ФМИ № 1 2019: № вёрстки 2 Математика	№ корректуры: Верстал: 24.05.2019	Дата Кол-во стр. 5	Подпись:

Гашков Сергей Борисович
доктор физико-математических наук кафедры дискретной математики мех-мата МГУ.

Пять неравенств и три доказательства

Что общего между следующими задачами на доказательство неравенств?

Задача 1. Пусть $abc=1,\ a,\ b>0$. Доказать, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c=1$.

Задача 2. Пусть $a, b, c \ge 0$. Доказать, что

$$(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)\le abc.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 3. Пусть $a, b, c \ge 0$. Доказать, что

$$(a+b)(b+c)(a+c)\ge 8abc.$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 4. Пусть $a, b, c \ge 0$. Доказать, что

$$a^4+b+c^4-2a^2b^2-2ac-2b^2c^2+$$
$$+a^2bc+b^2ac+c^2ab\ge 0$$

Равенство возможно только в случае $a=b=c$.

Задача 5. Пусть R − радиус описанного, а r − радиус вписанного круга для данного треугольника. Доказать, что $R \ge 2r$ и равенство возможно только для правильного (равностороннего) треугольника.

Первая из этих задач была на международной математической олимпиаде 2000 года. Вторая взята из книги Здравко Цветковского «Неравенства», выпущенной на английском языке в 2012 году издательством Шпрингер. Третья тоже есть в этой книге, но и во многих других, например в [1] (возможно эта задача также была на различных олимпиадах).

[1] *Автор статьи узнал об этой задаче от своего бывшего однокурсника Франка Рема, ныне живущего в Лейпциге.*

Четвёртая предлагалась на Московской олимпиаде 1982 года для 10 класса (её предложил В. А. Алексеев, тогда первокурсник, а ныне профессор университета Джорджии (США), выдающийся специалист по алгебраической геометрии). Пятая является очевидным следствием формулы Эйлера–Чаппла для расстояния d между центрами вписанной и описанной окружностей для данного треугольника:

$$d^2=(R-2r)R.$$

Трудность первой задачи в том, что левая часть неравенства не является полностью симметричной, и даже если раскрыть скобки и устранить одну переменную, выразив через две оставшиеся, например, по формуле $c=1/ab$, всё равно получается громоздкое и несимметричное неравенство. Поэтому при его доказательстве не удаётся сразу применить известные симметричные неравенства типа

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc.$$

Однако при помощи подходящей замены переменных эту задачу можно свести к задаче 2, в которой обе части неравенства симметричны (т.е. не меняются при любой перестановке переменных). В качестве такой замены можно взять замену $a=\dfrac{A}{B}$, $b=\dfrac{B}{C}$ (если взять произвольное $A>0$, то $B>0$ и $C>0$ всегда подбираются однозначно), тогда $c=\dfrac{1}{ab}=\dfrac{C}{A}$, и после очевидных преобразований имеем:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$\left(\frac{A}{B}-1+\frac{C}{B}\right)\left(\frac{B}{C}-1+\frac{A}{C}\right)\left(\frac{C}{A}-1+\frac{B}{A}\right)=$$

$$=\frac{(A-B+C)(B-C+A)(C-A+B)}{ABC},$$

и неравенство задачи 1 превращается в неравенство задачи 2 (точнее, оба неравенства оказываются равносильными, так как из неравенства задачи 1 очевидно тоже следует неравенство задачи 2).

Умножив обе части неравенства задачи 2 на неотрицательное число $a+b+c$, получим равносильное неравенство

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)\leq$$

$$(a+b+c)abc.$$

Раскроем скобки в его обеих частях и приведём подобные члены. Слева, согласно формуле разности квадратов и формуле квадрата суммы, получим:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)=$$

$$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b\ \ +2ab)=$$

$$=4a^2b^2-(\mathrm{a}^2+b^2-c^2)^2=$$

$$=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4,$$

поэтому, перенося всё в правую часть, получаем в точности неравенство задачи 4.

Это значит, что неравенства задач 1 и 2 равносильны неравенству задачи 4. Хотя это неравенство симметричное, вывести его из известных симметричных неравенств очевидным образом не удаётся. Например, справедливы неравенства (как их доказать?)

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2,$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\geq a^2bc+b^2ac+c^2ac.$$

Однако из них вывести неравенство задачи 4 не удаётся, так как второе неравенство «направлено не в ту сторону», какую нам бы хотелось. Для того чтобы всё же его доказать, вернёмся к его записи в виде

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \le \le (a+b+c)abc$$

и воспользуемся рассуждениями из книги [2].

Сначала предположим, что выполнены неравенства

$$(a+b-c)>0, (a+c-b)>0, (b+c-a)>0,$$

т.е. из отрезков длины a, b, c можно составить треугольник. Его полупериметр равен $p=\frac{(a+b+c)}{2}$, а площадь S согласно формуле Герона равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Кроме того известна также формула, выражающая S через радиус описанного вокруг него круга:

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

Пользуясь ими, наше неравенство можно записать в виде $16\,S^2 \le \le 8pRS$, или, что равносильно, в виде $2r=\frac{2S}{p} \le R$, так как радиус r вписанного круга вычисляется с помощью известной формулы $r= S/p$. Тем самым задачи 2 и 4 в случае существования треугольника со сторонами a, b, c сведены к задаче 5.

Если же треугольника с указанными сторонами нет, то одно из этих чисел, например a, не меньше суммы двух других, т.е. $b+c$ (в случае равенства $a=b+c$ треугольник вырождается в отрезок), но тогда

$$a+b-c>0,\ a+c-b>0,\ b+c-a \le 0,$$

значит

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \le \le 0 < (a+b+c)abc,$$

и в этом случае тоже всё доказано.

Остаётся доказать неравенство $2r \le R$. Для этого воспользуемся наглядными рассуждениями из книги Л. Фейеша Тота «Расположения на плоскости, сфере и в пространстве», (М. Физматгиз, 1958). Впрочем, автор книги указывает, что приведённое им доказательство известно в венгерском математическом фольклоре с 30-х годов.

Рассмотрим вместо данного треугольника с описанной окружностью радиуса R и вписанной окружностью радиуса r его срединный треугольник (т.е. треугольник, образованный его средними линиями). Так как он подобен данному треугольнику с коэффициентом $1/2$ (это следует из свойств средних линий), то радиус окружности, описанной вокруг срединного треугольника равен $R/2$.

Но эта окружность пересекает все стороны данного треугольника или их касается (рис. 1), поэтому её радиус не меньше r − радиуса вписанной в данный треугольник окружности (и равен ему только в случае, когда описанная вокруг срединного треугольника окружность касается всех сторон данного треугольника, т.е. вписан в него, а это возможно только в случае, когда данный треугольник правильный, т.е. $a=b=c$).

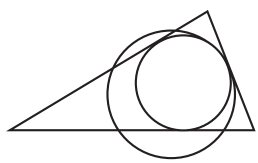

Рис. 1

Если это рассуждение не убеждает, его можно дополнить следующим. Уменьшив радиус построенной окружности радиусом $R/2$, получим окружность с тем же центром, касающуюся хотя бы одной из сторон данного треугольника и пересекающую остальные. Если она будет касаться только одной стороны, то перекатывая её по этой стороне поместим её в положение, когда она будет касаться хотя бы двух сторон.

Рассмотрим случай, когда она касается только двух сторон (если касается всех трёх, то она совпадает с окружностью радиуса r). Тогда её центр, также как и центр окружности радиуса r , лежит на биссектрисе угла между двумя этими сторонами, но третью сторону она пересекает. Тогда очевидно, что $R/2 > r$ (так как при движении по указанной биссектрисе расстояние от точки до сторон угла увеличивается).

Приведённое доказательство, использующее геометрические соображения, поучительно, но можно ли чисто алгебраические доказательства? Конечно, и далее будут рассмотрены два разных, но похожих друг на друга доказательства. Начнём с доказательства неравенства задачи 2, имеющегося в упоминавшейся книге Здравко Цветковского.

Достаточно рассмотреть случай, когда

$$a+b-c>0,\ a+c-b>0,\ b+c-a>0$$

(противоположный случай прост и уже был рассмотрен выше). Сделаем замену переменных $x=a+b-c>0$, $y=a+c-b>0$, $z=b+c-a>0$. Она обратима, так как

$$a=\frac{(x+y)}{2}>0,\ \ b=\frac{(x+z)}{2}>0,$$

$$c=\frac{(y+z)}{2}>0,$$

поэтому в новых переменных неравенство задачи 2 превращается в равносильное ему неравенство, фактически совпадающее с неравенством задачи 3:

$$(x+y)(y+z)(x+z)\ge 8xyz.$$

Но это неравенство (оно довольно известно и есть во многих задачниках, например в [1]) легко получается почленным перемножением неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{(x+y)}{2}\ge\sqrt{xy},\ \ \frac{(x+z)}{2}\ge\sqrt{xz},$$

$$\frac{(y+z)}{2}\ge\sqrt{yz}$$

(это доказательство справедливо также и при условии $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, так как

$$(x+y)-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\ge 0).$$

Для неравенства задачи 1 её автор румынский математик Титу Андрееску (работающий в США и тренирующий американскую команду, участвующую в международных олимпиадах) предложил следующее доказательство. [1]

Раскроем скобки в произведении $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)$ и воспользуемся условиями: $abc=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$ Получим, что

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})=$$

$$=ab-b+1-a+1-\frac{1}{b}+\frac{a}{c}-\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}=$$

$$=2-\frac{1}{b}-b+\frac{a}{c}\le\frac{a}{c},$$

так как $b+\dfrac{1}{b}\le 2,$ согласно частному

[1] *Оно приведено, например, в книге Джукича, Янковича, Матича, Петровича «Коллекция задач, предла-гаемых на международных математи-ческих олимпиадах с 1959 по 2004 г.», изданной издательством Шпрингер в 2006 году на английском языке.*

случаю приведённого выше неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим при $x=b$, $y=\frac{1}{b}$, причём равенство возможно лишь при $b=1$. Аналогично получаем неравенства:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$=2-\frac{1}{a}-a+\frac{c}{b}\leq\frac{c}{b},$$

которые обращаются в равенства при $a=1$, $c=1$ соответственно.

В случае, когда

$$a-1+\frac{1}{b}>0,\ \ c-1+\frac{1}{a}>0,\ \ \ b-1+\frac{1}{c}>0,$$

эти три неравенства можно почленно перемножить, а потом извлечь из обеих частей квадратный корень (в указанном случае при всех этих операциях неравенства сохраняются), в результате чего получается неравенство задачи 1.

Рассмотрим оставшийся случай. В нём без ограничения общности можно считать, что $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\leq 0$, тогда $\left(a+\frac{1}{b}\right)\leq 1$, откуда имеем, что

$$b+\frac{1}{c}=b(1+a)\leq b\left(2a+\frac{1}{b}\right)=1+2ab>1,$$

$$c+\frac{1}{a}>\frac{1}{a}>1,$$

значит

$$a-1+\frac{1}{b}\leq 0,\ \ \ b-1+\frac{1}{c}>0,\ \ \ c-1+\frac{1}{a}>0,$$

поэтому

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 0<1.$$

Значит, и в этом случае неравенство доказано.

Литература

1. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач.– МЦНМО, 2009.
2. Бегунц А.В., Гашков С.Б., Горяшин Д.В., Косухин О.Н., Флёров А.А. Московские математические олимпиады 1981-1992.– МЦНМО, 2017.