УДК 658.51.012

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Михайленко В.Г. [1], к.ф.-м.н., Дидиченко Н.П. [1], к.т.н.,

Дубровин А.А. [1] к.ф.-м.н.,Ходусов В.Д. [2], д.ф.-м.н.,

Демуцкий В.П.[2], к.ф.-м.н., Пигнастый О.М.[3], к.т.н.

[1]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,,эконом.фак.,*
[2]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина , физ.-техн. фак.,*
[3]*НПФ Технология, г.Харьков, e-mail :pom7@bk.ru*

С использованием вариационного и дифференциального принципов записана функция Лагранжа производственной системы. Показаны различия в вариационном и дифференциальном подходе при построении функции Лагранжа производственных систем. Определены интегралы движения при описании производственных систем.

Постановка задачи

Описание функционирования современного производства может быть представлено в виде процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного своего состояния в другое. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы [1,c.178]. Под базовым продуктом (или условным изделием [2,c.183]) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит целенаправленное превращение исходного сырья и материалов (межоперационной заготовки) в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Состояние j-го базового продукта может быть описано микроскопическими величинами (производственно-технологическими параметрами) $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{j}},\mu_j\right)$ [3], где S_{j}(грн) и $\mu_j=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн/час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Рассматриваемую производственную систему [4] будем характеризовать функцией $J_П\left(t, S_1, S_2, ..., S_N, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N, S_0, \mu_0\right)$.

Через переменные S_0 и μ_0 задана технология производства базового продукта в фазовом технологическом пространстве (S, μ) наблюдаемых производственно-технологических параметров. Переменные S_0 и μ_0 определяют для производственного процесса нормативную технологическую траекторию

$$S_0 = S_0(t), \qquad \mu_0 = \frac{dS_0(t)}{dt}. \tag{1}$$

в фазовом пространстве (S, μ). Номинальная технологическая траектория является детерминированной. Детерминированность номинальной технологической траектории вытекает из однозначности заданной технологии изготовления базового продукта. Каждая технологическая операция имеет номинальные технологические параметры производства базового продукта и допустимые отклонения от номинальных технологических параметров. Технологическая операция, выполненная с превышением значений предельных отклонений, приводит к нарушению технологического процесса, то есть к появлению бракованной заготовки. Пусть технологический процесс на каждой m-ой технологической операции задан k технологическими факторами $Z_{m,k}$ с определяющими их параметрами $\left\langle Z_{m,k} \right\rangle - \Delta Z_{2m,k} \le Z_{m,k} \le \left\langle Z_{m,k} \right\rangle - \Delta Z_{1m,k}$, m=1.. N_m, κ=1.. N_k, где N_m и N_k обозначают соответственно количество технологических операций и количество технологических факторов, которое допускается технологической операцией. Каждый технологический фактор $Z_{m,k}$ является случайным процессом с математическим ожиданием (номинальным значеним) $\left\langle Z_{m,k} \right\rangle$ и соответственно верхним и нижним допустимыми отклонениями (допусками) $\Delta Z_{1m,k}$ и $\Delta Z_{2m,k}$ от нормативного значения. Верхние и нижние допуски $\Delta Z_{1m,k}$ и $\Delta Z_{2m,k}$ определяют позволяемые технологией изготовления базового продукта верхние и нижние отклонения параметров технологического процесса от заданной нормативной технологической траектории. При изготовлении базового продукта с технологическими параметрами в пределах допустимых технологией производства верхних $\Delta Z_{1m,k}$ и нижних $\Delta Z_{2m,k}$ отклонений от нормативных значений считается, что базовый продукт изготавливается в соответствии с заданной технологией. Тогда с использованием аппарата теории случайных процессов [6] могут быть получены значения технологических параметров $\mu_{0m} - \sigma_{\mu_{0m}} \le \mu_m \le \mu_{0m} - \sigma_{\mu_{0m}}$, $S_{0m} - \sigma_{S_{0m}} \le S_m \le S_{0m} - \sigma_{S_{0m}}$ для m-ой технологической операции [6, стр.294]

$$\mu_{0m} = \mu_{0m}\left(Z_{m,k}, \Delta Z_{1m,k}, \Delta Z_{2m,k}\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{\mu_{0m}} = \sigma_{\mu_{0m}}\left(Z_{m,k}, \Delta Z_{1m,k}, \Delta Z_{2m,k}\right), \quad \kappa = 1..\ N_k .$$

При большом количестве технологических операций $N_m >> 1$ удобен переход от дискретного описания значений $\mu_{0m}, \sigma_{\mu_{0m}}$ технологического процесса к непрерывному $\mu_0(t)$, $\sigma_\mu(t)$ на множестве интегрируемых и дифференцируемых функций [3]. Заметим, что значения технологического процесса $S_0(t)$, $\sigma_S(t)$ могут быть получены путем интегрирования технологических параметров $\mu_0(t)$, $\sigma_\mu(t)$ [6, стр.287]. Каждый j-й базовый продукт в процессе технологической обработки переходит из своего начального состояния (начальной заготовки) в конечное состояние (готовое изделие) в соответствии с заданной технологией производства базового продукта и образует в фазовом технологическом пространстве (S, μ) технологическую траекторию [7]. Данная технологическая траектория является реализацией технологического процесса для j-го базового продукта. Технологический процесс реализуется в окрестности известной технологии производства базового продукта, которая ограничивается зоной допустимых технологических траекторий (рис.1).

Рис.1.Зона допустимых технологических траекторий

Производственный процесс определяется совокупностью состояний базовых продуктов. Если известно все о состоянии каждого базового продукта в любой момент времени, то разумно полагать, что все известно и о состоянии производственной системы. Изменение во времени свойств каждого базового продукта производственной системы может быть представлено в виде движения базового продукта в фазовом пространстве наблюдаемых производственно-технологических параметров (S, μ), а закон движения может быть получен с помощью методов вариационного исчисления. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система находится в состоянии $J_П((t_1, S_1(t_1), S_2(t_1), ..., S_N(t_1), \mu_1(t_1), \mu_2(t_1), ..., \mu_N(t_1), S_0, \mu_0)$ и в состоянии $J_П((t_2, S_1(t_2), S_2(t_2), ..., S_N(t_2), \mu_1(t_2), \mu_2(t_2), ..., \mu_N(t_2), S_0, \mu_0)$ соответственно. Тогда между этими положениями реализация технологического процесса должна осуществляться таким образом, чтобы целевой функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} J_{\Pi}\big((t, S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t), \mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_N(t), S_0, \mu_0\big)dt \qquad (3)$$

имел минимум по отношению к возможным отклонениям от заданной технологии.

Такой подход, который при построении законов движения механических систем называется принципом наименьшего действия, используется в построении экономических теорий производственных систем [5]. Вариация целевого функционала (3) позволяет определить уравнения движения каждого отдельно взятого базового продукта в фазовом пространстве наблюдаемых производственно-технологических параметров (S, μ). Интегрируя уравнения движения для каждого базового продукта, получаем сведения о параметрах состояния каждого базового продукта, а значит и сведения о состоянии производственной системы в целом. Так как все известно о состоянии каждого базового продукта, то известно все и о состоянии производственной системы. В большинстве случаев целевой функционал (3) содержит параметры, которые описывают случайные факторы реализации технологического процесса. В таком случае при вариации целевого функционала (3) получаются уравнения движения базового продукта, включающие в себя случайные функции реализации технологического процесса. Таким образом, в результате интегрирования уравнений движения получается технологическая траектория для j-го базового продукта, которая является реализацией технологического процесса и определяется случайно возникшими факторами в ходе движения базового продукта вдоль технологической цепочки [8, 9].

Вариационный принцип построения целевой функции производственной системы

Пусть нормативная технологическая траектория (1) изготовления базового продукта в фазовом пространстве (S, μ) определяется функцией возрастания затрат (ФВЗ) при движении базового продукта вдоль технологической цепочки. ФВЗ строится на основании операционных карт технологического процесса, которые определяют последовательность операций производства базового продукта и необходимые производственные ресурсы для выполнения технологических операций (сырье, трудовые ресурсы, электроэнергия и т.д.) [3, 10]. ФВЗ описывает процесс накопления затрат в соответствии с выбранной технологией изготовления базового продукта. Потребуем, чтобы целевой функционал (3) имел для производственного процесса с заданной технологией производства базового продукта экстремальное значение (рис.2) на множестве возможных траекторий $S_j(t,\alpha)$.

Целевой функционал (3), вычисленный вдоль конкретной технологической траектории, представляет собою функцию параметра α:

$$I(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2} J_{\Pi}\big((t,S_1(t,\alpha),S_2(t,\alpha),\ldots,S_N(t,\alpha),\mu_1(t,\alpha),\mu_2(t,\alpha),\ldots,\mu_N(t,\alpha),S_0,\mu_0\big)dt. \quad (4)$$

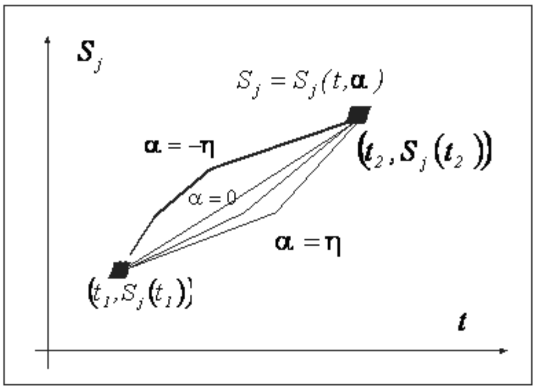

Рис.2.Вариация целевого функционала производственной системы

Вычислим вариацию функционала (3), т.е. дифференциал по α функционала (5):

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta J_{\Pi}dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j}\cdot\delta S_j+\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial\mu_j}\cdot\delta\mu_j\right)dt=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial\mu_j}\cdot\delta S_j\Bigg|_{t_1}^{t_2}+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}\right)\cdot \delta S_j dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}\right)\cdot \delta S_j dt. \quad (5)$$

Интеграл преобразован при помощи интегрирования по частям, используя для этого перестановочность операций варьирования δ и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\delta\mu_j=\delta\frac{d}{dt}S_j(t,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}S_j(t,\alpha)\cdot\delta\alpha=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}S_j(t,\alpha)\cdot\delta\alpha=\frac{d}{dt}\delta S_j \quad (6)$$

Технологические траектории $S_j(t,\alpha)$ для отдельного j-го базового продукта производственной системы имеют общее начало $(t_1, S_j(t_1))$ и общее окончание $(t_2, S_j(t_2))$. Поэтому при $t=t_1$ и при $t=t_2$ вариации δS_j равны нулю и проинтегрированная часть обращается в ноль.

Так как реализация технологического процесса должна осуществляться таким образом, чтобы целевой функционал (3) для производственного процесса имел минимум, то следует равенство нулю вариации целевого функционала (5):

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}\right)\cdot \delta S_j dt=0, \quad (7)$$

которое определяет уравнения Эйлера для каждого отдельного базового продукта

$$\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}=0. \quad (8)$$

Для производственных систем известна как технология производства базового продукта, так и критерии, характеризующие отклонения технологических параметров базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки. Последнего достаточно, чтобы построить целевую функцию $J_{П}(t, S_1, S_2, ..., S_N, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N, S_0, \mu_0)$ в явном виде и записать уравнения Эйлера (8) для каждого отдельного базового продукта, определяющие состояния базового продукта при его движении от одной технологической операции к другой.

Уравнения Эйлера для каждого отдельного базового продукта (8) могут быть получены и при помощи дифференциальных уравнений движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Однако, между дифференциальными уравнениями и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие: дифференциальные уравнения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой положение базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственной системы, скорости переноса затрат и ускорения переноса затрат на базовый продукт в момент времени t. Вариационный же принцип характеризует нормативный технологический процесс в целом. Он формулирует стационарное свойство целевого функционала для заданного технологического процесса. Вариационный принцип имеет более обозримую и компактную форму и часто используется в качестве фундамента для построения новых методов описания систем.

Дифференциальный принцип построения целевой функции производственной системы

Дифференциальные уравнения Эйлера для базовых продуктов производственной системы (8) представляют собою необходимые и достаточные условия равенства нулю вариации (6). Пусть движение базового продукта вдоль технологической цепочки может быть описано уравнениями

$$\dot{\mu}_j(t) = f(S_j), \qquad \dot{S}_j(t) = \mu_j, \tag{9}$$

где через $f(S_j)$ обозначен темп изменения скорости переноса затрат на j-ый базовый продукт. В механике эта величина называется обобщенной силой. Получим уравнения Эйлера (8) из общего уравнения динамики производственного процесса:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(f(S_j)-\ddot{S}_j(t)\right)\cdot \delta S_j=0. \qquad (10)$$

Используя перестановочность операций варьирования и дифференцирования по времени, получим:

$$\sum_{j=1}^{N}\ddot{S}_j(t)\cdot \delta S_j=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\frac{d}{dt}\delta S_j= \qquad (11)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta\dot{S}_j=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j-\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2},$$

где $\frac{d}{dt}\delta S_j=\delta\mu_j=\delta\frac{dS_j}{dt}$.

Введем интегральные характеристики $F(S_j)$ темпа изменения скорости переноса затрат j-ый базовый продукт

$$F(S_j)=\int_0^{S_j} f(S)dS \qquad (12)$$

Тогда следует

$$\sum_{j=1}^{N} f(S_j)\cdot \delta S_j=-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j), \qquad (13)$$

Запишем уравнение динамики производственного процесса базового продукта (10) в виде:

$$\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)=0. \qquad (14)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения в пределах от $t=t_1$ до $t=t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt-\left(\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j\right)_{t=t_1}^{t=t_2}=0. \qquad (15)$$

Так как вариация δS_j при $t=t_1$ и $t=t_2$ равна нулю, следовательно

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot \delta S_j\right)_{t=t_1}^{t=t_2}=0 \quad \text{и} \quad \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt=0, \qquad (16)$$

и равенство (16) может быть преобразовано к виду

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}J_{\Pi}dt=0\,, \quad (17)$$

где

$$J_{\Pi}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\sum_{j=1}^{N}F(S_j) \quad (18)$$

целевая функция производственной системы.

Таким образом, общее уравнение динамики (10) привело нас к вариационному принципу $\delta\int_{t_1}^{t_2}J_{\Pi}dt=0$.

Первые интегралы движения в модели микроскопического описания производственной системы

При движении базовых продуктов производственной системы вдоль технологической цепочки в фазовом пространстве (S,μ) существуют функции $\varphi(S_j,\mu_j)$ экономических величин S_j,μ_j, которые сохраняют при движении системы постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Такие функции будем называть первыми интегралами движения производственной системы.

Если целевая функция производственной системы не зависит явно от времени, то полная производная от нее может быть записана в виде:

$$\frac{dJ_{\Pi}}{dt}=\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j}\cdot\frac{dS_j}{dt}\right]+\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\cdot\frac{d\mu_j}{dt}\right] \quad (19)$$

В силу уравнений Эйлера (9) заменяем производные $\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S}$ на их значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\right)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J_П\right]=0. \qquad (20)$$

Откуда величина

$$\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J_П\right]=\text{const} \qquad (21)$$

является постоянной при движении базовых продуктов вдоль технологической цепочки. Системы, имеющие интеграл указанного вида, называются консервативными.

Следующий интеграл движения производственной системы возникает вследствие однородности фазового пространства. Как следствие однородности фазового пространства по координате S потребуем, чтобы целевая функция $J_П(t, S_1, S_2, ..., S_N, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N, S_0, \mu_0)$ замкнутой системы осталась неизменна при переносе системы как целого на отрезок δS. Изменение целевой функции вследствие малого перемещения по фазовой координате S:

$$\delta J_П(t, S_j \mu_j)=\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_П}{\partial S_j}\cdot\delta S\right]=\delta S\cdot\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_П}{\partial S_j}\ . \qquad (22)$$

В силу произвольности δS следует $\delta J_П=0$, что означает: сумма всех технологических воздействий на базовые продукты производственной системы, равна нулю.

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_П}{\partial S_j}=0. \qquad (23)$$

Тогда в силу уравнений Эйлера (8) получаем

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_1}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)=0, \qquad (24)$$

откуда

$$P_S=\sum_{j=1}^{N_1}\left(\frac{\partial J_П}{\partial \mu_j}\right)=const. \qquad (25)$$

Аналогичный интеграл движения производственной системы возникает вследствие однородности фазового пространства по фазовой скорости

$$\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j} = 0 \tag{26}$$

и является необходимым условием экстремума микропараметров производственной системы.

Свойства целевой функции производственной системы

Из уравнений Эйлера (9) видны свойства целевой функции. Если производственная система состоит из двух невзаимодействующих частей (производственных участков, цехов, площадок), то справедливо равенство:

$$J_{П} = J_{П_1} + J_{П_2}. \tag{27}$$

Умножение целевой функции производственной системы на произвольную постоянную не изменяет уравнения движения базовых продуктов, а приводит только к соответствующему выбору системы единиц измерения для построение модели производственной системы.

Целевая функция производственной системы определяется с точностью до полной производной от любой функции координат $S_j(t)$ по времени t: $\theta(t, S_j)$. Последнее связано с тем, что вариация от функции $\theta_{П}(t, S_j)$ есть тождественный ноль:

$$\delta\theta_{П}(t, S_j)\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \theta_{П}}{\partial S_j}\cdot \delta S_j\right]\cdot dt = \delta S_j \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \theta_{П}}{\partial S_j}\cdot dt = 0 \tag{28}$$

Выводы

С использованием вариационного и дифференциального принципов записана целевая функция для базовых продуктов производственной системы. Определены слагаемые целевой функции, характеризующие технологическое поле оборудования и собственные свойства базового продукта. Записаны первые интегралы движения базового продукта вдоль технологической цепочки. Показаны свойства целевой функции для базовых продуктов производственной системы.

Литература:

1. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. -399с.

2. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2, Внутризаводское планирование. - М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.

3. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции – Доповіді Національної академії наук України, 2005. –N7– С.66-71

4. Михайленко В.Г., Дидиченко Н.П., Дубровин А.А., Ходусов В.Д., Демуцкий В.П., Пигнастый О.М. Особенности моделирования технологических процессов производственных систем – Вестник ХНУ (экономическая серия), 2006. –N719– С.267-276

5. Шананин А.А.. Обобщенная модель чистой отрасли производства. // Математическое моделирование, 1997, том 9, №9, с.117-127

6. Венцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. - 383с.

7. Пигнастый О. М. Целевая функция производственной системы с массовым выпуском продукции / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов, М. Н. Азаренкова // - Вісник Харківського національного університету. - Харків: ХНУ. - 2006. - N746. Сер. ”Фізична” - С.95-103

8. Пигнастый О.М. Характерные числа в моделях описания производственных систем / О. М. Пигнастый // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. - Харьков: НАКУ. - 2006. - № 31. - С. 242-252

9. Пигнастый О. М. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства / В. П. Демуцкий, О. М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. - Київ: Видавничий дім "Академперіодика". - 2006. -№ 3. - С. 63-67

10. Пигнастый О. М. О вариационном и дифференциальном принципах построения функции Лагранжа производственной системы / С. Н. Новак, О. М. Пигнастый // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України. - Суми: ДВНЗ “УАБС НБУ”. - 2006. -№17. - С. 120-130.