова за многочисленные плодотворные дискуссии и полезные замечания. Автор благодарен также профессору А. В. Болсинову и assistant professor А. М. Изосимову за ряд ценных идей и комментариев.

Автор благодарит весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за тёплую, доброжелательную атмосферу, способствовавшую написанию работы.

Автор также благодарит своего учителя А. А. Амиршадяна за открытие мира математики и поддержание интереса к решению математических задач в школьные годы.

Наконец, автор благодарен своей супруге Ксении Николаенко, а также своим родителям Виктории и Сергею Николаенко за всестороннюю поддержку и помощь в течение всего времени написания диссертации.

Заключение

В работе проведён топологический анализ однопараметрического (с параметром b) семейства интегрируемых систем типа Чаплыгина–Горячева, заданных на коалгебре $e(3)^*$. Отдельно рассмотрены случаи: $b = 0$ (случай Чаплыгина), $b > 0$ (компактный случай Горячева), $b < 0$ (некомпактный случай Горячева). При $b \geq 0$ при каждом неособом топологически устойчивом уровне энергии полностью исследована топология слоения Лиувилля в терминах инварианта Фоменко–Цишанга (меченой молекулы). В результате выявлена лиувиллева эквивалентность (при подходящих значениях энергии и других параметров) многим ранее изученным классическим интегрируемым системам (случаю Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Чаплыгина, Сретенского, Клебша, Ковалевской–Яхьи в динамике твёрдого тела, геодезическому потоку трёхосного эллипсоида, а также некоторым интегрируемым биллиардам в областях, ограниченных софокусными квадриками). При $b = 0$ исследован также топологический траекторный портрет системы в терминах инварианта Болсинова–Фоменко (t -молекулы). В результате оказалось, что случай Чаплыгина топологически траекторно эквивалентен (при подходящих значениях энергии и других параметров) двум другим хорошо известным интегрируемым системам: случаю Эйлера в динамике твёрдого тела и задаче Якоби о геодезическом потоке на трёхосном эллипсоиде (топологическая траекторная эквивалентность последних двух систем была доказана ранее А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко). Показано, что эту траекторную эквивалентность можно сделать гладкой лишь при малых значениях энергии, а также доказано отсутствие топологической (и, следовательно, гладкой) сопряжённости случая Чаплыгина случаю Эйлера и задаче Якоби.

Случай $b < 0$ является, по-видимому, наиболее интересным как пример интегрируемой системы с некомпактными лиувиллевыми слоями. В этом случае топология слоений Лиувилля при фиксированном уровне энергии исследована в терминах инварианта Фоменко (молекулы). Оказалось, что все регулярные лиувиллевы слои диффеоморфизмы двумерному цилиндру, а все атомы (бифуркации) представляют собой прямое произведение компактного двумерного атома на прямую либо окрестности невырожденной седловой двумерной особенности на окружность.

В качестве направлений дальнейшего исследования можно выделить следующие.

- Исследование типов вырожденных особенностей отображения момента для систем типа Чаплыгина–Горячева.
- Исследование траекторного портрета компактного случая Горячева ($b > 0$). Разделение переменных, имеющееся в этой задаче, позволяет выразить основной траекторный инвариант – функцию вращения – через гиперэллиптические интегралы. Их аналитическое исследование может быть затруднено, поэтому окончательный вывод о виде траекторных инвариантов, по-видимому, должен опираться на результаты компьютерного эксперимента.
- Построение общей теории топологической классификации интегрируемых систем с некомпактными лиувиллевыми слоями. В этом направлении сейчас активно ведутся работы. В частности, автором получен аналог теоремы Фоменко о связи 2-атомов и 3-атомов

для случая некомпактных 3-атомов, а также получена полная классификация некомпактных 2-атомов (при некоторых естественных предположениях).

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Николаенко С. С., *Число связных компонент в прообразе регулярного значения отображения момента для геодезического потока эллипсоида*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2013, № 5, сс. 29–34.
Англ. пер.: Nikolaenko S.S., *The Number of Connected Components in the Preimage of a Regular Value of the Momentum Mapping for the Geodesic Flow on Ellipsoid*, Moscow University Mathematics Bulletin, 2013, **68**, no. 5, pp. 241–245.
<https://doi.org/10.3103/S0027132213050057>
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,259.
2. Николаенко С. С., *Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твёрдого тела в жидкости*, Матем. сборник, 2014, **205**, № 2, сс. 75–122.
<https://doi.org/10.4213/sm8251>
Англ. пер.: Nikolaenko S. S., *A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid*, Sb. Math., 2014, **205**, no. 2, pp. 1–45.
<https://doi.org/10.1070/SM2014v20n02ABEH004373>
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 1,057.
3. Fomenko A. T., Nikolaenko S. S., *The Chaplygin case in dynamics of a rigid body in fluid is orbitally equivalent to the Euler case in rigid body dynamics and to the Jacobi problem about geodesics on the ellipsoid*, J. Geom. Phys., 2015, **87**, pp. 115–133 (лично Николаенко С. С. принадлежат следующие результаты: теорема 7, лемма 8 и их доказательства).
<https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.09.007>
Журнал индексируется в Scopus, WoS, импактфактор 0,806.
4. Николаенко С. С., *Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твёрдого тела*, Матем. сборник, 2016, **207**, № 1, сс. 123–150.
<https://doi.org/10.4213/sm8520>
Англ. пер.: Nikolaenko S. S., *Topological classification of the Goryachev integrable case in rigid body dynamics*, Sb. Math., 2016, **207**, no. 1, pp. 113–139.
<https://doi.org/10.1070/SM8520>
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, WoS, импактфактор 1,057.
5. Nikolaenko S. S., *Topological Classification of the Goryachev Integrable Systems in the Rigid Body Dynamics: Non-Compact Case*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, **38**, no. 6, pp. 1050–1060.
<https://doi.org/10.1134/S1995080217060087>
Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,315.