ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

для студентов 4 курса отделения механики (423 группа), весна 2019/2020 учебного года

1. Примеры моделирования случайных процессов

1.1. Винеровский процесс. Будем моделировать винеровский процесс с шагом $h =$0,01 на отрезке $[0, T]$, $T = 1$. Положим $t_n = (n-1)h$. Введем в ячейку A1 формулу =(СТРОКА()-1)/100 и скопируем в ячейки A2:A101. В столбце A получим текущее время.

Будем исходить из того, что $w(0) = 0$ и

$$w(t+h) = w(t) + \sqrt{h} N(0,1).$$

Введем в ячейки B2:B101 формулу =НОРМСТОБР(СЛЧИС()) и таким образом, получим там набор независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением. Далее, введем в ячейку C1 ноль, а в ячейку C2 формулу =C1+0,1*B2, и затем скопируем ячейку C2 в ячейки C3:C101. Таким образом, получаем значения винеровского процесса.

Теперь можно нарисовать его график (точнее, его кусочно-линейное приближение) с помощью меню Вставка –>Диаграмма, выбрав тип диаграммы — точечный, на котором значения соединены отрезками. В качестве значений X надо выбрать ячейки A1:A101, в качестве значений Y — ячейки C1:C101.

1.2. Процесс Орнштейна–Уленбека. Будем моделировать процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами $\sigma = 1$ и $\alpha = 1$ на той же временной сетке. Используем столбцы A (время) и B (случайные величины).

Будем исходить из того, что $\xi(0) = N(0, \sigma^2)$ и

$$\xi(t+h) = e^{-\alpha h}\xi(t) + \sigma\sqrt{1 - e^{-2\alpha h}} N(0,1).$$

Введем в ячейку D1 формулу =НОРМСТОБР(СЛЧИС()) и в ячейку D2 формулу =EXP(-0,01)*D1+КОРЕНЬ(1-EXP(-0,02))*B2, и затем скопируем ячейку D2 в ячейки D3:D101. Таким образом, получаем значения процесса Орнштейна–Уленбека.

Теперь можно нарисовать его график, как и в предыдущем случае. В качестве значений X надо выбрать ячейки A1:A101, в качестве значений Y — ячейки D1:D101.

1.3. Пуассоновский процесс. Будем моделировать пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 1$ как процесс восстановления с показательно распределенными промежутками между скачками, до $K = 10$ скачков. Показательно распределенную случайную величину с параметром λ можно представить в виде $(1/\lambda)(-\ln U)$, где U равномерно распределена на $[0, 1]$.

Введем в ячейку G1 формулу =ЦЕЛОЕ((СТРОКА()-1)/2) и скопируем в ячейки G2:G21. Это будут значения пуассоновского процесса от 0 до 10 (повторения соответствуют промежуткам постоянства).

Введем в ячейку F1 ноль, а в ячейку F2 формулу =F1-LN(СЛЧИС())*(ОСТАТ(СТРОКА();2)=0) и скопируем ячейку F2 в ячейки F3:F21. Это будут моменты времени (повторения соответствуют точкам до и после скачка).

Теперь можно нарисовать график, как и в предыдущем случае. В качестве значений X надо выбрать ячейки F1:F21, в качестве значений Y — ячейки G1:G21.

2. Задание

1. Провести моделирование процессов с указанными в вариантах значениями параметров, а также процесса $\eta(t)$, заданного функцией от винеровского процесса и, возможно, времени. Сделать графики трех разных траекторий каждого процесса.

2. Изучив раздел учебника С9, вычислить стационарные вероятности[1] для цепи Маркова из задачи для самостоятельного решения к главе 9 с номером, указанным в варианте, провести моделирование за 1000 шагов, найти относительные частоты, сравнить их с вероятностями, оценить погрешность (как максимум из модулей отклонений).

Результаты представить в виде отчета в PDF, содержащего пояснения, как делали, и графики, с приложением файла-таблицы в старом Excel (XLS).

Названия файлов в виде: MM_Фамилия, где MM — номер студента в списке группы, представленном старостой, он же номер варианта.

[1] Заодно сравнить с ответами в книге.

Варианты

01. $h=$0,01; $T=2$; $\alpha=1$; $\sigma^2=2$; $\lambda=3$; $K=7$; $\eta(t)=(w(t)+2)^2/4$; N 1.
02. $h=$0,005; $T=3$; $\alpha=2$; $\sigma^2=3$; $\lambda=2$; $K=10$; $\eta(t)=\sin(3w(t)+\pi/6)$; N 2.
03. $h=$0,01; $T=5$; $\alpha=3$; $\sigma^2=4$; $\lambda=5$; $K=12$; $\eta(t)=\exp\{w(t)-t/5\}$; N 3.
04. $h=$0,005; $T=2$; $\alpha=4$; $\sigma^2=6$; $\lambda=4$; $K=8$; $\eta(t)=(w(t)-2)^3/8$; N 4.
05. $h=$0,01; $T=3$; $\alpha=2$; $\sigma^2=5$; $\lambda=3$; $K=9$; $\eta(t)=\cos(w(t)+\pi/3)$; N 5.
06. $h=$0,005; $T=4$; $\alpha=5$; $\sigma^2=7$; $\lambda=5$; $K=11$; $\eta(t)=\exp\{2w(t)-t\}$; N 6.
07. $h=$0,01; $T=8$; $\alpha=3$; $\sigma^2=9$; $\lambda=2$; $K=6$; $\eta(t)=(w(t)-1)^3$; N 7.
08. $h=$0,005; $T=4$; $\alpha=4$; $\sigma^2=8$; $\lambda=4$; $K=8$; $\eta(t)=\sin(3w(t)+\pi/4)$; N 8.
09. $h=$0,01; $T=7$; $\alpha=2$; $\sigma^2=3$; $\lambda=3$; $K=13$; $\eta(t)=\exp\{2w(t)-t/4\}$; N 9A.
10. $h=$0,005; $T=5$; $\alpha=5$; $\sigma^2=4$; $\lambda=7$; $K=7$; $\eta(t)=(2w(t)-1)^4$; N 9Б.
11. $h=$0,01; $T=11$; $\alpha=3$; $\sigma^2=2$; $\lambda=6$; $K=9$; $\eta(t)=\cos(w(t)+\pi/6)$; N 10A.
12. $h=$0,005; $T=3$; $\alpha=4$; $\sigma^2=6$; $\lambda=8$; $K=12$; $\eta(t)=\exp\{t/3+w(t)\}$: N 10Б.
13. $h=$0,01; $T=9$; $\alpha=2$; $\sigma^2=8$; $\lambda=3$; $K=8$; $\eta(t)=(w(t)-3)^2/9$; N 1.
14. $h=$0,005; $T=3$; $\alpha=1$; $\sigma^2=9$; $\lambda=5$; $K=7$; $\eta(t)=\sin(2w(t)+\pi/3)$; N 2.
15. $h=$0,01; $T=5$; $\alpha=3$; $\sigma^2=5$; $\lambda=4$; $K=14$; $\eta(t)=\exp\{3w(t)-t\}$; N 3.
16. $h=$0,005; $T=7$; $\alpha=2$; $\sigma^2=3$; $\lambda=7$; $K=11$; $\eta(t)=(w(t)+1)^5$; N 4.
17. $h=$0,01; $T=2$; $\alpha=3$; $\sigma^2=4$; $\lambda=4$; $K=10$; $\eta(t)=\cos(4w(t)-\pi/6)$; N 5.
18. $h=$0,005; $T=4$; $\alpha=2$; $\sigma^2=6$; $\lambda=5$; $K=8$; $\eta(t)=(w(t)-1)^5$; N 6.