

Илюшин Ярослав Александрович

**Методы теории переноса излучения в
средах с сильно анизотропным
рассеянием.**

Специальность 01.04.03 — радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2016

Оглавление

1	Обзор литературы	13
1.1	Перенос излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием.	15
1.2	Малоугловые приближения теории переноса излучения.	17
1.3	Поле точечного мононаправленного источника – фундаментальное решение уравнения переноса излучения.	20
1.4	Слабая локализация	23
1.5	Перенос излучения в средах с рефракцией.	26
2	Теория переноса излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием и малоугловые приближения.	29
2.1	Задачи для плоскостойкой среды с плоским мононаправленным (ПМ) источником излучения.	29
2.1.1	Стационарная краевая задача для плоскостойкой среды. .	29
2.1.2	Нестационарное уравнение переноса излучения.	32
2.1.3	Малоугловое приближение для уравнения переноса поляризованного излучения.	37
2.1.4	Численное моделирование распространения поляризованных импульсов в среде	39
2.1.5	Выделение сильно анизотропной составляющей полного решения.	41
2.2	Задачи теории переноса излучения с точечным мононаправленным (ТМ) источником излучения в рассеивающей среде.	46
2.2.1	Численное моделирование узких пучков.	46
2.2.2	Приближение квазиоднократного обратного рассеяния . .	47
2.2.3	Модулированные и импульсные пучки в рассеивающих средах.	51
2.2.4	Расчеты видимости лазерных навигационных маяков в тумане.	52
2.2.5	Уравнение переноса излучения для узких пучков в рефракгирующей среде.	59
2.2.6	Калибровка численного решения для ТМ источника по абсолютной интенсивности.	64
2.2.7	О структуре особенностей пространственного и углового распределения интенсивности поля излучения ТМ источника в мутной среде.	65
2.3	Когерентное усиление обратного рассеяния и слабая локализация.	69

2.3.1	Механизм эффекта когерентного обратного рассеяния. . .	69
2.3.2	Полное численное решение уравнения переноса излучения.	71
2.3.3	Численное моделирование и обсуждение результатов. . . .	73
2.3.4	Теория слабой локализации в средах с рефракцией	76
2.3.5	Алгоритм статистического моделирования переноса излу- чения в рефрагирующей среде.	79
2.3.6	Диффузионное приближение теории переноса излучения в среде с поглощением и рефракцией.	81
2.3.7	Результаты численного моделирования слабой локализа- ции в среде с рефракцией.	85
2.3.8	Асимптотические решения для сильноанизотропного рас- сеяния в малоугловом приближении.	92
2.4	Гало обратного рассеяния узкого пучка в среде с сильно анизо- тропным рассеянием.	101
2.4.1	Оценки компонент поля рассеянного излучения и крите- рий проявления эффекта.	103
2.4.2	Оценки для некоторых модельных функций рассеяния. . .	105
2.4.3	Расчеты методом Монте-Карло. Обсуждение результатов моделирования.	107
2.5	Модель двумерной рассеивающей среды.	109
2.5.1	Решение задачи УПИ с ТИ источником в двумерной среде.	112
2.5.2	Распространение узких пучков в двумерной среде	119
2.5.3	Численное решение задачи о поле ТМ источника в слое двумерной рассеивающей среды.	122
2.6	Задачи для произвольной геометрии области рассеивающей среды.	127
2.7	Конечно-разностные схемы решения уравнений малоуглового при- ближения теории переноса излучения.	129
3	Задачи глубинного радиозондирования слоистых ледяных по- кровов небесных тел.	138
3.1	Происхождение и физико-химическое строение марсианских по- лярных льдов.	138
3.2	Модель марсианских слоистых полярных льдов и определение ко- эффициентов уравнения переноса.	146
3.2.1	О справедливости теории переноса излучения в одномер- ной слоистой среде.	147
3.3	Уравнение переноса излучения в одномерной среде (двухпотоко- вое приближение).	150
3.3.1	Полубесконечная среда.	150
3.3.2	Среда с отражающей границей.	153
3.3.3	Среда с двумя отражающими границами.	156
3.3.4	Слой на полубесконечной среде	158
3.4	Модель радиационного переноса в двумерной и трехмерной плос- костной среде.	159
3.5	Численное решение уравнений электромагнитного поля в слои- стых средах.	163

3.5.1	Численное моделирование радиолокационных сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).	163
3.5.2	Точное решение уравнений электромагнитного поля в одномерной слоистой среде.	165
3.5.3	Точное решение уравнений электромагнитного поля в двумерной слоистой среде.	165
3.5.4	Точное решение уравнений электромагнитного поля в трехмерной слоистой среде.	167
3.5.5	Двумерная модель слоистой среды.	172
3.5.6	Трехмерная модель слоистой среды.	175
3.5.7	Экспериментальные оценки диэлектрических свойств марсианских полярных льдов.	176
4	Рассеяние радиолокационных сигналов на флуктуациях плотности ионосферной плазмы и поверхностном рельефе планеты.	178
4.1	Модель фазовых экранов.	179
4.2	Численное моделирование глубинного зондирования через флуктуирующую ионосферу.	182
4.3	Распространение волн в неоднородной изотропной плазме.	185
4.4	К обоснованию приближения фазового экрана.	190
4.5	Обсуждение результатов численного моделирования.	194
4.6	Квазислучайная модель фазового экрана.	205
4.7	Численное моделирование квазислучайного экрана.	208
4.8	Обсуждение результатов.	211
4.9	Дисперсионные искажения фазы сигналов в регулярной слоистой ионосфере.	217
4.10	Учет априорной информации о рельефе поверхности планеты.	221
4.11	Оценка параметров рельефа поверхности по данным обработки снимков высокого разрешения.	222
4.12	Рассеяние сигналов на квазипериодическом рельефе поверхности.	224
4.13	Двухчастотная корреляционная функция	226
4.14	Численное моделирование и обсуждение результатов.	229
4.15	Численное моделирование радиолокации рельефного глубинного горизонта и обсуждение результатов.	234
4.16	Глубинное зондирование океана на Ганимеде: численное моделирование.	238
5	Влияние пространственной структуры осадков на поляризационные характеристики уходящего микроволнового излучения атмосферы.	243
5.1	Пассивное радиометрическое зондирование дождевых осадков в микроволновом диапазоне длин волн.	244
5.2	Модель излучательных характеристик среды.	245
5.3	Перенос излучения в анизотропной рассеивающей среде.	247
5.4	Заключение и выводы по главе.	250

Введение.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Представляемая диссертация посвящена разработке асимптотических и численных методов решения уравнения переноса излучения в естественных средах.

Интерес к подобным задачам связан, в частности, с интенсивным развитием техники активного и пассивного дистанционного зондирования неоднородных и случайных сред, средств вычислительной техники и математики, создавшим необходимые предпосылки для качественного повышения точности экспериментальных измерений и численного моделирования. К числу практических задач, входящих в указанную категорию, следует отнести, в частности, различные техники атмосферного зондирования, в т.ч. лидарное зондирование атмосферы на различных высотах, пассивный мониторинг атмосферного аэрозоля наземными и космическими средствами, мониторинг озоноразрушающих и парниковых газов и других малых газовых составляющих в аэрозольной атмосфере и др. Кроме того, системы передачи информации лазерным излучением в атмосфере и воде, морские и авиационные лазерные маяки, лазерные геодезические приборы и др. также работают на основе прецизионного измерения полей оптического излучения в мутной среде. Как проектирование и изготовление, так и эксплуатация перечисленных технических средств требует численного моделирования распространения излучения в среде на высоком уровне точности и достоверности.

Все это, в свою очередь, требует разработки высокоточных и высокоэффективных вычислительных алгоритмов и методов, реализующих потенциально высокие возможности современной вычислительной техники на уровне, соответствующем достигнутому прогрессу в технике измерений.

Численное моделирование распространения излучения в случайных средах также необходимо в:

задачах радиолокации неоднородных сред (глубинная радиолокация небесных тел, радиозондирование неоднородной плазмы, радиолокация гидрометеоров, растительных покровов и др.)

натурных и лабораторных экспериментах по распространению света в искусственных воздушных и водных суспензиях мелкодисперсных частиц, туманах, дымах, биологических жидкостях и тканях, фотографических слоях, лакокрасочных покрытиях, молочных стеклах, бумаге и подобных материалах и др.

Общим для всех перечисленных случаев является рассеяние электромагнитного излучения различных диапазонов длин волн в случайной среде, состоящей из более или менее плотно упакованных рассеивателей.

Теория переноса излучения представляет собой один из наиболее общих и широких вариантов единого подхода к описанию большого количества разнообразных явлений и ситуаций рассеяния волн на случайных совокупностях рассеивающих объектов, в т.ч. выше перечисленных. Формальные критерии применимости этой теории, лежащие в основе ее феноменологического вывода и обоснования, позволяют непосредственно применить ее в значительном числе перечисленных ситуаций.

Исследования показали, что теория переноса излучения может быть применена и к достаточно плотно упакованным средам, при условии отказа от вычисления входящих в уравнение переноса макроскопических параметров среды на основе индивидуальных характеристик рассеяния отдельными частицами и перехода к эффективным параметрам рассеяния совокупностью коррелированных между собой частиц.

В средах с непрерывным распределением коэффициента преломления (турбулентность) широко применяется аппарат функций когерентности поля и уравнений марковского приближения. Как было неоднократно показано ранее [42], уравнение марковского приближения для функции когерентности второго порядка полностью эквивалентно уравнению переноса излучения в малоугловом приближении.

В значительном числе перечисленных ситуаций рассеяние излучения в среде характеризуется высокой анизотропией, т.е. при не малых по сравнению с

длиной волны размерах частиц среды имеет место преимущественное рассеяние излучения на малые углы (почти вперед). Рассеяние в других направлениях в таких средах невелико. Кроме того, известны примеры сред с преимущественным рассеянием в отдельных направлениях на не малые углы (радуга, гало и др.). Это приводит к хорошо известным вычислительным трудностям при численном решении уравнения переноса излучения в таких средах, связанным с необходимостью одновременного учета больших и малых величин в одном уравнении. Обзор большого количества методов решения задач указанного типа можно найти в известной монографии Ж. Ленобль [17]. Так, решение краевых задач для уравнения переноса излучения в плоскостой среде методами матричной алгебры сводится к плохо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений. При решении задач методом статистического моделирования (Монте-Карло) требуется оценка статистики маловероятных событий с большим статистическим весом, что сильно увеличивает необходимые вычислительные затраты.

В некоторых случаях, например в задачах радиолокации сильных рассеивателей сквозь анизотропно рассеивающую среду, рассеянием на не малые углы в среде можно пренебречь. К задачам такого типа относится, в частности, радиолокация поверхности Земли и небесных тел сквозь турбулентную атмосферу и ионосферу. Поскольку обратное рассеяние в объеме среды в данном случае не существенно, указанные выше трудности не имеют места в этом классе задач. Практически, однако, в настоящее время распространены системы зондирования широкополосными и импульсными сигналами со сложными конфигурациями источников и приемников. Адекватное компьютерное моделирование таких систем требует численного расчета рассеяния в широком спектре частот для многих вариантов позиционирования источника и приемника по отношению к среде, что связано с большим расходом вычислительных ресурсов. Даже при наличии современных высокопроизводительных суперкомпьютерных систем, создание эффективного алгоритма моделирования является нетривиальной задачей.

Многие естественные рассеивающие среды (падающие дождевые капли, снег и другие кристаллические частицы льда) обладают анизотропией, поскольку состоят из несферических частиц, обладающих преимущественной ориентацией. В

распространении излучения в таких средах существенную роль играют поляризационные эффекты. Сочетание эффектов рассеяния, значительной пространственной неоднородности выпадающих осадков в атмосфере и частично отражающих свойств поверхности приводит к необходимости рассмотрения задач теории переноса поляризованного излучения в трехмерно-неоднородной среде, обладающей дихроизмом. К настоящему времени, известно лишь небольшое число опубликованных работ по численному решению векторного уравнения переноса излучения в трехмерно-неоднородных анизотропных рассеивающих средах.

Разработка эффективных асимптотических и численных методов решения упомянутых выше задач представляется актуальной не только с точки зрения оптики и радиофизики, но и с общенаучной точки зрения, поскольку вследствие универсальности математического аппарата, разработанные в диссертации подходы применимы к волнам и средам различной физической природы.

Цель работы состоит в:

разработке методов решения уравнения переноса излучения в малоугловом приближении, обеспечивающих учет дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения (распределения длин пробегов излучения в среде) с высокой степенью точности

разработке методов решения краевых задач для уравнения переноса излучения и задач, сводящихся к ним, с разделением решения на особенную, сильно анизотропную и гладкую (регулярную) часть с высокой степенью точности

разработке методов численного моделирования широкополосной глубинной радиолокации небесных тел с учетом слоистой структуры поверхностных отложений, рельефа поверхности и неоднородностей ионосферы

разработке методик и проведении численного моделирования полей излучения в трехмерно неоднородных рассеивающих средах, обладающих дихроизмом

разработке методик решения некоторых обратных задач, т.е. задач интерпретации результатов дистанционного зондирования, на основе методов теории переноса излучения в рассеивающих средах

Научная новизна.

Впервые построено приближенное малоугловое решение уравнения переноса излучения, учитывающее дисперсию длин путей распространения рассеянного

излучения в произвольно высоком порядке точности. Получены решения для нестационарного и векторного уравнения переноса излучения.

На основе построенного малоуглового приближения предложен метод решения уравнения переноса излучения в среде с сильно анизотропным рассеянием с выделенными особенными и нерегулярными компонентами решения.

Впервые дана количественная теория эффекта гало обратного рассеяния узкого пучка в среде с сильно вытянутой вперед индикатрисой рассеяния. Впервые указан количественный критерий проявления эффекта в среде с известными параметрами..

Впервые исследовано распространение узкого пучка излучения в рассеивающей среде с рефракцией.

Впервые исследован эффект когерентного усиления обратного рассеяния в рассеивающей среде с градиентом коэффициента преломления.

Впервые проведены компьютерные расчеты глубинной радиолокации сквозь рельефную поверхность небесного тела и неоднородную ионосферу с корректным моделированием апертурного синтеза.

Научная и практическая значимость

работы заключается в разработке и развитии эффективных асимптотических и численных методов оптики и радиофизики неоднородных и случайных сред, которые, в частности, позволили:

уточнить практические численные решения уравнения переноса излучения в условиях сильно анизотропного рассеяния излучения в среде

обобщить ряд результатов теории переноса излучения на среды с регулярными градиентами коэффициента преломления

создать и реализовать методики практического расчета широкополосных сигналов при неоднократном прохождении волны сквозь случайно неоднородную среду с применением сложных процедур обработки сигналов (согласованная фильтрация, синтез апертуры).

Достоверность результатов диссертационной работы определяется их верификацией при разнообразном тестировании, включающим сравнение с точными решениями (при их наличии), сравнение с результатами экспериментов и расчетов по другим моделям, четким физическим смыслом полученных ре-

зультатов и согласованностью их с современными представлениями о предмете исследования.

Реализация и внедрение результатов работы.

Работа выполнялась в рамках научных планов физического факультета Московского государственного университета, Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, проектов Российского фонда фундаментальных исследований, договора о сотрудничестве физического факультета МГУ с Институтом аэронауки Макса Планка (Германия), тематических программ Международного института космической науки (Берн, Швейцария), научно-исследовательских программ Немецкого аэрокосмического института (DLR) и Европейского космического агентства (ESA). Часть работы выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-02-12065 офи-м "Фундаментальные задачи микроволнового дистанционного зондирования Земли из космоса".

Научные положения диссертации и разработанные на их основе методики, алгоритмы и программы использовались для совместных исследований в следующих организациях: Московский государственный университет, ИРЭ РАН, МРАе, Universita La Sapienza (Rome).

Личный вклад соискателя.

В список положений, выносимых на защиту, включены результаты и выводы, в которых вклад соискателя является определяющим.

Апробация работы

Основные результаты исследований опубликованы в научных журналах и представлены на конференциях, в т.ч. Международных Байкальских Конференциях Молодых Ученых (БШФФ) (Иркутск, 2002 - 2007), Международных Микросимпозиумах по Сравнительной Планетологии (Москва, ГеоХи, 2003-2007), Генеральной Ассамблее Европейского союза Наук о Земле (Austria, Wien, 2007), Ломоносовских чтениях (Москва, МГУ, 2004, 2005), научной конференции "Сверхширокополосные сигналы в радиолокации, связи и акустике" (Муром, 1-3 июля 2003 г.), Всероссийских научных конференциях "Проектирование инженерных и научных приложений в среде MatLab" (С.-Петербург, 2007, Астрахань, май 2009), ежегодных семинарах "Физика авроральных явлений" (Апатиты, 2008, 2009), General Assembly of the International Union of Radio Science (Chicago, Illinois, USA August 7-16, 2008), Международной конференции по авиацион-

ной и спутниковой метеорологии памяти профессора С.В. Солонина (Санкт-Петербург, Российский государственный гидрометеорологический университет, 7-10 октября 2008), XXIII Всероссийская научная конференция "Распространение радиоволн 23-26 мая 2011 года (ок. 150 участников) Международных Симпозиумах по Атмосферной Радиации и Динамике "МСАР(Д)"(2004, 2006, 2009, 2011, СпбГУ, С.Петербург-Петродворец) XVII Международном симпозиуме "Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы"(28 июня - 1 июля 2011 года, ИАО СО РАН, г. Томск), Международных конференциях "Современные проблемы оптики естественных вод"(2009,2011, С.-Петербург), Всероссийских конференциях по распространению радиоволн (2002, 2005, 2011), Международных конференциях "Поляризационная оптика"(Москва, МЭИ, 2008, 2010), Международных Крымских конференциях "СВЧ Техника и коммуникационные технологии"(2003, 2008, 2010, 2011,2012, Севастополь, Крым, Украина), Всероссийских открытых конференциях "Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса"(Москва, ИКИ РАН, 2011,2012), Третьем московском международном симпозиуме по исследованиям Солнечной системы (3MS3) (Москва, ИКИ РАН, 2013), ежегодных конференциях "Физика плазмы в Солнечной системе"(Москва, ИКИ РАН, 2012, 2013), конференциях "Техническое зрение в системах управления"(Москва, ИКИ РАН, 2011-2013), Вторых Армандовских чтениях (Муром, 2012), International Radiation Symposium 2012 (Берлин) и др.

Защищаемые положения.

1. Предложенный и развитый новый метод решения задач для уравнения переноса излучения в средах с сильно вытянутыми индикатрисами рассеяния позволяет проводить расчеты угловых и пространственных распределений интенсивности и поляризации электромагнитного излучения в рассеивающих средах с сильно вытянутыми вперед индикатрисами рассеяния.

С помощью предложенного метода проведен расчет интенсивности когерентного обратного рассеяния в мутной среде на периферии пика обратного рассеяния.

2. Эффект гало обратного рассеяния светового пучка проявляется в средах, удовлетворяющих сформулированному в работе критерию для параметров рассеяния света в среде.

3. Разработанные методики численного моделирования радиолокации с синтезированной апертурой для предварительной оценки и прогноза результатов и интерпретации экспериментальных данных зондирования позволяют проводить оценки и прогноз результатов глубинной радиолокации внутреннего строения небесных тел, а также интерпретацию результатов измерений.

Поглощение электромагнитных волн в марсианских полярных отложениях согласно полученным результатам практически не отличается от поглощения электромагнитных волн в чистом льду, что свидетельствует о высокой степени чистоты марсианского льда.

4. Пространственные и угловые распределения интенсивности и поляризации теплового радиоизлучения дождевых осадков в миллиметровом диапазоне волн практически полностью определяются ячеистой структурой дождевых полей. Поляризационные характеристики теплового радиоизлучения земной поверхности в различных диапазонах миллиметровых волн позволяют идентифицировать дождевые осадки.

Глава 1

Обзор литературы

Значительный исследовательский интерес к распространению волн в средах с крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями обусловлен большим количеством практически важных приложений. Многие природные среды, в частности турбулентная атмосфера, характеризуются фрактальной структурой или какими-либо иными законами иерархического подобия масштабов, в соответствии с которыми крупномасштабные структуры являются преобладающими (в пределах, ограниченных внутренним и внешним масштабами).

Рассеяние волн такими неоднородностями происходит преимущественно на малые углы, т.е. характеризуется значительной анизотропией. Созданы и используются большое количество приближенных методов, специально предназначенных для анализа рассеяния волн в средах и на объектах такого типа. Сюда относятся такие методы, как метод плавных возмущений (Рытова), метод параболического уравнения (Леонтовича), марковское приближение для функций когерентности поля, различные формы малоугловых приближений теории переноса излучения, метод фазовых экранов и т.п. Все эти методы характеризуются относительно высокой вычислительной эффективностью и простотой по сравнению с общими методами решения уравнений электромагнитного поля с полным учетом рассеяний во всей сфере направлений.

В случае необходимости учета немалоуглового рассеяния в средах указанного типа возникают значительные трудности вычислительного характера. Для корректного описания сильно анизотропных угловых распределений требуется учет большого количества членов в разложениях в ряды искомых решений и

других функций, входящих в уравнения, подлежащие решению (индикатриса рассеяния в уравнении переноса излучения, неприводимые вершинные функции в уравнении Бете-Солпитера и т.д.)

При этом, детальный расчет сильно анизотропных распределений интенсивности связан с совместным учетом большого количества малых и больших величин. Это приводит к большим плохо обусловленным системам уравнений, для решения которых требуются значительные вычислительные ресурсы и специальные меры по регуляризации решения. В случае метода статистических испытаний (Монте-Карло), задача сводится к оценке вероятности маловероятных событий, для которой требуется значительное число независимых испытаний. Все это обуславливает необходимость развития специальных методов решения подобных задач, обеспечивающих требуемую регуляризацию и рациональное использование вычислительных ресурсов.

С развитием техники излучения и регистрации волн в оптическом и радиодиапазонах в технике дистанционного зондирования природной среды все большее распространение и практическое применение получают импульсные и сложные сигналы, сложные конфигурации источников и приемников поля, процедуры обработки сигналов и т.д. Все это многократно увеличивает вычислительные затраты, необходимые для адекватного численного моделирования реальных экспериментальных ситуаций. С другой стороны, тенденция постоянного расширения вычислительных ресурсов, доступных для использования, открывает новые возможности исследования, недоступные в прошлом. В ранее сделанных расчетах, результаты которых опубликованы в литературе, как правило, принимались значительные упрощающие предположения, определяющие точность и применимость полученных результатов, и применялись ограниченные по мощности вычислительные системы. Таким образом, на текущий момент весьма актуально развитие методов численного моделирования реальных экспериментов на новом уровне точности и достоверности.

Теория переноса излучения является весьма широкой и общей теорией, представляющей мощный вычислительный аппарат для решения широкого круга задач рассеяния излучения в случайных средах. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие методов решения задач теории переноса излучения, и

сводящихся к ним, применительно к проблемам дистанционного зондирования сред с сильно анизотропным рассеянием.

1.1 Перенос излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием.

Световой луч в действительности является основным объектом теории переноса излучения, впервые феноменологически сформулированной Хвольсоном [1] на основе представлений лучевой (геометрической) оптики. Последующие попытки строгого вывода теории переноса излучения из основных принципов классической электродинамики [2, 3] фактически привели к подтверждению этого положения. Таким образом, элементарным инфинитезимальным решением уравнения переноса излучения (УПИ) является луч, представляющий собой сингулярную (особенную) функцию пространственных и угловых переменных. Это значит, что пространственные и угловые особенности сохраняются в решении уравнения переноса излучения, если они присутствуют в начальной конфигурации источников света, порождающих световое поле в мутной среде. В численном решении эти особенности должны быть аподизированы и представлены на сгущенной сетке узлов [4] либо записаны отдельно в виде функций, несущих характерные особенности решения [5].

Для ряда природных и антропогенных рассеивающих сред во многих практически важных диапазонах спектра электромагнитных волн типичны сильно вытянутые (анизотропные) индикатрисы рассеяния, соответствующие высоким (близким к единице) значениям параметра асимметрии рассеяния.

К этим средам относятся, в первую очередь, разреженные среды крупных частиц, не малых по сравнению с длиной волны. При больших расстояниях между частицами, удовлетворяющих исходным положениям феноменологической теории переноса излучения, параметры поглощения и рассеяния малого объема среды тождественны средним индивидуальным параметрам одной частицы. Средами такого типа являются атмосферные аэрозоли и туманы [8], искусственные лабораторные туманы [9] и жидкие суспензии [10], морская вода [6], дымы, гидрометеоры и т.д.

Сильная вытянутость индикатрис рассеяния характерна также для плотноупакованных сред, состоящих из крупных частиц. К ним относятся биологические жидкости и ткани [7], ледяные и снежные покровы, планетные реголиты и т.д. В случае плотной упаковки частиц параметры рассеяния среды не тождественны параметрам рассеяния отдельной частицы, а представляют собой некоторые эффективные характеристики ансамбля частиц. Для вычисления эффективных характеристик плотноупакованных сред существуют специальные приемы и методы, выходящие за пределы целей и задач данной работы. Кроме того, преимущественно малоугловое рассеяние оптических и радиоволн типично для сплошных сред с непрерывным спектром флуктуаций (комплексного) показателя преломления, в т.ч. турбулентной атмосферы и неоднородной плазмы. В этом случае исходные предпосылки феноменологической теории переноса оказываются полностью нарушенными. Однако, в этих средах работает теория функций когерентности волнового поля в марковском приближении [275], эквивалентная малоугловому приближению теории переноса излучения.

Сосредоточенные и коллимированные источники порождают в таких средах сильно анизотропные поля яркости, трудности математического моделирования которых хорошо известны [17]. Для численного моделирования таких полей используются специальные вычислительные методы, в том числе, перенормировка коэффициентов рассеяния [18, 11], различные приемы разделения индикатрисы рассеяния на несколько составляющих [12] метод квазидиффузии [13] и т.д. Среди них, большое количество предложенных решений могут быть сведены в единый общий подход, заключающийся в выделении из общего решения уравнения переноса излучения (УПИ) особенных и сильноанизотропных частей, которые эффективно вычисляются каким-либо приближенным методом. Полное решение задачи может быть затем найдено в виде

$$L = L_a + L_D, \quad (1.1)$$

где L_a – выделенная анизотропная часть решения. Остальная часть решения (диффузная компонента L_D) оказывается существенно более гладкой, чем полное решение L , и ее нахождение представляет собой гораздо более простую задачу. Кроме того, по сравнению с различными методами перенормировки ко-

эффициентов данный подход свободен от искажений индикатрисы рассеяния и возникающей вследствие этого систематической ошибки.

В простейшей классической задаче об однородном плоском слое мутной среды, освещенном однородным потоком параллельных коллимированных лучей плоского мононаправленного (ПМ) источника излучения, особенной частью светового поля является нерассеянная (ослабленная) часть падающего потока. Чандрасекар [14] выделил эту часть излучения в виде отдельного слагаемого в решении УПИ, и предложил способ нахождения остальной части решения методом дискретных ординат на основе квадратурных формул Гаусса. Романова [15] и Ирвин [16] вместе с нерассеянным потоком излучения выделили в отдельное слагаемое в решении также часть излучения, рассеянного на малые углы, на основе малоуглового приближения (МУП), сформулированного Гаудсмитом и Саундерсоном [19]. Предлагались также и другие варианты аналитических выражений для сингулярных частей светового поля, в частности, однократно рассеянное излучение [20], рассеянное вперед излучение в приближении Кирхгофа на сферах эквивалентного радиуса [21], и т.д.

1.2 Малоугловые приближения теории переноса излучения.

Поскольку указанные приемы выделения особенностей светового поля тесно связаны с решениями УПИ в малоугловом приближении, кратко остановимся на основных результатах в этой области. Малоугловое приближение в теории рассеяния было впервые применено Венцелем в работе [22], в которой траектории многократно рассеянных на малые углы частиц приближенно заменены прямыми и тем самым получено приближенное решение. Боте [23] применил некоторые преобразования интегрального слагаемого УПИ и показал, что угловое распределение яркости приближенно можно считать гауссовым. Гаудсмит и Саундерсон [19] использовали разложение углового распределения яркости по сферическим гармоникам и получили хорошо известное решение УПИ в замкнутой аналитической форме, многократно использованное различными исследователями в дальнейшем. Компанеец [24] и другие авторы локально аппроксимировали сферу направлений касательной плоскостью и получили ре-

шение в форме многомерной свертки в этой плоскости, которая явилась новой независимой формой малоуглового приближения.

Все перечисленные формы МУП не учитывают дисперсии длин путей распространения в силу грубости допущения $\mu = 1$. Все попытки учета дисперсии путем уточнения приближения косинуса следующим членом тейлоровского ряда $\mu = \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, сделанные рядом исследователей (см. обзоры [25, 26] и цитированную там литературу), неизменно приводили к преобразованию интегрального слагаемого УПИ по Боте и в конечном итоге к диффузионному приближению [2]. Последнее является достаточно грубым и сводится к гауссовскому выражению для углового распределения яркости.

Для случая сильного поглощения разработано приближенное решение с учетом дисперсии [27, 28] ($l_a \ll l_{tr}$), где l_a и l_{tr} — длина поглощения фотонов и транспортная длина упругого рассеяния. Для нестационарного УПИ предложено приближенное решение [29]. Однако, это решение УПИ, которое учитывает флуктуации длин путей распространения фотонов, может быть получено лишь в диффузионном приближении по угловым переменным в интеграле упругих столкновений. Известно, что диффузионное приближение (приближение Фоккера-Планка) применимо лишь для индикатрис, убывающих быстрее четвертой степени угла рассеяния. На практике, это условие обычно не выполняется. Следовательно, результаты [27, 28, 29] могут применяться лишь для приближенного анализа качественных закономерностей распространения света в таких средах. Во многих природных и естественных средах, индикатрисы рассеяния убывают медленнее четвертой степени угла рассеяния, и для исследования таких сред требуются другие приближенные методы [30, 31, 32]. Однако, поскольку точного решения уравнений малоуглового приближения с учетом поглощения для таких индикатрис рассеяния не найдено, точность этих методов может быть оценена лишь в сравнении с экспериментальными данными или результатами численных расчетов.

Малоугловое приближение теории переноса с учетом поляризации впервые было получено в работе [33], где была рассмотрена эквивалентная проблема рассеяния частиц со спином. Это и последующие [34] решения для поляризованного излучения также не учитывают дисперсию длин путей распространения, что приводит ко всем тем же трудностям, что и без учета поляризации.

Параболическое уравнение Марковского приближения для обобщенных параметров Стокса, эквивалентное МУП для нестационарного уравнения переноса излучения, для магнитоактивных сред было получено в нескольких работах [35, 36].

Точность ранее предложенных малоугловых приближений часто оказывается недостаточной. В частности, дисперсия длин путей распространения рассеянного излучения учитывается достаточно грубо [37, 38] или не учитывается вообще [39, 40, 19, 41, 42, 43, 44, 45]. Это приводит к систематическим ошибкам в решении, которые растут с длиной оптического пути излучения в среде. Такие решения ограничено применимы к нестационарным задачам для УПИ, где дисперсия длин пробегов в среде является определяющим эффектом [37, 46, 47, 48, 49, 50]. Кроме того, в этих решениях отсутствуют важные физические эффекты, наблюдаемые в эксперименте, в том числе поворот тела яркости с глубиной [6].

Если такое решение применяется в численной схеме с выделением особенных и анизотропных частей решения типа (1.1), значительная часть анизотропной части решения оказывается включенной в диффузную компоненту L_D . Это приводит к росту вычислительной сложности ее нахождения и к увеличению ошибки, т.е. снижает эффективность численной схемы в целом.

Некоторое время назад были предложены эффективные варианты малоугловых приближений, обеспечивающие учет дисперсии длин пробегов в среде с высокой точностью. Стационарные решения для плоского мононаправленного (ПМ) источника в плоскостой среде были сформулированы в работах [51, 52]. В работе [46] получены решения для импульсных ПМ источников, в том числе с учетом поляризации излучения. В работах [53, 54] получены решения для узких пучков, в т.ч. нестационарных. В работе [55] получено решение для точечного изотропного (ТИ) источника в двумерной рассеивающей среде [56]. С помощью методов расчета, развитых в указанных работах, получено также решение задачи о когерентном усилении обратного рассеяния (слабой локализации волн) в среде с сильно анизотропным рассеянием.

1.3 Поле точечного мононаправленного источника – фундаментальное решение уравнения переноса излучения.

Сосредоточенный коллимированный источник излучения (точечный мононаправленный, ТМ) является основным элементарным источником в теории переноса излучения, в которой любая конфигурация источников излучения может быть представлена в виде некоторой линейной суперпозиции элементарных. Решения уравнение переноса излучения вместе с граничными условиями для такого источника фактически являются функциями Грина соответствующих задач, через которые могут быть выражены их общие решения. С появлением лазеров и других сосредоточенных источников высококоллимированного излучения задача о вычислении поля ТМ источника в рассеивающей среде приобрела также и важное практическое значение.

Он же является и наиболее сложным в вычислительном отношении по сравнению с другими типами источников [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 53]. Поле ТМ источника обладает наиболее сложной структурой пространственных и угловых особенностей интенсивности по сравнению с другими основными типами источников, которые присутствуют в поле рассеянного излучения до третьей кратности рассеяния включительно [4]. При этом указанная структура особенностей имеет место при практически любой индикатрисе рассеяния в среде, в т.ч. близкой к изотропной. В случае сильно вытянутой вперед индикатрисы рассеяния соответственно усиливается вклад анизотропной части поля, т.е. излучения, рассеянного на малые углы.

В ряде работ [66, 67] для вывода интегральных уравнений для функции рассеяния ТМ источника в конечном, плоско-параллельном, неоднородном неизлучающем слое с изотропным рассеянием используется принцип инвариантного погружения [68].

Также для практических вычислений успешно применялось моделирование методом Монте-Карло [69, 70]. Метод Монте-Карло является весьма мощным, но требует больших вычислительных затрат и характеризуется плохой сходимостью. Преимущество метода в пригодности для индикатрис весьма произвольного вида, в т.ч. с сильной и слабой анизотропией рассеяния. Так называемый

полуаналитический метод Монте-Карло [71, 72] значительно сокращает вычислительные затраты. В работе [73] показано, как применение некоторых простых формул подобия в процедуре Монте-Карло ведет к дальнейшему сокращению расчетного времени. Представлено две версии процедуры, для малоуглового рассеяния и для немалоуглового. Вычислительные трудности, связанные с сильной анизотропией рассеяния, сохраняются также и при этих подходах.

Таким образом, так же как и в классической задаче с ПМ источником, в практической численной схеме решения должны быть приняты какие-то меры к регуляризации особенностей и анизотропии решения, в т.ч. выделение нерегулярных частей решения в отдельные слагаемые, а также аподизация. Так, в работе [43] поле ТМ источника в среде вычислялось в виде суммы нерассеянного излучения и малоуглового рассеяния вперед в диффузионном малоугловом приближении. В работе [74] поле было найдено в виде суммы направленной и диффузной компонент, в малоугловом диффузионном приближении и диффузионном приближении, соответственно.

Однако, впоследствии была установлена симметрия структуры особенностей углового и пространственного распределения интенсивности точечного мононаправленного (ТМ) источника в среде, имеющая место как для однократно рассеянного излучения [75, 76], так и для произвольной кратности рассеяния [77]. Тем самым, в численной схеме с выделением особенностей обратный поток излучения должен быть также выделен в виде отдельной компоненты, основной вклад в которую определяется приближением квазиоднократного обратного рассеяния.

Соответствующие схемы решения были предложены и реализованы для поля точечного мононаправленного источника в двумерной [53] и трехмерной [54] рассеивающих средах, соответственно, и для расчета когерентного усиления обратного рассеяния [78], при некоторых допущениях эквивалентного рассматриваемой здесь задаче.

Тессендорф [64] с помощью квантовомеханических методов расчета получил явное выражение для решения через эволюционный оператор задачи. Однако, полученные им численные результаты относятся к сравнительно простому случаю изотропного рассеяния. В работе [79] при малых размерах частиц

к проблеме применялся двумерный расчет методом дискретных ординат (код TWOTRAN).

Среди ранних работ по ТМ источникам следует отметить работу Элиотта [80], в которой проводится анализ на основе двумерного преобразования Фурье и получено одно из немногих известных на сегодняшний день аналитических решений. Обширный обзор ранних работ по ТМ источникам в средах с изотропным рассеянием приводится в работе Рыбицкого [81].

В работе [82] численно найдено распределение z-компоненты потока излучения ТМ источника в плоском слое с высокой точностью (5 знаков). Использована версия дискретно ординатного метода в сочетании с двумерным преобразованием Фурье и численными методами линейной алгебры, для нормального и наклонного падения пучка света на плоский слой.

Предложенный метод основан главным образом на работе [83], но вместо решения псевдозадачи методом FN [84] используются варианты дискретно ординатного метода [85, 86] и получено новое, альтернативное решение.

Хелливелл [62] попытался непосредственно применить к решению неявную конечно-разностную схему Карлсоновского типа [87]. Никаких мер для регуляризации особенностей светового поля принято не было, что явилось возможной причиной плохого качества численных результатов, отмеченного самим автором.

В оптически тонких средах, решение хорошо аппроксимируется в приближении однократного или двукратного рассеяния [89], вычисление которого сводится к однократному или двукратному численному интегрированию.

Многократное рассеяние в таких ситуациях исследовалось в работах [90, 91, 92] решением УПИ в малоугловом приближении.

В средах с сильно анизотропным рассеянием [6, 58, 7] к задаче об узких пучках эффективно применяется малоугловое приближение. Соответствующие решения для элементарных частиц известны с середины XX в [24, 93]. Для исследования рассеянного назад излучения часто используется приближение квазиоднократного обратного рассеяния [94, 95, 96].

Часто принимаются дополнительные упрощающие предположения, например о Гауссовом характере углового и/или пространственного распределения интенсивности [58, 97, 98, 63, 61]. Это частично оправдывается случайным ха-

рактором многократного рассеяния, в статистическом пределе приводящим к гауссовскому распределению. Такие допущения, вместе с модельными функциями рассеяния типа Гаусса [99, 100, 63], Юкавы [58] и других типов [101] приводят к значительному упрощению решений, с помощью которых часто могут быть получены элементарные оценки тех или иных величин в замкнутой аналитической форме [59, 101].

Для частиц с сильно вытянутой индикатрисой, уравнения малоуглового приближения теории переноса решены точно в работах [102, 103, 104] и приближенно в [43, 44]. В противоположном предельном случае, при рассеянии, близком к изотропному, хорошо работает диффузионное приближение [105, 106, 107]

В работе [108] сделана попытка объединить малоугловое и диффузионное приближение в целях получить решение, применимое для индикатрис рассеяния обоих типов. В работе [109] также получено приближенное решение задачи с ТМ источником. Главной особенностью предпринятого подхода является диффузионное описание потока мощности в направлении, нормальном к оси распространения. Для прямого и обратного потоков получена пара зацепленных дифференциальных уравнений, справедливых в параксиальном приближении. Решения записаны в общем аналитическом виде, пригодном к неоднородной аэрозольной среде.

В работе [60] Стоттс проанализировал ограничения спектрального диапазона Фурье-преобразования сверху и снизу при решении задачи о распространении узкого пучка в малоугловом приближении [58, 42]. Фактически, метод восходит к теории многократного рассеяния быстрых заряженных частиц, например электронов [41]. В работе [101] результаты работы [60] расширены и применены к нескольким модельным фазовым функциям (гауссовской, экспоненциальной, биномиальной и юкавской).

1.4 Слабая локализация

Когерентное усиление обратного рассеяния, или слабая локализация, интенсивно исследуется начиная с 70х гг прошлого века [110, 111, 10].

Слабая локализация является наиболее устойчивым когерентным эффектом, имеющим место в случайных средах. По этой причине он проявляет себя

во многих ситуациях, в т.ч. обнаруживается по данным астрономических наблюдений [112]. Кроме того, следует ожидать проявления эффекта при однопозиционном радарном зондировании диффузно рассеивающих целей, в частности растительных покровов. Несмотря на это, многие расчеты по радиолокации подобных целей выполнены в рамках теории переноса излучения, полностью игнорирующей когерентные эффекты [113]. Аналогичные эффекты имеют место при рассеянии частиц в веществе [114]. В ранних работах по слабой локализации принимались значительные упрощения, типа приближения двукратного рассеяния [111]. В приближении Тверского, принятом в большом количестве работ, задача о слабой локализации волн в среде с многократным рассеянием сводится к решению краевой задачи для уравнения переноса в этой среде.

В исследованиях на основе теории переноса излучения часто использовалось прямое произведение электромагнитных полей в связи с математической простотой (например [115]). Мищенко [116] применил этот подход для исследования общих характеристик усиления обратного рассеяния. Из этих результатов следовало, что вклады скрещенных и лестничных диаграмм не всегда в точности равны, как это ранее утверждалось в [118] на основе моделирования векторного рассеяния.

Рассеяние также считалось изотропным [111, 10]. Эффекты многократного рассеяния часто рассматривались в диффузионном приближении [10], предполагающем угловое распределение интенсивности поля, близкое к изотропному.

Кобаяши и др. [117, 117, 117] обобщили результаты векторной волновой теории для плоской волны [119] на случай сферического волнового фронта, в приближении двукратного рассеяния при гауссовских диаграммах направленности передающей и принимающей антенн. Там было показано, что когерентное усиление обратного рассеяния имеет место в том числе для сферических волн, излучаемых передающей антенной в ограниченный телесный угол. Ихара и др. [120] экспериментально подтвердили теорию усиления обратного рассеяния пучка ограниченной ширины. В этих экспериментах использовался локатор с шириной диаграммы 10 градусов по уровню -3 дБ на частоте 30 ГГц, и наполненные водой сферы были случайно распределены в полистиреновой пене.

Эффекты слабой локализации при конечной ширине пучка исследовались также в работах [121, 122]. Огучи и Ихара [122] разработали технику компью-

терного моделирования на основе метода [116], считая диаграмму направленности антенны гауссовой. Сферические капли воды однородного размера считались равномерно распределенными в конечном объеме среды. В этих работах проводилось статистическое моделирование рассеяния до 7й кратности, включительно. При этом, согласно теории Тверского [123], самопересекающиеся траектории учитывались специальным образом.

Кобаяши и др. [121] распространили свою аналитическую теорию двукратного рассеяния на сфероидальные частицы льда и воды для исследования когерентного обратного рассеяния ограниченного пучка излучения. В частности, оценивались различия вкладов лестничных и скрещенных диаграмм, общим образом сформулированные в [116].

Многие природные и искусственные рассеивающие среды, исследованные в экспериментах [124, 125] обладают сильно анизотропными индикатрисами рассеяния. Для расчета эффектов слабой локализации в этих средах характерны те же трудности вычислительного характера, что и для решения уравнения переноса излучения.

В работе [126] формально разделены малые и большие кратности рассеяния. Однако, проблема сильной анизотропии рассеяния таким образом не снимается. Известной степени согласия между экспериментальными данными и диффузионной теорией слабой локализации можно достигнуть формальной заменой длины свободного пробега транспортной длиной, $l \rightarrow l_{tr} = l/(1 - g)$ [10].

Значительное распространение в практике расчетов слабой локализации получило приближение однократного обратного рассеяния [111]. Как было показано Рогозкиным [127], в случае слабой локализации это приближение соответствует периферии пика обратного рассеяния, т.е. относительно большим углам отклонения от обратного направления. Маринюк и Рогожкин [128] отдельно рассмотрели вклады диффузного и однократного обратного рассеяния в когерентный пик и получили их асимптотические оценки. Однако, какого-либо численного или аналитического общего решения, которое бы содержало в себе оба эти приближенных решения, предложено не было.

При малых углах θ и больших оптических толщинах среды решение в приближении однократного обратного рассеяния, предложенное в [128], расходится. Оказывается, что эта расходимость связана с отсутствием учета дисперсии

длин путей распространения рассеянного излучения в малоугловом приближении теории переноса излучения, использованном при выводе. По этой же причине, оно не вполне пригодно для выделения анизотропной части в устойчивой численной схеме [54].

Значительный прогресс в численных расчетах когерентного усиления обратного рассеяния был недавно достигнут при помощи техники Т-матриц [130, 131, 132], который весьма эффективно применяется к различным проблемам физики волн в случайных средах. Основные уравнения метода применительно к задаче слабой локализации с учетом поляризации излучения были сформулированы в работе [130]. В работе [131] получено решение для произвольного угла падения излучения на среду. В [132] проделаны численные расчеты для полубесконечной среды. Там же отмечено, что распространение метода на среду конечной толщины весьма затруднительно.

Халке [133, 134] получил решение с помощью методов инвариантного погружения теории переноса излучения и вычислил его для сред с параметром анизотропии рассеяния $g = 0.6$ [133] и $g = 0.8$ [134], соответственно. К задаче слабой локализации волн также применялись методы Монте-Карло [135]. Однако, поскольку не было принято специальных мер для выделения анизотропно рассеянной части излучения, этим методам в полной мере присущи все трудности, связанные с анизотропией рассеяния. Также известны попытки непосредственного решения уравнений Максвелла [136], однако они ограничены относительно небольшими объемами среды в связи с большой вычислительной трудоемкостью.

Некоторое время назад были предложены эффективные численные схемы для скалярного УПИ с ТМ источником, явно включающие в себя диффузную и однократно обратно рассеянную компоненты [53, 54]. С незначительными модификациями эти схемы также применимы к задаче когерентного усиления обратного рассеяния от случайной среды.

1.5 Перенос излучения в средах с рефракцией.

Наиболее развитыми в теории переноса излучения являются методы решения для рассеивающих сред при отсутствии градиентов коэффициента преломле-

ния. Влияние макроскопических неоднородностей коэффициента преломления среды в эффектах когерентного обратного рассеяния до сих пор практически не исследовалось. Так, в работе [137] рассмотрено когерентное усиление обратного рассеяния от среды с постоянным однородным коэффициентом преломления, отличным от единицы. Случай среды с непрерывным градиентом коэффициента преломления не был исследован до появления работ [139, 140].

Тем не менее, сочетание случайного рассеяния с регулярными градиентами коэффициента преломления характерно для ряда природных и антропогенных сред распространения излучения. Большое число технологических ситуаций, где градиенты коэффициента преломления оказывают влияние на лучистый перенос тепловой энергии в среде, обсуждается в работе [138]. Кроме того, среды такого типа встречаются среди объектов радиолокационного зондирования, где эффекты когерентного обратного рассеяния были впервые обнаружены более двадцати лет назад [141]. К числу таких сред относятся ионосферная и солнечная корональная плазма, где присутствуют различные флуктуации плотности плазмы вместе с ее регулярной слоистой стратификацией [142, 143]. Земные и планетные ледяные и снежные покровы с вертикальной стратификацией плотности [144, 145] также являются объектом радиолокации. По этой причине, представляется актуальным исследование влияния градиентов коэффициента преломления на эффект когерентного усиления обратного рассеяния излучения в среде.

В настоящее время рассеивающие среды с рефракцией наиболее исследованы в задачах лучистого переноса тепла [138, 146]. Известны результаты по решению уравнения переноса для широких направленных источников излучения в средах с рефракцией [147], а также уравнений марковского приближения в таких средах [148]. Работы по исследованию распространения узких направленных пучков излучения в рассеивающих средах с рефракцией немногочисленны.

В то же время, исследование рефрагирующих сред также представляет значительный интерес. Сочетание рассеяния на случайных неоднородностях и регулярного градиента рефракции имеет место, например, в ионосферной [143] и солнечной [142] плазме, для диагностики которых используются источники направленного излучения различных диапазонов длин волн. Так, в настоящее время созданы и эксплуатируются с различными целями источники мощно-

го радиоизлучения, оснащенные высоконаправленными антенными системами. Многие из них расположены вблизи зоны аврорального овала, где во время мощных солнечных событий наблюдаются весьма высокие уровни случайных флуктуаций плотности плазмы, обуславливающие интенсивное рассеяние излучения. При этом, некоторые из них работают на достаточно низких частотах, в том числе ниже критической частоты ионосферы. При анализе распространения радиоволн в этом случае учет рефракции безусловно необходим.

По перечисленным причинам, представляет интерес решение задачи о распространении узких пучков излучения в среде с рассеянием и рефракцией. Решение указанной задачи и оценка степени влияния регулярного градиента коэффициента преломления и составляет мотивацию данной работы.

В работе [149] проведено численное моделирование распространения узконаправленного пучка излучения в рассеивающей среде с рефракцией. Сформулирована численная схема решения с выделением особенностей прямого и обратного направлений. Получено численное решение уравнения переноса излучения в малоугловом приближении.

В работе [139] для сред с сильно вытянутыми индикатрисами рассеяния, для основных фундаментальных типов источников (плоский мононаправленный, точечный мононаправленный, точечный изотропный) получены асимптотические решения УПИ в малоугловом приближении. На основе полученных результатов известные асимптотические выражения для периферийных областей конуса когерентного обратного рассеяния [128, 129] обобщены на случай рефрагирующих сред. В работе [140] получено решение задачи о когерентном обратном рассеянии в диффузионном приближении, аналогичное известному результату [10] для сред с постоянным коэффициентом преломления.

Глава 2

Теория переноса излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием и малоугловые приближения.

2.1 Задачи для плоскостойкой среды с плоским мононаправленным (ПМ) источником излучения.

2.1.1 Стационарная краевая задача для плоскостойкой среды.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения переноса излучения в плоскостойкой среде $0 < z < z_0$

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)L = -\varepsilon L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – единичный вектор направления, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mu_z = \cos \theta$, $\mu_x = \sin \theta \cos \phi$, $\mu_y = \sin \theta \sin \phi$, $x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ – индикатриса рассеяния, Λ – альбедо однократного рассеяния, $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – угловое распределение интенсивности излучения, $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – произвольная функция источников. Коэффициент ослабления излучения в среде $\varepsilon = 1$ без ограничения общности положим равным единице. Угловое распределение интенсивности излучения L удовлетворяет уравнению

(2.1) в среде и краевым условиям на границах среды

$$L(0) = 0 \text{ при } \mu_z > 0 \quad (2.2)$$

и

$$L(z_0) = 0 \text{ при } \mu_z < 0. \quad (2.3)$$

Типичное упрощение, впервые сделанное в работе [22] и принимаемое в большинстве работ по решению УПИ в малоугловом приближении, сводится к замене $\mu_z \rightarrow 1$, $\mu_x, \mu_y \rightarrow 0$. В работе [23] путем ряда преобразований интегрального члена УПИ найдено приближенное решение гауссовского типа. В [19] получено решение в форме разложения по сферическим гармоникам и найдено хорошо известное приближенное выражение для коэффициентов разложения. Компанеец [24] и ряд других исследователей локально аппроксимировали сферу направлений касательной плоскостью и получили решение в виде многомерной свертки в этой плоскости. Более подробный обзор можно найти в работе [26].

Во всех перечисленных работах в силу грубости предположения $\mu \approx 1$ отсутствовал учет дисперсии длин путей распространения. Все попытки учета дисперсии путем сохранения следующего члена в разложении $\mu \approx 1 - \theta^2/2 + \dots$, сделанные рядом исследователей [37, 38, 48, 49], неизбежно сводились к преобразованию интеграла рассеяния согласно работе [23] и решению гауссовского вида.

В настоящей работе указан новый подход к учету дисперсии длин путей распространения на малых углах и обсуждается его практическое применение к регуляризации известных численных схем решения уравнения переноса излучения.

Вместо разложения в ряд Тейлора $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 + \dots$, разделим (2.1) на

$$\mu_z \frac{\partial}{\partial z} L + \frac{1}{\mu_z} \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L + \frac{1}{\mu_z} \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L = -\frac{1}{\mu_z} L + \frac{1}{\mu_z} \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(x, y, z, \mathbf{\Omega}) x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \frac{1}{\mu_z} f(x, y, z), \quad (2.4)$$

и разложим μ^{-1} в ряд Тейлора по μ вблизи значения $\mu_z = 1$, в случае нормального падения на слой соответствующего направлению максимальной анизотропии углового распределения яркости

$$\frac{1}{\mu_z} \approx 1 + (1 - \mu_z) + (1 - \mu_z)^2 + \dots + (1 - \mu_z)^n + o((1 - \mu_z)^n) \equiv \mu_z^-. \quad (2.5)$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}L + \mu_z^- \mu_x \frac{\partial}{\partial x}L + \mu_z^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y}L = -\mu_z^- L + \mu_z^- \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(x, y, z, \mathbf{\Omega}) x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^- f(x, y, z), \quad (2.6)$$

решение которого L_a и есть искомое решение в малоугловом приближении с учетом дисперсии длин путей распространения в n -м порядке по углу θ , соответствующим порядку использованного Тейлоровского разложения μ^{-1} . Пренебрегая обратным рассеянием в граничных условиях, для углового распределения интенсивности можно поставить начальное условие на передней границе среды $L(0) = 0$, и таким образом сформулировать для него задачу Коши.

Уравнение (2.6) гораздо проще приближенных уравнений, полученных с помощью разложения $\mu_z \approx 1 - \theta^2/2$. В рамках метода сферических гармоник (СГ), угловое распределение яркости разлагается в ряд по сферическим гармоникам

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.7)$$

где $Y_n^m(\theta, \phi)$ – сферические гармоники [150]. Индикатриса рассеяния также разлагается в ряд по сферическим гармоникам

$$x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi'). \quad (2.8)$$

Множителям μ_x , μ_y , μ_z в представлении СГ соответствуют линейные матричные операторы $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, $\hat{\mu}_z$, так что уравнения (2.1), (2.6) сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов соответствующих разложений. В зависимости от характера поставленной задачи, их можно решить средствами матричной алгебры [34] или каким либо численным методом, например методом разностных схем [87]. В матричной формулировке предлагаемый подход непосредственно обобщается на случай векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) для поляризованного излучения (см. раздел 2.1.4).

2.1.2 Нестационарное уравнение переноса излучения.

Нестационарное поле излучения в плоскостойкой рассеивающей среде без учета поляризации соответственно подчиняется уравнению [88]

$$\frac{\partial}{\partial t}L + \mu \frac{\partial}{\partial \tau}L + L - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(t, \tau, \theta', \phi') x(\theta, \phi, \theta', \phi') d\Omega = 0. \quad (2.9)$$

При анализе распространения коротких импульсов без учета рассеяния на большие углы удобным является Фурье-представление в сопровождающей системе координат:

$$L(t, \tau, \mu, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega(t - \tau)) \tilde{L}(\omega, \tau, \mu, \phi) d\omega. \quad (2.10)$$

Спектр углового распределения интенсивности $\tilde{L}$ удовлетворяет уравнению

$$i\omega(1 - \mu)\tilde{L} + \mu \frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{L} + \tilde{L} - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{L}(t, \tau, \theta', \phi') x(\theta, \phi, \theta', \phi') d\Omega = 0. \quad (2.11)$$

Этот спектр может быть представлен в виде суммы ряда по сферическим гармоникам (2.7). Подстановкой этого разложения в уравнение переноса излучения (2.11) задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов, которая затем решается тем или иным методом. Задача для равномерно освещенной плоскостойкой среды допускает разделение гармоник по азимутальному номеру m . В матричных обозначениях система дифференциальных уравнений для коэффициентов гармоник имеет вид

$$\hat{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{C}^m(\tau) = -(\hat{1} - \Lambda \hat{x}) \vec{C}^m(\tau) - i\omega(\hat{1} - \hat{\mu}) \vec{C}^m(\tau), \quad (2.12)$$

где $\hat{x}$ - диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим коэффициентам разложения индикатрисы рассеяния x_l индикатрисы рассеяния $x(\theta)$ по системе сферических гармоник (2.8), $\hat{\mu}$ - двухдиагональная матрица оператора, соответствующего умножению тела яркости на μ , $\hat{1}$ - единичная матрица $\vec{C}^m$ - столбец коэффициентов разложения (2.7). Вычисление элементов матрицы $\hat{\mu}$ сводится к нахождению интегралов от тройных произведений сферических функций, которые выражаются через $3j$ -символы Вигнера [151]. Явные выражения приводятся в литературе [87].

В случае однородной плоскостростой среды конечной оптической толщины τ_0 , задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Интегрируя (2.12) от 0 до τ_0 , получаем систему уравнений в матричной записи

$$\exp(-\hat{B}\tau)\tilde{L}(\tau) - \tilde{L}(0) = 0, \quad (2.13)$$

где $\hat{B} = -\hat{\mu}^{-1}(1 - \Lambda\hat{x}_k) - i\omega(\hat{\mu}^{-1} - 1)$. Эти уравнения вместе с соответствующими граничными условиями (2.2), (2.3) составляют полную систему уравнений для неизвестных распределений интенсивности на границах среды. В стационарном случае ($\omega = 0$), применение к этой системе уравнений так называемого масштабного преобразования [152] приводит к хорошо обусловленной системе, пригодной для численного решения.

В нестационарном случае ($\omega \neq 0$), однако, применение масштабного преобразования не позволяет в достаточной степени улучшить степень обусловленности алгебраической системы уравнений (2.13), что иллюстрирует соответствующий график числа обусловленности (рис. 2.1).

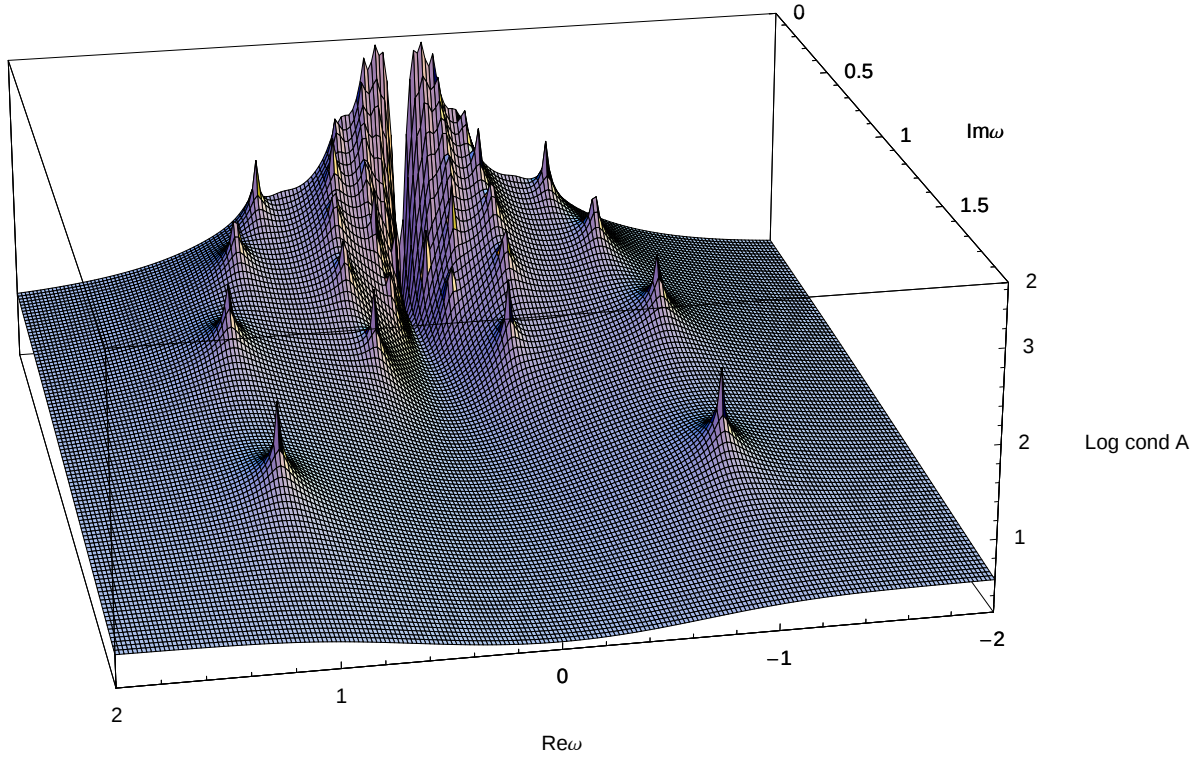


Рис. 2.1: График числа обусловленности дискретизованной системы линейных уравнений краевой задачи для нестационарного УПИ в плоскостой среде. Индикатриса Хеньи-Гринштейна, параметр анизотропии $g = 0.9$, оптическая толщина среды $\tau_0 = 10$, альбеда однократного рассеяния $\Lambda = 0.999$, квадратурная формула Гаусса 64го порядка

На этом графике показана типичная зависимость числа обусловленности системы (2.13) от частоты ω в комплексной плоскости. На графике представлен результат расчета для следующих значений параметров: индикатриса Хеньи-Гринштейна, параметр анизотропии $g = 0.9$, оптическая толщина среды $\tau_0 = 10$, альбеда однократного рассеяния $\Lambda = 0.999$. Система (2.13), состоящая из $N = 64$ уравнений, была дополнена нулевыми граничными условиями для входящего излучения (свободные границы)

$$\tilde{L}(0) = 0, \mu > 0, \quad (2.14)$$

$$\tilde{L}(\tau_0) = 0, \mu < 0 \quad (2.15)$$

аппроксимированными в СГ в форме Маршака [153]. Можно видеть, что число обусловленности на действительной оси частот неудовлетворительно везде, кроме $\omega = 0$ (стационарный случай). Деформация контура интегрирования в ком-

плексной плоскости ($Im \omega > 0$) затруднительна в связи с большим количеством особенностей. По этим причинам, при решении нестационарного УПИ обычно применяются численные схемы (конечно-разностные и др.) [47], или какие-либо приближенные решения [48, 49] непосредственно во временной области.

В приближенных малоугловых решениях нестационарного уравнения переноса, примененных в ряде работ [48, 49], используется последовательное вычисление различных кратностей рассеяния. В оптически толстых средах, где преобладает многократно рассеянное излучение, применение такого подхода затруднительно. В работах [51, 52] и др. предлагается другой подход, пригодный для сред произвольной оптической толщины, и при этом свободный от каких-либо упрощений фазовой функции рассеяния.

Разделим обе части уравнения (2.11) на косинус угла распространения излучения на μ , аналогично уравнению (2.4):

$$i\omega \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \tilde{L} + \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L} + \frac{1}{\mu} \tilde{L} - \frac{1}{\mu} \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{L}(\theta', \phi') x(\theta, \phi, \theta', \phi') d\Omega = 0. \quad (2.16)$$

Соответствующие разложения μ^{-1} (2.4), присутствующие в уравнении (2.16), в явном виде записываются следующим образом:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 2 - \mu \\ 2 & \mu^2 - 3\mu + 3 \\ 3 & -\mu^3 + 4\mu^2 - 6\mu + 4 \\ 4 & \mu^4 - 5\mu^3 + 10\mu^2 - 10\mu + 5 \\ \dots & \dots \end{array} \quad (2.17)$$

В матричной форме уравнение переноса излучения (2.9) после такой замены будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} C_l^m(\tau) = -\hat{\mu}^-(1 - \Lambda \hat{x}_k) C_l^m(\tau) - i\omega(\hat{\mu}^- - 1) C_l^m(\tau), \quad (2.18)$$

где матрица оператора $\hat{\mu}^-$ будет соответствовать умножению углового распределения на μ^{-1} . Матрицы соответствующих тейлоровских разложений также

имеют вид многочленов, приведенный в таблице, с заменой степеней μ соответствующими степенями матрицы $\hat{\mu}$.

Решение уравнения (2.18) выражается в форме матричной экспоненты

$$C_k^m(\tau) = \exp(\hat{A}\tau)C_{0k}^m(\tau), \quad (2.19)$$

где

$$\hat{A} = -\hat{\mu}^-(1 - \Lambda\hat{x}_k) - i\omega(\hat{\mu}^- - 1), \quad (2.20)$$

$C_{0k}^m(\tau)$ – столбец коэффициентов гармоник тела яркости, соответствующий начальным условиям падающему излучению на границе среды. Решение уравнения (2.10) можно восстановить по спектру (2.19) численным обращением преобразования Фурье.

Следуя цитированным работам, мы также ограничиваемся анализом нормального падения излучения на плоскую границу среды. Тем самым, лишь основная азимутальная гармоника $m = 0$ присутствует в (2.7) и других выражениях. Результаты численного расчета распространения коротких импульсов излучения в плоскостой среде по формулам (2.19) - (2.20), приведенные на рис. 2.2 получены для индикатрисы рассеяния Хенъи-Гринштейна со средним косинусом рассеяния $g = 0.9$ и альбедо однократного рассеяния $\Lambda = 1$. Соответствующее решение показано на рис. 2.2 сплошными кривыми. Для учета дисперсии использовалась простейшая тейлоровская аппроксимация $\hat{\mu}^- = \hat{2} - \hat{\mu}$, обеспечивающая учет дисперсии в первом порядке (т.е. квадратичном по θ). Эталонное решение методом Монте-Карло [154] приведено для сравнения (пунктирные линии). Значения оптических толщин для каждой пары импульсов указаны цифрами при каждой паре кривых. Для наглядности кривые условно разнесены по оси времен. Показано излучение, рассеянное на небольшой угол ($\theta = 6^\circ$).

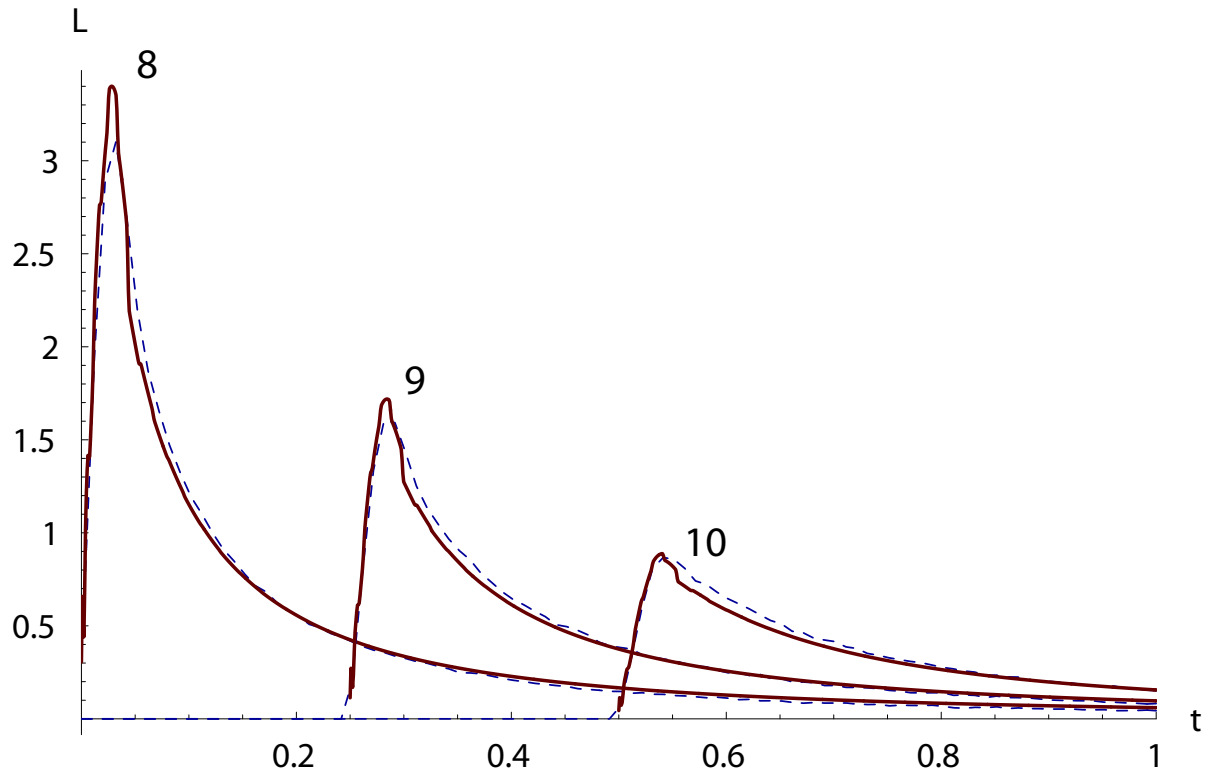


Рис. 2.2: Численное моделирование нестационарного малоуглового решения уравнения переноса (2.19).

2.1.3 Малоугловое приближение для уравнения переноса поляризованного излучения.

Малоугловое приближение теории переноса с учетом поляризации впервые было получено в работе [33], где была рассмотрена эквивалентная проблема рассеяния частиц со спином. Это и последующие [34] решения не учитывают дисперсию длин путей распространения, что приводит ко всем тем же трудностям, что и без учета поляризации. Параболическое уравнение Марковского приближения для обобщенных параметров Стокса, эквивалентное МУП для нестационарного уравнения переноса излучения, для магнитоактивных сред было получено в нескольких работах [35, 36]. В работе [46] решение векторного уравнения переноса излучения (ВУПИ) в малоугловом приближении с учетом дисперсии получено непосредственно, полностью аналогично работам [51, 52] для скалярного УПИ.

Согласно [34], спектр нестационарного решения $\tilde{\mathbf{L}}(\omega, \tau, \mu, \phi)$

$$\mathbf{L}(t, \tau, \mu, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega(t - \tau)) \tilde{\mathbf{L}}(\omega, \tau, \mu, \phi) d\omega. \quad (2.21)$$

векторного уравнения переноса излучения в плоскостной однородной среде

$$\begin{aligned} & i\omega(1 - \mu)\tilde{\mathbf{L}}(\tau, \vec{\mathbf{l}}) + \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\mathbf{L}}(\tau, \vec{\mathbf{l}}) + \tilde{\mathbf{L}}(\tau, \vec{\mathbf{l}}) \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \hat{R}(\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{l}}' \rightarrow \vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{l}}_0) \hat{x}(\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{l}}') R(\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{l}}_0 \rightarrow \vec{\mathbf{l}}' \times \vec{\mathbf{l}}') \tilde{\mathbf{L}}(\tau, \vec{\mathbf{l}}') d\vec{\mathbf{l}}' \end{aligned} \quad (2.22)$$

в циркулярном представлении [155] представляется в форме

$$\tilde{\mathbf{L}}(\tau, \vec{\mathbf{l}}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \hat{Y}_m^k(\mu) \vec{f}_m^k(\tau) \exp(-im\phi), \quad (2.23)$$

где матрица рассеяния поляризованного излучения разлагается в ряд

$$x(\tau, \vec{\mathbf{l}} \cdot \vec{\mathbf{l}}') \Big|_{r,s} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x_{r,s}^k(\tau) P_{r,s}^k, \quad (2.24)$$

по обобщенным сферическим функциям $P_{r,s}^k, \hat{Y}_m^k(\mu) = \text{diag}\{P_{m,+2}^k, P_{m,+0}^k, P_{m,-0}^k, P_{m,-2}^k\}$ – соответствующая диагональная матрица, $\vec{\mathbf{l}}$ – единичная нормаль к сфере направлений. Векторные коэффициенты разложения $\vec{f}_m = \{\vec{f}_m^0, \vec{f}_m^1, \dots, \vec{f}_m^k, \dots\}$ удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i\omega(\hat{1} - \hat{\mu})\vec{f}_m + \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\mu} \vec{f}_m + [\hat{1} - \Lambda \hat{x}] \vec{f}_m(\tau) = 0, \quad (2.25)$$

где матричный оператор $\hat{\mu}$, присутствующий в дифференциальном слагаемом, записывается в виде

$$(\hat{\mu} \vec{f})_m^k \equiv \frac{1}{2k+1} \left[\hat{A}_m^{k+1} \vec{f}_m^{k+1} + \hat{B}_m^k \vec{f}_m^k + \hat{A}_m^k \vec{f}_m^{k-1} \right], \quad (2.26)$$

$$\hat{A}_m^k \Big|_{r,s} = \frac{1}{k} \sqrt{(k^2 - m^2)(k^2 - s^2)} \delta_{r,s}, \quad (2.27)$$

$$\hat{B}_m^k \Big|_{r,s} = \frac{ms(2k+1)}{k(k+1)} \delta_{r,s}, \quad (2.28)$$

$\hat{1}$ – единичная матрица соответствующего размера, $\hat{x}$ – матрица коэффициентов рассеяния (2.24) [34]. Аналогично выводу уравнений скалярной теории переноса, разделим векторное уравнение переноса (2.22) на μ и аппроксимируем μ^{-1} тейлоровским разложением необходимого порядка. В этом приближении, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.25) для векторных коэффициентов $\vec{f}_m$ сводится к виду

$$i\omega(\hat{\mu}^- - \hat{1})\vec{f}_m + \frac{\partial}{\partial \tau}\vec{f}_m + \hat{\mu}^- [\hat{1} - \Lambda\hat{x}] \vec{f}_m(\tau) = 0, \quad (2.29)$$

аналогично (2.18). Матричный оператор $\hat{\mu}^-$ означает тейлоровское разложение (2.17), в котором $\hat{\mu}$ теперь соответствует матричному оператору (2.26). Решение уравнения (2.29) выражается через матричную экспоненту, аналогично (2.19). Начальное условие для $\vec{f}_m$ соответствует состоянию поляризации падающего на среду излучения (в циркулярном представлении) [34]

$$\vec{f}_m^k(0) \propto \begin{bmatrix} pe^{-2i\phi_0}\delta_{m,2} \\ (1-q)\delta_{m,0} \\ (1+q)\delta_{m,0} \\ pe^{+2i\phi_0}\delta_{m,-2} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

где p и q – степень поляризации и степень эллиптичности, соответственно.

2.1.4 Численное моделирование распространения поляризованных импульсов в среде

В работе [156] была предложена матрица рассеяния, обобщающая модельную индикатрису Хэнни-Гринштейна на случай учета поляризации:

$$\hat{x}^{HG}(\gamma) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\gamma)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 & P_m(1-\gamma^2) & 0 & 0 \\ P_m(1-\gamma^2) & (1+\gamma)^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\gamma)^2/4 & Q_m(1-\gamma^2) \\ 0 & 0 & -Q_m(1-\gamma^2) & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

где $\gamma = \cos \theta$ – косинус угла рассеяния P_m и Q_m – постоянные, удовлетворяющие некоторым ограничениям. Профили импульсов излучения после прохождения оптического пути $\tau = 15$ в среде с матрицей рассеяния (2.31) показаны на рис. 2.3, а). Альbedo однократного рассеяния $\Lambda = 1$, параметры матрицы Хэнни-Гринштейна $P_m = 0.5$ и $Q_m = 0.2$ были выбраны для численного моделирования, следуя работе [34]. Показаны результаты для круговой ($p = 0$,

$q = 1$) и линейной ($p = 1, q = 0$) поляризации падающего излучения (сплошная и пунктирная кривые, соответственно). Для учета дисперсии использовалась простейшая тейлоровская аппроксимация (2.17) первого порядка $\hat{\mu}^- = \hat{2} - \hat{\mu}$, т.е. квадратичная по θ . Степень поляризации $m = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}/I$ [105] показана жирными кривыми на одном графике с интенсивностью I (тонкие кривые, произвольные единицы) для каждой из двух поляризаций. Результаты, приведенные на рис. 2.3, а) качественно согласуются с установленным фактом [157] о преимущественной деполяризации линейно поляризованного излучения при многократном малоугловом рассеянии.

Также были проведены вычисления с функцией рассеяния Ми, строго вычисленной для малоконтрастных рассеивателей [158] (сферы радиуса $r = \lambda$ и коэффициента преломления $n = 1.0005$, $\Lambda = 1$). На рис. 2.3, б) показаны профили импульсов, прошедших оптический путь $\tau = 15$ для круговой и линейной поляризации, соответственно. Так же как и для матрицы Хэнби-Гринстейна, наблюдается различный характер деполяризации излучения с круговой и линейной поляризацией.

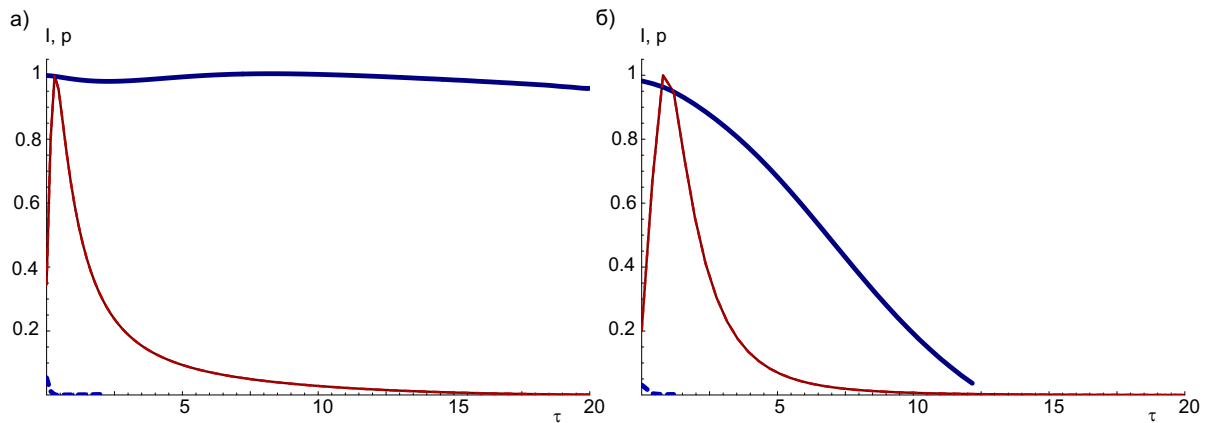


Рис. 2.3: Поляризованные импульсы. а) Матрица рассеяния Хэнби-Гринстейна [156]. $\tau = 15$. Сплошные кривые – круговая поляризация, пунктирные кривые – линейная поляризация. Жирные кривые – степень поляризации m , тонкие кривые – интенсивность (первый параметр Стокса) I , произвольные единицы). б) Модель малоконтрастных рассеивателей [158] $\tau = 15$. Сплошные кривые – круговая поляризация, пунктирные кривые – линейная поляризация. Жирные кривые – степень поляризации m , тонкие кривые – интенсивность (первый параметр Стокса) I , произвольные единицы).

2.1.5 Выделение сильно анизотропной составляющей полного решения.

Краевая задача для светового поля в плоскостой среде формулируется в виде уравнения переноса (2.1) с некоторой функцией источников в правой части и краевых условий, определяемых законами отражения/пропускания излучения на границах рассматриваемой среды, например (2.14, 2.15). Подставляя принятое представление решения в виде суммы регулярной и анизотропной части (1.1) в краевую задачу для уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3), для регулярной части решения L_D получим краевую задачу для уравнения (2.1) с некоторой функцией источников f_D и граничными условиями, зависящими от предварительно найденной анизотропной части решения L_a .

Для нахождения решения УПИ в целом, подставим решение в виде суммы $L = L_a + L_s$ в уравнение (2.1).

Для оставшейся части решения L_s мы получим уравнение (2.1) с функцией источников $f_s(x, y, z)$ в правой части

$$f_s(x, y, z) = -\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_a - \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_a - \mu_z \frac{\partial}{\partial z} L_a + L_a - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(x, y, z, \Omega) x(\Omega, \Omega') d\Omega' + f(x, y, z). \quad (2.32)$$

Используя (2.4) и (2.5), можно показать, что функция источников равна

$$f_s(x, y, z) = (1 - \mu_z^- \mu_z) \left(-\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_a - \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_a - \mu_z \frac{\partial}{\partial z} L_a + L_a - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(x, y, z, \Omega) x(\Omega, \Omega') d\Omega' + f(x, y, z) \right). \quad (2.33)$$

В передней полусфере функция источников эффективно подавлена множителем $(1 - \mu_z^- \mu_z) = o((1 - \mu_z)^n)$, стремящимся к нулю в направлении вперед, т.е. в направлении максимальной анизотропии поля рассеянного излучения. Таким образом, функция источников $f_s(x, y, z)$ является весьма гладкой функцией направления Ω , так что задача решения УПИ с гладкой функцией источников и соответствующими граничными условиями для нахождения L_s оказывается гораздо проще исходной задачи.

Соответствующее выражение для коэффициентов разложения f_D по сферическим гармоникам записывается в виде [52]

$$\vec{\Delta}_{SH}(\tau) = (\hat{\mu} \hat{\mu}^- - \hat{1})(\hat{1} - \Lambda \hat{x} + i\omega) \vec{C}_a(\tau), \quad (2.34)$$

где $\vec{C}_a(\tau)$ - вектор-столбец коэффициентов разложения анизотропной части решения. При удачно найденной анизотропной части поля решение краевой за-

дачи является плавной, регулярной функцией, которую нетрудно найти любым численным методом. Использование в качестве анизотропной части выражения (2.19) соответствующего порядка приближения (2.17) позволяет сформулировать весьма регулярную задачу для гладкой части решения.

В случае плоскостистой задачи решение может быть эффективно найдено средствами матричной алгебры с разделением по азимутальным гармоникам m . Будем искать решение УПИ в виде суммы (1.1), где L_a – выделенная особенная часть решения. Для оставшейся гладкой части тела яркости L_D формулируется краевая задача для неоднородного УПИ

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} L_D + L_D - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_D(t, \tau, \theta', \phi') x(\theta, \phi, \theta', \phi') d\Omega = SF, \quad (2.35)$$

с соответствующими граничными условиями. Функция источников SF

$$SF = -i\omega L_a - \mu \frac{\partial}{\partial \tau} L_a - L_a + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(t, \tau, \theta', \phi') x(\theta, \phi, \theta', \phi') d\Omega. \quad (2.36)$$

стоящая в правой части уравнения, подстановкой разложения анизотропной части (2.19) в УПИ в СГ представлении (2.12) может быть найдена в виде разложения в ряд по сферическим гармоникам для данного азимутального числа m

$$SF_{SH} = (\hat{\mu}\hat{\mu}^- - 1)(1 + i\omega - \Lambda \hat{x}_k) \exp(\hat{A}\tau) C_k^m(0). \quad (2.37)$$

Гладкую часть тела яркости удобно искать методом дискретных ординат. Введем соответствующую прямоугольную матрицу $\hat{W}$

$$\hat{W}_{i,l} = Y_l^m(\mu_i) \quad (2.38)$$

для перехода от сферических гармоник к дискретным ординатам, где μ_i – узлы используемой квадратурной формулы. Уравнение для гладкой части в дискретных ординатах запишем в виде

$$i\omega L_i + \mu_i \frac{\partial}{\partial \tau} L_i = -L_i + 2\pi\Lambda \sum_{l=0}^{\infty} \sum_j a_j x_l Y_l^0(\mu_i) Y_l^0(\mu_j) L_j + SF_i, \quad (2.39)$$

где функция источников соответственно выражается в виде

$$SF_i = \hat{W} SF_{SH}. \quad (2.40)$$

По возможности сохраняя обозначения, принятые в работе [159], запишем (2.39) в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L_i = \hat{B} L_i + \mu_i^{-1} S F_i. \quad (2.41)$$

Решение этого уравнения выражается в квадратурах

$$\exp(-\hat{B}\tau) L_i(\tau) - L_i(0) = \int_0^\tau \exp(-\hat{B}\tau) \frac{1}{\mu_i} S F_i d\tau. \quad (2.42)$$

Матрицы A и B диагонализуемы, т.е. представимы в виде

$$\hat{A} = \hat{V} \hat{\Delta} \hat{V}^{-1}, \quad (2.43)$$

$$\hat{B} = \hat{U} \hat{\Gamma} \hat{U}^{-1}, \quad (2.44)$$

где $\hat{V}$ и $\hat{U}$ – матрицы собственных векторов матриц A и B соответственно, $\hat{\Delta}$ и $\hat{\Gamma}$ – соответствующие диагональные матрицы собственных значений. Подставляя выражения (2.37), (2.38), (2.40) в правую часть (2.42), мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \exp(-\hat{B}\tau) \frac{1}{\mu_i} \hat{W}(\hat{\mu} \hat{\mu}^{-1} - 1)(1 + i\omega - \Lambda \hat{x}_k) \exp(\hat{A}\tau) C_k^m(0) d\tau = \\ \int_0^\tau \hat{U} \exp(-\hat{\Gamma}\tau) \hat{U}^{-1} \frac{1}{\mu_i} \hat{W}(\hat{\mu} \hat{\mu}^{-1} - 1)(1 + i\omega - \Lambda \hat{x}_k) \hat{V} \exp(\hat{\Delta}\tau) \hat{V}^{-1} C_k^m(0) d\tau. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Вводя обозначение

$$\hat{\Xi} \equiv \hat{U}^{-1} \frac{1}{\mu_i} \hat{W}(\hat{\mu} \hat{\mu}^{-1} - 1)(1 + i\omega - \Lambda \hat{x}_k) \hat{V}, \quad (2.46)$$

перепишем полученное выражение для правой части (2.42) в виде

$$\int_0^\tau \hat{U} \exp(-\hat{\Gamma}\tau) \hat{\Xi} \exp(\hat{\Delta}\tau) \hat{V}^{-1} C_k^m(0) d\tau. \quad (2.47)$$

Как нетрудно убедиться, умножение матрицы $\hat{\Xi}$ справа и слева соответственно на диагональные матрицы $\exp(-\hat{\Gamma}\tau)$ и $\exp(\hat{\Delta}\tau)$ эквивалентно умножению каждого элемента матрицы $\hat{\Xi}_{i,j}$ на $\exp((\Delta_j - \Gamma_i)\tau)$. Элементы прямоугольной

матрицы $\hat{\Xi}_{i,j}$ не зависят от τ , и таким образом интеграл по τ в (2.47) легко вычисляется для каждого элемента матрицы:

$$\int_0^\tau \exp((\Delta_j - \Gamma_i)\tau) d\tau = \begin{cases} (\exp((\Delta_j - \Gamma_i)\tau) - 1)/(\Delta_j - \Gamma_i), & \Delta_j \neq \Gamma_i \\ \tau, & \Delta_j = \Gamma_i. \end{cases} \quad (2.48)$$

Применение к (2.42) операции масштабного преобразования, т.е. умножение слева на матрицу $\hat{S}\hat{U}^{-1}$, где $\hat{S}$ – диагональная матрица с элементами следующего вида:

$$S_{ii} = \begin{cases} \exp(-\Gamma_i\tau), & \text{Re}\Gamma_i > 0 \\ 1, & \text{Re}\Gamma_i < 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

позволяет получить хорошо обусловленную систему уравнений для неконсервативных сред практически неограниченной оптической толщины. Масштабное преобразование для задач с консервативными средами предложено в [152].

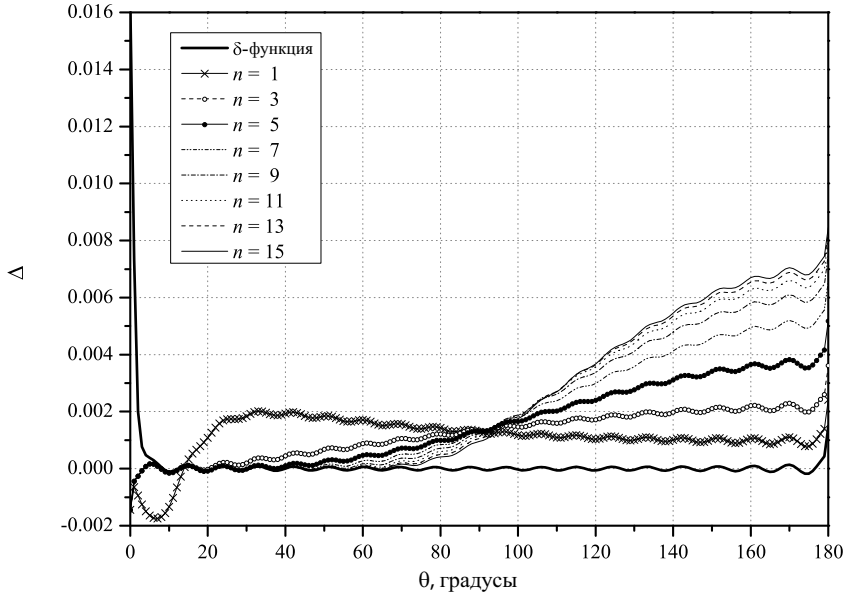


Рис. 2.4: Функции источников плоскостлой краевой задачи УПИ (2.1), (2.2), (2.3). Индикатриса Хэньи-Гринштейна $g = 0.98$, $\tau = 10$, $\Lambda = 1$, $\mu_0 = 1$.

На рис. 2.4 функции источников (2.34) показаны в зависимости от угла визирования для нескольких значений оптических толщин и других параметров. Можно видеть, что с увеличением порядка аппроксимации угловые распределения функций источников (2.34) перемещаются из передней полусферы в заднюю. Для высоких порядков аппроксимации, функции источников являются

весьма сглаженными и в основном сосредоточены в задней полусфере направлений визирования благодаря множителю $(\hat{\mu}\hat{\mu}^- - \hat{1})$, присутствующему в выражении (2.34). Значения порядка аппроксимации, то есть степени соответствующего тейлоровского разложения (2.19) показаны цифрами рядом с каждой кривой. Функция источников, соответствующая простейшей аналитической форме особенной части решения (т.е. в виде дельта-функции $\delta(\theta)$), показана жирной пунктирной кривой. Можно наблюдать уменьшение функции источников в передней полусфере и рост в задней с ростом номера. Номера порядка приближения обозначены цифрами при каждой кривой. На рис. 2.5 показаны модули коэффициентов гармоник функции источников УПИ различной степени малоуглового приближения. Нетрудно видеть, что с увеличением порядка точности аппроксимации (2.34) коэффициенты высоких номеров гармоник функции источников весьма быстро уменьшаются и достигают минимального значения, ограниченного точностью вычислительного устройства.

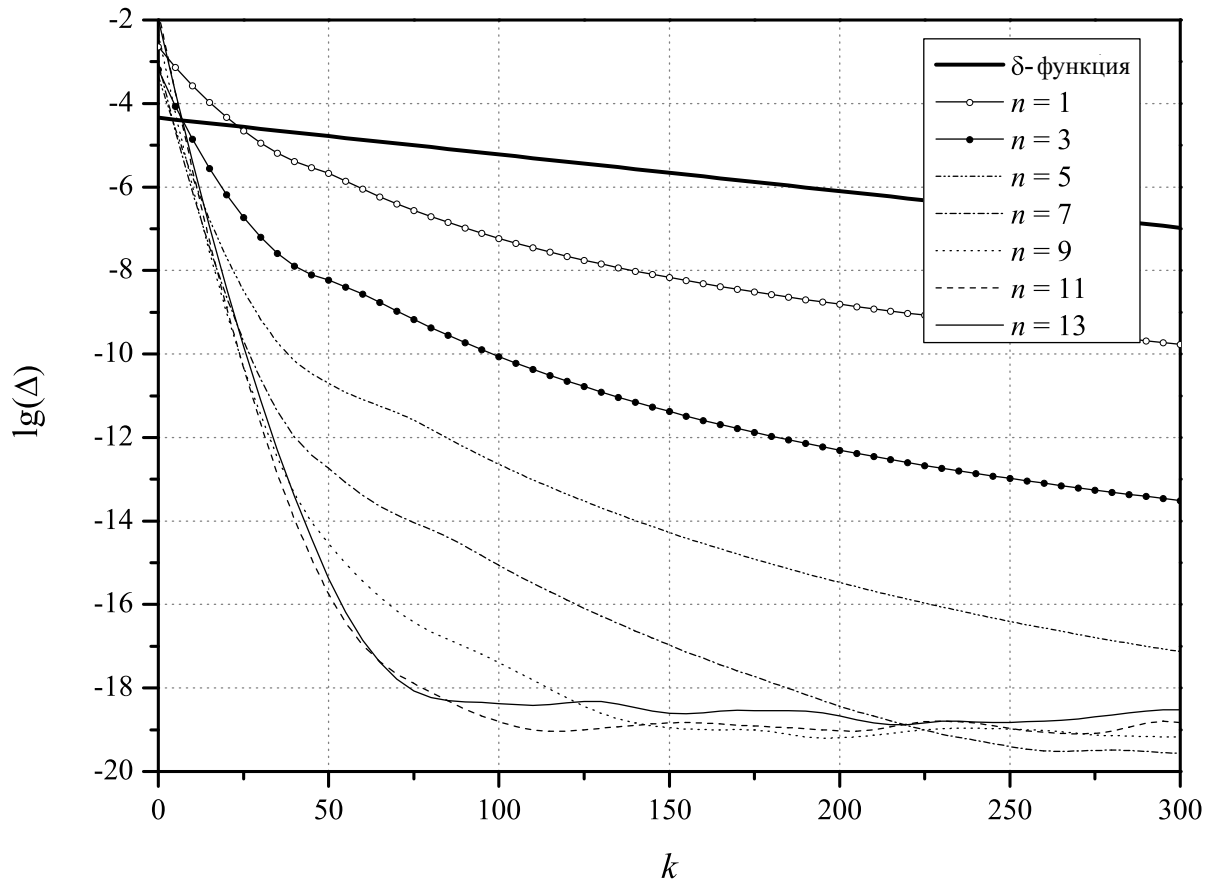


Рис. 2.5: Модули коэффициентов гармоник функций источников плоскостой краевой задачи УПИ (2.34).

2.2 Задачи теории переноса излучения с точечным мононаправленным (ТМ) источником излучения в рассеивающей среде.

2.2.1 Численное моделирование узких пучков.

Рассмотрим типичную конфигурацию зондирования слоистой атмосферы узким пучком непрерывного излучения [57] (рис. 2.6). Пучок нормально падает на нижнюю границу $z = z_1$ горизонтальной плоскостростой рассеивающей среды. Верхняя граница среды находится на высоте $z = z_2$. Без ограничения общности, коэффициент ослабления в слое $\varepsilon = 1$ положим равным единице.

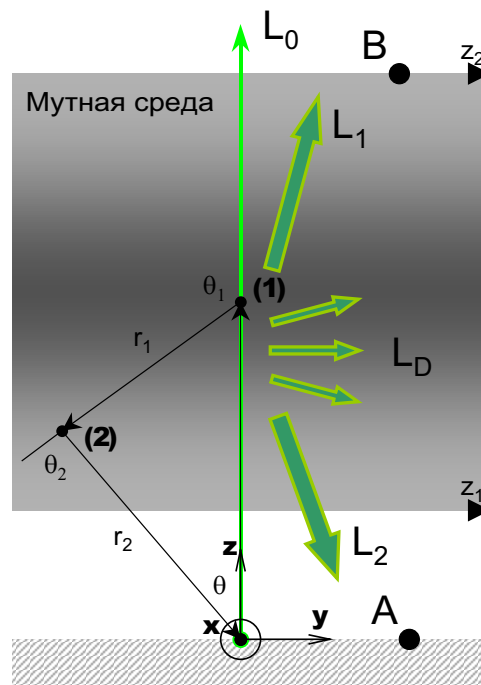


Рис. 2.6: Схематическое изображение геометрии эксперимента по вертикальному лидарному зондированию.

В этом разделе ограничимся решением скалярного УПИ в приближении квазиоднократного обратного рассеяния. Поляризационные характеристики излучения и диффузная компонента решения L_D рассмотрены не будут. Таким обра-

зом, будем искать решение в виде суммы нерассеянного излучения L_0 и прямого и обратного потоков L_1 и L_2 . Поле рассеянного излучения ТМ источника в плоской среде с открытыми границами является решением краевой задачи для уравнения переноса излучения (2.1) с граничными условиями (2.2), (2.3).

Нерассеянный поток излучения L_0 известен так что L_1 и L_2 удовлетворяют уравнениям (2.56) и (2.57) с нулевыми граничными условиями при $L_1(z_1) = 0$ и $L_2(z_2) = 0$, соответственно. Будем считать пучок бесконечно тонким

$$L_0 = \delta(x)\delta(y)\delta(\mathbf{\Omega}) \exp\left(\int \varepsilon dz\right), \quad (2.50)$$

тогда функция источника в уравнении (2.1) равна

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' = \delta(x)\delta(y) \frac{\Lambda}{4\pi} x(\mathbf{\Omega}) \exp\left(-\int \varepsilon dz\right). \quad (2.51)$$

2.2.2 Приближение квазиоднократного обратного рассеяния

Рассмотрим уравнение переноса излучения (2.1). Примем, что угловое распределение интенсивности источников $f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ сильно вытянуто в положительном направлении оси z ($\mu_z \rightarrow 1$). Коэффициент ослабления в среде $\varepsilon = 1$ без ограничения общности положим равным единице.

Перейдем к отдельным уравнениям для прямого и обратного потоков в приближении квазиоднократного обратного рассеяния (L_1 и L_2 , соответственно). Сферу направлений разделим на переднюю ($\mu_z > 0$) и заднюю ($\mu_z < 0$) полусферы и введем разбиение единицы [160] $M_1(\mathbf{\Omega}) + M_2(\mathbf{\Omega}) \equiv 1$ такое, что $M_1(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 1$, $M_2(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 0$ и $M_1(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 0$, $M_2(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 1$ соответственно. С помощью этого разбиения единицы разделим интеграл рассеяния и функцию источников $f(\mathbf{r})$ на вклады в переднюю и заднюю полусферы и учтем однократное рассеяние прямого потока L_1 в заднюю полусферу в уравнении для L_2 . Получим пару связанных уравнений

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) L_1 = -L_1 + M_1(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + M_1(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}), \quad (2.52)$$

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) L_2 = -L_2 + M_2(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + M_2(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}) \quad (2.53)$$

$$+M_2(\Omega)\frac{\Lambda}{4\pi}\oint L_1(\mathbf{r},\Omega')x(\Omega,\Omega')d\Omega'.$$

Следуя работам [52, 53, 46], перейдем в уравнениях (2.52) и (2.53) к малоугловым приближениям в прямом и обратном направлениях, соответственно. Для этого, обе части каждого уравнения разделим на μ_z и аппроксимируем величину μ_z^{-1} тейлоровским разложением по μ_z вблизи полюса соответствующей полусферы $\mu_z = \pm 1$:

$$\mu_z^- \equiv 1 + (1 - \mu_z) + (1 - \mu_z)^2 + \dots + (1 - \mu_z)^n + o((1 - \mu_z)^n) \approx \frac{1}{\mu_z} \Big|_{\mu_z \rightarrow +1} \quad (2.54)$$

$$\mu_z^+ \equiv -1 - (1 + \mu_z) - (1 + \mu_z)^2 - \dots - (1 + \mu_z)^n + o((1 + \mu_z)^n) \approx \frac{1}{\mu_z} \Big|_{\mu_z \rightarrow -1}. \quad (2.55)$$

Получим пару уравнений для L_1 и L_2 в малоугловом приближении с учетом дисперсии длин путей излучения в каждом потоке

$$\frac{\partial}{\partial z}L_1 + \mu_z^- \mu_x \frac{\partial}{\partial x}L_1 + \mu_z^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y}L_1 = \quad (2.56)$$

$$-\mu_z^- L_1 + \mu_z^- M_1(\Omega)\frac{\Lambda}{4\pi}\oint L_1(\mathbf{r},\Omega')x(\Omega,\Omega')d\Omega' + \mu_z^- M_1(\Omega)f(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}L_2 + \mu_z^+ \mu_x \frac{\partial}{\partial x}L_2 + \mu_z^+ \mu_y \frac{\partial}{\partial y}L_2 = \quad (2.57)$$

$$-\mu_z^+ L_2 + \mu_z^+ M_2(\Omega)\frac{\Lambda}{4\pi}\oint (L_1(\mathbf{r},\Omega') + L_2(\mathbf{r},\Omega'))x(\Omega,\Omega')d\Omega' + \mu_z^+ M_2(\Omega)f(\mathbf{r}).$$

Решение этой пары уравнений (2.56), (2.57) с соответствующими граничными условиями и является решением задачи о поле ТМ источника в однородной среде в заданном приближении. Полное решение задачи может быть найдено в виде суммы $L = L_1 + L_2 + L_D$, где L_D – неизвестная часть поля, не учтенная в рассмотренном приближении. Подставляя эту сумму в УПИ (2.1), для L_D получим неоднородное уравнение вида (2.1) функцией источников f_D в правой части

$$f_D = (\mu_z \mu_z^- - 1)(\mu_x \frac{\partial}{\partial x}L_1 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y}L_1 + L_1) + (\mu_z \mu_z^+ - 1)(\mu_x \frac{\partial}{\partial x}L_2 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y}L_2 + L_2) + \quad (2.58)$$

$$(1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\Omega) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega))\frac{\Lambda}{4\pi}\oint L_1(\mathbf{r},\Omega')x(\Omega,\Omega')d\Omega' +$$

$$(1 - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega)) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_2(\mathbf{r}, \Omega') x(\Omega, \Omega') d\Omega' \\ + (1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\Omega) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega)) f.$$

Можно видеть, что вблизи направлений наибольшей анизотропии $\mu_z \rightarrow \pm 1$ функция источников f_D эффективно подавлена стремящимися к нулю множителями типа $(1 - \mu_z \mu_z^\pm) \propto (\mu_z \mp 1)^{(n+1)}$. По этой причине L_D является достаточно гладкой функцией направления Ω и может быть найдена известными численными методами без больших сложностей, связанных с анизотропией и особенностями решения.

Поле излучения представим в виде разложения по сферическим гармоникам на сфере направлений и интеграла Фурье по пространственным переменным

$$L(x, y, z, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{c}_{nm}(k_x, k_y, z) Y_n^m(\theta, \phi) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y, \quad (2.59)$$

Неизвестные коэффициенты разложения (2.59) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x i k_x \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}_1 = -\hat{\mu}_z^- \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{M}_1 \Lambda \hat{x} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{M}_1 \Lambda \hat{x} \vec{f}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{C}_2 + \hat{\mu}_z^+ \hat{\mu}_x i k_x \vec{C}_2 + \hat{\mu}_z^+ \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}_2 = -\hat{\mu}_z^+ \vec{C}_2 + \hat{\mu}_z^+ \hat{M}_2 \Lambda \hat{x} (\vec{C}_2 + \vec{C}_1) + \hat{\mu}_z^+ \hat{M}_2 \Lambda \hat{x} \vec{f}, \quad (2.61)$$

где $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{f}$ – вектор-столбцы коэффициентов разложений (2.59) для L_1, L_2, f , соответственно, $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ – матрицы операторов умножения на μ_x, μ_y, μ_z . Явные выражения для соответствующих матриц можно найти в литературе [87]. Матрицы $\hat{\mu}_z^\pm$ – матричные полиномы от $\hat{\mu}_z$, определяемые формулами (2.54), (2.55). Матрицы $\hat{M}_{1,2}$ соответствуют функциям $M_{1,2}(\Omega)$, составляющим разбиение единицы на сфере направлений. В расчетах применялась приближенная численная реализация разбиения единицы

$$M_1(\mu_z) = -\frac{5}{32}(\mu_z + 1)^7 + \frac{35}{32}(\mu_z + 1)^6 - \frac{21}{8}(\mu_z + 1)^5 + \frac{35}{16}(\mu_z + 1)^4 = \quad (2.62)$$

$$\sqrt{\pi} Y_{0,0}(\theta, \phi) + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi) - \frac{2\sqrt{7\pi}}{33} Y_{3,0}(\theta, \phi) + \frac{4}{39} \sqrt{\frac{\pi}{11}} Y_{5,0}(\theta, \phi) - \frac{1}{429} \sqrt{\frac{5\pi}{3}} Y_{7,0}(\theta, \phi),$$

$$M_2(\mu_z) = -\frac{5}{32}(1 - \mu_z)^7 + \frac{35}{32}(1 - \mu_z)^6 - \frac{21}{8}(1 - \mu_z)^5 + \frac{35}{16}(1 - \mu_z)^4 = \quad (2.63)$$

$$\sqrt{\pi}Y_{0,0}(\theta, \phi) - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}Y_{1,0}(\theta, \phi) + \frac{2}{33}\sqrt{7\pi}Y_{3,0}(\theta, \phi) - \frac{4}{39}\sqrt{\frac{\pi}{11}}Y_{5,0}(\theta, \phi) + \frac{1}{429}\sqrt{\frac{5\pi}{3}}Y_{7,0}(\theta, \phi).$$

Матричные элементы всех перечисленных операторов являются интегралами от произведений трех сферических функций, которые могут быть выражены через $3j$ -символы Вигнера [151].

Поскольку угловое распределение интенсивности светового поля в данной задаче сингулярно, вычислить его суммированием рядов невозможно. На практике, необходимая точность вычислений обычно согласована с точностью измерений, которая определяется инструментальным угловым разрешением измерительного прибора [161, 162, 163]. По этим причинам применяется аподизация численного решения путем свертки с некоторым ядром $M(\Omega)$, эффективно регулизирующая вычислительную процедуру и ограничивающая ее угловое разрешение на необходимом уровне.

Удобным ядром аподизации является функция

$$M(\theta) = \frac{(s+1)(\cos\theta+1)^s}{2^{s+2}\pi}, \quad (2.64)$$

характерная угловая ширина которой эффективно регулируется параметром s . Можно показать, что в СГ-представлении (2.7), (2.8) свертке с ядром (2.64) соответствует умножение на диагональную матрицу $\hat{M}$ с коэффициентами ($s \gg n$)

$$m_n = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s+2)}{\Gamma(s-n+1)\Gamma(n+s+2)} \approx \frac{(s+1)^{s+1/2}(s+2)^{s+3/2}(s-n+1)^{n-s-1/2}}{(n+s+2)^{n+s+3/2}}. \quad (2.65)$$

Примеры численных результатов показаны на рис. 2.7. Уравнения МУП в приближении однократного обратного рассеяния (2.60) и (2.61) с учетом дисперсии в линейном приближении $\hat{\mu}_z^\pm = \mp 2 - \hat{\mu}$ решались с помощью конечно-разностной схемы.

В численных расчетах использовалась индикатриса Хеньи-Гринштейна со значением параметра анизотропии $g = 0.9$, типичным для искусственных суспензий в экспериментах Эллиотта [9]. Значение альбедо однократного рассеяния $\Lambda = 1$ было принято как близкое к типичному для многих естественных сред. Расчеты проведены в приближении P_{99} [164] метода сферических гармоник (СГ). Таким образом, учитывалось $(99+1)^2 = 10000$ членов в разложениях типа (2.59).

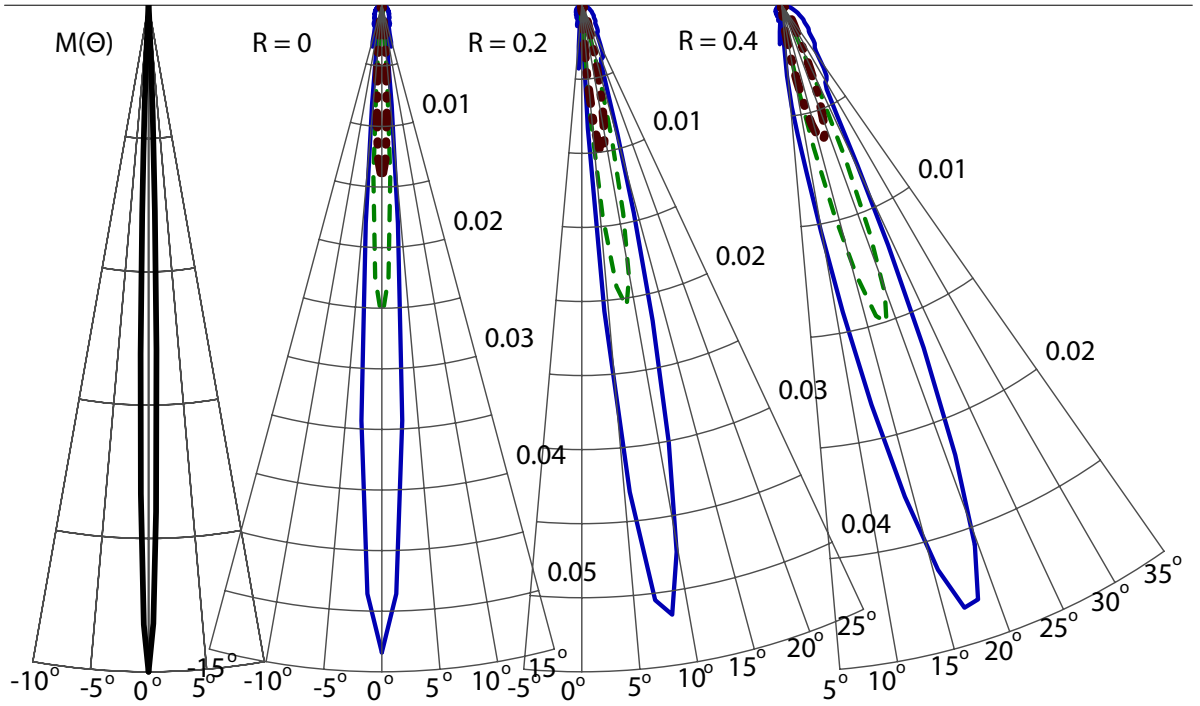


Рис. 2.7: Угловое распределение обратно рассеянного излучения (точка А на рис. 2.6 в плоскости пучка на различных расстояниях R от оси пучка (указаны цифрами). $z_1 = 1.0, z_2 = 5.0$, коэффициент объемного поглощения $\varepsilon = 1, g = 0.9, \Lambda = 1$, индикатриса Хэнни-Гринштейна. Сплошные линии – полная интенсивность, пунктирные линии – однократно рассеянное излучение, штрихпунктирные – двукратно рассеянное излучение.

На рис. 2.7 сплошными кривыми показаны угловые распределения интенсивности излучения L_2 в плоскости пучка, для среды с верхней границей на уровне $z_2 = 5.0$, соответственно. Расстояния R от оси пучка до точки наблюдения А указаны цифрами. Аподизированные угловые распределения интенсивности однократно и двукратно рассеянного излучения показаны тонкими и жирными пунктирными линиями, соответственно. Функция аподизирующего ядра $M(\theta)$ ($s = 5000$) показана на отдельном графике в левой части рисунка.

2.2.3 Модулированные и импульсные пучки в рассеивающих средах.

Обобщение предлагаемого подхода на случай нестационарных полей излучения

$$\frac{\partial}{\partial t} L + (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) L = -\varepsilon L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (2.66)$$

не представляет каких-либо затруднений [46]. В этом случае частотные компоненты спектров L_1 , L_2 и L_D подчиняются уравнениям (2.56), (2.57), (2.1) с комплексными коэффициентами. По частотным спектрам можно восстановить профиль импульса. Однако, в задачах связи и передачи информации по оптическому каналу часто бывает достаточно оценить ширину полосы частот модуляции, доступной для передачи по каналу [165, 65].

По этим причинам, здесь ограничимся вычислением частотного спектра прямого потока L_1 . Без ограничения общности, положим скорость распространения излучения в среде равной единице $c = 1$. Столбцы коэффициентов $\tilde{c}_{nm}^{(1)}(k_x, k_y, z, \omega)$ в разложениях частотных спектров

$$L_1(x, y, z, \mathbf{\Omega}, t) = \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \exp(ik_x x + ik_y y + i\omega(t - z)) \sum_{m,n} \tilde{c}_{nm}^{(1)}(k_x, k_y, z, \omega) Y_n^m(\theta, \phi) dk_x dk_y d\omega,$$

подчиняются матричному уравнению

$$i\omega(1 - \hat{\mu})\vec{C}_1 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x i k_x \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}_1 = -\hat{\mu}_z^- \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{M}_1 \Lambda \hat{x} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{M}_1 \Lambda \hat{x} \vec{f}. \quad (2.68)$$

Угловые распределения частотных компонент спектра $|L_1(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}|$ на различных расстояниях от оси пучка показаны на рис. 2.8. Оптическая толщина среды $\tau_0 = 10$. Несмотря на значительную оптическую длину трассы, равную одной транспортной длине $\tau_0/(1 - g) = 1$, спектральная ширина относительно велика ($\omega\tau_0/(1 - g) > 1$) даже на значительных расстояниях от оси пучка. Это обусловлено тем, что вблизи оси пучка преимущественно распространяется излучение, рассеянное на малые углы. Рассеянное на большие углы излучение покидает окрестность оси пучка и распределяется по всему объему среды, в результате чего в центральной части пучка могут избирательно распространяться компоненты модулированного излучения с высокими частотами модуляции.

2.2.4 Расчеты видимости лазерных навигационных маяков в тумане.

В настоящее время по ряду причин актуальна проблема создания лазерной инструментальной системы посадки (ЛИСП) летательных аппаратов (ЛА) [166]

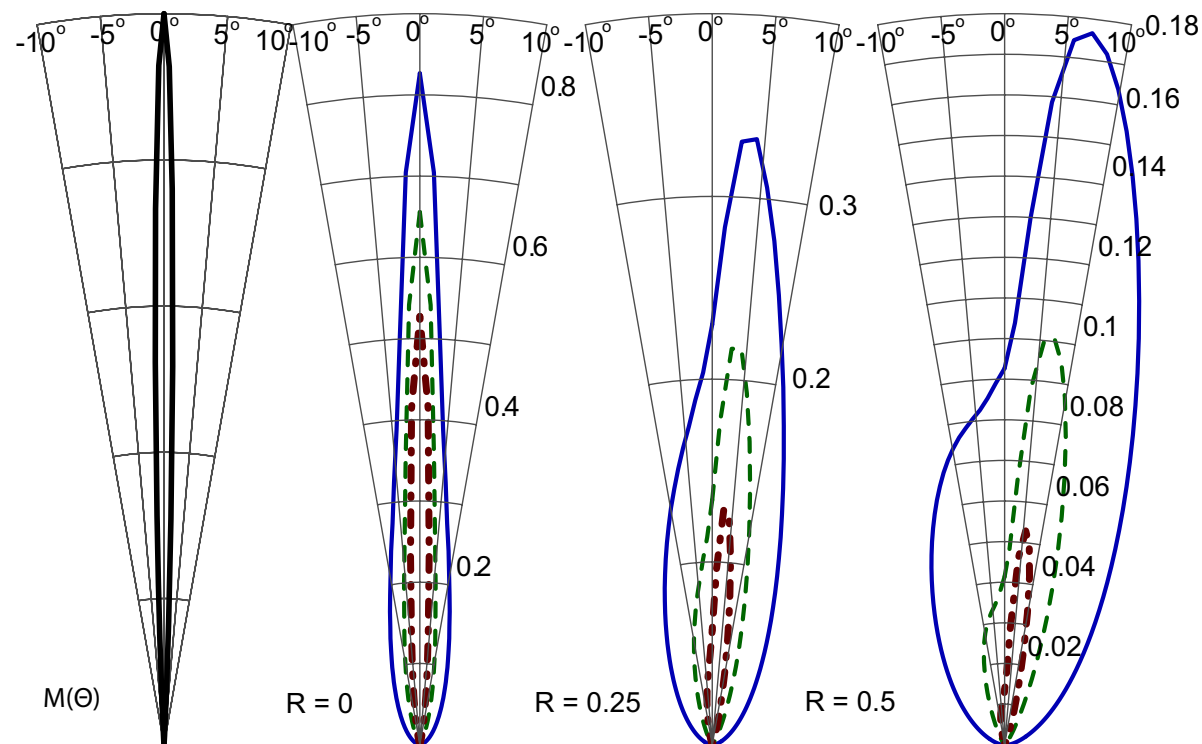


Рис. 2.8: Частотные спектры угловых распределений интенсивности рассеянного вперед излучения (точка В на рис. 2.6) в плоскости пучка на различных расстояниях R от оси пучка (указаны цифрами). $z_1 = 0.0, z_2 = 10.0, \varepsilon = 1, g = 0.9, \Lambda = 1$, индикатриса Хэнни-Гринстейна. Сплошные кривые – $\omega = 0$, пунктирные кривые – $\omega = 10$, штрихпунктирные кривые – $\omega = 35$. Ядро аподизации (2.64) $M(\theta)(s = 5000)$ показано на отдельном графике в левой части рисунка.

(рис. 2.2.4). Решением Международной организации гражданской авиации от апреля 1978 г. приняты следующие параметры полета в точке касания взлетно-посадочной полосы (ВПП) [167] :

1. продольное расстояние от торца ВПП 240...700 м;
2. положение по тангажу $0...5^\circ$;
3. допустимое отклонение от оси ВПП 8,2 м;
4. допустимая скорость бокового сноса 2,4 м/с.

Требуемая точность системы определения координат при заходе на посадку по категориям МКАО - 2,0...8,5 м. Сформулированные требования делают

необходимым определением наряду с линейными отклонениями ЛА от глиссады также и его угловое положение относительно её, чего не обеспечивают современные средства посадки, работающие в радиодиапазоне.

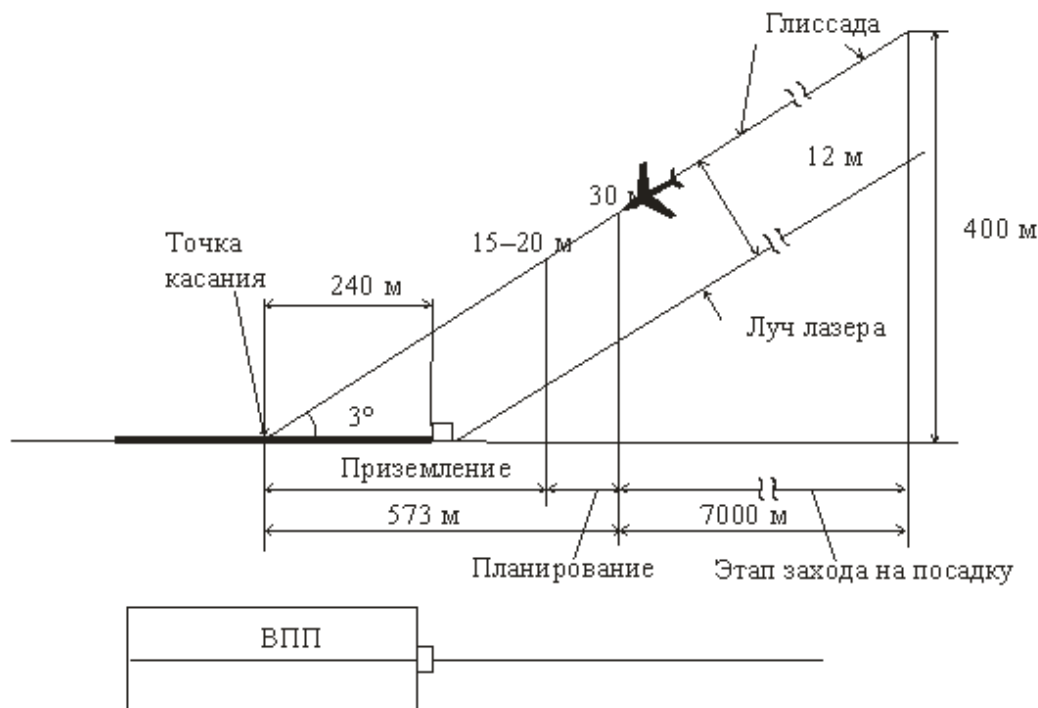


Рис. 2.9: Лазерная система посадки самолета

В ЛСП лазер создает излучение высокой направленности (луч), строго ориентированный относительно глиссады. Целесообразно применение длины волны 1,6 мкм в ближней ИК-области по следующим причинам:

1. возможность принять дополнительные меры для ослабления излучения лазера, попавшего в самолет, без ослабления излучения в видимом диапазоне;
2. излучение наиболее безопасно для глаз [168];
3. излучение попадает в окно прозрачности атмосферы [169].

Поглощение и рассеяние аэрозоля (дымка) на длине волны 1,6 мкм равны и их коэффициент ослабления может достигать 0.15 км^{-1} . В тумане метеорологическая дальность видимости (МДВ) связана с коэффициентом ослабления ε

формулой [170]

$$\varepsilon = \frac{3.9}{\text{МДВ}} \quad (2.69)$$

и, таким образом, метеорологическая дальность видимости в тумане приблизительно соответствует оптической толщине среды $\tau = 3.9 \approx 4$.

Зона ориентирования находится вне луча лазера. Вследствие рассеяния в атмосфере луч лазера становится видимым, и его пространственное положение можно определить по данным измерения углового распределения яркости. Угловое распределение яркости экспериментально измеряется с помощью яркомера (рис. 2.2.4) [8].

Пучок света собирается объективом O , в фокальной плоскости которого расположен чувствительный элемент (ЧЭ). Площадь объектива и чувствительного элемента σ_0 и σ , соответственно. На чувствительный элемент попадают все лучи, расположенные в телесном угле $\omega = \sigma/F^2$, где F – фокусное расстояние объектива. Показание измерителя $\xi = kE$, где k – коэффициент пропорциональности, E – освещенность на чувствительном элементе. Освещенность на объективе $E_0 = L \cdot \omega$, где L – яркость светового поля. Отношение площадей объектива и чувствительного элемента $n = \sigma_0/\sigma$, поэтому освещенность на чувствительном элементе $E = nE_0$. Тогда яркость излучения $L = F^2\xi/\sigma_0k$.

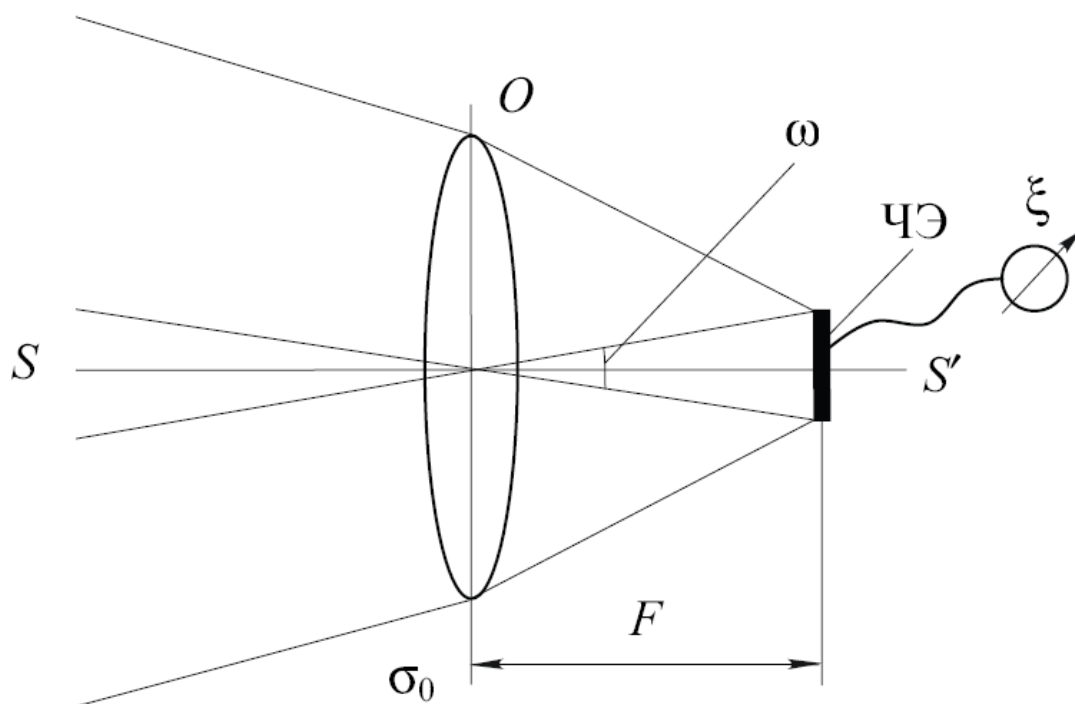


Рис. 2.10: Схема яркомера

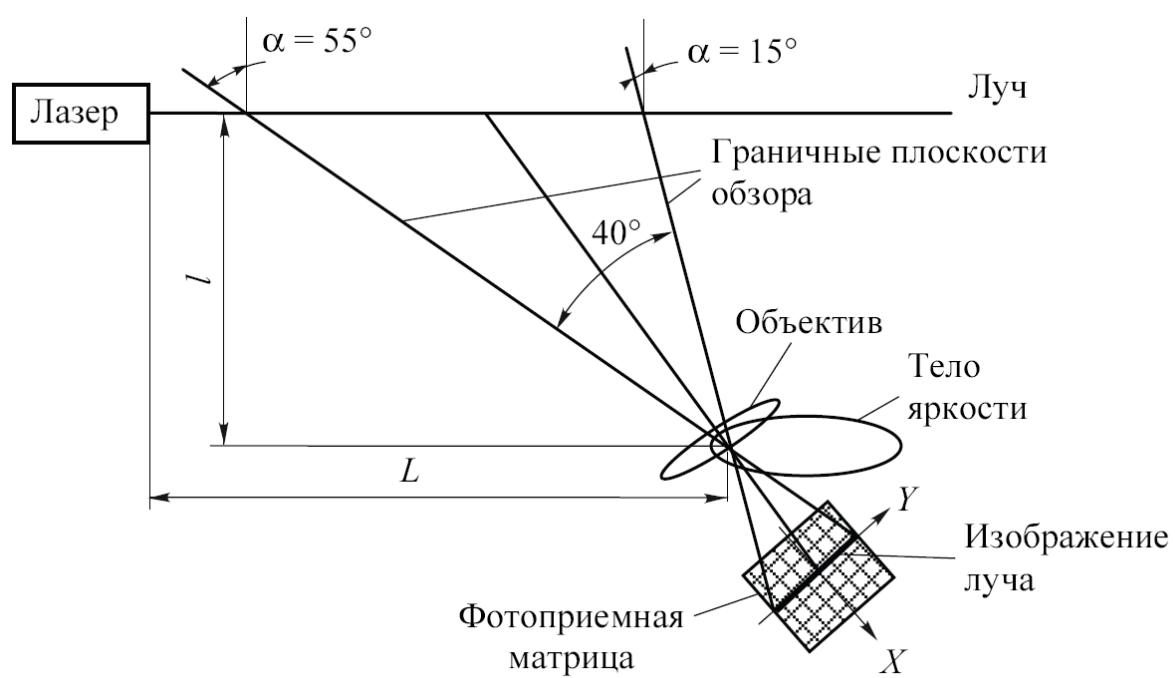


Рис. 2.11: Схема визирования лучевой траектории.

Тела яркости в точках, характеризующихся различными и различным удалением от луча, где r - расстояние от луча, L - расстояние от лазера до объектива, рассчитывались численным решением уравнения переноса излучения (УПИ) в малоугловом приближении (МУП) методом конечных разностей [54]. В качестве модели тумана использовались индикатрисы 9 класса (пологая), 9 (острая) [172] и индикатриса water cloud C1, T38 [8], представленные на рис. 2.2.4. Индикатрисы удовлетворяют единичной нормировке на всей сфере направлений.

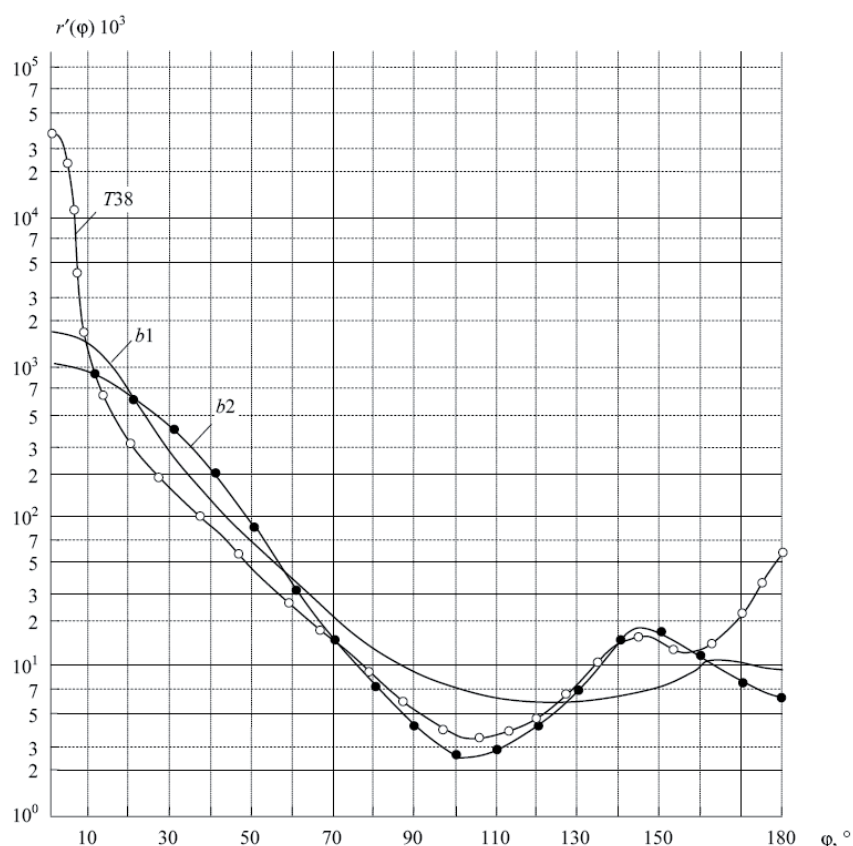


Рис. 2.12: Модельные индикатрисы тумана: b1 - 9 класс пологая [172]; b2 - 9 класс острая [172], T38 - water cloud C1 [8]

В работе [173] индикатрисы, табулированные в [172], использовались для оценок в видимой и ближней ИК-области спектра. В нашем расчете индикатрисы 9 (пологая) и T38 приближенно заменялись индикатрисами Хеньи-Гристейна [176] со значениями параметра асимметрии $g = 0.7$ и $g = 0.94$. Индикатриса класса 9 (острая) приближенно заменялась Гауссовой индикатрисой с соответ-

ствующим параметром полуширины. Указанные аппроксимации обеспечивают удовлетворительное согласие с табличными данными в передней полусфере углов рассеяния.

В расчете применялось усовершенствованное малоугловое приближение теории переноса излучения [53, 54] с учетом дисперсии длин путей распространения излучения.

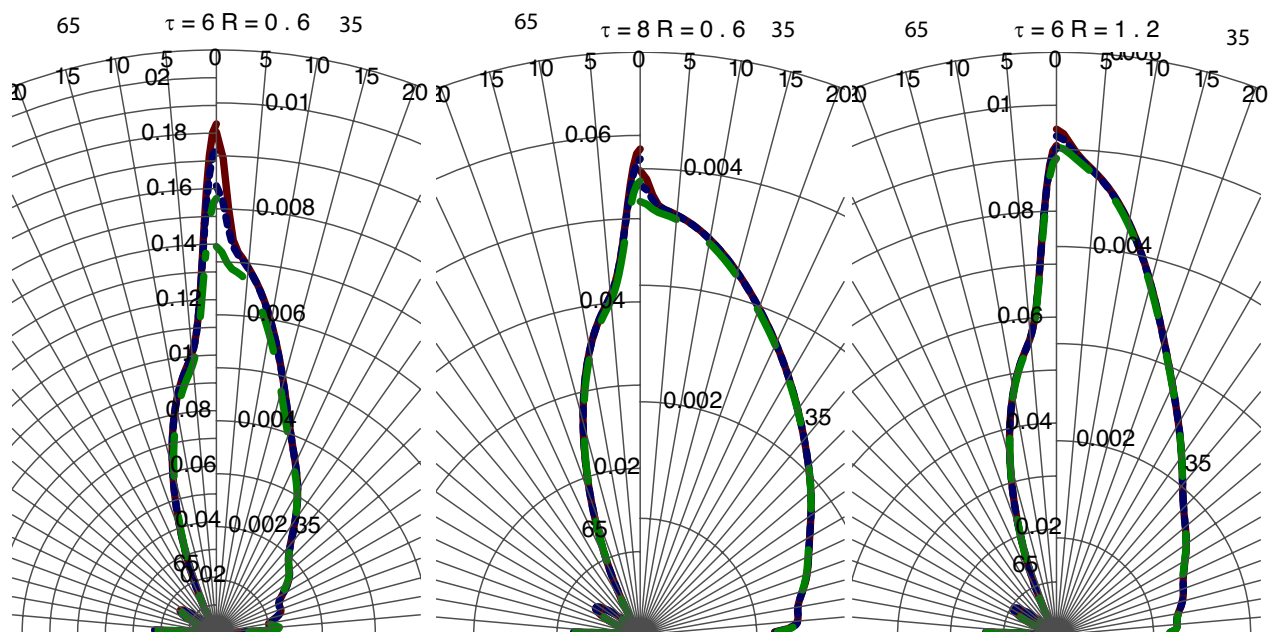


Рис. 2.13: Сечения углового распределения яркости граничными плоскостями поля зрения яркомера 65° и 35° (рис. 2.2.4) на различных расстояниях и направлениях от источника. Сплошная кривая – полная яркость, пунктирная кривая – яркость за вычетом первой кратности рассеяния, штриховая кривая – яркость за вычетом первых двух кратностей рассеяния. Индикатриса Хеньи-Гринстейна [176], значение параметра асимметрии $g = 0.94$, альбеда однократного рассеяния $\Lambda = 1$.

На рис. 2.2.4 показаны сечения углового распределения яркости граничными плоскостями поля зрения регистрирующего прибора на различных расстояниях и направлениях от источника. Представленные результаты решения скалярного УПИ без учета поляризации показывают, что однократно рассеянное излучение, визуализирующее лучевую траекторию в рассеивающей среде, четко различимо на фоне высших кратностей рассеяния даже на расстояниях, превышающих метеорологическую дальность видимости (МДВ). В случае линейной поляризации излучения лазерного источника следует ожидать значительной деполяризации высших кратностей рассеяния [46]. В этом случае

применение фотоприемного устройства с оптимально согласованными поляризационными характеристиками [174] позволит значительно повысить качество распознавания лучевой траектории [175].

2.2.5 Уравнение переноса излучения для узких пучков в рефрагирующей среде.

Исследование, проведенное в работе [149] по сути является обобщением подхода, развитого в работах [53, 54, 78], на случай сред с градиентом рефракции. Значительная часть полученных там расчетных формул использована здесь без изменения и поэтому в настоящей работе не приводится. Детальное описание общего подхода и необходимые формулы можно найти в указанных работах.

Скалярное уравнение переноса излучения для одномерно страфицированной плоскостистой среды с рефракцией записывается в виде [146]:

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)L + \gamma(1 - \mu_z^2)\frac{dL}{d\mu_z} = -\varepsilon L + 2\mu_z\gamma L + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}')x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (2.70)$$

где $\mathbf{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – единичный вектор направления, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ – индикатриса рассеяния, $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – угловое распределение интенсивности, Λ – альбеда однократного рассеяния, ε – объемный коэффициент ослабления в среде, n – коэффициент преломления среды, $\gamma = d \ln n / dz$ – логарифмическая производная коэффициента преломления среды. В этой работе, следуя [139], ограничимся рассмотрением сред с $\gamma = \text{const}$, как наиболее простого случая, позволяющего выявить основные эффекты, связанные с регулярным градиентом коэффициента преломления в среде. Коэффициент ослабления в среде $\varepsilon = 1$ без ограничения общности положим равным единице.

Поле в среде будем искать в виде [54, 78]

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + L_D, \quad (2.71)$$

где L_0 – нерассеянное поле источника излучения, L_1 – поток излучения, рассеянного на малые углы вперед, L_2 – обратный поток излучения, рассеянного на малые углы после однократного обратного рассеяния, L_D – неизвестная часть поля, не учтенная в приближении квазиоднократного обратного рассеяния.

Следуя работам [53, 54, 78], получим пару связанных уравнений для прямого и обратного потоков излучения с учетом дисперсии длин путей излучения в каждом потоке

$$\frac{\partial}{\partial z} L_1 + \mu_z^- \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_1 + \mu_z^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_1 = +2\gamma L_1 - \gamma \mu_z^- (1 - \mu_z^2) \frac{dL_1}{d\mu_z} \quad (2.72)$$

$$- \mu_z^- L_1 + \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} L_2 + \mu_z^+ \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_2 + \mu_z^+ \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_2 = +2\gamma L_2 - \gamma \mu_z^+ (1 - \mu_z^2) \frac{dL_2}{d\mu_z} \quad (2.73)$$

$$- \mu_z^+ L_2 + \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint (L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') + L_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}')) x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}),$$

где $\mu_z^\pm$ – введенные в [54] тейлоровские разложения величины μ_z^{-1} по μ_z вблизи полюса соответствующей полусферы $\mu_z = \pm 1$ (2.54) и (2.55), $M_1(\mathbf{\Omega}) + M_2(\mathbf{\Omega}) \equiv 1$ – разбиение единицы на сфере [160] такое, что $M_1(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 1$, $M_2(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 0$ и $M_1(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 0$, $M_2(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 1$ соответственно.

Решение этой пары уравнений (2.72), (2.73) с соответствующими граничными условиями и является решением задачи о поле ТМ источника в однородной среде в приближении квазиоднократного обратного рассеяния. Подставляя искомое решение задачи (2.71) в УПИ (2.70), для не учитываемой в этом приближении гладкой части решения L_D получим неоднородное уравнение вида (2.70) функцией источников f_D в правой части

$$f_D = (\mu_z \mu_z^- - 1) (\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_1 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_1 + L_1) + (\mu_z \mu_z^+ - 1) (\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_2 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_2 + L_2) + \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega})) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \\ & - \gamma (1 - \mu_z \mu_z^-) (1 - \mu_z^2) \frac{dL_1}{d\mu_z} - \gamma (1 - \mu_z \mu_z^+) (1 - \mu_z^2) \frac{dL_2}{d\mu_z} \\ & (1 - \mu_z \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega})) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' \\ & + (1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega})) f. \end{aligned}$$

Можно видеть, что вблизи направлений наибольшей анизотропии $\mu_z \rightarrow \pm 1$ функция источников f_D эффективно подавлена стремящимися к нулю множителями типа $(1 - \mu_z \mu_z^\pm) \propto (\mu_z \mp 1)^{(n+1)}$. По этой причине L_D является достаточно гладкой функцией направления Ω и может быть найдена известными численными методами без больших сложностей, связанных с анизотропией и особенностями решения.

В части практического моделирования ограничимся вычислением поля ТМ источника в рефрагирующей среде в малоугловом приближении с учетом дисперсии, т.е. решением уравнения (2.72). Таким образом, будем искать решение в виде суммы нерассеянного излучения L_0 и рассеянного почти вперед потока излучения L_1 .

Рассмотрим нормальное падение излучения ТМ источника на границу полубесконечной рефрагирующей мутной среды, занимающей полупространство $z > 0$.

Нерассеянный поток излучения L_0 известен, так что L_1 удовлетворяет уравнению (2.72) с нулевым краевым условием на границе среды $L_1(0) = 0$. Будем считать пучок бесконечно тонким

$$L_0 = \delta(x)\delta(y)\delta(\Omega) \exp\left(\int \varepsilon dz\right), \quad (2.75)$$

тогда функция источника в уравнении (2.72) равна

$$f(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}, \Omega') x(\Omega, \Omega') d\Omega' = \delta(x)\delta(y) \frac{\Lambda}{4\pi} x(\Omega) \exp\left(-\int \varepsilon dz\right). \quad (2.76)$$

Поле излучения представим в виде разложения по сферическим гармоникам на сфере направлений и интеграла Фурье по пространственным переменным (2.59)

$$L(x, y, z, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{c}_{nm}(k_x, k_y, z) Y_n^m(\theta, \phi) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (2.77)$$

Индикатриса рассеяния также разлагается в ряд по сферическим гармоникам (2.8)

$$x(\Omega, \Omega') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_n Y_n^m(\Omega) Y_n^{m*}(\Omega'). \quad (2.78)$$

Неизвестные коэффициенты разложения (2.59) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x i k_x \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}_1 = -\hat{\mu}_z^- \vec{C}_1 + 2\gamma \vec{C}_1 - \gamma \mu_z^- \hat{\partial}_\mu \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{x} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{f} \vec{f}, \quad (2.79)$$

где $\vec{C}_1, \vec{f}$ – вектор-столбцы коэффициентов разложений (2.59) для L_1, f , соответственно, $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ – матрицы операторов умножения на μ_x, μ_y, μ_z . Матрица $\hat{\partial}_\mu$ соответствует оператору $(1 - \mu_z^2) d/d\mu_z$. С помощью известных рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра можно вывести соотношение для сферических гармоник

$$(1-\mu)^2 \frac{d}{d\mu} Y_j^m(\mu, \phi) = (1+j) \sqrt{\frac{(j-m)(j+m)}{(2j-1)(2j+1)}} Y_{j-1}^m(\mu, \phi) - j \sqrt{\frac{(1+j-m)(1+j+m)}{(2j+1)(2j+3)}} Y_{j+1}^m(\mu, \phi) \quad (2.80)$$

из которого получаются явные выражения для элементов матрицы $\hat{\partial}_\mu$. Явные выражения для элементов матриц $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ можно найти в литературе [87]. Матрицы $\hat{\mu}_z^\pm$ – матричные полиномы от $\hat{\mu}_z$, определяемые формулами (2.54), (2.55). Если ограничиваться расчетом малоугловой компоненты рассеянного вперед излучения, разбиение единицы не требуется.

При практических приближенных расчетах функций с особенностями, как правило, применяется аподизация численного решения [177]. В настоящей работе применена та же техника аподизации, что и в [54].

В численных расчетах использовалась индикатриса Хеньи-Гринштейна [176] со значением параметра анизотропии $g = 0.94$, хорошо аппроксимирующая индикатрису рассеяния тумана Т38 [8] в скалярном приближении. Значение альбедо однократного рассеяния принято $\Lambda = 1$. Расчеты проведены в приближении P_{99} [164] метода сферических гармоник (СГ). Таким образом, учитывалось $(99 + 1)^2 = 10000$ членов в разложениях типа (2.59).

Примеры численных результатов показаны на рис. 2.2.5. Уравнение переноса излучения в рефрагирующей среде в малоугловом приближении с учетом дисперсии длин путей рассеянного излучения в первом порядке $\hat{\mu}_z^\pm = \mp 2 - \hat{\mu}$ в матричном представлении (2.79) решалось с помощью конечно-разностной схемы.

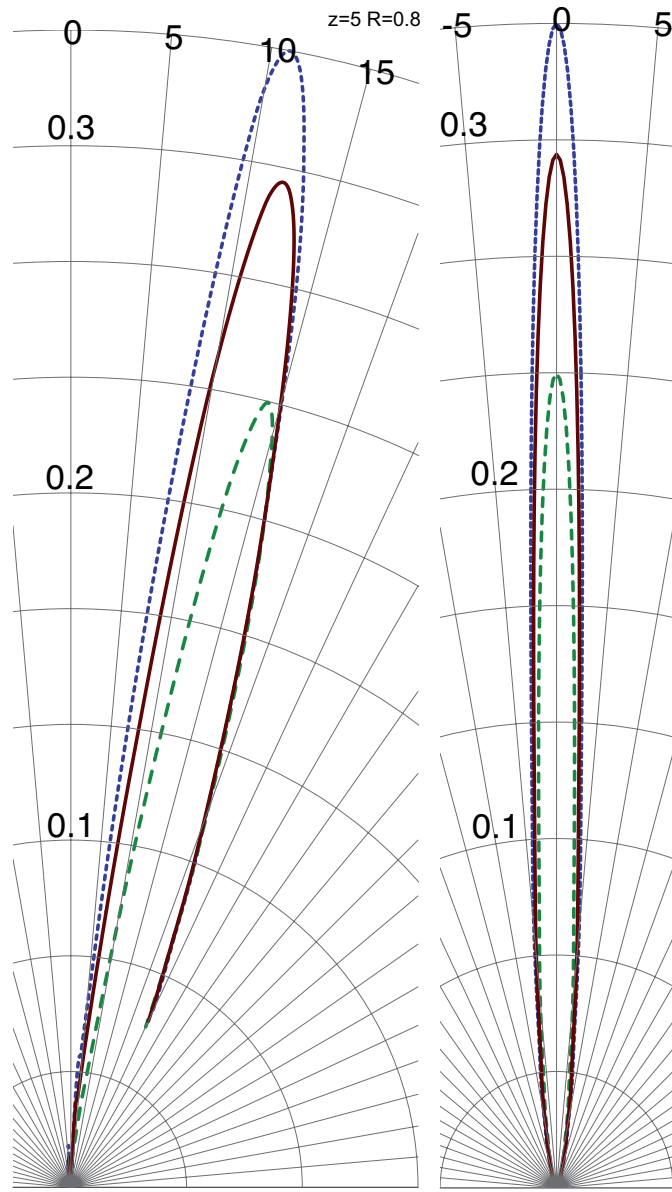


Рис. 2.14: Угловые распределения интенсивности в среде, отн.ед. оптическая толщина среды $z = 5$, расстояние до оси пучка $R = 0.8$, $g = 0.94$, $\Lambda = 1$, индикатриса рассеяния Хеньи-Гринштейна [176]. Слева – меридиональное сечение, справа – поперечное сечение в плоскости максимальной интенсивности. Сплошная линия – отсутствие рефракции ($\gamma = 0$), пунктирная линия – $\gamma = 0.05$, штриховая линия – $\gamma = -0.1$

2.2.6 Калибровка численного решения для ТМ источника по абсолютной интенсивности.

Поле источника в среде выражается в виде (2.59)

$$L(x, y, z, \mathbf{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{c}_{nm}(k_x, k_y, z) Y_n^m(\theta, \phi) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y, \quad (2.81)$$

где x, y, z – безразмерные координаты в единицах оптической толщины, принятые в указанной работе. Нетрудно видеть, что для бесконечно тонкого направленного луча мощности P в положительном направлении оси z

$$L_0(x, y, z) = P\delta(x)\delta(y)\delta(\mathbf{\Omega}), \quad (2.82)$$

т.е. полная мощность источника P получается интегрированием (2.82) по всей сфере $\mathbf{\Omega}$ и по всем значениям поперечных координат x, y

$$\int P \delta(x)\delta(y)\delta(\mathbf{\Omega}) dx dy d\mathbf{\Omega} = P. \quad (2.83)$$

С другой стороны, для источника (2.82) справедливо

$$c_{nm}(k_x, k_y, z) = PY_n^m(0, 0) = P\delta_{m0}\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}. \quad (2.84)$$

Следовательно, интегрирование (2.59) с учетом (2.84) по всей сфере углов и всем значениям поперечных координат дает

$$\int L dx dy d\mathbf{\Omega} = 4\pi c_{00}(0, 0) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{4\pi P}{4\pi} = P. \quad (2.85)$$

Таким образом, (2.59) представляет собой яркость излучения в единицах мощности на квадрат единицы безразмерной оптической толщины на стерадиан. Чтобы получить абсолютную яркость излучения, необходимо формулу (2.59) умножить на мощность источника и квадрат коэффициента ослабления излучения в среде, т.е. разделить на квадрат длины свободного пробега.

2.2.7 О структуре особенностей пространственного и углового распределения интенсивности поля излучения ТМ источника в мутной среде.

Структура радиационного поля узкого пучка в рассеивающей среде достаточно сложна, и соответствующее решение УПИ сингулярно. Гермогеновой [4] установлено, что особенности решения присутствуют в компонентах решения до третьей кратности рассеяния включительно. Структура особенностей однократно рассеянного излучения ТМ источника исследована в работах [75, 76], в которых получены и исследованы интегральные представления его особых компонент. Как было показано, особенности присутствуют в потоках рассеянного излучения как прямого, так и обратного направления. Покажем некоторые свойства поля излучения, справедливые для компонент произвольной кратности рассеяния.

Рассмотрим диффузное световое поле в симметричном относительно начала координат однородном плоском слое мутной среды со свободными границами (рис. Fig. 2.15. Введем функцию Грина краевой задачи для данного типа среды $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}')$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор произвольной точки пространства, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ – координаты инфинитезимального источника излучения, как решение уравнения

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') + G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}'', \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}'') d\boldsymbol{\Omega}'' \quad (2.86)$$

$$= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}'),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$G = 0 \text{ at } z = -z_0/2, \mu_z > 0 \quad (2.87)$$

and

$$G = 0 \text{ at } z = +z_0/2, \mu_z < 0 \quad (2.88)$$

на нижней и верхней границах слоя, соответственно. В силу однородности параметров рассеивающей среды и симметрии граничных условий (2.87), (2.88) относительно замены знака всех координат и углов функция Грина также симметрична относительно такой замены

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') = G(-\mathbf{r}, -\boldsymbol{\Omega}, -\mathbf{r}', -\boldsymbol{\Omega}'). \quad (2.89)$$

Пусть в среде вдоль оси z распространяется излучение точечного мононаправленного (ТМ) источника излучения [76]

$$L_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \exp(-\tau) \delta(x) \delta(y) \delta(\boldsymbol{\Omega}), \quad (2.90)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\tau = z' + z_0/2$ – оптический путь луча ТМ источника в среде (рис. 2.15). Тогда поле рассеянного излучения в среде является решением неоднородного УПИ

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' = f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (2.91)$$

удовлетворяющим краевым условиям (2.87), (2.88). Функция источников в правой части (2.91) равна

$$f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' = \frac{\Lambda}{4\pi} \exp(-\tau) x(\boldsymbol{\Omega}) \delta(x) \delta(y). \quad (2.92)$$

Тогда поле излучения ТМ источника в среде выражается в виде

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{r}' d\boldsymbol{\Omega}' \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') \exp(-\tau) x(\boldsymbol{\Omega}') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\boldsymbol{\Omega}', \end{aligned} \quad (2.93)$$

(здесь и далее интегрирование ведется по всей сфере направлений и по всему объему среды). Примем, что индикатриса рассеяния непрерывна, ограничена и отделена от нуля на сфере направлений ненулевыми константами

$$0 < \min_{\boldsymbol{\Omega}} x(\boldsymbol{\Omega}) < x(\boldsymbol{\Omega}) < \max_{\boldsymbol{\Omega}} x(\boldsymbol{\Omega}). \quad (2.94)$$

Тогда решение (2.93) ограничено сверху и снизу положительными симметричными функциями углов и координат. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} c_1 \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\boldsymbol{\Omega}' &\leq \\ \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') \exp(-\tau) x(\boldsymbol{\Omega}') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\boldsymbol{\Omega}' &\leq \\ c_2 \int G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\boldsymbol{\Omega}', \end{aligned} \quad (2.95)$$

где $c_1 = \Lambda \min_{\Omega} x(\Omega) \exp(-z_0)$, $c_2 = \Lambda \max_{\Omega} x(\Omega)$.

Запишем интегральное представление для рассеянного поля в среде при противоположных значениях координат и направлений $L(-\mathbf{r}, -\Omega)$:

$$\begin{aligned} L(-\mathbf{r}, -\Omega) &= \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') f(\mathbf{r}, \Omega) d\mathbf{r}' d\Omega' \\ &= \frac{\Lambda}{4\pi} \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' . \end{aligned} \quad (2.96)$$

Для решения (2.96) в силу (2.94) также справедливы оценки

$$\begin{aligned} c_1 \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' &\leq \\ \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' &\leq \\ c_2 \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' , \end{aligned} \quad (2.97)$$

Учитывая симметрию области интегрирования, в правой и левой частях неравенства (2.97), можно заменить знак (штрихованных) переменных интегрирования, т.е. заменить $G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega')$ на $G(-\mathbf{r}, -\Omega, -\mathbf{r}', -\Omega')$. Учитывая симметрию функции Грина рассматриваемой задачи относительно замены знака всех координат и углов (2.89), там же можно заменить $G(-\mathbf{r}, -\Omega, -\mathbf{r}', -\Omega')$ на $G(\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}', \Omega')$. Тогда из (2.95), (2.97) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' \\ \leq C_1 \int G(\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' , \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \int G(\mathbf{r}, \Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' \\ \leq C_2 \int G(-\mathbf{r}, -\Omega, \mathbf{r}', \Omega') \exp(-\tau) x(\Omega') \delta(x') \delta(y') d\mathbf{r}' d\Omega' , \end{aligned} \quad (2.99)$$

т.е. пара неравенств

$$L(\mathbf{r}, \Omega) \leq C_1 L(-\mathbf{r}, -\Omega) , \quad (2.100)$$

$$L(-\mathbf{r}, -\Omega) \leq C_2 L(\mathbf{r}, \Omega) , \quad (2.101)$$

определяющая отношение эквивалентности

$$L(-\mathbf{r}, -\mathbf{\Omega}) \sim L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) . \quad (2.102)$$

Отсюда немедленно следует, что любой особенности светового поля $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \rightarrow \infty$ соответствует другая особенность противоположного направления $L(-\mathbf{r}, -\mathbf{\Omega}) \rightarrow \infty$, эквивалентная первой, т.е. равная ей с точностью до ограниченного сверху и снизу множителя $C_1 \leq C(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \leq C_2$. В частности, это соотношение справедливо для однократно рассеянной компоненты излучения в среде. [75, 76].

Используя другие отношения симметрии, характерные для функции Грина рассматриваемой задачи, можно получить другие связи между особенностями светового поля в среде. В частности, использованная здесь симметрия решения относительно замены знака всех координат и направлений сохраняется и для ненормального падения ТМ источника на границу среды. Тем самым, проведенные рассуждения справедливы для задачи ТМ УПИ в однородном плоском слое с произвольным углом падения.

В случае ПМ источника

$$L_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \exp(-\tau/\mu_0) \delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0) , \quad (2.103)$$

рассеянное поле в среде является решением краевой задачи (2.91), (2.87), (2.88) с функцией источников в правой части

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' = \frac{\Lambda}{4\pi} \exp(-\tau/\mu_0) x(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}_0) , \quad (2.104)$$

в силу (2.94) также ограниченной снизу и сверху некоторыми константами

$$c_1 \leq f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \leq c_2 . \quad (2.105)$$

Отсюда следуют оценки типа (2.95), (2.97) приводящие к неравенствам (2.100), (2.101) и соотношению эквивалентности (2.102), в случае ПМ источника имеющего место для всюду ограниченных функций.

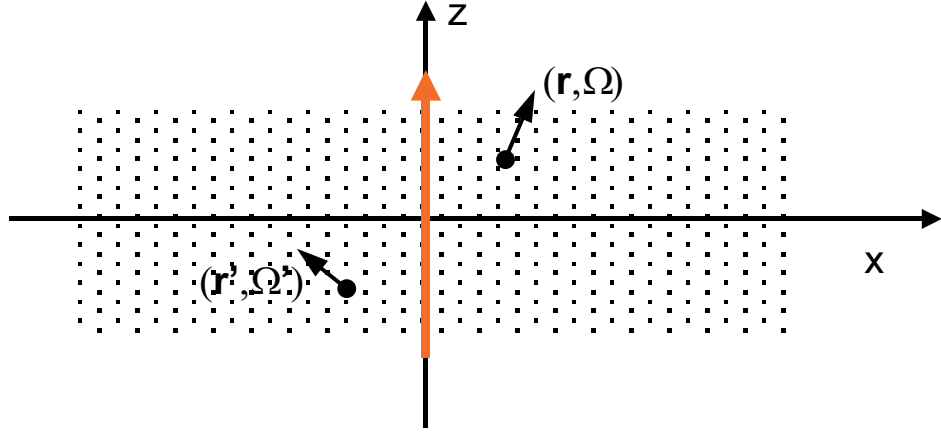


Рис. 2.15: Геометрия краевой задачи для ТМ источника в плоскостой среде.

2.3 Когерентное усиление обратного рассеяния и слабая локализация.

2.3.1 Механизм эффекта когерентного обратного рассеяния.

Принцип явления когерентного усиления обратного рассеяния схематически показан на рис. 2.16. Хорошо известно, что эффект обусловлен вкладом циклических (максимально скрещенных) диаграмм. В рамках скалярной теории волн было неоднократно показано [126, 128], что одна из встречных траекторий диаграммы может быть обращена в силу принципа взаимности. Таким образом, установлена эквивалентность циклических и лестничных диаграмм, т.е. их вклады равны друг другу с точностью до фазового интерференционного множителя $\exp(ik\Delta y\theta)$ (в направлении строго назад — вклады в точности равны).

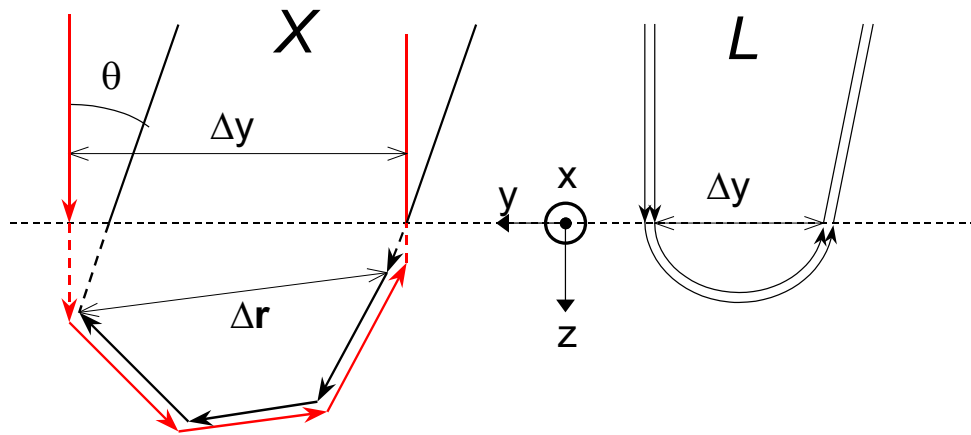


Рис. 2.16: Схематическое пояснение принципа когерентного усиления обратного рассеяния.

Поскольку угол θ мал, можно пренебречь зависимостью амплитуды рассеяния от этого угла в первом и последнем актах рассеяния в каждой диаграмме. Такое приближение разумно, поскольку индикатриса рассеяния отдельного рассеивателя имеет характерную ширину λ/d радиан, где d – типичный характерный размер отдельного рассеивателя. С другой стороны, угловой масштаб пика когерентного обратного рассеяния составляет порядка $\lambda/\Delta r \ll \lambda/d$, поскольку $d \ll \Delta r$. Таким образом, малые изменения угла рассеяния в пределах угловой ширины обратного пика существенно не влияют на амплитуду рассеяния в отдельном акте рассеяния.

Аналогично, вследствие малости угла θ мы пренебрегаем различием между участками диаграмм до первого и после последнего рассеяния в среде (показано на рис. 2.16, слева пунктирными линиями). Таким образом, далее мы рассматриваем приближенно эквивалентную диаграмму (рис. 2.16, справа).

Тем самым, вклад любой максимально скрещенной диаграммы в обратное рассеянное излучение равен

$$I_X = I_L \exp(ik\Delta y\theta), \quad (2.106)$$

где I_L – интенсивность на выходе соответствующей лестничной диаграммы. Следовательно, сумма вкладов всех максимально скрещенных диаграмм, соединяющих две заданные точки на поверхности среды, выражается формулой (2.106), где I_L – суммарная интенсивность обратного рассеяния по всем лестничным диаграммам, представляющая собой решение уравнение переноса излучения (УПИ) с ТМ источником [53, 54]. Здесь мы ограничимся исследованием случая нормального падения излучения на границу среды.

Для полной интенсивности когерентного обратного рассеяния ото всей среды выражение (2.106) необходимо проинтегрировать по всей площади освещенной поверхности и по всей площади поверхности наблюдения рассеянного излучения

$$I_C(\theta) = \int \int I_L \exp(ik\Delta y\theta) dx dy dx' dy' \propto \int I_L \exp(ik\Delta y\theta) d\Delta x d\Delta y, \quad (2.107)$$

где $\Delta x = x - x'$, $\Delta y = y - y'$, в случае если размеры освещенной и наблюдаемой областей границы среды велики по сравнению с характерной дальностью распространения излучения в среде (транспортная длина l_{tr}). Следовательно, выражение (2.107) есть Фурье-трансформанта решения УПИ с ТМ источником. Аналогично, интенсивность некогерентного рассеяния равна нулевой Фурье-компоненте решения УПИ $I_C(0)$. Поскольку многие известные решения УПИ найдены в форме Фурье-представления [93, 58, 60, 53, 54], они могут быть непосредственно применены к задаче когерентного обратного рассеяния.

2.3.2 Полное численное решение уравнения переноса излучения.

Рассмотрим уравнение переноса излучения (2.1). Согласно разд. 2.2.2, решим краевую задачу для УПИ в приближении квазиоднократного обратного рассеяния (2.56), (2.57) и найдем Фурье-компоненты распределения интенсивности излучения (2.59), с помощью которых выражается интенсивность обратного рассеяния (2.107).

Однократно рассеянное излучение не вносит вклада в когерентное усиление обратного рассеяния [111] и должно быть вычтено из общего результата. Его можно найти с помощью уравнения (2.57). Полагая в этом уравнении рассеяние равным нулю ($\Lambda = 0$), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} L_2^{(1)} + \mu_z^+ \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_2^{(1)} + \mu_z^+ \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_2^{(1)} = -\mu_z^+ L_2^{(1)} + \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}). \quad (2.108)$$

Отдельно учитывать однократно рассеянное излучение в уравнении для диффузной компоненты L_D нет смысла, поскольку в интересующих нас направлениях, близких к обратному, оно практически полностью учитывается в малоугловом приближении однократного обратного рассеяния (2.108).

Таким образом, полное решение задачи может быть найдено в виде суммы

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + L_D, \quad (2.109)$$

где для L_D получается неоднородное уравнение переноса с правой частью (2.58). Из этой суммы должна быть вычтена интенсивность однократного обратного рассеяния (2.108).

Неизвестные коэффициенты разложения в (2.59) удовлетворяют уравнениям (2.60), (2.60) и

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{C}_2^{(1)} + \hat{\mu}_z^+ \hat{\mu}_x i k_x \vec{C}_2^{(1)} + \hat{\mu}_z^+ \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}_2^{(1)} = -\hat{\mu}_z^+ \vec{C}_2^{(1)} + \hat{\mu}_z^+ \hat{M}_2 \Lambda \hat{x} \vec{f}, \quad (2.110)$$

где $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_2^{(1)}$, $\vec{f}$ – вектор-столбцы коэффициентов разложений (2.59) для L_1 , L_2 , $L_2^{(1)}$, f , соответственно, $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, $\hat{\mu}_z$ – матрицы операторов умножения на μ_x , μ_y , μ_z . Явные выражения для соответствующих матриц можно найти в литературе [87]. Матрицы $\hat{\mu}_z^\pm$ – матричные полиномы $\hat{\mu}_z$, определяемые формулами (2.54), (2.55). Матрицы $\hat{M}_{1,2}$ соответствуют функциям разбиения единицы на сфере $M_{1,2}(\mathbf{\Omega})$ [54].

Уравнение (2.1) с функцией источников f_D (2.58) для диффузной части излучения L_D решалось методом дискретных ординат с помощью конечно-разностной схемы [87, 153]. Использовалась гауссовская квадратурная формула для сферы G29 [178] 29-го порядка точности с 302 узлами.

Матричные элементы операторов могут быть вычислены с помощью $3j$ -символов Вигнера [151]. Обобщение подхода на нестационарный случай не вызывает затруднений [54, 46].

2.3.3 Численное моделирование и обсуждение результатов.

На рис. 2.17 предлагаемое численное решение для пика обратного рассеяния показано вместе с известным решением в диффузионном приближении [10] для полубесконечной среды ($\tau_0 = \infty, \Lambda = 1$)

$$\alpha(\theta) = (3a/4\pi l)\{1 + [1 - \exp(-q_\perp a)]/q_\perp a\}, \quad (2.111)$$

нормированным соответствующим образом. Поперечное волновое число $q_\perp = k\theta$, параметр $a = 2(l_{tr} + z_0)$, где $z_0 \approx 0.7 l_{tr}$.

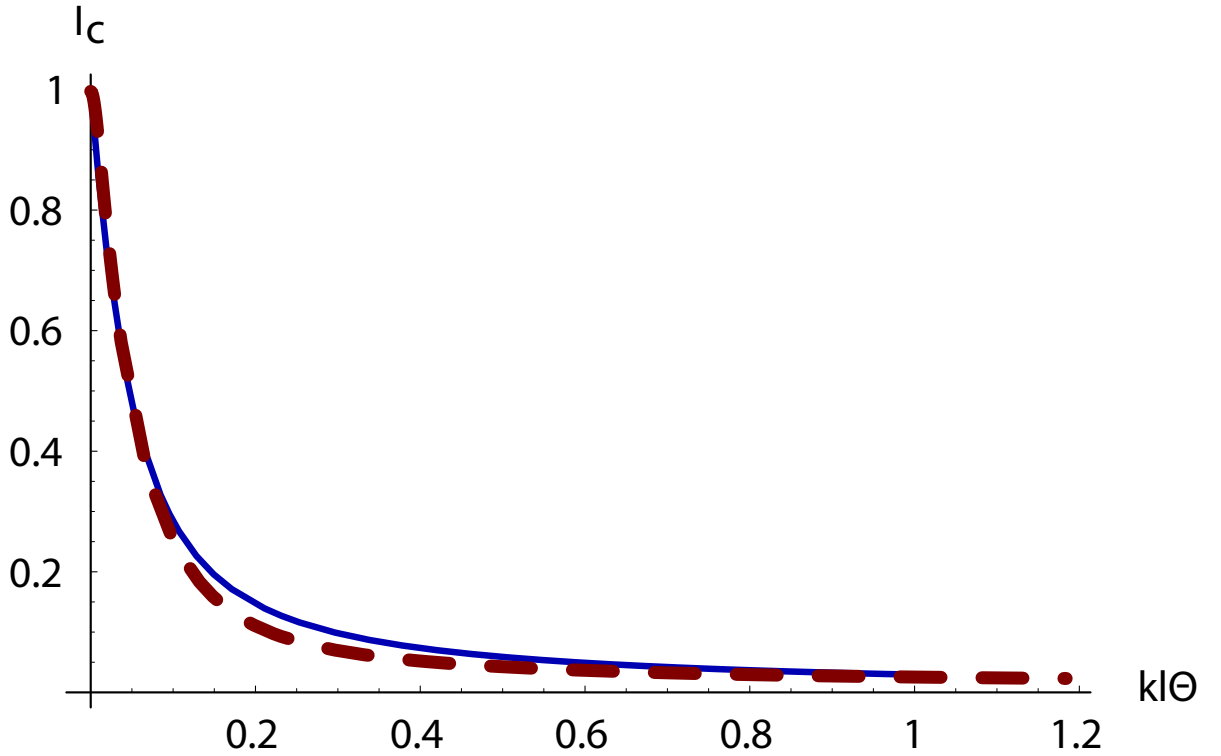


Рис. 2.17: Когерентное усиление обратного рассеяния в консервативной среде: сплошная кривая – диффузионное приближение [10], пунктирная кривая – численный расчет. $\tau_0 = 200$, $\Lambda = 1$, $g = 0.9$, индикатиса рассеяния Хеньи-Гринштейна [176]

Численное решение получено для нормально освещенного плоского слоя среды с оптической толщиной $\tau_0 = 200$, $\Lambda = 1$, индикатриса рассеяния Хеньи-Гринштейна, параметр анизотропии $g = 0.9$.

Маринюк и Рогозкин [128] исследовали когерентное обратное рассеяние в средах с сильно анизотропным рассеянием и выявили роль поглощения в сре-

де. Они указали два основных режима, соответствующих случаям слабого и сильного поглощения. В случае слабого поглощения

$(l_a \gg l_{tr})$, где $l_a = ((1 - \Lambda)\varepsilon)^{-1}$ – длина поглощения и l_{tr} – транспортная длина, поглощение излучения в среде приводит к ослаблению интенсивности при углах

$$\theta < \lambda / \sqrt{l_a l_{tr}}. \quad (2.112)$$

т.е. к сглаживанию вершины пика. Авторы [128] рассмотрели также случай сильного поглощения $l_a < l_{tr}$. В смысле общепринятого определения транспортной длины $l_{tr} = 1/(n\sigma_{tr})$ [105], где n – объемная концентрация рассеивателей в среде и

$$\sigma_{tr} = \sigma_s(1 - g) + \sigma_a \quad (2.113)$$

– транспортное сечение рассеяния, σ_s and σ_a – соответственно сечения рассеяния и поглощения, g – средний косинус рассеяния, указанное неравенство $l_a < l_{tr}$ иметь места не может. Поскольку в работе [128] отсутствует принятое авторами определение транспортной длины, в настоящем исследовании при сравнении результатов используется значение $l_{tr} = l/(1 - g)$ для консервативной среды, как разумное приближение.

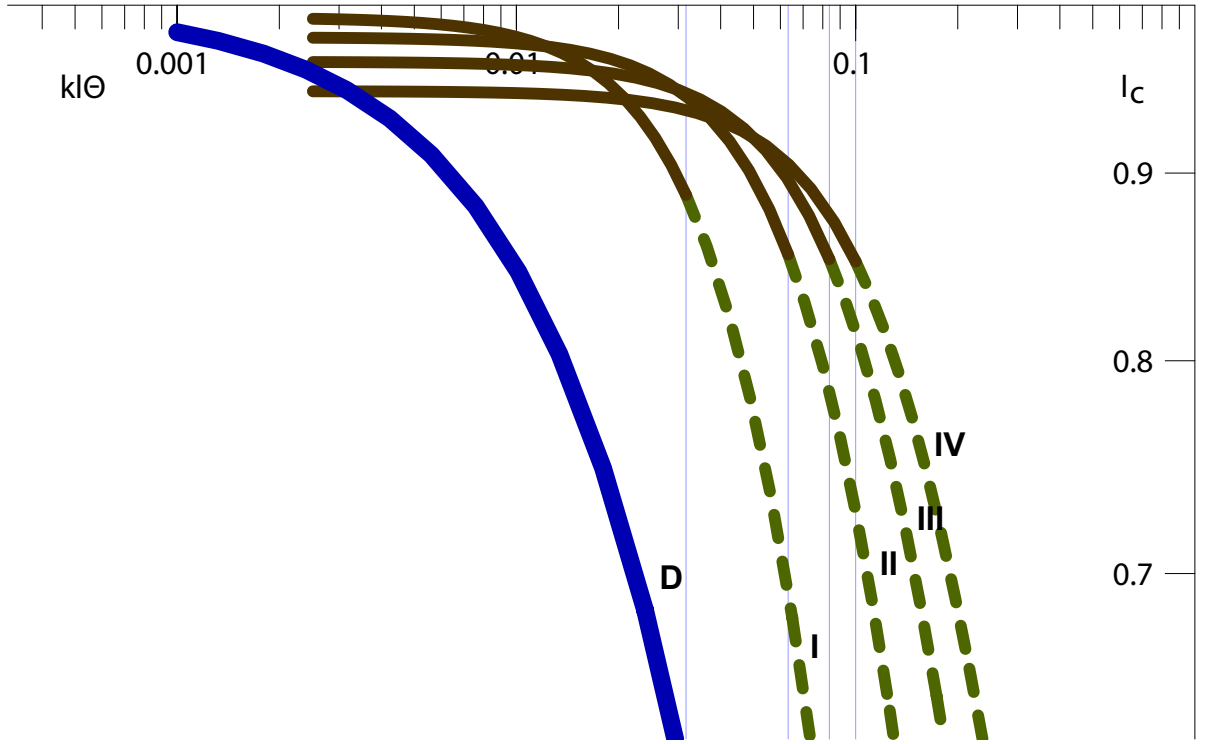


Рис. 2.18: Когерентное усиление обратного рассеяния в слабо поглощающей среде: численный расчет. $\tau_0 = 200$, $g = 0.9$, индикатриса рассеяния Хеньи-Гринштейна [176]. I – $\Lambda = 0.99$, II – $\Lambda = 0.96$, III – $\Lambda = 0.93$, IV – $\Lambda = 0.9$. D – $\Lambda = 1$ (диффузионное приближение [10]).

На рис. 2.18 показана центральная часть пика когерентного рассеяния для различных значений альбеда однократного рассеяния $\Lambda = 0.9 \dots 0.99$. Характерный угловой масштаб $kl\theta = \sqrt{(1-g)(1-\Lambda)}$ для каждой кривой обозначен вертикальной линией сетки. Центральная (сглаженная) и периферийная части каждого пика показаны сплошной и пунктирной кривыми, соответственно. Значения альбеда Λ указаны цифрами при каждой кривой.

На рис. 2.19 показаны кривые обратного рассеяния в режиме сильного поглощения ($l_{tr} \geq l_a$) для различных значений альбеда Λ . В этом режиме на периферии пика обратного рассеяния преобладает вклад однократно обратнорассеянного излучения. Приближенное решение для когерентной части обратнорассеянного излучения в крыльях пика получено в работе [128] для индикатрисы рассеяния Хэньи-Гринштейна [176]

$$J_c(\theta) \propto \int_0^{\tau_0 l} dz \exp(-2z/l) \times \left[\exp \left(2 \frac{1 - \exp(-(1-g)k\theta z)}{(1-g)k\theta l} \right) - 1 \right], \quad (2.114)$$

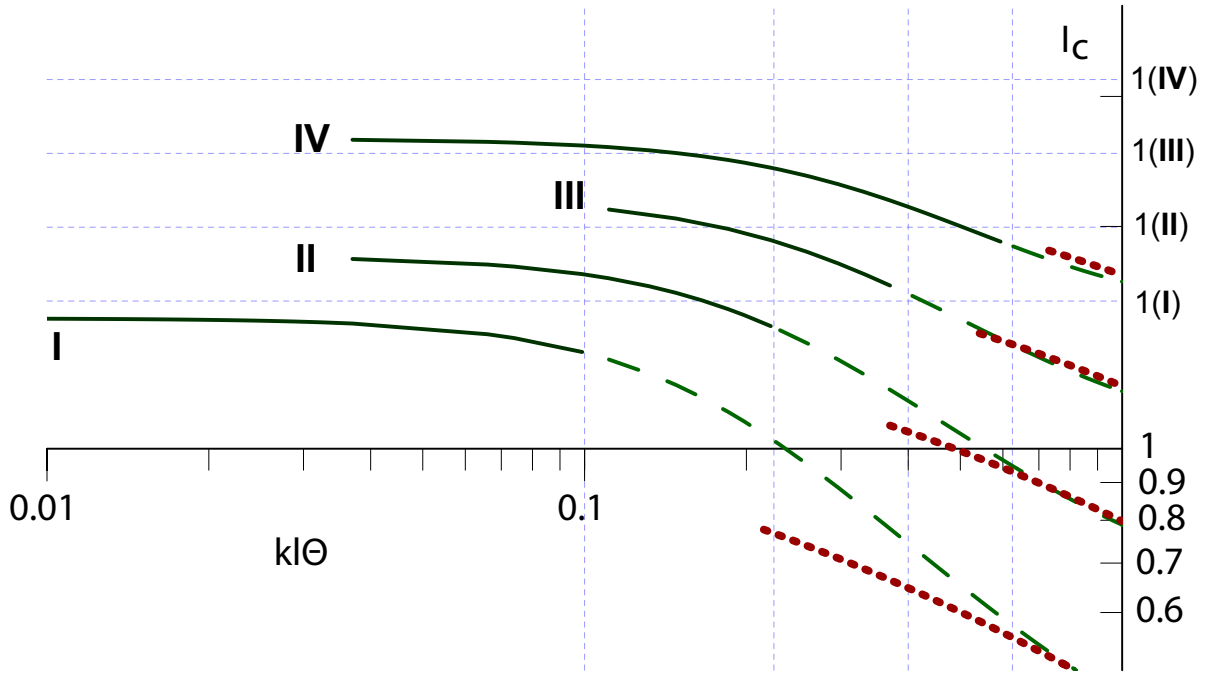


Рис. 2.19: Когерентное усиление обратного рассеяния в сильно поглощающей среде: численный расчет. $\tau_0 = 200$, $g = 0.9$, индикатриса рассеяния Хеньи-Гринштейна [176]. I – $\Lambda = 0.9$, II – $\Lambda = 0.85$, III – $\Lambda = 0.8$, IV – $\Lambda = 0.75$. Пунктирные линии – асимптотическое решение [128], штриховые линии – численное решение в области справедливости асимптотики. Горизонтальные линии пунктирной сетки – уровни единичной нормированной интенсивности для каждой кривой, вертикальные линии пунктирной сетки – границы периферийных областей пика когерентного обратного рассеяния (областей справедливости асимптотики).

асимптотически справедливое при $\theta > (\lambda/l_{tr})(l_{tr}/l_a)^2$. Это решение показано для сравнения жирными пунктирными кривыми в правой части рисунка для каждого значения Λ . Численные решения изображены сплошными кривыми в центральной части пика и пунктирными кривыми в области асимптотической справедливости приближенного решения (2.114). Соответствующие угловые масштабы $kl\theta = (1 - \Lambda)^2/(1 - g)$ и единичные уровни интенсивности для каждого решения показаны линиями сетки. Значения Λ указаны цифрами при каждой кривой.

2.3.4 Теория слабой локализации в средах с рефракцией

Хорошо известно [111], что слабая локализация излучения в рассеивающей среде обусловлена так называемыми циклическими (максимально скрещенными)

диаграммами рассеяния. Вследствие известных соотношений между циклическими и лестничными диаграммами рассеяния в силу принципа взаимности [179, 180], в общепринятом приближении задача о когерентном усилении обратного рассеяния сводится к решению уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным (ТМ) источником [78]

$$L_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \delta(x)\delta(y)\delta(\boldsymbol{\Omega}) \exp\left(-\int_0^z \varepsilon dz\right). \quad (2.115)$$

Данное приближение справедливо при $l \gg \lambda$. Согласно указанным работам, интенсивность когерентной компоненты рассеянного излучения пропорциональна Фурье-компоненте соответствующего решения уравнения переноса излучения с Фурье-параметром $k_y = k\theta$, где θ – фазовый угол (угол между направлением рассеяния и обратным направлением к направлению падения излучения).

Скалярное уравнение переноса излучения для среды с рефракцией записывается в виде [181]

$$n^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{L}{n^2} \right) + \varepsilon L = S + F, \quad (2.116)$$

где S и F – интеграл рассеяния и функция источников, соответственно, n – коэффициент преломления среды. Насколько нам известно, это уравнение впервые встречается в работе Вули (см. ссылку в [182]). После этого, для описания переноса излучения в среде с рефракцией было предложено несколько других уравнений подобного типа [183, 184, 185]. Тем не менее, в большинстве исследований по рефрагирующим средам используется уравнение (2.116). В работе [146] это уравнение приведено к специальному виду для случая плоской слоистой среды с одномерной стратификацией коэффициента преломления в направлении, нормальном к границе. В работе [186] получена запись этого уравнения в цилиндрической и сферической системах координат.

Воспользуемся уравнением переноса излучения в среде с рефракцией (2.70) в форме записи для плоскостойкой среды с профилем рефракции указанного вида, полученной в работе [146]:

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)L + \gamma(1 - \mu_z^2) \frac{dL}{d\mu_z} = -\varepsilon L + \mu_z 2\gamma L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (2.117)$$

где $\mathbf{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – единичный вектор направления, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор, $x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ – индикатриса рассеяния, $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – угловое распределение интенсивности излучения, Λ – альбеда однократного рассеяния, ε – объемный коэффициент ослабления, $\gamma = d \ln n / dz$ – логарифмическая производная коэффициента преломления среды. Таким образом, запишем уравнение для соответствующей Фурье-компоненты решения $\tilde{L}(z, \mathbf{\Omega})$ [78]

$$\mu_z \frac{d\tilde{L}}{dz} - i k_y \mu_y \tilde{L} + \gamma (1 - \mu_z^2) \frac{d\tilde{L}}{d\mu_z} = -\varepsilon \tilde{L} + \mu_z 2\gamma \tilde{L} + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint \tilde{L}(z, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \tilde{f}(z, \mathbf{\Omega}), \quad (2.118)$$

где функция источников

$$\tilde{f}(z, \mathbf{\Omega}) = \int \exp(i k_y y) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' dx dy = \frac{\Lambda}{4\pi} x(\mathbf{\Omega}) \exp\left(-\int \varepsilon dz\right). \quad (2.119)$$

Уравнение для интенсивности однократно рассеянного излучения, входящего в выражения для когерентной компоненты [179], можно получить из (2.70), (2.118), полагая $\Lambda = 0$. В настоящей работе ограничимся случаем $\gamma = \text{const}$, т.е. $n(z) = \exp(\gamma z)$.

В работах [139, 140] эффект слабой локализации в преломляющих средах исследован в диффузионном приближении. Результаты работы [10] обобщены на случай плоскостойких сред с поглощением и рефракцией. Получены и представлены результаты численных расчетов методом конечных разностей и Монте-Карло.

Как неоднократно было показано, при $\varepsilon \lambda \ll 1$, где ε – объемный коэффициент ослабления, задача о слабой локализации сводится к решению уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным (ТМ) источником излучения. Детальное обсуждение этого приближения можно найти в [78] и цитированной там литературе. В работе [139] эффект когерентного обратного рассеяния в среде с рефракцией исследовался на основе численного решения уравнения переноса излучения в среде с рефракцией [181]

$$n^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{L}{n^2} \right) + \varepsilon L = S + F, \quad (2.120)$$

где $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – пространственно-угловое распределение интенсивности излучения, n – коэффициент преломления среды, S and F – интеграл рассеяния и функция

источников, соответственно. Уравнение переноса излучения (2.70) для плоско-слоистой рефрагирующей среды [146]

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)L + \gamma(1 - \mu_z^2) \frac{dL}{d\mu_z} = -\varepsilon L + 2\gamma\mu_z L + \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \quad (2.121)$$

(2.116) в работе [139] численно решалось методом конечных разностей [87]. Здесь, $\Lambda = \mu_s/(\mu_a + \mu_s)$ – альбеда однократного рассеяния среды, $\varepsilon = \mu_a + \mu_s$, μ_a and μ_s объемные коэффициенты поглощения и рассеяния, соответственно, $\gamma = \partial \ln n(z)/\partial z$. Поскольку никаких специальных мер по регуляризации решения при сильно анизотропном рассеянии в этой работе принято не было, исследование было ограничено средами с умеренной анизотропией рассеяния $g \leq 0.5$. В данной работе проведено численное моделирование задачи методом Монте-Карло, результаты которого находятся в хорошем согласии с результатами конечно-разностного расчета [139].

В настоящей работе, следуя [139], ограничимся рассмотрением коэффициента преломления вида

$$n(z) = n(z_1)e^{\gamma z}, \quad (2.122)$$

в ограниченном плоском слое среды $z_1 \leq z \leq z_2$, т.е. $\gamma = \partial \ln n(z)/\partial z = \text{const}$. За пределами слоя, примем коэффициент преломления постоянным и непрерывным на границах среды, т.е. $n(z) = n(0)$ при $z < z_1$ и $n(z) = n(z_1)e^{\gamma z_2}$ при $z > z_2$.

2.3.5 Алгоритм статистического моделирования переноса излучения в рефрагирующей среде.

Реализация численной модели переноса излучения в рефрагирующей среде методом Монте-Карло включает в себя алгоритм трассировки лучевых траекторий в соответствии с уравнениями геометрической оптики [187]. В остальном техника вычислений в целом принципиально не отличается от традиционных методов статистического моделирования переноса излучения в средах без рефракции.

В плоскослоистой вертикально стратифицированной среде траектории лучей подчиняются закону Снеллиуса

$$n(z) \sin \theta = n_0 \sin \theta_0 = \text{const} , \quad (2.123)$$

(здесь индексом "0" отмечены соответствующие значения в начальной точке луча. Решая дифференциальные уравнения луча в параметрической форме в цилиндрической системе координат [188]

$$dz = \mu_z ds , \quad (2.124)$$

$$dr = \sqrt{1 - \mu_z^2} ds \quad (2.125)$$

$$\phi = \text{const} , \quad (2.126)$$

вместе с (2.123) для рассматриваемого здесь распределения коэффициента преломления $n(z)$ (2.122) , получим параметрические уравнения лучевой траектории

$$\gamma(z - z_0) = \ln \left(\frac{1 + \mu_0}{2} e^{\gamma s} + \frac{1 - \mu_0}{2} e^{-\gamma s} \right) , \quad (2.127)$$

$$\gamma r = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(e^{\gamma s} \sqrt{\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}} \right) - 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}} \right) . \quad (2.128)$$

Разрешая уравнение (2.127) относительно длины лучевой траектории s , получим

$$\gamma s = \ln \left(\frac{e^{\gamma z} \pm \sqrt{\mu_0^2 + e^{2\gamma(z-z_0)} - 1}}{\mu_0 + 1} \right) , \quad (2.129)$$

где z_0 – начальная точка траектории луча и $\mu_0 = \mu_z(z_0)$ – соответствующее значение направляющего косинуса в этой начальной точке. Полагая $\mu = 0$, находим точку поворота лучевой траектории

$$(z_{\text{turn}} - z_0) = \frac{\ln(1 - \mu_0^2)}{2\gamma} . \quad (2.130)$$

Как нетрудно показать, местный радиус кривизны лучевой траектории равен

$$R = \frac{1}{\gamma \sqrt{1 - \mu^2}} . \quad (2.131)$$

При условии $R \gg l$, в некоторой точке траектории рефракцией можно пренебречь, т.е. приближенно аппроксимировать траекторию вблизи этой точки

прямой линией. При помощи полученных выражений (2.127) - (2.131), дальнейший вывод алгоритма Монте-Карло для решения уравнения переноса не представляет каких-либо трудностей и особенностей. Поскольку коэффициенты ослабления и рассеяния приняты постоянными для всей рассеивающей среды, случайная длина траектории пробега фотона в среде может быть рассчитана по стандартной формуле [189] $s = -\ln w/\varepsilon$, где w – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$.

2.3.6 Диффузионное приближение теории переноса излучения в среде с поглощением и рефракцией.

В работе [10] рассмотрен эффект когерентного обратного рассеяния в полубесконечной консервативной изотропно рассеивающей среде без рефракции и получено решение для угловой зависимости интенсивности рассеяния в диффузионном приближении. Результат хорошо согласуется и с экспериментальными данными для среды с сильноанизотропным рассеянием, при условии формальной замены в полученном решении длины свободного пробега излучения в среде транспортной длиной. Дадим обобщение результатов этой работы на случай плоского слоя среды конечной толщины с поглощением и рефракцией.

В работе [10] использована формула для альбедо обратного рассеяния от границы среды

$$\alpha(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{c}{4\pi l^2} \int \int dz dz' d^2\rho \exp(-z/\mu_0 l - z'/\mu l) Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \{1 + \cos(\mathbf{q} \cdot \rho)\}, \quad (2.132)$$

где z и z' – проекции $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ на ось z , ρ – векторная проекция разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ на плоскость границы среды, μ_0 и μ – соответственно направляющие косинусы (проекции единичных векторов направлений распространения падающего и рассеянного излучения на ось z). $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$, $q \approx k_i \theta$, θ – фазовый угол, $l = 1/(1 - g)\mu_s$ – транспортная длина [105], c – скорость света в среде, $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина диффузионного уравнения в среде для стационарной плотности энергии с элементарным инфинитезимальным источником радиации (δ -функция) в правой части, удовлетворяющая соответствующим граничным условиям. Единица и косинус в фигурных скобках в формуле (2.132) представляют

собой вклады лестничных и циклических диаграмм (некогерентную и когерентную компоненты рассеянного излучения), соответственно.

В работе [185] получено уравнение диффузионного приближения для величины $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{4\pi} L d\Omega = c Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в рефрагирующей среде

$$-\nabla \left(D n^2 \nabla \frac{\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{n^2} \right) + \mu_a \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}'). \quad (2.133)$$

В уравнении (2.133) n – коэффициент преломления среды, D – коэффициент диффузии, равный

$$D = \frac{1}{3(\mu_a + (1 - g)\mu_s)} \quad (2.134)$$

g – параметр асимметрии рассеяния (средний косинус угла рассеяния) [105].

Решение уравнения (2.133) вместе с граничными условиями будем искать в форме преобразования Ганкеля

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty G(z, z', q) J_0(q\rho) q dq. \quad (2.135)$$

Тогда при подстановке (2.135) в (2.132) когерентная часть альбеда (2.132) выражается в виде

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{1}{2l^2} \int \exp(-z/\mu_0 l - z'/\mu l) G(z, z', q) dz dz'. \quad (2.136)$$

Тогда функция Грина $G(z, z', q)$ в среде является решением уравнения

$$(q^2 D + \mu_a) G(z, z', q) + 2\gamma D \frac{d}{dz} G(z, z', q) - D \frac{d^2}{dz^2} G(z, z', q) = \delta(z - z'), \quad (2.137)$$

удовлетворяющим соответствующим граничным условиям. В слое конечной толщины, например, часто используются так называемые экстраполированные граничные условия [10, 190]

$$G(z_1 - z_0, z', q) = 0, \quad (2.138)$$

$$G(z_2 + z_0, z', q) = 0, \quad (2.139)$$

где z_0 – некоторое расстояние от действительной границы среды, на котором искомое решение полагается равным нулю. В [190] можно найти различные выражения для z_0 в случае разрыва коэффициента преломления на границе среды.

Поскольку мы полагаем коэффициент преломления непрерывным на границах, в практических расчетах мы принимаем значение $z_0 \approx 0.7l$ [10]. Общее решение однородного уравнения (2.137) записывается в виде

$$G(z, z', q) = C_1 \exp\left(\gamma z - z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right) + C_2 \exp\left(\gamma z + z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right). \quad (2.140)$$

Будем искать функцию Грина краевой задачи для уравнения (2.137) с граничными условиями (2.138), (2.139) в виде [191]

$$G(z, z', q) = \begin{cases} C_1(z') \exp\left(\gamma z - z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right) + C_2(z') \exp\left(\gamma z + z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right), \\ C_3(z') \exp\left(\gamma z - z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right) + C_4(z') \exp\left(\gamma z + z\sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}\right), \end{cases} \quad (2.141)$$

Функция Грина (2.141) удовлетворяет краевым условиям задачи (2.138), (2.139) и условиям сшивки при $z = z'$

$$G(z, z', q) = G(z', z, q), \quad (2.142)$$

$$\partial G(z, z', q)|_{z \rightarrow z'+0} - \partial G(z, z', q)|_{z \rightarrow z'-0} = -\frac{1}{D}. \quad (2.143)$$

Можно показать, что решение системы (2.138), (2.139), (2.142), (2.143) для неизвестных коэффициентов $C_1(z') - C_4(z')$ симметрично относительно одновременной замены $z' \leftrightarrow z$, $\gamma \rightarrow -\gamma$, то есть

$$G(z, z', q)|_{\gamma} = G(z', z, q)|_{-\gamma} \quad (2.144)$$

как для конечных, так и для бесконечных пределов z_1, z_2 . Следовательно, альбедо когерентного рассеяния (2.136) полностью симметрично относительно знака логарифмической производной коэффициента преломления γ , т.е.

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)|_{\gamma} = \alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f)|_{-\gamma}. \quad (2.145)$$

В частности, альбедо когерентного рассеяния для нерелативизующей непоглощающей полубесконечной среды ($\gamma = 0$, $\mu_a = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$) согласно полученным здесь формулам выражается в виде

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{1}{8\pi q D} \frac{(1 + ql) - e^{-2qz_0}}{(1 + ql)^2}. \quad (2.146)$$

В силу различного характера принятых при расчете упрощений оно отличается от соответствующих выражений, полученных в работе [10].

Выражения для α_c конечного или полубесконечного слоя среды с поглощением и рефракцией также можно получить, подставляя соответствующие решения системы (2.138), (2.139), (2.142), (2.143) в (2.136).

В работе [10] задача решалась с помощью приближенной диаграммы рассеяния (рис. 2.20, слева). При этом перенос излучения из точки 1 в точку 2 описывался функцией Грина УПИ в диффузионном приближении (пунктирная линия на диаграмме), а полное решение затем вычислялось интегрированием по координатам точек 1 и 2 (первое и последнее рассеяние в среде). В работе [140] это решение непосредственно обобщено на случай среды с градиентом коэффициента преломления. При этом, на участке лучевой траектории в среде после точки 2 (последнее рассеяние) эффекты рефракции не учитываются, что вносит в решение значительную систематическую погрешность. В частности, решение оказывается полностью инвариантным относительно знака градиента коэффициента преломления, что плохо согласуется с результатами численного моделирования.

Учет рефракции на последнем участке диаграммы значительно усложняет получение приближенного решения задачи для рефрагирующей среды в замкнутой аналитической форме. С другой стороны, выделение последнего рассеяния в диаграмме, проведенное в работе [10], не продиктовано физическими соображениями, а скорее обусловлено примененными в этой работе вычислительными приемами. В настоящей работе последний акт рассеяния вместе с дальнейшим распространением излучения в среде включается в диффузионную часть диаграммы. Это позволяет естественным образом учесть рефракцию на этом участке лучевой траектории, и таким образом одновременно уточнить и упростить решение.

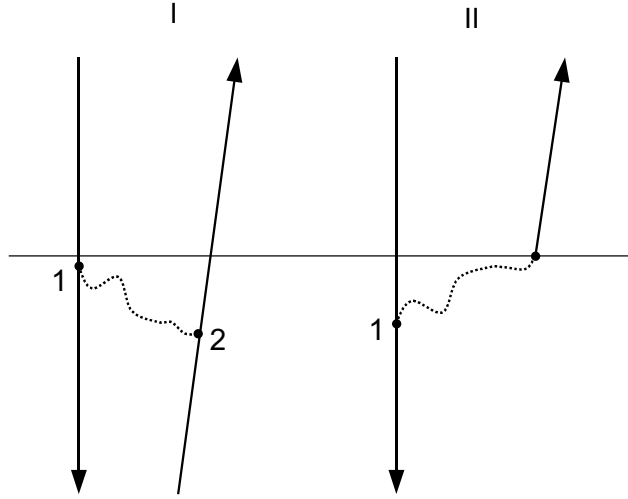


Рис. 2.20: К выводу решения в диффузионном приближении (2.148)

Приближенное решение для когерентной компоненты рассеянной интенсивности, соответствующее диаграмме с одним выделенным рассеянием, (2.132) выражается в виде

$$I_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{1}{8\pi l} \int \exp(-z'/\mu l) G(z, z', q) dz' . \quad (2.147)$$

В частности, для полубесконечной нерелаксирующей среды получается результат

$$I_c = \frac{1 - e^{-2qz_0}}{8\pi Dq(ql + 1)} . \quad (2.148)$$

2.3.7 Результаты численного моделирования слабой локализации в среде с рефракцией.

В этой части работы, ограничимся рассмотрением умеренно анизотропного, в т.ч. рэлеевского рассеяния без учета поляризации. В этом случае не требуется выделение анизотропных компонент решения [78], и уравнение (2.118)

можно непосредственно решать каким-либо из известных численных методов. В данном исследовании применяется метод дискретных ординат и конечно-разностная схема со встречными разностями [87]. Интеграл рассеяния вычисляется с помощью гауссовской квадратурной формулы G29 с 302 узлами на сфере [178]. Рефракционное слагаемое в уравнении (2.118) аппроксимируется регулярным образом с помощью конечной суммы по формуле (2.80) с соответствующими переходными матрицами для перехода от сферических гармоник к дискретным ординатам и обратно.

В целях проверки алгоритма, решалась задача о диффузном отражении [14] от границы плоского однородного слоя консервативной Рэлеевской рассеивающей среды (оптическая толщина $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 1$, $\gamma = 0, \pm 0.25$, $\varepsilon = 1$) для нормального падения излучения на границу среды. Вычисленные угловые распределения интенсивности для отраженного и прошедшего излучения ($\mu_z < 0$ и $\mu_z > 0$, соответственно) показаны на рис. 2.21 вместе с классическим эталонным решением скалярного УПИ для полубесконечной консервативной рэлеевской рассеивающей среды без рефракции [14]. Как можно видеть, положительный градиент рефракции ($\gamma > 0$, коэффициент преломления с глубиной растет) увеличивает пропускание, вследствие отклонения лучевых траекторий в направлении роста коэффициента преломления в положительном направлении оси z . Напротив, отрицательный градиент коэффициента преломления ($\gamma < 0$) отклоняет лучевые траектории обратно к границе среды и таким образом подавляет диффузное пропускание.

Некоторые расхождения между численным решением для слоя непреломляющей среды конечной толщины и эталонным решением для полубесконечной среды имеют место вследствие различия оптических толщин ($\tau_0 = 20$ и $\tau_0 = \infty$, соответственно). Конечный слой среды обладает конечным диффузным пропусканием, в отличие от полубесконечной среды, и пропущенная часть излучения обуславливает разницу в диффузном отражении конечного слоя и полубесконечной среды, которая полностью диффузно отражает все падающее на нее излучение. Также показано численное решение для конечного слоя $\tau_0 = 20$, полученное с помощью алгоритма ДОМ [34]. Оно находится в хорошем согласии с конечно-разностным решением для конечного слоя.

Результаты численного моделирования когерентного обратного рассеяния в этих слоях показаны на рис. 2.22. В правой части рисунка ($kl\theta > 0$) показаны ненормированные распределения полной интенсивности обратного рассеяния (обе компоненты в сумме, когерентная и некогерентная, обусловлены соответственно лестничными и циклическими диаграммами рассеяния). Можно видеть, что абсолютная интенсивность обеих компонент зависит от логарифмической производной коэффициента преломления γ вследствие закономерностей диффузного пропускания и отражения, показанных на рис. 2.21. Однако, влияние преломления на когерентную компоненту рассеянного излучения (нормированную на интенсивность некогерентной компоненты, как показано в левой части рис. 2.22, $kl\theta < 0$) гораздо менее выражено.

На рис. 2.24 и 2.3.7, показаны подобные результаты для среды с индикатрисами рассеяния Хенъи-Гринстейна [176]. Можно видеть, что градиенты коэффициента преломления обоих знаков приводят к уширению пика обратного рассеяния, как для Рэлеевской, так и для изотропной ($g = 0$) и умеренно анизотропной ($g = 0.5$) индикатрисы Хенъи-Гринстейна. Однако, эффект сильно асимметричен по отношению к знаку градиента коэффициента преломления.

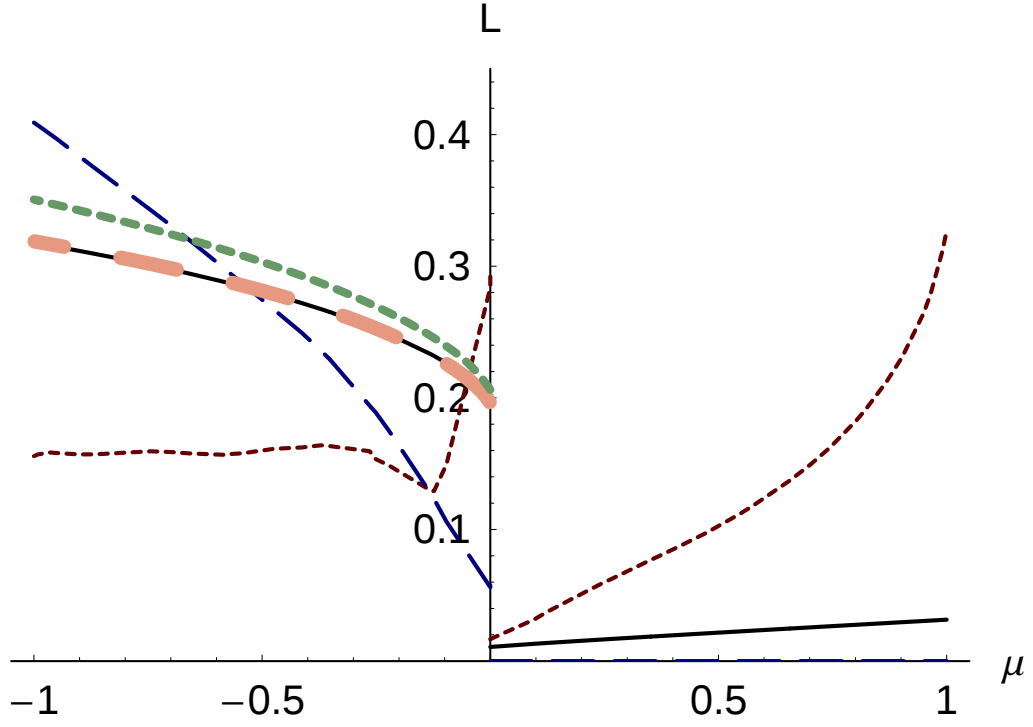


Рис. 2.21: Диффузное пропускание ($\mu > 0$) и отражение ($\mu < 0$) слоя преломляющей среды с Рэлеевским рассеянием $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 1$. Сплошные кривые – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирные и штриховые кривые – $\gamma = +0.25$ и $\gamma = -0.25$, соответственно. Жирная пунктирная кривая – классическое решение для полубесконечной непреломляющей консервативной среды с Рэлеевским рассеянием [14]. Жирная штриховая кривая – численное решение скалярным алгоритмом ДОМ [34] для слоя среды $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 0.9999$.

На рис. 2.23 показаны угловые зависимости альбеда (2.146), (2.148) и соответствующим образом нормированного выражения из [10]

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{3a}{4\pi l} \frac{1 - e^{-2q(l+z_0)}}{2q(l+z_0)}, \quad (2.149)$$

где $a = 2(l + z_0)$, а также численное решение методом Монте-Карло для полубесконечной нерелфразирующей непоглощающей среды (индикатриса Хенни-Гринштейна $g = 0.9$, $\Lambda = 1$). Уточненное решение (2.148) также показано на рис. 2.23 сплошной кривой.

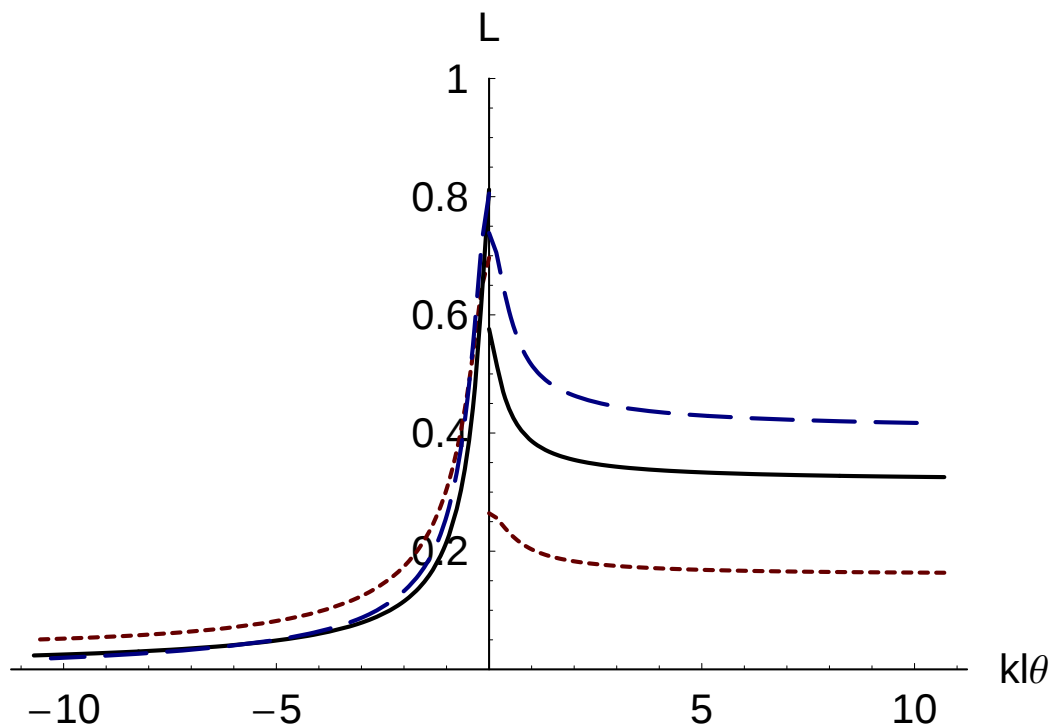


Рис. 2.22: Когерентное обратное рассеяние слоем преломляющей среды с консервативным Рэлеевским рассеянием $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 1$. Сплошные кривые – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирные и штриховые кривые – $\gamma = +0.25$ и $\gamma = -0.25$, соответственно. Правая часть рисунка ($kl\theta > 0$) – ненормированная полная интенсивность (когерентная и некогерентная части в сумме). Левая часть рисунка ($kl\theta < 0$) – нормированная интенсивность когерентной компоненты рассеянного излучения.

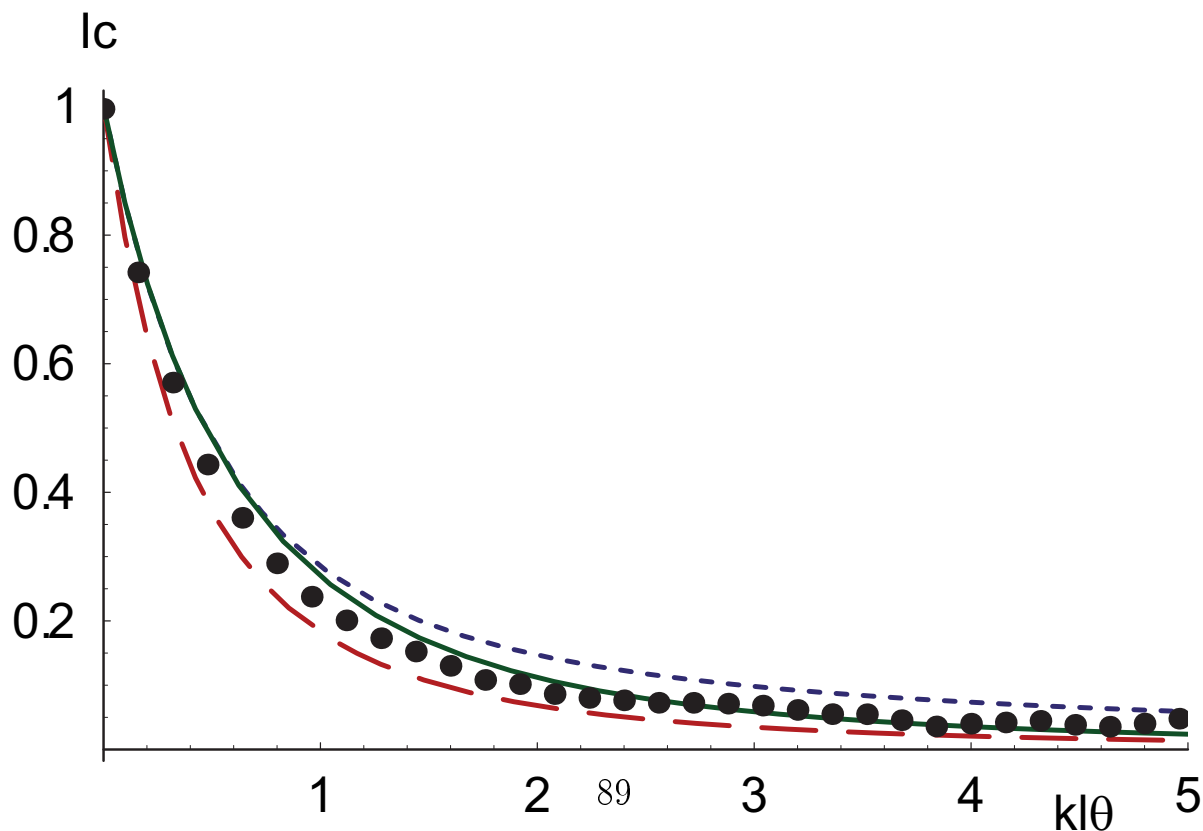


Рис. 2.23: Нормированная интенсивность когерентного обратного рассеяния для полубесконечной нерелативизующей консервативной среды. Сплошная кривая – формула (2.148), пунктирная кривая – формула (2.149) [10], штриховая кри-

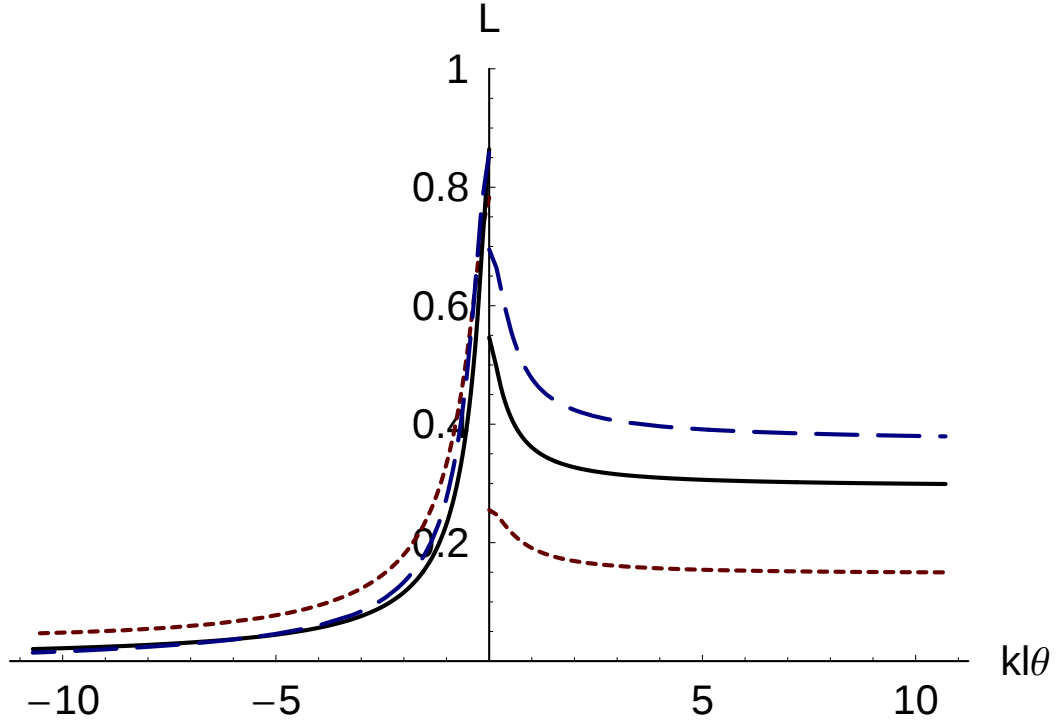


Рис. 2.24: Когерентное обратное рассеяние слоем преломляющей среды с консервативным рассеянием. Индикатриса Хеньи-Гринштейна, $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 1$, $g = 0$. Сплошные кривые – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирные и штриховые кривые – $\gamma = +0.25$ и $\gamma = -0.25$, соответственно. Правая часть рисунка ($kl\theta > 0$) – ненормированная полная интенсивность (когерентная и некогерентная части в сумме). Левая часть рисунка ($kl\theta < 0$) – нормированная интенсивность когерентной компоненты рассеянного излучения.

Типичные примеры результатов расчетов конечно-разностным методом и методом Монте-Карло для слоев с рефракцией показаны на Рис. 2.26 и 2.27, соответственно. Когерентная компонента альбедо конечного слоя с рефракцией в диффузионном приближении показана на рис. 2.28.

Как можно видеть на рис. 2.26 и 2.27, результаты конечно-разностного и статистического моделирования демонстрируют определенную симметрию исследуемого эффекта относительно знака логарифмической производной коэффициента преломления. Именно, положительные и отрицательные значения градиента коэффициента преломления приводят к уширению пика когерентного обратного рассеяния. Диффузионное приближение предсказывает полную симметрию результата относительно знака этой производной. Таким образом, результаты численного моделирования находятся в известной степени согласия с диффузионным приближением.

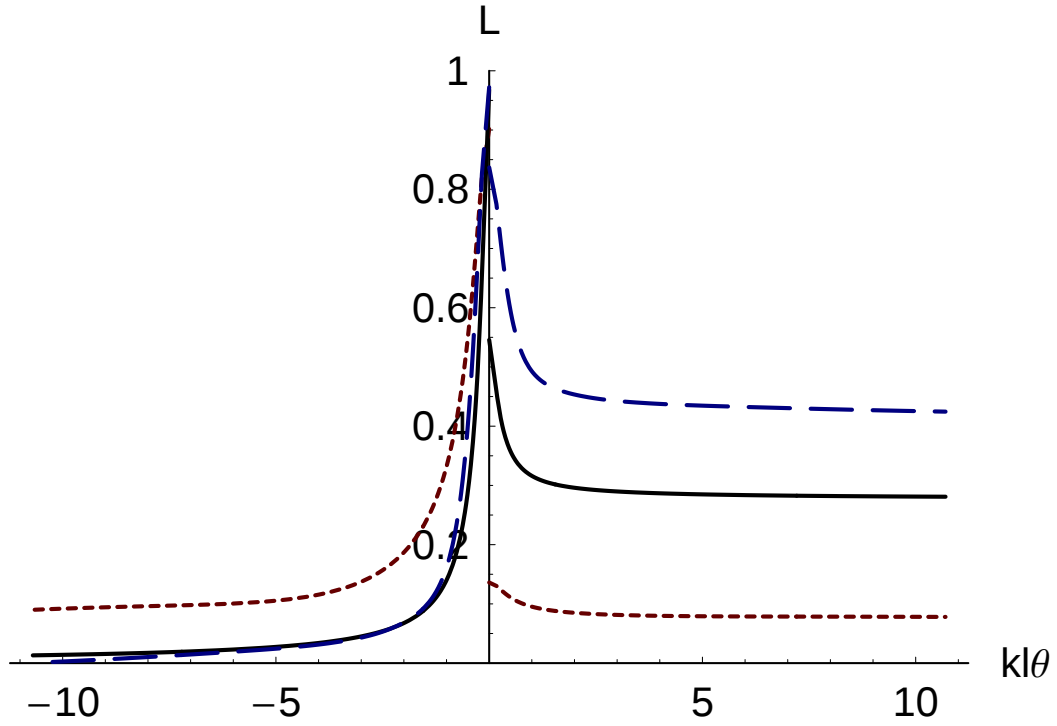


Рис. 2.25: Когерентное обратное рассеяние слоем преломляющей среды с консервативным рассеянием. Индикатриса Хеньи-Гринштейна, $\tau_0 = 20$, $\Lambda = 1$, $g = 0.5$. Сплошные кривые – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирные и штриховые кривые – $\gamma = +0.25$ и $\gamma = -0.25$, соответственно. Правая часть рисунка ($kl\theta > 0$) – ненормированная полная интенсивность (когерентная и некогерентная части в сумме). Левая часть рисунка ($kl\theta < 0$) – нормированная интенсивность когерентной компоненты рассеянного излучения.

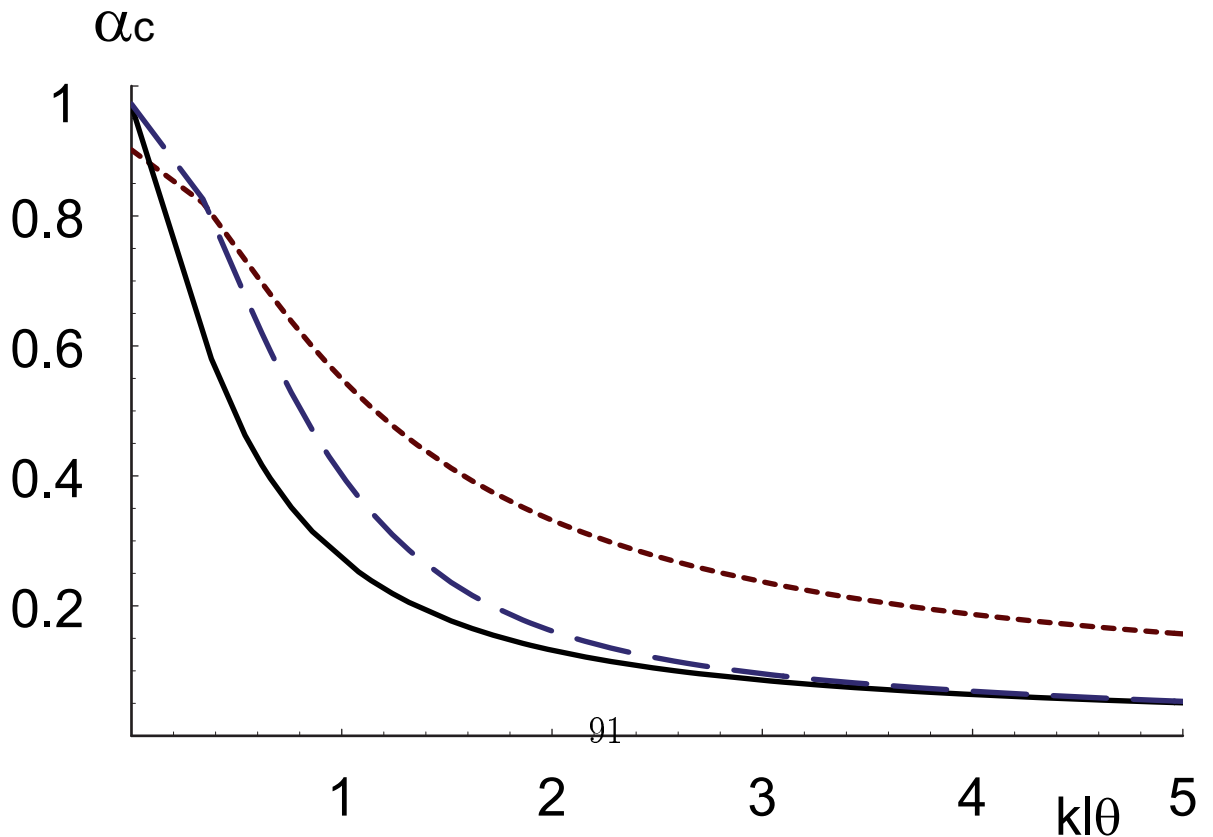


Рис. 2.26: Нормированное альбеда когерентного обратного рассеяния в консер-

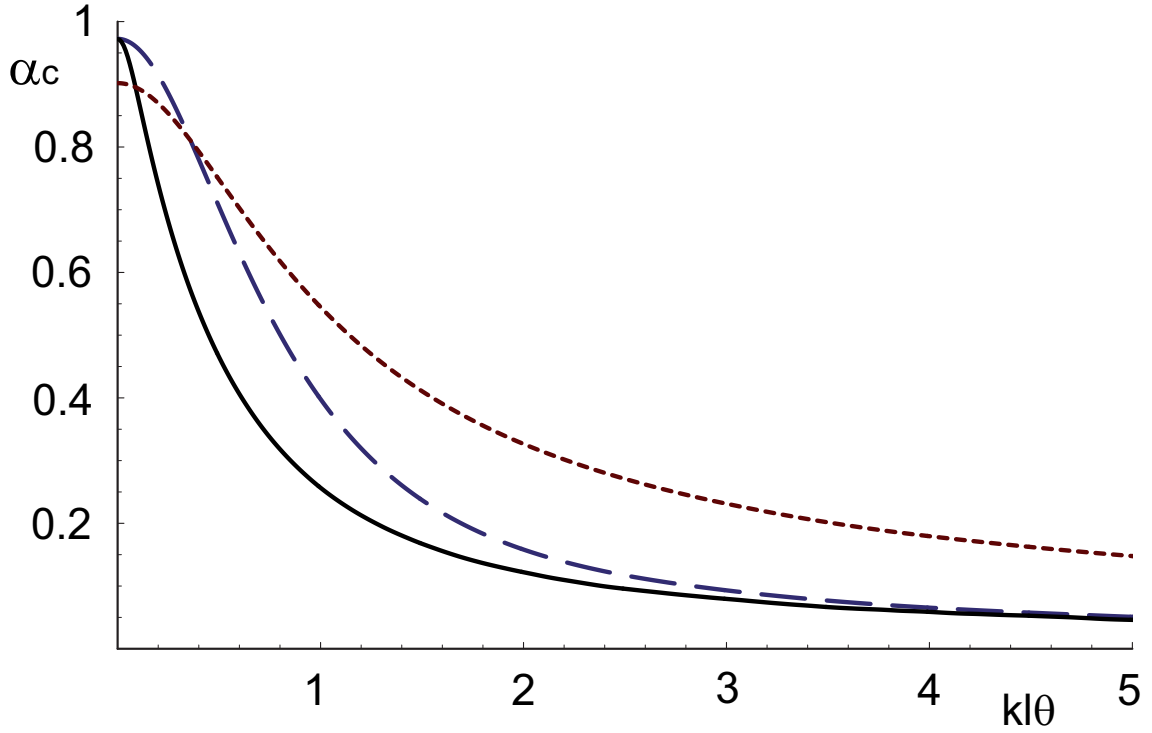


Рис. 2.27: Нормированное альбедро когерентного обратного рассеяния в консервативной рефрагирующей плоскостистой среде. Численное решение методом Монте-Карло (10^9 фотонов). Фазовая функция Хеньи-Гринштейна, полная оптическая толщина слоя $\varepsilon(z_2 - z_1) = 40$, $\Lambda = 1$, $g = 0.5$. Сплошная кривая – ($\gamma = 0$), пунктирная и штриховая кривые – $\gamma = +0.25$ and $\gamma = -0.25$, соответственно.

2.3.8 Асимптотические решения для сильноанизотропного рассеяния в малоугловом приближении.

Для рефрагирующих сред с сильно вытянутыми индикатрисами рассеяния полностью применимо усовершенствованное малоугловое приближение с учетом дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения [53, 54, 78]. Подход к регуляризации уравнения переноса излучения на основе указанного приближенного метода решения может быть в полной мере применен и к случаю среды с рефракцией. Разделяя компоненты излучения, рассеянного вперед и назад, с помощью разбиения единицы на сфере направлений [54], может быть записана и решена система связанных уравнений переноса излучения для каждой из выделенных компонент. Оставшаяся часть излучения подчиняется уравнению переноса излучения с гладкой функцией источников в правой части. Соот-

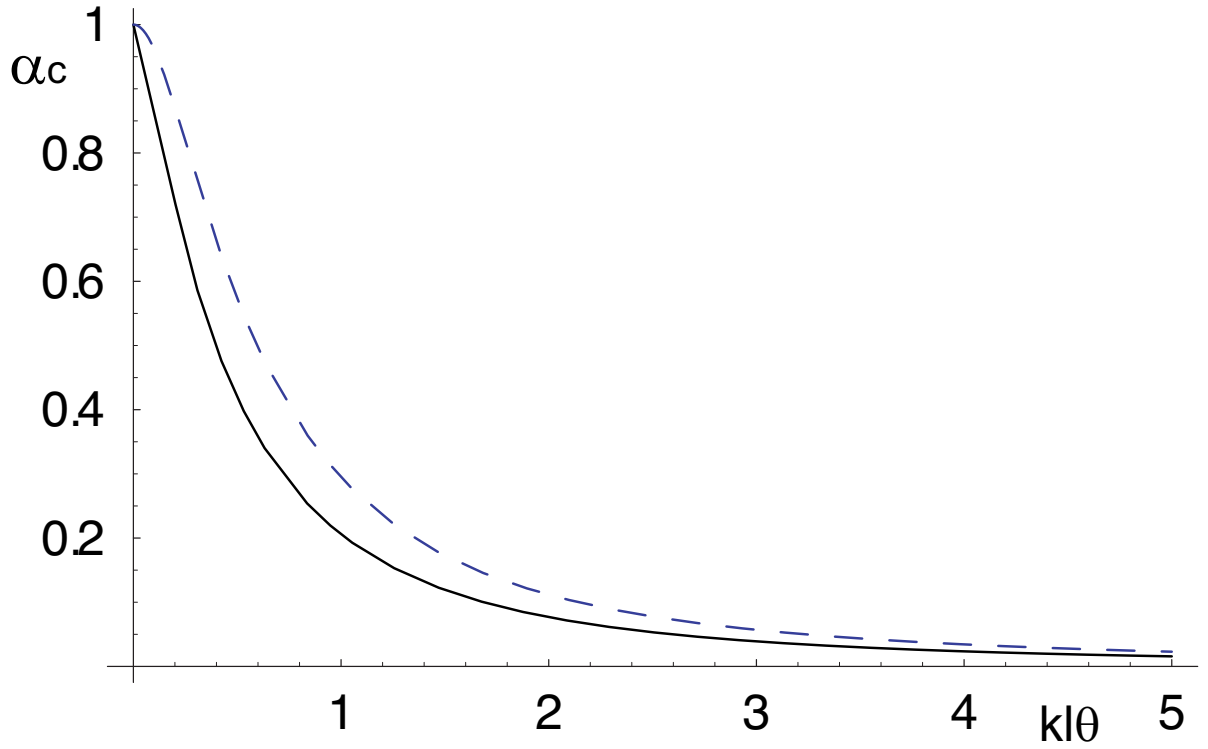


Рис. 2.28: Нормированное альbedo когерентного обратного рассеяния в консервативной рефрагирующей плоскостой среде. Диффузионное приближение. Сплошная кривая – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), штриховая кривая – $\gamma = \pm 0.25$. Оптическая толщина слоя среды $z_2 - z_1 = 20l$.

ветствующая система линейных алгебраических уравнений дискретизованной задачи хорошо обусловлена и пригодна для численного решения. Кроме того, в малоугловом приближении могут быть получены приближенные аналитические решения УПИ для рефрагирующей среды. Следуя работам [128, 129], на основе этих решений можно построить асимптотические оценки когерентного обратного рассеяния.

Рассмотрим излучение плоского мононаправленного (ПМ) источника, нормально падающего на границу плоскостой среды. Будем искать приближенное решение в форме разложения в ряд по сферическим гармоникам (СГ)

$$L(\mathbf{\Omega}, z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(z) Y_j^0(\mathbf{\Omega}). \quad (2.150)$$

Индикатриса рассеяния также разлагается в ряд по СГ (2.8)

$$x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j x_j Y_j^m(\mathbf{\Omega}) Y_j^{m*}(\mathbf{\Omega}'). \quad (2.151)$$

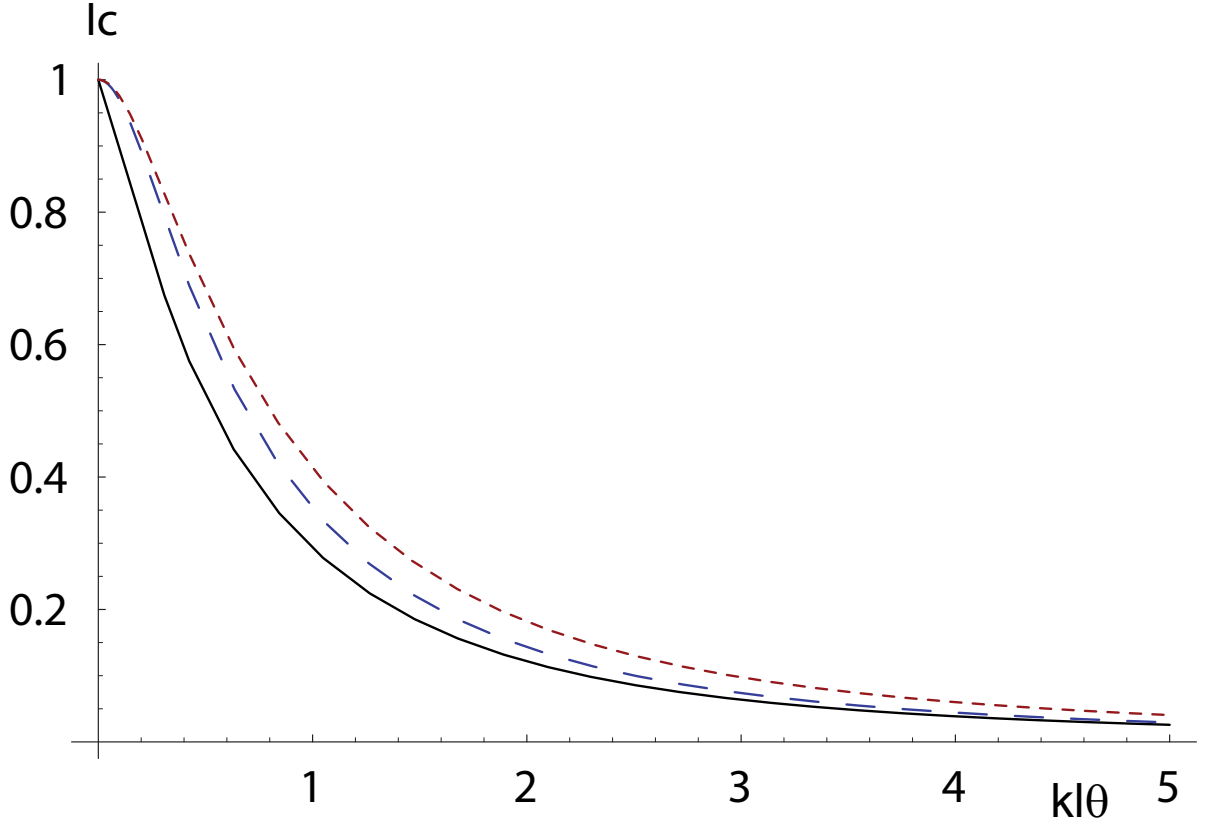


Рис. 2.29: Нормированное альbedo когерентного обратного рассеяния в консервативной рефрагирующей плоскостой среде. Диффузионное приближение (2.148). Сплошная кривая – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирная и штриховая кривые – $\gamma = +0.25$ and $\gamma = -0.25$, соответственно. Оптическая толщина слоя среды $z_2 - z_1 = 20l$.

С помощью известных рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра [150] можно вывести соотношение для сферических гармоник $Y_j^m(\cdot)$ (2.80)

$$(1-\mu)^2 \frac{d}{d\mu} Y_j^m(\mu, \phi) = (1+j) \sqrt{\frac{(j-m)(j+m)}{(2j-1)(2j+1)}} Y_{j-1}^m(\mu, \phi) - j \sqrt{\frac{(1+j-m)(1+j+m)}{(2j+1)(2j+3)}} Y_{j+1}^m(\mu, \phi) \quad (2.152)$$

В малоугловом приближении можно полагать $j \gg 1$, $\mu_z = 1$. Разлагая коэффициенты разложения (2.80) в ряды Тейлора по j вблизи $j = \infty$, для азимутально независимых сферических гармоник ($m = 0$) получим приближенное соотношение

$$(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} Y_j^0(\mu, \phi) \approx \left(\frac{j}{2} + \frac{1}{2} \right) Y_{j-1}^0 - \frac{1}{2} j Y_{j+1}^0 \quad (2.153)$$

Приближенно переходя к непрерывным зависимостям коэффициентов разложений от индексов [34],

$$C_{j\pm 1} \approx C_j \pm \frac{\partial C_j}{\partial j}, \quad (2.154)$$

получаем из (2.70), (2.150), (2.8) и (2.80) дифференциальное уравнение малоуглового приближения для коэффициентов сферических гармоник без учета дисперсии

$$\frac{d}{dz}C_j(z) + \gamma \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{d}{dj}C_j(z) = \left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon + \varepsilon \Lambda \chi(j)\right) C_j(z), \quad (2.155)$$

где

$$\chi(j) = \int_0^\infty 2\pi \Theta d\Theta J_0(j\Theta) \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) \approx x_j \quad (2.156)$$

преобразование Ганкеля индикатрисы рассеяния, которое является подходящей непрерывной аппроксимацией коэффициентов разложения индикатрисы рассеяния x_j [128], $\sigma(\Omega)$ – сечение рассеяния. Переходя к характеристической переменной $\xi = \gamma z - \ln(2j\gamma + \gamma)$, нетрудно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для коэффициентов гармоник $C(z, \xi)$

$$\frac{d}{dz}C(z, \xi) = \left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon + \varepsilon \Lambda \chi(j(z', \xi))\right) C(z, \xi), \quad (2.157)$$

решением которого является

$$C(z, \xi) = C(0, \xi) \exp \left\{ \int_0^z \left(\frac{\gamma}{2} - \varepsilon(z')(1 - \Lambda \chi(j(z', \xi))) \right) dz' \right\}. \quad (2.158)$$

Это приближенное решение (2.158) обобщает известные результаты [19, 34] на случай плоскостойкой рефразирующей рассеивающей среды.

Для нормального падения излучения плоского мононаправленного (ПМ) источника на границу среды

$$L(\mathbf{\Omega}, 0) = \delta(\mathbf{\Omega}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} Y_j^0(\mathbf{\Omega}). \quad (2.159)$$

граничное условие записывается в виде

$$C(0, \xi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} e^{-\gamma z}. \quad (2.160)$$

Полагая $\Lambda = 0$ в (2.158), получаем решение

$$C(z, \xi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \exp \left(- \int_0^z \varepsilon dz \right), \quad (2.161)$$

соответствующее нерассеянной компоненте излучения источника

$$L_0(\mathbf{\Omega}, z) = \delta(\mathbf{\Omega}) \exp \left(- \int_0^z \varepsilon dz \right). \quad (2.162)$$

Для индикатрисы рассеяния Хеньи-Гринштейна [176] $\chi(j) \approx g^j$, так что решение (2.158) для $\varepsilon = \text{const}$ выражается через известные табулированные функции

$$C_j(z) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \exp \left(-\varepsilon z + \frac{\Lambda \varepsilon}{\gamma \sqrt{g}} Ei \left(\frac{2j+1}{2} \ln g \right) - \frac{\Lambda \varepsilon}{\gamma \sqrt{g}} Ei \left(\frac{2j+1}{2} e^{-\gamma z} \ln g \right) \right), \quad (2.163)$$

где

$$Ei(z) = - \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (2.164)$$

– интегральная экспоненциальная функция [150].

Полное решение УПИ (2.116) может быть получено в виде суммы (2.150), (2.158) и неизвестной (гладкой) части решения L_D [34, 54]. Подставляя сумму $L = L_a + L_D$ в (2.70), для анизотропной части решения L_a в виде (2.150), (2.158) получается весьма гладкая функция источников (некоторые результаты вычислений показаны на рис. 2.3.8). В целях сравнения, функция источников для анизотропной части в виде нерассеянной компоненты излучения источника $L_a = L_0$ (2.162) представлена на том же рисунке.

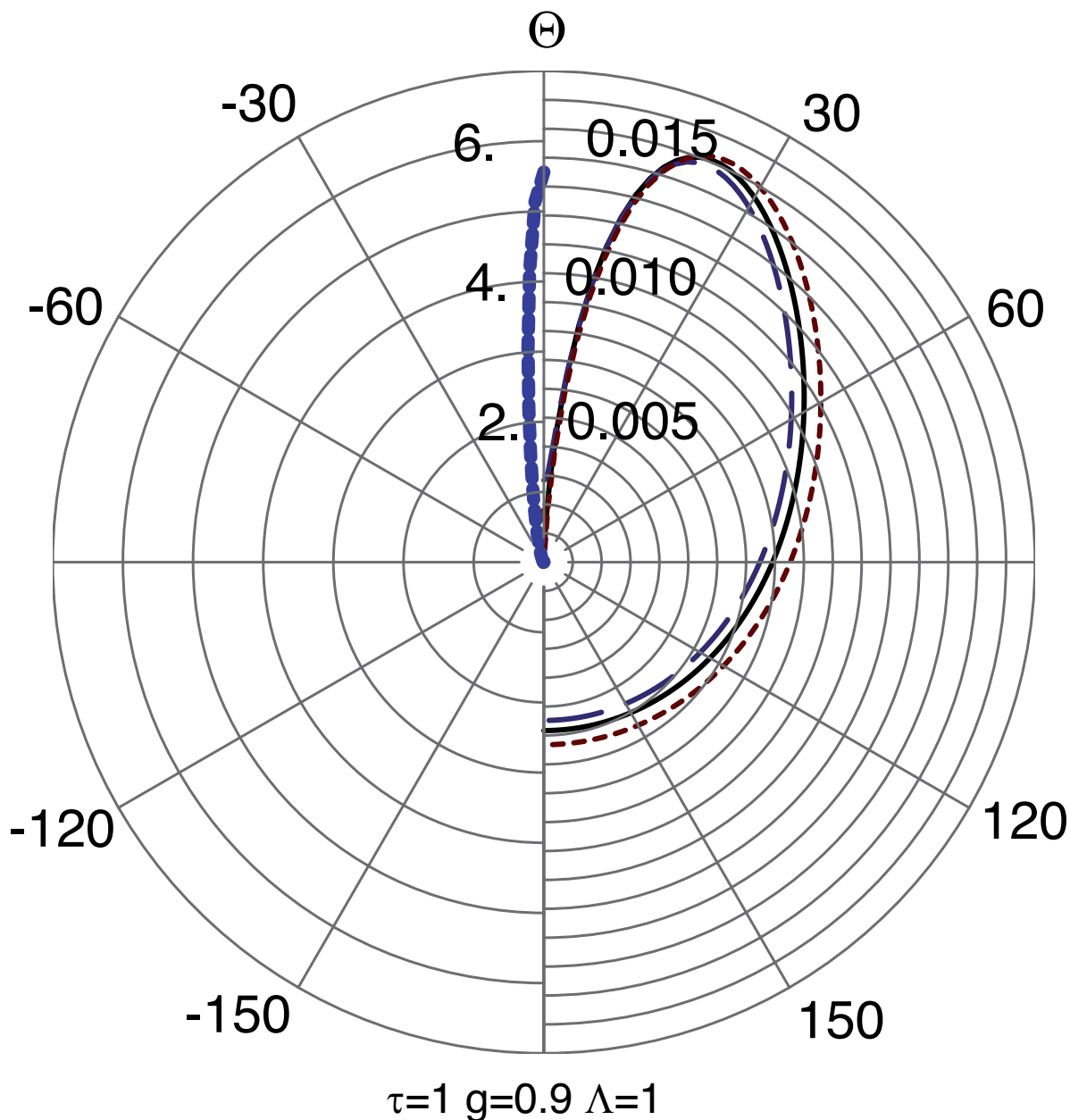


Рис. 2.30: Функции источников УПИ. Индикатриса Хеньи-Гринстейна, $g = 0.9$, $\tau = 1$, $\Lambda = 1$, $\varepsilon = 1$. Правая часть диаграммы: выделенная нерегулярная компонента в форме малоуглового приближения (2.150), (2.158). Сплошные кривые – рефракция отсутствует ($\gamma = 0$), пунктирные и штриховые кривые – $\gamma = +0.2$ и $\gamma = -0.2$, соответственно. Левая часть рисунка – функция источников, порождаемая простейшей формой нерегулярной части решения (δ – функция), рефракция отсутствует.

Подобным образом, метод характеристик может быть применен к вычислению решения для точечного изотропного (ТИ) и точечного мононаправленного (ТМ) источников [34] в сферической или декартовой системе координат. Из этих

решений можно получить асимптотику для когерентно рассеянной компоненты излучения [128].

Приближенное решение для периферийных областей пика когерентного обратного рассеяния в непреломляющей среде, полученное в работе [128], в действительности является сверткой малоугловых приближенных решений для прямого потока излучения ТМ источника и обратного потока излучения вторичных ТИ источников однократно рассеянного излучения, т.е. в так называемом приближении квазиоднократного обратного рассеяния [111]. Чтобы сконструировать решение такого типа для преломляющей среды, необходимо получить приближенные малоугловые решения для ТМ и ТИ источников в этой среде и свернуть их друг с другом (рис. 2.3.8).

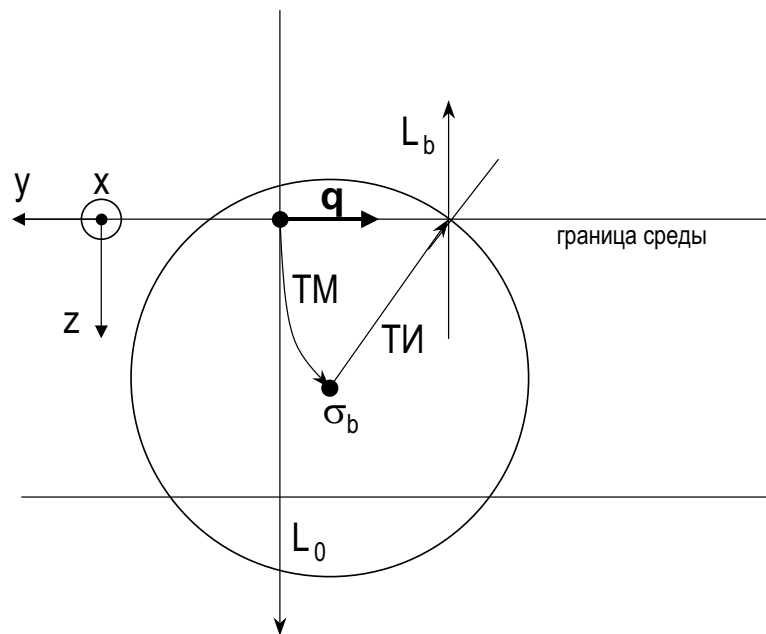


Рис. 2.31: К пояснению вывода асимптотического решения (2.176).

Поскольку мы интересуемся в основном излучением, распространяющимся по нормали к границам среды, в задаче для ТИ источника приближенно будем считать коэффициент преломления сферически симметричной функцией

$n(r) \approx n(z)$. Запишем УПИ в сферически симметричной преломляющей среде [186] is

$$\mu \frac{\partial L}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial L}{\partial \mu} + \gamma(1 - \mu^2) \frac{\partial L}{\partial \mu} + \varepsilon L - 2\gamma\mu L = \frac{\Lambda\varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}', \quad (2.165)$$

где $\gamma = d \ln n(r)/dr$. Следуя работе [34], будем искать решение в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$L(\mu, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{4\pi r^2} C_j(r) P_j(\mu). \quad (2.166)$$

Используя непрерывную аппроксимацию индекса j [34], получим приближенное выражение для производной $\partial L/\partial \mu$. С помощью известных функциональных соотношений для полиномов Лежандра

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_j(\mu)}{d\mu} = \frac{j(j+1)}{2j+1} (P_{j+1}(\mu) - P_{j-1}(\mu)) \quad (2.167)$$

получим следующее приближенное выражение:

$$\begin{aligned} (\mu^2 - 1) \frac{\partial L}{\partial \mu} &= \sum_j \frac{2j+1}{4\pi r^2} C_j (\mu^2 - 1) \frac{dP_j(\mu)}{d\mu} = \sum_j \frac{j(j+1)}{4\pi r^2} C_j (P_{j+1}(\mu) - P_{j-1}(\mu)) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \sum_j ((j-1)j C_{j-1} - (j^2 + 3j + 2) C_{j+1}) P_j(\mu) \approx -\frac{1}{4\pi r^2} \sum_j (2j(j+1) \frac{\partial C_j}{\partial j} + 4j C_j) \end{aligned} \quad (2.168)$$

В работе [34] учтена лишь главная асимптотика $(2j(j+1)\partial C_j/\partial j)$ в (2.168) для учета сферической расходимости в (2.165) и получено приближенное решение задачи для непреломляющей среды. Мы аппроксимируем сферическое и рефракционное слагаемое в (2.165) одним и двумя слагаемыми (2.168), соответственно, и получим приближенное дифференциальное уравнение для C_j

$$\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{2j(j+1)}{2j+1} \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial j} + \gamma \frac{2j(j+1)}{2j+1} \frac{\partial C}{\partial j} + \gamma \frac{4j}{2j+1} C = -\varepsilon C + 2\gamma C + \Lambda\varepsilon\chi(j)C. \quad (2.169)$$

Переходя к характеристической переменной $\eta = \exp(\gamma r)r/\sqrt{j(j+1)}$, получим приближенное решение (2.169) в виде

$$C(\eta, r) = C(\eta, 0) \exp \int_0^r \varepsilon(1 - \Lambda\chi(j(\eta, r')) dr', \quad (2.170)$$

пренебрегая слагаемым $(4j/(2j+1) - 2)\gamma C(\eta, r)$, стремящимся к нулю при $j \rightarrow \infty$. Начальное условие для ТИ источника [34] есть $C(\eta, 0) = 1$. Полагая $\Lambda = 0$, получим решение для нерассеянного излучения источника

$$L_0(\mu, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2j+1}{4\pi r^2} P_j(\mu) \exp\left(-\int \varepsilon dr\right) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(\mu - 1) \exp\left(-\int \varepsilon dr\right). \quad (2.171)$$

Таким образом, полученное решение обобщает результаты работы [34] для случая преломляющей среды.

Чтобы получить приближенное решение для ТМ источника, используем малоеугловое приближение для УПИ в форме, полученной в работе [42]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{n}_{\perp} \nabla_{r\perp} - \gamma \mathbf{n}_{\perp} \nabla_{n\perp}\right) L = -\varepsilon L + 2\gamma L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int L(\mathbf{r}, \mathbf{n}_{\perp}) x(\mathbf{n}_{\perp} - \mathbf{n}'_{\perp}) d^2 \mathbf{n}'_{\perp}, \quad (2.172)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$, $\mathbf{n} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$, $\mathbf{n}_{\perp} = (\mu_x, \mu_y)$, $(\mu_z^2 - 1)\partial/\partial\mu_z \approx \mu_x \partial/\partial\mu_x + \mu_y \partial/\partial\mu_y \approx \mathbf{n}_{\perp} \nabla_{\mathbf{n}_{\perp}}$. Согласно [42], введем преобразование Фурье решения L по поперечным пространственным и угловым координатам

$$F(\mathbf{q}, z, \mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} L \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_{\perp} + i\mathbf{p}\mathbf{n}_{\perp}) d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{n}_{\perp}. \quad (2.173)$$

Преобразование Фурье, таким образом, подчиняется уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{p}} + \gamma \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\right) F = -\varepsilon(1 - \Lambda \chi(p)) F + 2\gamma F, \quad (2.174)$$

характеристической переменной которого является $\zeta = (q - \gamma p) \exp(-\gamma z)$ и для интересующего нас значения $p = 0$ решение этого уравнения имеет вид

$$F(\mathbf{q}, z, 0) = F\left(\mathbf{q}, 0, \frac{q}{\gamma}(1 - e^{-\gamma z})\right) \exp\left\{\int_0^z \varepsilon \left[1 - \Lambda \chi\left(\left|\frac{q}{\gamma}(1 - e^{\gamma(z'-z)})\right|\right)\right] dz'\right\}. \quad (2.175)$$

Начальное условие, соответствующее точечному мононаправленному источнику (2.115) есть $F(\mathbf{q}, z, \mathbf{p}) = 1$. Чтобы получить приближенное решение для крыльев пика когерентного обратного рассеяния, требуется вычислить свертку

решений (2.165) и (2.172), т.е. произведение соответствующих Фурье-компонент. Однократно (обратно) рассеянное излучение, не вносящее вклада в когерентную компоненту [111, 179], получается подстановкой $\Lambda = 0$ в (2.170) и (2.175). Окончательно, интересующее нас приближенное решение для Фурье-компоненты обратно рассеянного излучения

$$\tilde{L}_b(q) = \frac{\sigma_b}{l\sigma} \int_0^{\tau_0 l} e^{-2z/l} \left[\exp \left\{ \Lambda \int_0^z \chi(|qze^{(-\gamma)(z'-z)}|) dz'/l + \Lambda \int_0^z \chi(|q/\gamma(1 - e^{\gamma(z'-z)})|) dz'/l \right\} - 1 \right] dz \quad (2.176)$$

где $l = \varepsilon^{-1}$ – длина свободного пробега излучения в среде, $q = k\theta$, θ – фазовый угол и k – волновое число излучения [129, 78]. Отрицательный знак $(-\gamma)$ в первом интеграле соответствует обратному направлению распространения излучения после однократного обратного рассеяния. Параметры среды Λ , ε , γ и индикатриса рассеяния считаются постоянными для всего плоского слоя среды, оптическая толщина которого может быть конечной или бесконечной. В пределе $\gamma \rightarrow 0$, полученное выражение (2.176) сводится к известному решению для непреломляющей среды, полученной в работе [128, 129].

2.4 Гало обратного рассеяния узкого пучка в среде с сильно анизотропным рассеянием.

Несколько лет назад был теоретически предсказан эффект так называемого гало обратного рассеяния пучка в среде, т.е. кольцевого максимума интенсивности обратно рассеянного излучения вокруг оси узкого светового пучка, входящего в среду с сильно вытянутой вперед индикатрисой рассеяния. Эффект теоретически исследовался в ряде работ [192, 193]. Было показано, что возможное проявление эффекта связано с искривлением светового потока в среде в результате многократного последовательного рассеяния фотонов на малые углы (рис. 2.32). Прямое численное моделирование методом Монте-Карло [193] выявило роль и влияние обратного рассеяния на возможность проявления эффекта. В частности, авторы работы [193] пришли к выводу о гипотетически возможном проявлении эффекта в случае, если бы каким-либо образом было бы устранено

обратное рассеяние излучения на частицах среды. В работе [77] сделаны соответствующие количественные оценки для реальных рассеивающих сред.

Как неоднократно было показано [10, 128, 129, 78], в приближении Тверского, исключаящем из рассмотрения самопересекающиеся траектории излучения [194]), задача о когерентном усилении обратного рассеяния пучка в среде эквивалентна задаче для уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным (ТМ) источником с точностью до преобразования Фурье. В ряде работ [127, 128, 129] было также показано, что периферийные области пика обратного рассеяния удовлетворительно описываются в приближении квазиоднократного обратного рассеяния, т.е. состоят из излучения, претерпевшего единственный акт рассеяния почти назад и многие акты рассеяния на малые углы вперед до и после того. Соответственно, центральная часть конуса когерентного обратного рассеяния преимущественно сформирована диффузной компонентной рассеянного излучения. Это означает, что обратно рассеянное излучение узкого пучка в среде вблизи и вдали от оси пучка в основном формируется квазиоднократным обратным и диффузным рассеянием излучения в среде, соответственно.

Моделирование методом Монте-Карло [192, 193] показало, что без учета обратного рассеяния частицами среды, диффузная часть выходящего через границу среды излучения формирует вокруг оси пучка кольцевой максимум с радиусом порядка одной транспортной длины излучения в среде. В работе [77] сделаны соответствующие аналитические оценки интенсивности обратно рассеянного излучения вблизи и вдали от оси пучка, и установлены условия для консервативной среды, выполнение которых необходимо для наблюдения кольцевого гало обратного рассеяния в реальном эксперименте. В отличие от предыдущих расчетов, проведенных численным методом для моментов углового распределения интенсивности излучения [192, 193, 10], в цитированной работе получены аналитические оценки для распределения интенсивности в пространстве углов. Сделанные оценки согласуются с результатами моделирования по методу Монте-Карло.

2.4.1 Оценки компонент поля рассеянного излучения и критерий проявления эффекта.

Известно, что когерентная компонента углового распределения интенсивности обратно рассеянного излучения с фазовым углом θ в дальней зоне есть Фурье-трансформанта $J_c(q)$ интенсивности обратного рассеяния узкого пучка, где $q = k\theta$, k – волновое число излучения, θ – фазовый угол (угол между рассеянным пучком и направлением, обратным к направлению падения) [78]. Таким образом, интенсивность обратного рассеяния пучка в ближней зоне подчиняется формуле

$$I(\rho) = \int_0^{\infty} J_0(q\rho) J_c(q) q dq, \quad (2.177)$$

где $J_0(\cdot)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода. Поскольку пространственное угловое распределение интенсивности обратного рассеяния пучка в среде сингулярно [75, 76], формула (2.177) должна пониматься в смысле усреднения по некоторому диапазону значений пространственных или угловых переменных. По этой причине, в выражении (2.177) необходимо ограничить верхний предел интегрирования некоторым конечным значением q_0 . Это значение приблизительно соответствует конечному значению толщины пучка. В дальнейших численных расчетах, мы полагаем $q_0 l = 1$, что соответствует толщине пучка порядка длины свободного пробега фотонов в среде l , т.е. порядка небольшой доли транспортной длины в среде с сильно вытянутой вперед индикатрисой излучения.

Маринюк и Рогозкин [128] получили аналитическое выражение для когерентной компоненты интенсивности обратно рассеянного излучения (2.114), асимптотически справедливое для периферийных областей конуса обратного рассеяния:

$$J_c(q) = \frac{\sigma_b}{l\sigma} \int_0^{\infty} dz \exp(-2z/l) \left[\exp \left(2 \int_0^z d(z'/l) \chi(qz') \right) - 1 \right] \quad (2.178)$$

где

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} 2\pi\theta d\theta J_0(\omega\theta) \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta), \quad (2.179)$$

l – длина свободного пробега фотонов в консервативной рассеивающей среде, σ – сечение рассеяния, $\sigma_b = d\sigma/d\Omega(\theta = \pi)$ – дифференциальное сечение рассеяния в направлении назад. Вывод формулы (2.114) существенно опирается на малоугловое приближение теории переноса излучения, и следовательно, справедливо для сред с сильно вытянутыми вперед индикатрисами рассеяния. В силу (2.177) и (2.114), обратно рассеянная интенсивность на оси пучка равна

$$I(0) = \int_0^{q_0} \frac{\sigma_b}{l\sigma} \int_0^\infty dz \exp(-2z/l) \left[\exp \left(2 \int_0^z d(z'/l) \chi(qz') \right) - 1 \right] q dq. \quad (2.180)$$

Согласно аргументации, приведенной в работах [127, 128, 129], мы пренебрегаем вкладом диффузно рассеянного излучения в $J_c(q)$ и, следовательно, в $I(0)$. Асимптотическая формула (2.114) получена в малоугловом приближении теории переноса излучения путем интегрирования соответствующих уравнений вдоль характеристик. Такое приближенное решение не может учитывать дисперсию длин путей распространения рассеянного излучения, вследствие чего решение расходится при малых фазовых углах и больших оптических толщинах среды. Учет дисперсии длин путей [54] приводит к дифференциальному уравнению второго порядка, которое в общем случае не может быть решено аналитически методом интегрирования по характеристикам. Однако, особенность при $q = 0$ в (2.180) интегрируема, так что мы пренебрегаем соответствующей ошибкой. Для диффузной компоненты обратно рассеянного излучения, мы подставляем в формулу (2.177) известное выражение для когерентной компоненты обратного рассеяния от полубесконечной среды в диффузионном приближении [10],

$$J_c(q) = \frac{3a}{4\pi l} \frac{1 - \exp(-qa)}{qa}, \quad (2.181)$$

где $a = \alpha l_{tr}$, $\alpha \approx 3.4$, $l_{tr} = l/(1 - g)$ – транспортная длина, $g = \langle \cos\theta \rangle$ – параметр асимметрии (средний косинус) рассеяния [105]. При $\rho = l_{tr}$, это дает

$$I(\rho) = \frac{3}{4\pi l_{tr}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right\}. \quad (2.182)$$

Сравнивая между собой (2.180) и (2.182), мы получаем приближенный критерий в виде неравенства, из которого можно вывести следующее условие для

отношения σ_b/σ , необходимое для фактического проявления эффекта гало:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} \leq \frac{3}{4\pi l_{tr}^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right\} / \int_0^{q_0} \int_0^\infty d(z/l) \exp(-2z/l) \left[\exp \left(2 \int_0^z d(z'/l) \chi(qz') \right) - 1 \right] \quad (2.183)$$

2.4.2 Оценки для некоторых модельных функций рассеяния.

Для широко распространенной модели фазовой функции Хеньи-Гринштейна [176]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\theta)^{3/2}} \quad (2.184)$$

вычисления [128] дают:

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} = 4\pi \frac{1-g}{(1+g)^2} \approx \pi(1-g), \quad (2.185)$$

$$\chi(\omega) = \exp(-(1-g)\omega). \quad (2.186)$$

Отношение (2.185) для фазовой функции Хеньи-Гринштейна в зависимости от параметра асимметрии g показано на рис. 2.33 тонкой пунктирной линией. Для Гауссовской индикатрисы, рассмотренной в работе [192]

$$f(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{\exp(-(1-\cos\theta)/\varepsilon)}{1-\exp(-2/\varepsilon)} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\varepsilon}\right) \quad (2.187)$$

вычисления дают

$$\chi(\omega) \approx \exp\left(-\frac{\varepsilon\omega^2}{2}\right), \quad (2.188)$$

$$\int_0^z \chi(qz') dz' = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon}} \operatorname{erf}\left(qz\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right), \quad (2.189)$$

$g \approx 1 - \varepsilon$. Действительное значение нормированного сечения обратного рассеяния для фазовой функции (2.187) есть

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} = \frac{\exp(-2/\varepsilon)}{2\pi\varepsilon}. \quad (2.190)$$

Численные расчеты показывают, что отношение (2.190) исчезающе мало по сравнению с критическим значением, определяемым формулой (2.183) для фазовой функции (2.187). Так, условие (2.183) хорошо выполнено в этом случае. По этой причине, в результатах численных расчетов в работе [192] явно присутствует эффект гало обратного рассеяния, в то время как авторам [193] пришлось искусственно исключить из расчета некоторую часть обратно рассеянного излучения для надежной численной симуляции исследуемого эффекта.

Подобным образом, для Юкавской индикатрисы [58]

$$f(\theta) = \frac{\gamma}{2\pi\theta} \exp(-\gamma\theta) \quad (2.191)$$

получим $g \approx 1 - \gamma^{-2}$,

$$\chi(\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}. \quad (2.192)$$

Наконец, для экспоненциальной индикатрисы рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi\theta_0^2} \exp(-\frac{\theta}{\theta_0}) \quad (2.193)$$

leads to

$$\chi(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2\theta_0^2)^{3/2}}, \quad (2.194)$$

$g \approx (1 - 3\theta_0^2)$. Для обоих этих фазовых функций условие (2.183) выполняется вследствие их быстрого экспоненциального спада с ростом угла рассеяния. Критические значения (2.183) для экспоненциальной фазовой функции (2.193) показаны на рис. 2.33 жирной пунктирной кривой.

Численные оценки, полученные по формуле (2.183) для нескольких рассмотренных здесь различных фазовых функций, весьма близки друг к другу. Это приводит к выводу об универсальном характере зависимости критического сечения обратного рассеяния σ_b/σ от параметра асимметрии g . Для экспоненциальной индикатрисы рассеяния (2.193), интегрирование $\chi(\omega)$ (2.194) in (2.180) дает

$$\int_0^{z/l} \chi(qz) dz/l = \frac{z/l}{(1 + q^2 z^2 \theta_0^2)^{1/2}} \approx z/l - \frac{z/l}{2} q^2 z^2 \theta_0^2. \quad (2.195)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.180) и интегрируя, получим

$$I(0) = \frac{\sigma_b}{\sigma} \int_0^{q_0} \left[\frac{\Gamma(4/3)}{(ql\theta_0)^{2/3}} - \frac{1}{2} \right] q dq \approx \frac{\sigma_b}{\sigma} \int_0^{q_0} \frac{\Gamma(4/3)}{(ql\theta_0)^{2/3}} q dq \propto \frac{3}{4} \frac{\Gamma(4/3) q_0^{4/3}}{(l\theta_0)^{2/3}}. \quad (2.196)$$

Учитывая, что для экспоненциальной индикатрисы рассеяния (2.193) параметр асимметрии приближенно равен $g \approx 1 - 3\theta_0^2$, и используя (2.182) и (2.196), из условия проявления эффекта гало $I(0)/I(l_{tr}) < 1$ можно получить следующий критерий

$$\frac{\sigma_b}{\sigma} < \frac{(1-g)^{7/3} (\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)}{\sqrt[3]{3} \pi (q_0 l)^{4/3} \sqrt{\alpha^2 + 1} \Gamma(4/3)} \propto (1-g)^{7/3} \quad (2.197)$$

для критического значения сечения обратного рассеяния σ_b/σ . Этот степенной закон $7/3$ также показан на рис. 2.33 сплошной тонкой кривой. Очевидно, индикатриса Хеньи-Гринштейна не удовлетворяет сформулированному критерию, поскольку $\sigma_b/\sigma \propto (1-g) \gg (1-g)^{7/3}$ при $g \rightarrow 1$, как можно видеть и на рис. 2.33.

2.4.3 Расчеты методом Монте-Карло. Обсуждение результатов моделирования.

В целях проверки предложенного критерия, проведено численное моделирование методом Монте-Карло. Была выбрана простейшая модель сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mu) = \begin{cases} \sigma_b, & \mu \leq \mu_0, \\ \sigma_f, & \mu > \mu_0 \end{cases}, \quad (2.198)$$

где $\mu = \cos \theta$, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, μ_0 – параметр модели. В силу нормировки

$$\oint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi(1 + \mu_0)\sigma_b + 2\pi(1 - \mu_0)\sigma_f = 1 \quad (2.199)$$

сечения прямого и обратного рассеяния σ_f и σ_b в выбранной модели связаны соотношением

$$\sigma_f = \frac{1}{2\pi(1 - \mu_0)} - \frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0} \sigma_b. \quad (2.200)$$

Легко показать, что параметр асимметрии рассеяния $g = \langle \cos \theta \rangle$ равен

$$g = \oint \mu \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mu) d\Omega = 2\pi\sigma_b \int_{-1}^{\mu_0} \mu d\mu + 2\pi\sigma_f \int_{\mu_0}^1 \mu d\mu = \pi(1 - \mu_0^2)(\sigma_f - \sigma_b) \approx \frac{1 + \mu_0}{2}, \quad (2.201)$$

при $\sigma_b \ll \sigma_f$, что типично для сред, рассматриваемых в этой работе. Типичные результаты расчетов интегрального потока излучения, выходящего через границу среды [192]

$$F(\rho) = \int_{\hat{\Omega} \cdot \hat{z} < 0} \left(\hat{\Omega} \cdot (-\hat{z}) \right) I(\Omega, \rho) \Big|_{z=0} d\Omega \quad (2.202)$$

показаны на рис. 2.38. Три типичных ситуации: отсутствие гало, слабое гало (локальный максимум $F(\rho)$ при $\rho \approx l_{tr}$) и сильное гало (глобальный максимум $F(\rho)$ при $\rho \approx l_{tr}$ согласно (2.183)) показаны сплошной, штриховой и пунктирными кривыми, соответственно. Пары значений параметров (g, σ_b) также показаны на рис. 2.33 треугольными, квадратными и крестовыми маркерами, соответственно. Можно видеть, что во всех случаях проявления сильного эффекта гало в результатах численного моделирования, соответствующие точки на графике лежат ниже критической кривой. Это значит, что критерий семи третей (2.197) обеспечивает надежное предсказание проявления сильного эффекта гало, т.е. выполнения условия $I(0) < I(l_{tr})$, для которого и был получен критерий (2.197).

Все рассмотренные здесь фазовые функции являются модельными, т.е. не вполне соответствующими оптическим свойствам реальных мутных сред, в особенности при не малых углах рассеяния. По этой причине, для реальной среды необходимы оценки введенных здесь критических параметров на основе строгих электродинамических расчетов. Некоторые результаты для однородных сферических частиц (латекс, $n = 1.59$, в воде, $n = 1.33$) по теории Ми [195] показаны на рис. 2.34 (компьютерные коды общедоступны по ссылке <http://atol.ucsd.edu/scatlib/scatterlib.htm>). Можно видеть несколько глубоких минимумов сечения обратного рассеяния, достигающих уровня ниже критического. На этих длинах волн следует ожидать проявления эффекта в эксперименте. Аналогичные результаты для сферических частиц латекса в глицерине показаны на рис. 2.36. Необходимые концентрации частиц, соответствующие значению транспортной длины 5 мм (радиус кюветы) в зависимости от длины волны для сферических частиц латекса в воде и глицерине показаны на рис. 2.35 и 2.37, соответственно.

В данной работе получены оценки для консервативной рассеивающей среды без потерь. При наличии потерь, следует ожидать ослабления проявления эффекта, в связи с большей длиной траекторий диффузной компоненты рассеянного излучения по сравнению с квазиоднократно обратно рассеянной, и соответственно большим поглощением излучения на этой длине. По тем же соображениям, эффект может быть ослаблен в случае сильной локализации, препятствующей распространению излучения на большие расстояния [194].

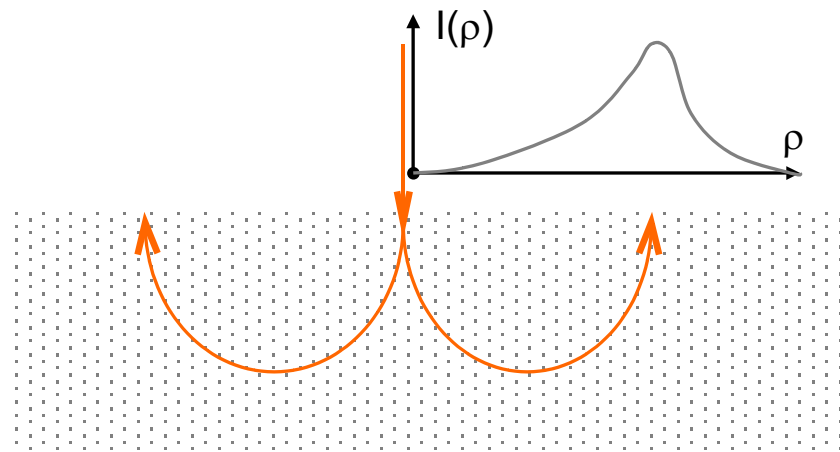


Рис. 2.32: К пояснению эффекта гало обратного рассеяния (схематическое изображение).

2.5 Модель двумерной рассеивающей среды.

Определенный интерес представляет модель двумерной рассеивающей среды, например в виде случайно расположенных параллельных волокон [196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 56]. Интерес к двумерным средам обусловлен как аналитическим и численными расчетами переноса радиации в средах с ориентирован-

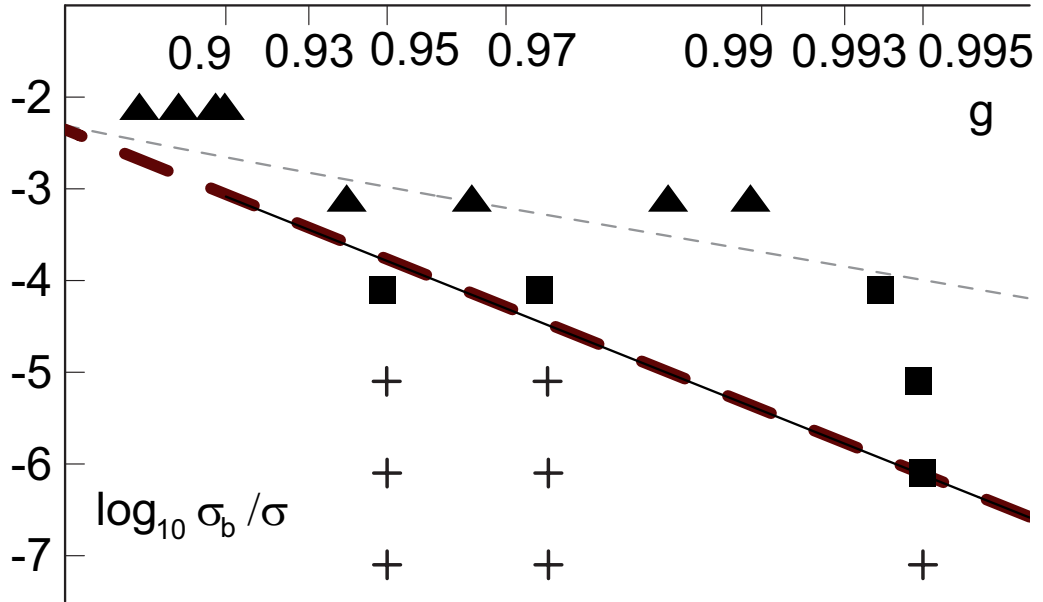


Рис. 2.33: Толстая штриховая кривая – численные оценки критического нормированного сечения обратного рассеяния σ_b/σ (2.183) для экспоненциальной индикатрисы рассеяния (2.193), сплошная кривая – аналитическая оценка согласно критерию семи третей (2.197). Пунктирная кривая – сечение обратного рассеяния индикатрисы Хеньи-Гринштейна (2.185). Моделирование Монте-Карло: треугольные маркеры – эффект гало отсутствует, квадратные маркеры – слабое гало (локальный максимум интенсивности вблизи $\rho \approx l_{tr}$), кресты – сильное гало (глобальный максимум вблизи $\rho \approx l_{tr}$).

ными сильно несферическими рассеивателями [199, 200, 201], так и задачами локализации волн в случайных средах [196, 197, 198, 201]. Эксперименты с многократным рассеянием в таких средах проводились с оптическими волокнами [196] и анизотропными рассеивателями, например стержневыми [197].

С одной стороны, двумерная среда является адекватной физической моделью некоторых типов сред, рассеяние в которых происходит преимущественно в направлениях, близких к некоторой плоскости [56]. С другой стороны, она представляет собой численную модель, удобную для использования в качестве тест-объекта при разработке алгоритмов решения УПИ. Известно, что на расстояниях, не превышающих длину локализации, в одномерных и двумерных средах можно считать справедливым уравнение переноса излучения [203].

Рассмотрим уравнение переноса излучения в двумерной среде

$$\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L = -L + \frac{\Lambda}{2\pi} \oint L(x, y, \phi) x(\phi, \phi') d\phi' + f, \quad (2.203)$$

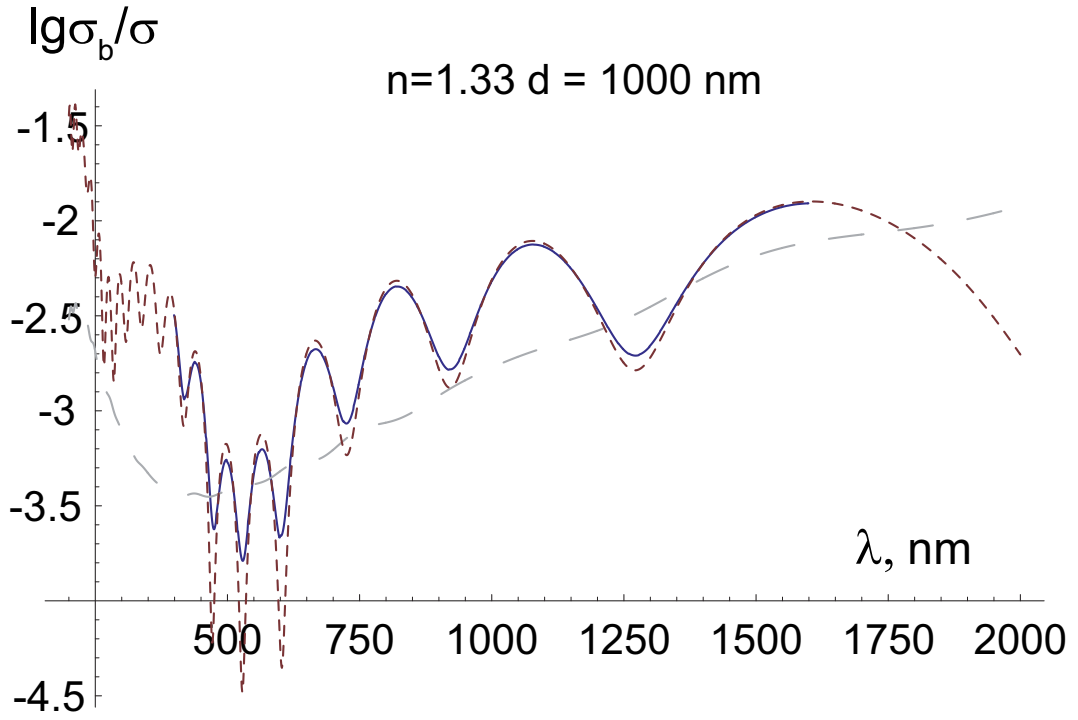


Рис. 2.34: Пунктирная кривая – нормированное сечение обратного рассеяния монодисперсных частиц σ_b/σ , сплошная кривая – то же, разброс диаметров частиц 5%, штриховая кривая – критическое значение сечения обратного рассеяния при рассчитанном значении параметра асимметрии (сферические частицы латекса в воде, теория Ми [195])

где $L = L(x, y, \phi)$ – угловое распределение яркости в двумерной среде, $x = x(\phi, \phi')$ – двумерная индикатриса рассеяния, $\mu_x = \cos \phi$ and $\mu_y = \sin \phi$ – направляющие косинусы.

Решение можно искать в виде суммы ряда по круговым гармоникам $e^{i\phi}$. Индикатриса рассеяния также может быть представлена в виде ряда

$$x(\phi, \phi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(r) e^{in(\phi-\phi')}. \quad (2.204)$$

В частности, для индикатрисы вида

$$x(\phi) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a \cos \phi}, \quad (2.205)$$

где

$$a = \frac{2g}{1+g^2}, \quad (2.206)$$

g – параметр анизотропии, имеющий смысл среднего косинуса рассеяния, нетрудно убедиться в том, что коэффициенты разложения индикатрисы (2.205) по

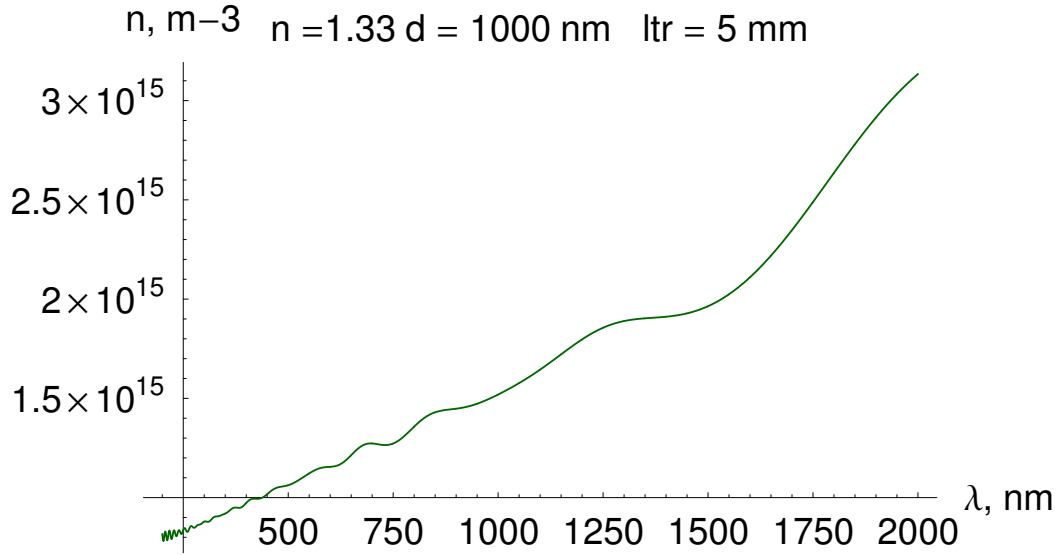


Рис. 2.35: Концентрации частиц в суспензии, соответствующие значению транспортной длины 5 мм (сферические частицы латекса в воде, теория Ми [195])

круговым гармоникам $\exp(in\phi)$ равны соответствующим степеням параметра g

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) x(\phi) d\phi = g^{|n|}, \quad (2.207)$$

то есть индикатриса (2.205) представляет собой двумерный аналог индикатрисы Хеньи-Гринстейна [176].

2.5.1 Решение задачи УПИ с ТИ источником в двумерной среде.

Следуя [26], получим приближенное решение задачи, описывающее поле ТИ источника в 2М мутной среде при малых углах. В полярной системе координат УПИ уравнение (2.203) принимает вид [62]

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} L - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} L = -L + \frac{\Lambda}{2\pi} \oint L x d\phi. \quad (2.208)$$

Рассмотрим поле точечного изотропного (ТИ) источника излучения в двумерной среде. Будем искать распределение яркости в виде разложения в ряды кру-

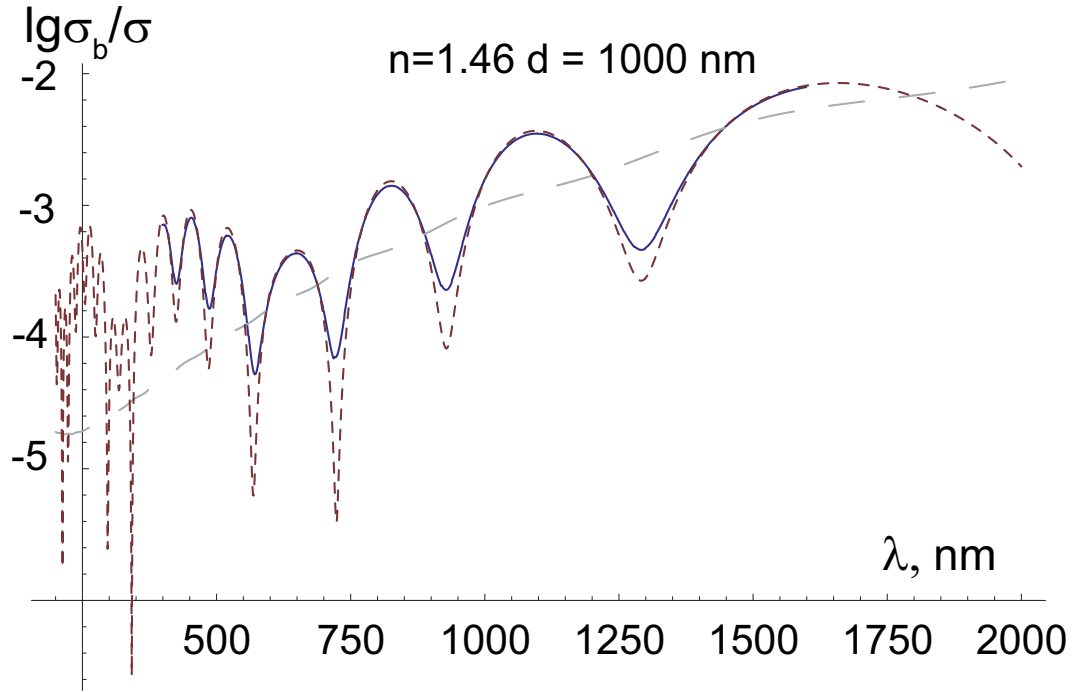


Рис. 2.36: Пунктирная кривая – нормированное сечение обратного рассеяния монодисперсных частиц σ_b/σ , сплошная кривая – то же, разброс диаметров частиц 5%, штриховая кривая – критическое значение сечения обратного рассеяния при рассчитанном значении параметра асимметрии (сферические частицы латекса в глицерине, теория Ми [195])

говых гармоник

$$L(r, \phi) = \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(r) e^{in\phi}. \quad (2.209)$$

Подставляя (2.209), (2.204) в уравнение 2.208 и интегрируя по ϕ с сопряженной базисной функцией $\exp(-in\phi)$, получим уравнение для коэффициентов гармоник $C_n(r)$

$$-\frac{n}{2r^2} C_{n-1}(r) + \frac{n}{2r^2} C_{n+1}(r) + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} C_{n-1}(r) + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} C_{n+1}(r) = -\frac{1}{r} C_n(r) + \frac{\Lambda}{r} x_n(r) C_n(r). \quad (2.210)$$

Ограничиваясь малоугловым рассеянием, можно приближенно принять непрерывную зависимость коэффициентов разложения $C_n(r)$ от индекса n [34]. Тогда получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} C_n(r) + \frac{n}{r^2} \frac{\partial}{\partial n} C_n(r) = -\frac{1}{r} C_n(r) + \frac{\Lambda}{r} x_n(r) C_n(r). \quad (2.211)$$

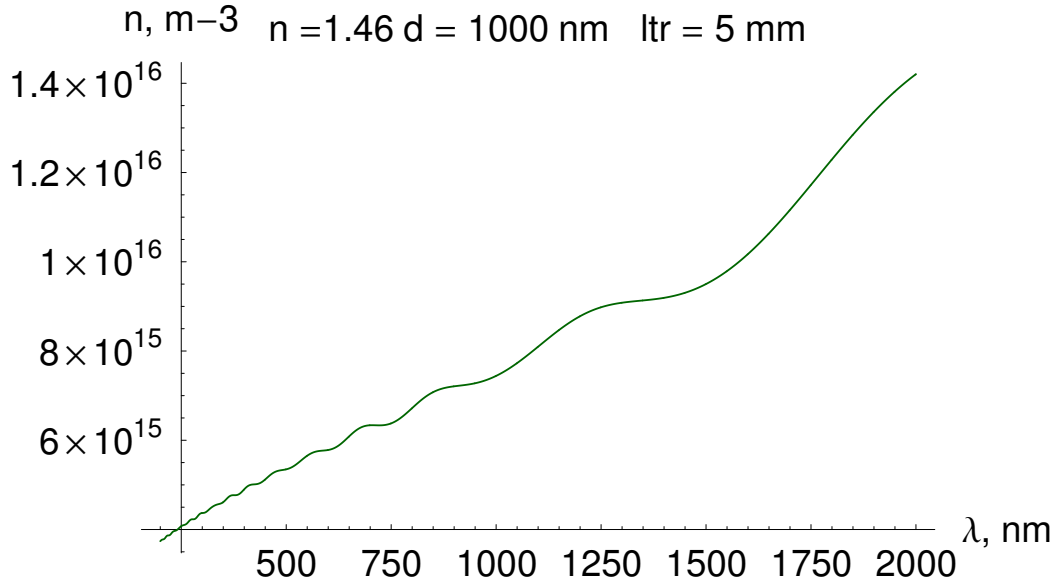


Рис. 2.37: Концентрации частиц в суспензии, соответствующие значению транспортной длины 5 мм (сферические частицы латекса в глицерине, теория Ми [195])

Следуя [26] и цитируемых там работам, решим это уравнение методом характеристик. Полагая $q = n/r$, приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{\partial}{\partial r} C(q, r) = -(1 - \Lambda x_{qr}(r)) C(q, r), \quad (2.212)$$

решением которого, как нетрудно показать, является

$$C(q, r) = C(q, 0) \exp \left\{ - \int_0^r (1 - \Lambda x_{qr}(r)) dr \right\}. \quad (2.213)$$

Рассмотрим плоскопараллельный слой (полосу) однородной мутной 2М среды $0 < x < X$ с анизотропной индикатрисой рассеяния. В начале координат $(0, 0)$ находится точечный изотропный источник излучения. Другие источники излучения отсутствуют. Поле рассеянного излучения ТИ источника в среде, таким образом, удовлетворяет краевой задаче для уравнения (2.203) с граничными условиями

$$L(0, y, \phi) = \delta(y), \cos \phi > 0 \quad (2.214)$$

и

$$L(X, y, \phi) = 0, \cos \phi < 0 \quad (2.215)$$

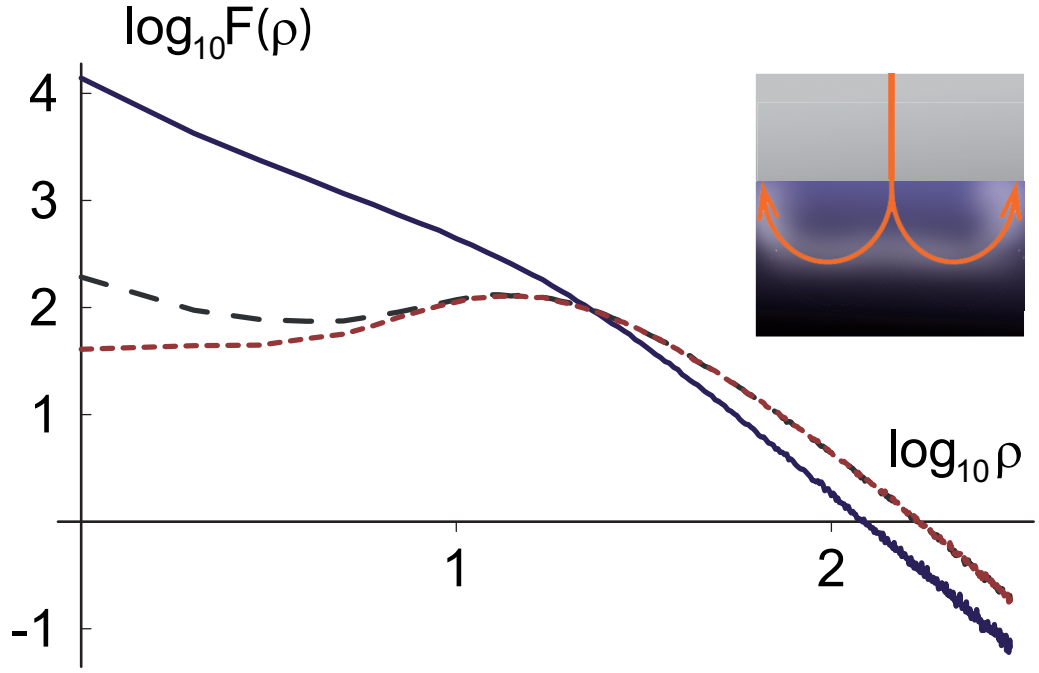


Рис. 2.38: Распределение интегральной интенсивности обратно рассеянного излучения $F(\rho)$, выходящего через границу среды (Монте-Карло, $\mu_0 = 0.9$, произвольные единицы). Сплошная кривая – $\sigma_b/\sigma \approx 8 \cdot 10^{-3}$ (гало отсутствует), штриховая кривая – $\sigma_b/\sigma \approx 8 \cdot 10^{-5}$ (слабое гало), пунктирная кривая – $\sigma_b/\sigma \approx 8 \cdot 10^{-10}$ (сильное гало).

на границах среды $x = 0$ и $x = X$ соответственно. Разложим поле в интеграл Фурье по y и ряд по круговым гармоникам $e^{in\phi}$:

$$L(x, y, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(ik_y y) L_y(x, k_y) dk_y = \frac{1}{2\pi} \int \exp(ik_y y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(x, k_y) e^{in\phi} dk_y. \quad (2.216)$$

Будем интересоваться распределением яркости поля, созданным источником в точке $x = X, y = 0$. Для этого выделим в граничном условии (2.214) вклад излучения источника в направлениях, близких к направлению на точку наблюдения ($\phi = 0$). Эта часть излучения источника порождает в точке наблюдения сильно анизотропное распределение яркости, содержащее угловую особенность $\delta(\phi)$, и мы найдем эту часть поля L_0 в малоугловом приближении с учетом дисперсии. Применим разбиение единицы к граничному условию (2.214). Представим распределение яркости на этой границе в виде

$$L(0, y, \phi) = M(\phi) L_0(y, \phi) + (1 - M(\phi)) L_1(y, \phi), \quad (2.217)$$

где $M(\phi)$ – угловая функция-множитель, равная единице в заданном направлении ($\phi = 0$) и удовлетворяющая известным условиям на гладкость и т.д. [160]. Для приближенной численной реализации разбиения единицы удобно выбрать функцию

$$M(\phi) = \exp(-a + a \cos \phi), \quad (2.218)$$

где a – некоторый числовой параметр, регулирующий эффективную угловую ширину выделяемой таким образом анизотропной части в граничном условии. Нетрудно получить формулу разложения $M(\phi)$ по круговым гармоникам

$$\exp(-a + a \cos \phi) = \exp(-a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(a) \exp(im\phi), \quad (2.219)$$

где $I_m(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [150]. Формула (2.219) фактически определяет элементы матрицы $\hat{M}$, соответствующей умножению на $M(\phi)$ в пространстве гармонических коэффициентов C_n . Практически удобным для расчетов является значение параметра $a = 1/(2 - 2g)$.

Следуя работе [51], разделим уравнение (2.203) на μ_x и заменим величину μ_x^{-1} её разложением в ряд Тейлора вблизи $\mu_x = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x} L_0 + \mu_x^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_0 = -\mu_x^- L_0 + \mu_x^- \frac{\Lambda}{2\pi} \oint L_0(x, y, \phi) x(\phi, \phi') d\phi', \quad (2.220)$$

где $\mu_x^- \approx \mu_x^{-1} = 1 - (\mu_x - 1) + \dots$. Подставим интеграл Фурье (2.216) для L_0 в уравнение (2.220). Умножим это уравнение на сопряженную базисную функцию $\exp(-in\phi)$ и проинтегрируем почленно по всей окружности $0 < \phi < 2\pi$. Таким образом, получим матричное уравнение для неизвестных коэффициентов гармоник $C_n^{(1)}(x, k_y)$ of L_0

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{C}^{(0)} + \hat{\mu}_x^- \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}^{(0)} = -\hat{\mu}_x^- \vec{C}^{(0)} + \hat{\mu}_x^- \Lambda \hat{x} \vec{C}^{(0)}, \quad (2.221)$$

где $\vec{C}^{(0)}(x, k_y)$ – вектор-столбец коэффициентов гармоник для L_0 , $\hat{x}$ – диагональная матрица с коэффициентами разложения индикатрисы (2.207), $\hat{\mu}_x$ and $\hat{\mu}_y$ – матрицы операторов умножения на $\cos \phi$ и $\sin \phi$ соответственно, $\hat{\mu}_x^-$ – матрица

оператора тейлоровской аппроксимации μ_x^{-1} . Матрицы $\hat{\mu}_x$ и $\hat{\mu}_y$ имеют вид

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots & & & & & \\ \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots \end{Bmatrix} \quad (2.222)$$

и

$$\hat{\mu}_y = \frac{i}{2} \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots & & & & & \\ \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \end{Bmatrix} \quad (2.223)$$

соответственно, матрица $\hat{\mu}_x^-$ первого порядка тейлоровской аппроксимации выражается в виде $\hat{\mu}_x^- = 2\hat{I} - \hat{\mu}_x$, где $\hat{I}$ – единичная матрица, и так дальше. Сделанные преобразования фактически означают пренебрежение обратным рассеянием в граничных условиях, и решения уравнения (2.221) экспоненциально убывают с ростом x . Поэтому граничное условие для решения при всех значениях углов ϕ необходимо поставить на границе $x = 0$. Таким образом, будем искать анизотропную часть решения, включающую в себя особенности, как решение задачи Коши для уравнения (2.221) с граничным условием при $x = 0$

$$L(0, y, \phi) = M(\phi)\delta(y). \quad (2.224)$$

Полное решение задачи для поля источника в среде может быть найдено в виде суммы анизотропной части L_0 и неизвестной диффузной части поля L_D . Подставляя неизвестное поле в виде суммы $L_0 + L_D$ в уравнение (2.203) и граничные условия (2.214), (2.215), получим неоднородную краевую задачу для L_D .

Решать краевую задачу для L_D удобно методом дискретных ординат. В пространстве углов ϕ двумерной задачи введем квадратурную формулу порядка N

$$\oint f(\phi)d\phi \approx \sum_{m=0}^{N-1} a_m f(\phi_m), \quad (2.225)$$

где ординаты и веса квадратурной формулы равны $\phi_m = 2\pi m/N$ and $a_m = 2\pi/N$, соответственно. Элементы матрицы рассеяния в дискретных ординатах

будут выражаться через коэффициенты угловых гармоник индикатрисы рассеяния по формулам

$$\hat{A}^{(DO)}_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_m x_m e^{im(\phi_i - \phi_j)}. \quad (2.226)$$

Переходя в уравнении для L_D и граничных условиях от угловых гармоник к дискретным ординатам при помощи соответствующих матриц перехода, получим задачу в дискретных ординатах, решением которой является неизвестная гладкая часть поля излучения в среде. Его можно найти с помощью какой-либо разностной схемы [87]. Найденные решения уравнений фактически являются спектральными компонентами интегралов Фурье типа содержащие соответствующий волновой масштаб k_y в качестве параметра. Обратным преобразованием Фурье восстановим угловое распределение яркости в точке наблюдения $x = X, y = 0$.

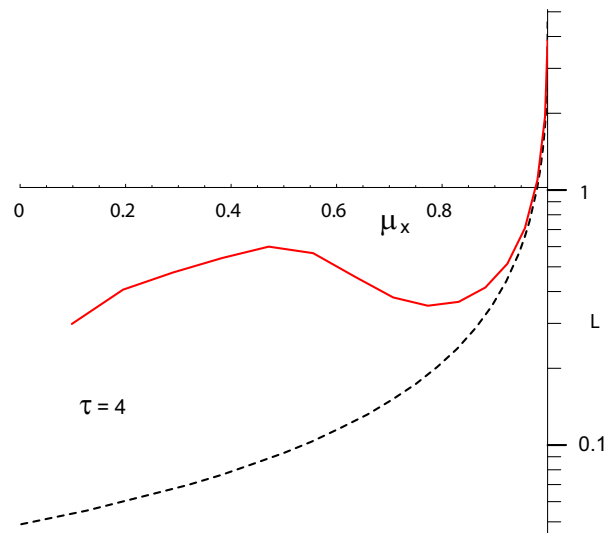


Рис. 2.39: Угловое распределение интенсивности точечного изотропного (ТИ) источника в точке наблюдения. $\Lambda = 0.99$, $g = 0.9$, $X = 4$. Сплошная кривая – численное решение, пунктирная кривая – асимптотическое решение методом характеристик.

Типичный результат вычисления поля ТИ источника на верхней границе 2М плоскослоистой среды приведен на рис. 2.39. Пунктирной кривой показано асимптотическое малоугловое решение методом характеристик (2.209), (2.213), сплошной кривой – численное решение уравнения переноса в двумерной сре-

де по формулам раздела 2.5.1. В области малых углов ($\mu_x \simeq 1$) полученное численное решение хорошо описывается малоугловой асимптотикой.

2.5.2 Распространение узких пучков в двумерной среде

Будем искать распределение яркости в виде интеграла Фурье по y -координате (2.216) [53]. Подставляя (2.216) в уравнение (2.203), получим дифференциальное уравнение для коэффициентов гармоник $C_n(x, k_y)$ в виде

$$\frac{1}{2} \left(k_y C_{n-1}(x, k_y) - k_y C_{n+1}(x, k_y) + \frac{\partial C_{n-1}(x, k_y)}{\partial x} + \frac{\partial C_{n+1}(x, k_y)}{\partial x} \right) = -(1 - \Lambda x_n) C_n(x, k_y). \quad (2.227)$$

Приближенно принимая зависимость коэффициентов гармоник $C_n(x, k_y)$ от индекса n непрерывной [26], получим

$$\frac{\partial}{\partial x} C_n(x, k_y) - k_y \frac{\partial}{\partial n} C_n(x, k_y) = -(1 - \Lambda x_n) C_n(x, k_y). \quad (2.228)$$

Переходя в (2.228) к характеристическим переменным $p, q = (k_y x \pm n)/2$, получим уравнение для коэффициентов гармоник в виде

$$k_y \frac{\partial C(p, q, k_y)}{\partial q} = -(1 - \Lambda x_{p-q}) C(p, q, k_y), \quad (2.229)$$

решением которого является

$$C(p, q, k_y) = \exp \left\{ -\frac{1}{k_y} \int_{q_0}^q (1 - \Lambda x_{p-q}) dq \right\} \quad (2.230)$$

(путь интегрирования схематически показан на рис. 2.40). Для модельных расчетов рассмотрим индикатрису Хеньи-Гринштейна (2.205).

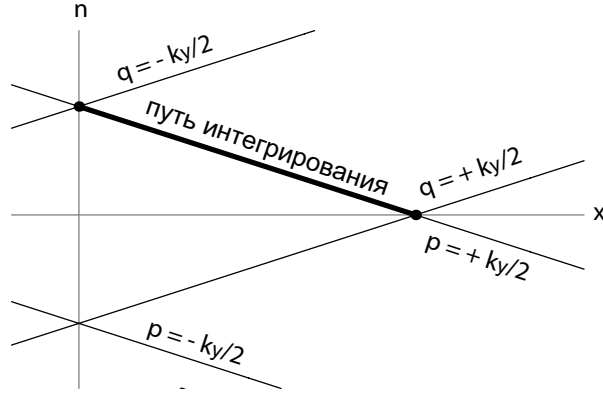


Рис. 2.40: К вычислению выражения (2.230) (схематическое изображение характеристик).

Рассмотрим задачу о световом поле на границе света и тени в мутной среде. Зададим начальное распределение интенсивности на границе $x = 0$ в виде ступенчатой функции Хевисайда по поперечной координате

$$L(0, y, \phi) = \theta(y)\delta(\phi), \quad (2.231)$$

где $\theta(y)$ – функция Хевисайда

$$\theta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}. \quad (2.232)$$

Удобно представить решение в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $L(x, y, \phi) = L^+(x, y, \phi) + L^-(x, y, \phi)$, так что

$$L^+(0, y, \phi) = \delta(\phi)/2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(in\phi) \quad (2.233)$$

и

$$L^-(0, y, \phi) = \begin{cases} \delta(\phi)/2, & y > 0 \\ -\delta(\phi)/2, & y < 0 \end{cases}. \quad (2.234)$$

Первое слагаемое в (2.233) является фактически излучением ПМ-источника, распределение поля для которого найти нетрудно. В самом деле, поскольку коэффициенты суммы (2.233) не зависят от k_y , их можно непосредственно найти из уравнения (2.228) Полагая в (2.228) $k_y = 0$, получаем, что

$$L^+(x, y, \phi) = \delta(\phi)/2 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(-(1 - \Lambda x_n)x + in\phi). \quad (2.235)$$

Второе слагаемое (2.234) может быть представлено интегралом Фурье

$$L^-(0, y, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_y y) \frac{dk_y}{ik_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp(in\phi), \quad (2.236)$$

коэффициенты которого удовлетворяют краевому условию $C_n^-(0, k_y) = (2\pi i k_y)^{-1}$ при $x = 0$. Вычислим распределение полной (интегральной) интенсивности поля по всем углам в произвольной точке пространства (x, y) . Очевидно, она равна коэффициенту при нулевой круговой гармонике C_0 . Для индикатрисы рассеяния (2.205) решение для соответствующего пространственного спектра (2.216) выражается интегралом (2.230), где $p = k_y x/2$, $q_0 = -p$, $q = p$, $x_{p-q} = \exp((p - q) \ln g)$. Выполняя интегрирование, получим

$$-\frac{1}{k_y} \int_{q_0}^q (1 - \Lambda x_{p-q}) dq = \frac{\Lambda g^{k_y x}}{k_y \ln g} - x - \frac{\Lambda}{k_y \ln g}. \quad (2.237)$$

При сильно анизотропном рассеянии ($\ln g \rightarrow 0$) для приближенной оценки распределения интегральной интенсивности в этом выражении достаточно ограничиться первым членом разложения в ряд Тейлора по $\ln g$:

$$-\frac{1}{k_y} \int_{q_0}^q (1 - \Lambda x_{p-q}) dq \approx \frac{1}{2} k_y \Lambda x^2 \ln g - (1 - \Lambda)x. \quad (2.238)$$

Подставляя полученное выражение в (2.216), (2.230), изменим порядок операций суммирования и интегрирования. Тогда, вычисляя интеграл по k_y в (2.216) в смысле главного значения (*v.p.*) с учетом краевого условия (2.231), найдем антисимметричную часть решения

$$\frac{1}{2\pi} \int C_0^-(x, k_y) \exp(ik_y y) dk_y = \frac{1}{2\pi^2} \exp((1 - \Lambda)x) \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x^2 \Lambda \ln g} \right). \quad (2.239)$$

Складывая (2.239) с первым слагаемым в (2.235), получим искомое распределение интегральной интенсивности

$$\frac{1}{2\pi} \int (L^+ + L^-) d\phi = \exp(-(1 - \Lambda x_n)x) \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2y}{x^2 \Lambda \ln g} \right) \right). \quad (2.240)$$

Рассмотрим теперь задачу о точечном мононаправленном (ТМ) источнике. Начальное распределение яркости на границе $x = 0$ имеет вид

$$L(0, y, \phi) = \delta(\phi)\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_y y) dk_y, \quad (2.241)$$

т.е. $C_n(0, k_y) = (2\pi)^{-1}$. Вычисление распределения интегральной интенсивности по пространству по формулам (2.230), (2.238) и (2.241) приводит к выражению

$$C_0(x, y) = -\frac{2x^2 \Lambda \ln g}{\pi (\Lambda^2 x^4 \ln g^2 + 4y^2)} \exp(x(\Lambda - 1)). \quad (2.242)$$

Кривые распределения интегральной интенсивности $C_0(x, y)$ в зависимости от y для различных значений оптической толщины x ($\Lambda = 1, g = 0.99$) показаны на рис. 2.41.

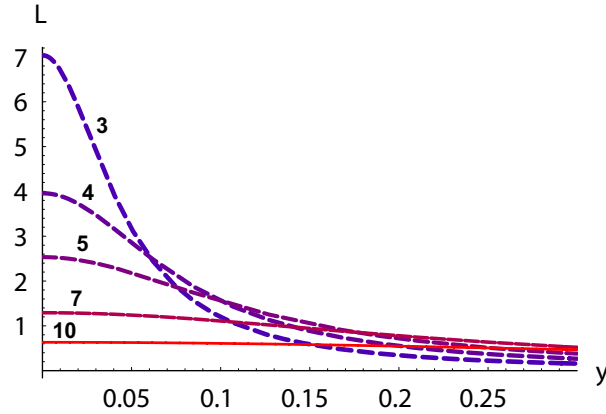


Рис. 2.41: Распределения интегральной яркости $C_0(x, y)$ точечного мононаправленного источника в двумерной среде (произвольные единицы). $\Lambda = 1, g = 0.99$. Оптические толщины указаны цифрами при кривых.

2.5.3 Численное решение задачи о поле ТМ источника в слое двумерной рассеивающей среды.

Рассмотрим плоскопараллельный слой (полосу) однородной мутной 2М среды $0 < x < X$ с анизотропной функцией рассеяния. Точечный мононаправленный (ТМ) источник, излучающий в положительном направлении оси x , расположен в начале координат. В результате сильной анизотропии рассеяния значительная часть поля рассеянного излучения, в том числе многократно рассеянного, также

сильно анизотропна. Будем искать анизотропную часть поля в виде

$$L = L_0 + L_1, \quad (2.243)$$

где L_0 представляет собой

$$L_0(x, y, \phi) = \delta(\phi)\delta(y) \exp(-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_y y) C_n^{(0)}(x, k_y) \exp(in\phi) dk_y, \quad (2.244)$$

где $C_n^{(0)}(x, k_y) = (2\pi)^{-1} \exp(-x)$. Распределение яркости L_1 представляет собой излучение, рассеянное на малые углы. Учитывая, что $\partial L_0 / \partial x = -L_0$, подставим сумму обоих слагаемых (2.243) в уравнение переноса (2.203) и получим

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) L_1 = -L_1 + \frac{\Lambda}{2\pi} \oint (L_0(x, y, \phi) + L_1(x, y, \phi)) x(\phi, \phi') d\phi'. \quad (2.245)$$

Следуя работе [51], разделим уравнение (2.245) на μ_x и заменим величину μ_x^{-1} её разложением в ряд Тейлора вблизи $\mu_x = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x} L_1 + \mu_x^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_1 = -\mu_x^- L_1 + \mu_x^- \frac{\Lambda}{2\pi} \oint (L_0(x, y, \phi) + L_1(x, y, \phi)) x(\phi, \phi') d\phi', \quad (2.246)$$

где $\mu_x^- \approx \mu_x^{-1} = 1 - (\mu_x - 1) + \dots$. Подставим интеграл Фурье (2.244) для L_0 и аналогичное представление для L_1 в уравнение (2.246). Умножим это уравнение на сопряженную базисную функцию $\exp(-in\phi)$ и проинтегрируем почленно по всей окружности $0 < \phi < 2\pi$. Таким образом, получим матричное уравнение для неизвестных коэффициентов гармоник $C_n^{(1)}(x, k_y)$ of L_1

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{C}^{(1)} + \hat{\mu}_x^- \hat{\mu}_y i k_y \vec{C}^{(1)} = -\hat{\mu}_x^- \vec{C}^{(1)} + \hat{\mu}_x^- \Lambda \hat{x} \vec{C}^{(1)} + \hat{\mu}_x^- \Lambda \hat{x} \vec{C}^{(0)}, \quad (2.247)$$

где $\vec{C}^{(0)}(x, k_y)$ and $\vec{C}^{(1)}(x, k_y)$ – вектор-столбцы коэффициентов гармоник для L_0 и L_1 , соответственно, $\hat{x}$ – диагональная матрица с коэффициентами разложения индикатрисы (2.207), $\hat{\mu}_x$ and $\hat{\mu}_y$ – матрицы операторов умножения на $\cos \phi$ and $\sin \phi$ (2.222), (2.223) с коэффициентами $\hat{\mu}_x k, j = (\delta_{k, j+1} + \delta_{k, j-1})/2$ и $\hat{\mu}_y k, j = i(\delta_{k, j-1} - \delta_{k, j+1})/2$, соответственно, $\hat{\mu}_x^-$ – матрица оператора тейлоровской аппроксимации μ_x^{-1} (2.5).

Матрица $\hat{\mu}_x^-$ тейлоровской аппроксимации первого порядка (до линейного члена включительно) выражается в виде $\hat{\mu}_x^- = 2\hat{I} - \hat{\mu}_x$, где $\hat{I}$ – единичная матрица. Кроме L_0 , другие источники излучения отсутствуют, так что для оставшейся части поля излучения формулируется краевая задача с однородными граничными условиями типа (2.14), (2.15). Решения соответствующей однородной системы уравнений (2.247) экспоненциально убывают с ростом x . Пренебрегая обратным рассеянием, потребуем $\vec{C}^{(1)} = 0$ при $x = 0$. Дополняя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.247) краевыми условиями на искомые коэффициенты гармоник, получаем задачу Коши для этих коэффициентов, которую нетрудно решить каким-либо из известных численных методов. Найденное решение будет включать в себя сингулярную часть поля в виде прямого излучения источника L_0 и рассеянное вперед излучение, обладающее сильной анизотропией. Применение тейлоровской аппроксимации $\hat{\mu}_x^-$ достаточно высокого порядка позволяет в передней полусфере углов ($\mu_x > 0$) получить хорошее совпадение приближенного решения с точным. Однако, при этом полностью игнорируется рассеяние в заднюю полусферу $\mu_x < 0$.

В задачах для ПМ источника [34] полное решение ищут в виде суммы $L_0 + L_1$ и регулярной части L_D . Подставляя его в (2.203) и граничные условия, получают неоднородную краевую задачу для L_D . При этом диффузная часть излучения L_D оказывается близка к изотропной и может быть легко вычислена. Однако, вследствие геометрических свойств задачи с ТМ источником обратно рассеянное излучение также сильно анизотропно. В работе [53] анизотропная часть обратно рассеянного излучения выделена в отдельное слагаемое L_2 , для которого сформулирована отдельная краевая задача Коши (2.246). Подставляя сумму $L_0 + L_1 + L_2$ в уравнение (2.203), разделим μ_x и аппроксимируем μ_x^{-1} ее разложением в ряд Тейлора вблизи $\mu_x = -1$. Для неизвестных коэффициентов разложения L_2 в интеграл Фурье по y получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в матричной записи

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{C}^{(2)} + \hat{\mu}_x^+ \hat{\mu}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{C}^{(1)} + \hat{\mu}_x^+ \hat{\mu}_y i k_y (\vec{C}^{(1)} + \vec{C}^{(2)}) = -\hat{\mu}_x^+ (\vec{C}^{(1)} + \vec{C}^{(2)}) + \hat{\mu}_x^+ \Lambda \hat{x} (\vec{C}^{(0)} + \vec{C}^{(1)} + \vec{C}^{(2)}), \quad (2.248)$$

где $\mu_x^+ \approx \mu_x^{-1} \approx -1 - (\mu_x + 1) + \dots$

Решения соответствующей однородной системы уравнений экспоненциально убывают с убыванием x . Поэтому краевое условие на неизвестные коэффициен-

ты $\vec{C}^{(2)}$ необходимо поставить на дальней от источника границе слоя $x = X$. С учетом однородного краевого условия на входящее в среду излучение естественно будет положить $L_2 = -L_1$ при $x = X$ и $\mu_x < 0$. С физической точки зрения, для корректного учета анизотропии достаточно удовлетворить краевому условию $L_2 = -L_1$ при углах, не слишком далеких от нормали. Сформулируем краевое условие в виде

$$L_2(X, \phi) = -M(\phi)L_1(X, \phi), \quad (2.249)$$

где $M(\phi)$ – некоторая функция угла ϕ , равная единице в направлении строго назад и плавно убывающая по мере отклонения от указанного направления. В качестве такого множителя удобно выбрать функцию $M(\phi) = \exp(-a(1 + \cos \phi))$, где a – некоторый числовой параметр, регулирующий эффективную ширину окрестности, выделяемой при помощи этого углового множителя в диапазоне углов. Построим соответствующую матрицу для умножения вектор-столбцов коэффициентов гармоник. Пусть $L_1(X, \phi) = \sum C_j^{(1)}(X) \exp(ij\phi)$, $L_2(X, \phi) = \sum C_k^{(2)}(X) \exp(ik\phi)$, $M(\phi) = \sum M_m \exp(im\phi)$. Тогда можно показать, что умножение функций в краевом условии будет эквивалентно свертке соответствующих рядов коэффициентов гармоник. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что

$$\exp(-a(1 + \cos \phi)) = \exp(-a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m I_m(a) \exp(im\phi), \quad (2.250)$$

и граничное условие (2.249) в матричной форме, таким образом, записывается как

$$C_k^{(2)} = -\exp(-a) \sum_j (-1)^{j+k} I_{j+k}(a) C_j^{(1)}, \quad (2.251)$$

где $I_m(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода [150].

Таким образом, краевая задача для $\vec{C}^{(2)}$ представляет собой задачу Коши для неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, причем решения соответствующей однородной системы убывают с убыванием. Решение этой системы нетрудно найти каким-либо численным методом.

Фактически построенное суммарное решение $L_0 + L_1 + L_2$ вычислено в приближении однократного обратного рассеяния, причем для учета многократного

рассеяния на малые углы во встречных потоках L_1 и L_2 применено усовершенствованное малоугловое приближение с учетом дисперсии [51]. Распределение интенсивности в произвольной точке среды вычисляется преобразованием Фурье (2.216) по поперечной координате y .

Полное решение задачи будем искать в виде суммы $L_0 + L_1 + L_2 + L_D$, где L_D неизвестная диффузная часть излучения. Подставляя ее в уравнение (2.203) и краевые условия, получим неоднородную краевую задачу для L_D . Учитывая однородные краевые условия на входящее в среду излучение, поставленные в исходной задаче, в задаче для L_D потребуем удовлетворения краевым условиям

$$L_D = -L_1 - L_2 \quad (2.252)$$

при $x = 0, \mu_x > 0$ и $x = X, \mu_x < 0$ на ближней и дальней от источника границах, соответственно. Найти решение этой задачи удобно методом дискретных ординат, используя квадратурную формулу (2.225) и матрицу рассеяния (2.226). Переходя в уравнении для L_D и граничных условиях от угловых гармоник к дискретным ординатам при помощи соответствующих матриц перехода, получим задачу в дискретных ординатах, решением которой является неизвестная гладкая часть поля излучения в среде. Его можно найти с помощью какой-либо разностной схемы [87]. Найденные решения уравнений фактически являются спектральными компонентами интегралов Фурье типа содержащие соответствующий волновой масштаб k_y в качестве параметра. Обратным преобразованием Фурье восстановим угловое распределение яркости во всех точках пространства.

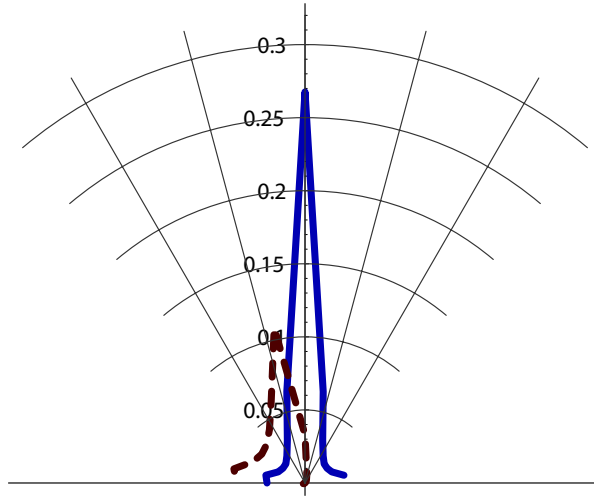


Рис. 2.42: Угловые распределения выходящего излучения $L_2 + L_D$. $\Lambda = 0.99$, $g = 0.9$, $X = 1$, $x = 0$. $y = 0$ (сплошная кривая), $y = 0.05$ (пунктирная кривая).

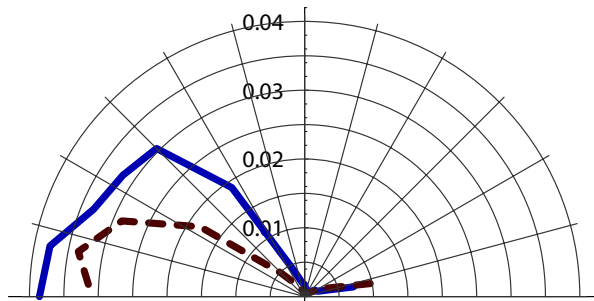


Рис. 2.43: Угловые распределения выходящего излучения $L_2 + L_D$. $\Lambda = 0.99$, $g = 0.9$, $X = 1$, $x = 0$. $y = 0.75$ (сплошная кривая), $y = 1.5$ (пунктирная кривая).

Угловые распределения яркости $L_2 + L_D$ на ближней к источнику поверхности слоя в зависимости от расстояния до источника показаны на рис. 2.42-2.43.

В точке расположения источника, рассеянное поле сингулярно, так что приведенное на рис. 2.42 соответствующее распределение следует понимать как усредненное по некоторой конечной апертуре (жирная кривая). Остальные распределения, показанные на рис. 2.42-2.43, являются регулярными.

2.6 Задачи для произвольной геометрии области рассеивающей среды.

В случае произвольной геометрии среды изложенный подход также может быть применен для регуляризации особенностей и анизотропии решения.

Фактически преобразование $\mu_z \mu_z^-$ сжимает область на сфере направлений, т.е. отображает сферу направлений внутрь некоторого конуса, в пределах которого сосредоточены все характеристики уравнения (2.6), проходящие через данную точку пространства (рис. 2.44). Выбирая ось z этого преобразования в направлении преимущественной анизотропии светового поля, созданного рассматриваемой конфигурацией источников в области, в каждой точке границы области можно определить начальные условия на характеристиках уравнения, входящих внутрь области среды в данной точке границы. В случае сложной конфигурации источников в ней можно выделить компоненты, создающие в среде анизотропные распределения интенсивности в тех или иных направлениях. Соответствующие вклады в функцию источников УПИ и граничные условия можно выделить при помощи подходящего разбиения единицы. Для каждого из выделенных таким образом вкладов можно записать и решить отдельную задачу для уравнения (2.6) с учетом дисперсии в требуемом порядке точности. Подобным образом можно выделить сильно анизотропные компоненты в первой, второй и т.д. кратностях рассеяния, если это необходимо (побочные максимумы индикатрисы рассеяния типа радуги и пр., в направлениях, отличных от направления вперед).

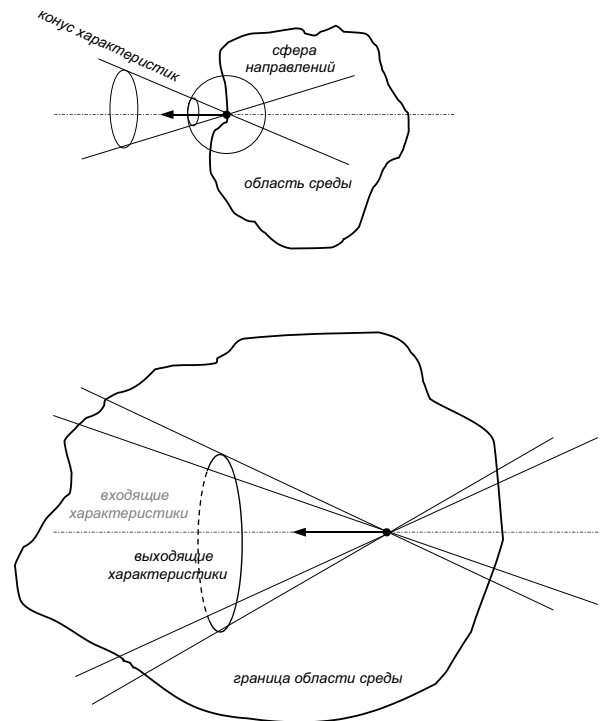


Рис. 2.44: Характеристики уравнения (2.6) в трехмерной области пространства.

Уравнение для диффузной части решения получается подстановкой в исходное УПИ решения в виде суммы всех выделенных нерегулярных слагаемых и диффузной части L_D по типу (1.1), и решено каким-либо известным способом без применения специальных мер по борьбе с анизотропией. Гладкость диффузной части улучшается с уточнением учета дисперсии в выделенных особенных частях.

2.7 Конечно-разностные схемы решения уравнений малоуглового приближения теории переноса излучения.

Малоугловое приближение (МУП) теории переноса излучения играет важную роль при решении задач для уравнения переноса излучения (УПИ) в средах с сильно вытянутыми вперед индикатрисами рассеяния. Это приближение позволяет как непосредственно получить разумную аппроксимацию точного решения УПИ, так и применяться в составе схем строгого решения УПИ для регуляризации численной процедуры [1].

Аналитические решения уравнений малоуглового приближения теории переноса излучения, выражающиеся в квадратурах, известны лишь для ограниченного числа ситуаций [1]. Кроме того, такие решения, как правило, получают методом характеристик. При внедрении такой аппроксимации в численную схему решения УПИ с разделением анизотропной и диффузной компонент [1], структура характеристик МУП в общем случае не совпадает со структурой сетки схемы решения УПИ для диффузной (гладкой) части решения. Это приводит к необходимости применения интерполяционных процедур, снижающих точность и усложняющих алгоритм, либо к росту вычислительных затрат при расчете МУП в каждом узле по отдельной характеристике. Исключение составляет задача о падении излучения плоского мононаправленного (ПМ) источника на границу плоскостной рассеивающей среды, характеристики соответствующего решения уравнений МУП для которой [19] являются прямыми линиями.

В общем случае двумерной и трехмерной среды решение уравнений МУП как методом характеристик, так и численно методом разделения переменных

оказывается невозможным. В этом случае целесообразно непосредственное численное интегрирование уравнений МУП с помощью разностной схемы.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения переноса излучения в плоском слое рассеивающей среды $0 < z < \tau_0$ с границей, освещенной нормально падающим излучением плоского мононаправленного источника с произвольным распределением интенсивности вдоль границы. Угловое распределение яркости в среде L удовлетворяет уравнению переноса излучения

$$(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)L = -\varepsilon L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \quad (2.253)$$

вместе с граничными условиями

$$L = \begin{cases} 0, z = 0 & \mu_z > 0 \\ 0, z = \tau_0 & \mu_z < 0 \end{cases} . \quad (2.254)$$

Здесь $\mathbf{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – единичный вектор направления, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mu_z = \cos \theta$, $\mu_x = \sin \theta \cos \phi$, $\mu_y = \sin \theta \sin \phi$, $x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ – индикатриса рассеяния, $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – угловое распределение интенсивности излучения,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \int L_0 x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' \quad (2.255)$$

– функция источников,

$$L_0 = L_x(x) \delta(\mathbf{\Omega}) \exp(-z) \quad (2.256)$$

– падающее излучение ПМ источника, $L_x(x)$ – произвольная зависимость интенсивности падающего излучения от поперечной координаты вдоль границы слоя. Следуя общей идее выделения нерегулярной компоненты [1], разделим решение на анизотропную и диффузную части

$$L = L_a + L_D . \quad (2.257)$$

Для малоугловой части запишем уравнение малоуглового приближения с учетом дисперсии (2.56)

$$\frac{\partial}{\partial z} L_a + \mu_z^- \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_a = -\mu_z^- L_a + \mu_z^- \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^- f(\mathbf{r}) , \quad (2.258)$$

где μ_z^- – тейлоровская аппроксимация величины μ_z^{-1} заданной степени вблизи направления падения излучения источника μ_0 [54]. Учету дисперсии длин

путей распространения в первом порядке по μ_z при нормальном падении излучения источника соответствует аппроксимация $\mu_z^- = 2 - \mu_z$. Потребуем для анизотропной части решения L_a выполнения начального условия на передней границе плоскостой среды

$$L_a(z = 0) = 0. \quad (2.259)$$

Тогда, подставляя полное решение задачи в форме (2.257) в (2.253), (2.254), для диффузной компоненты решения L_D получим краевую задачу в виде уравнения (2.253) с функцией источников

$$f_D = (\mu_z \mu_z^- - 1) \left(\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_a + L_a \right) + (1 - \mu_z \mu_z^-) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' + (1 - \mu_z \mu_z^-) f. \quad (2.260)$$

и граничными условиями

$$L_D = \begin{cases} 0, z = 0 & \mu_z > 0 \\ -L_a, z = \tau_0 & \mu_z < 0 \end{cases}. \quad (2.261)$$

Нетрудно убедиться в том, что сумма гладкой и анизотропной частей (2.257), удовлетворяющих сформулированным здесь для них уравнениям и граничным условиям, является решением исходной краевой задачи (2.253), (2.254). При этом, функция источников (2.260) благодаря присутствию в ней множителей вида $(\mu_z \mu_z^- - 1)$ при малых углах распространения излучения θ стремится к нулю как степень величины $1 - \mu_z$, соответствующая степени применяемой тейлоровской аппроксимации μ_z^- . Тем самым, из диффузной части решения L_D оказывается удаленной значительная часть рассеянного вперед на малые углы излучения. Таким образом, L_D является весьма гладкой функцией направления $\boldsymbol{\Omega}$, что позволяет для ее вычисления пользоваться каким-либо из известных методов решения УПИ без принятия дополнительных мер к регуляризации анизотропии. Выделение анизотропной части решения L_a в виде известных решений УПИ в малоугловом приближении $\ll$ без учета дисперсии или с грубым ее учетом часто не обеспечивает требуемой малости функции источников f_D при малых углах и соответственно достаточной регуляризации анизотропии. Преимущество предлагаемого здесь подхода заключается в высокой точности учета дисперсии длин путей распространения излучения при малых углах. Краевая задача для анизотропной части решения L_a (2.56), (2.259) может быть решена при помощи специальной разностной схемы.

Рассмотрим эталонную задачу о поле излучения в мутной среде вблизи резкой границы света и тени. Пусть плоский мононаправленный источник с нормальным падением на границу плоскостойкой среды освещает ее положительную полуплоскость

$$L_x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} . \quad (2.262)$$

Поскольку сетка узлов разностной схемы возможна в области конечного размера, на практике эту область плоскостойкой среды можно ограничить вертикальными боковыми границами, достаточно удаленными от области существенной неоднородности распределения поля в среде. На достаточном удалении от этой области можно считать, что решение мало отличается от решения соответствующей одномерной плоскостойкой задачи, и на боковых границах положить решение равным решению соответствующей одномерной задачи для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} L_a = -\mu_z^- L_a + \mu_z^- \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') d\boldsymbol{\Omega}' + \mu_z^- f(\mathbf{r}) \quad (2.263)$$

с начальным условием (2.259) []. В случае распределения источников (2.262) на границе в области тени $x < 0$ практически решение можно положить равным нулю ($L_a = 0$).

Уравнение (2.56) на практике целесообразно решать в представлении сферических гармоник (СГ). Искомое решение и индикатриса рассеяния записываются в виде разложений в ряды по сферическим гармоникам $Y_n^m(\theta, \phi)$ (2.7), (2.8)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.264)$$

$$x(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_n Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^m(\theta', \phi'), \quad (2.265)$$

соответственно. При этом входящие в уравнение (2.56) величины μ_z^-, μ_z, μ_x и индикатриса рассеяния x представляются соответствующими матрицами. Система дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов разложения (2.7) в матричной записи принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{C}_1 = -\hat{\mu}_z^- \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{x} \vec{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{x} \vec{f}, \quad (2.266)$$

где $\vec{C}_1$ – вектор-столбец коэффициентов c_{nm} .

Уравнение (2.266) на дискретной сетке узлов может быть решена, например, с помощью разностной схемы Фридрихса [87]. Однако, примененная в этой схеме аппроксимация решения на предыдущем шаге в виде полусуммы значений решения в соседних узлах плохо аппроксимирует решение на разрывах, типичных для задач теории переноса с резкими границами освещенных и теневых областей. По этой причине разностную схему Фридрихса целесообразно модифицировать. Аппроксимируем уравнение (2.266) конечно-разностными соотношениями следующим образом:

$$L_j^{n+1} - \left(\hat{A} \frac{L_{j+1}^n + L_{j-1}^n}{2} + \hat{B} L_j^n \right) = -\hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x \alpha \frac{L_{j+1}^n - L_{j-1}^n}{2} - 2L_j^{n+1} dz + \hat{\mu}_z L_j^n dz + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{x} L_j^n dz + \quad (2.267)$$

где L_j^n – значение вектора коэффициентов разложения C_1 в (j, n) -том узле разностной схемы, dz – шаг разностной схемы вдоль оси z , $\alpha = dx/dz$ – отношение шагов разностной схемы. Здесь в явном виде применена тейлоровская аппроксимация первого порядка $\mu_z^- = 2 - \mu_z$. Входящие в (2.267) неопределенные пока коэффициенты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ предоставляют возможность адаптации записанной здесь разностной схемы для конкретной задачи. В частности, выбор значений $\hat{A} = 1$, $\hat{B} = 0$ соответствует явной схеме Фридрихса [87].

Аппроксимацию решения на предыдущем шаге в круглых скобках в левой части уравнения (2.267) выберем таким образом, чтобы обеспечить хорошее приближение разрывного решения вблизи границ света и тени при сохранении общей устойчивости схемы. Для рассматриваемой здесь конфигурации источников (2.262) примем

$$\hat{A} = \hat{\mu}_x^2, \quad (2.268)$$

$$\hat{B} = 1 - \hat{\mu}_x^2. \quad (2.269)$$

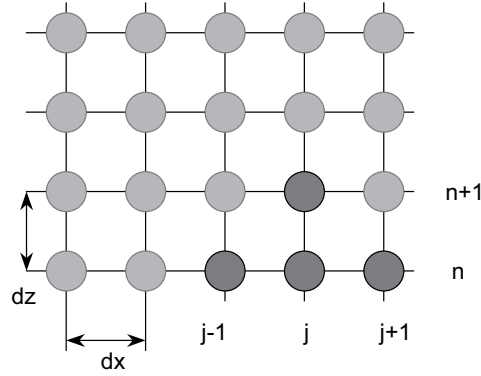


Рис. 2.45: Шаблон разностной схемы (2.267).

Проанализируем устойчивость разностной схемы (2.267). Запишем приближенное численное решение в виде ряда Фурье

$$L_j = \sum_k \tilde{L}_k \exp(ikj\Delta x). \quad (2.270)$$

Главная (не зависящая от шага Δz) часть матрицы перехода разностной схемы для k — й гармоники равна

$$\hat{G} = \hat{A} \cos k\Delta x + \hat{B} - i\alpha \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x \sin k\Delta x. \quad (2.271)$$

Входящие в выражение (2.271) величины являются скалярами, либо операторами матричного представления умножения на вещественные скалярные функции полярного угла направления распространения θ . Следовательно, все эти матрицы коммутируют между собой, и матрица перехода G , таким образом, нормальна ($GG^* - G^*G = 0$). Тем самым, получаем оценку собственных значений

матрицы G и ее нормы [87]

$$\|G\| \leq (A \cos k\Delta x + B)^2 + (\alpha \mu_z^- \mu_x \sin k\Delta x)^2, \quad (2.272)$$

где входящие в (2.271) матрицы заменены соответствующими скалярными функциями μ_z . Можно показать, что для достаточно малых α правая часть (2.272) по модулю не превышает единицы, следовательно разностная схема устойчива согласно критерию фон Неймана [87]. График этой функции для $\alpha = 0.25$ приведен на рис. 2.7.

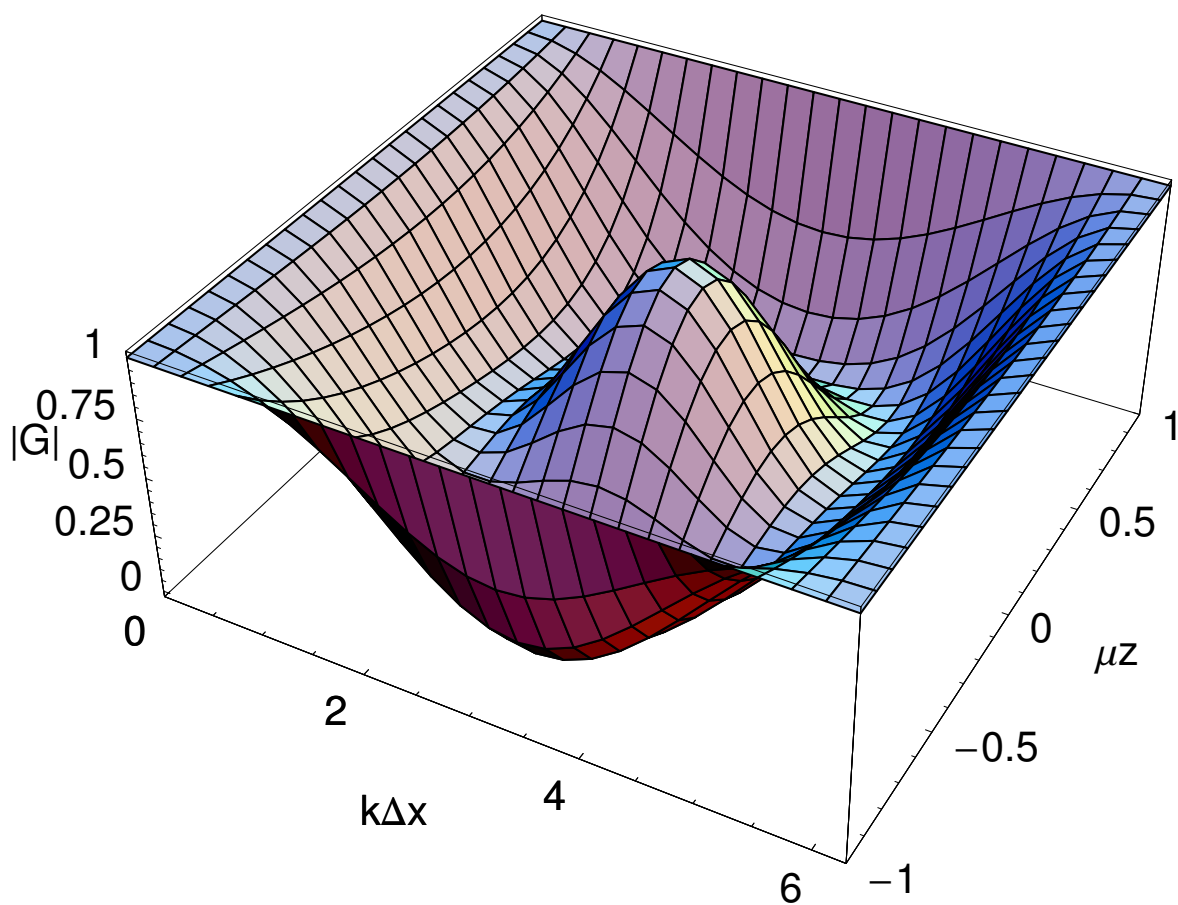


Рис. 2.46: Численная оценка нормы матрицы перехода разностной схемы (2.272) при $\alpha = 0.25$.

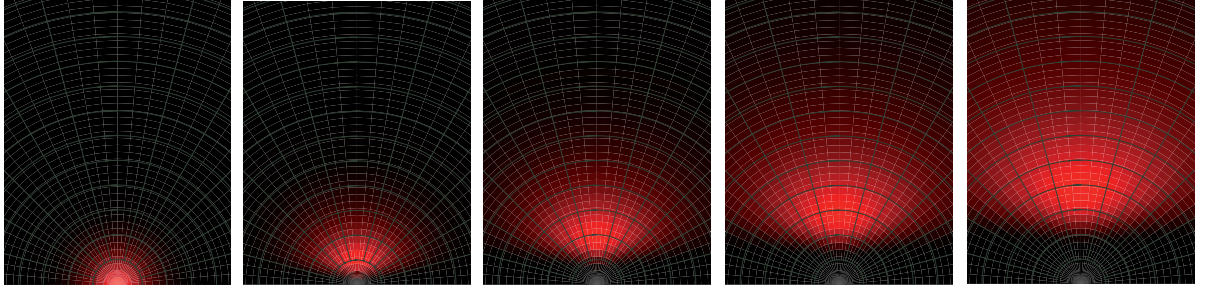


Рис. 2.47: Численный расчет светового поля в мутной среде вблизи границы света и тени. Угловое распределение интенсивности выходящего излучения. $\tau_z = 1.0$, $\tau_x = -0.5 \dots 0.5$. Индикатриса Хеньи-Гринстейна, $g = 0.5$, $\Lambda = 1$.

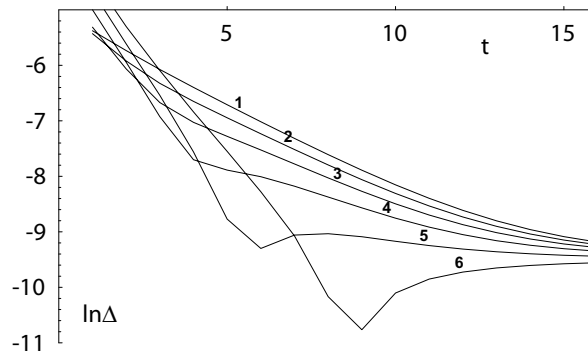


Рис. 2.48: Численные оценки погрешности решения конечно-разностным методом в зависимости от точности учета дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения.

С целью оценки практического улучшения точности и сходимости разностных схем для полного численного решения УПИ с помощью предлагаемого подхода проводились тестовые расчеты эталонной краевой задачи УПИ для нормального падения коллимированного излучения плоского мононаправленного (ПМ) источника на однородный плоскопараллельный слой среды [204]. Оптическая толщина слоя $\tau = 1$, альбеда однократного рассеяния $\Lambda = 0.99$, индикатриса рассеяния Хеньи-Гринстейна [176], средний косинус рассеяния $g = 0.9$. Уравнение (2.18) для анизотропной части рассеянного излучения решалось с помощью явной схемы Фридрихса с учетом 256 слагаемых в разложении (2.7), затем решение краевой задачи для уравнения (2.39) решалось методом дискретных ординат с учетом 64 слагаемых (явная схема Фридрихса для нестационарного уравнения переноса [87], счет на установление). Точное решение задачи вычислялось с помощью алгоритма DOM [34]. Среднеквадратичная по-

грешность Δ конечно-разностного решения по сравнению с точным оценивалась интегрированием по задней полусфере. Результаты вычисления в зависимости от времени счета (в единицах безразмерного времени, нормированного на оптическую толщину) для тейлоровских аппроксимаций различного порядка (2.17) приведены на рис. 2.48. Номера приближений указаны цифрами при соответствующих кривых.

Глава 3

Задачи глубинного радиозондирования слоистых ледяных покровов небесных тел.

3.1 Происхождение и физико-химическое строение марсианских полярных льдов.

Марсианские полярные льды в течение последних десятилетий привлекают внимание большого количества исследователей. Стратиграфия слоистых полярных отложений Марса и ее физическое строение и химический состав несет в себе информацию об истории климата планеты за последние несколько миллионов марсианских лет. Долгопериодные вариации климата, в свою очередь, обусловлены вековыми возмущениями орбиты Марса. Кроме того, марсианские полярные льды рассматриваются как один из возможных источников водоснабжения будущих марсианских экспедиций. По этим причинам в настоящее время актуальны исследования внутреннего строения марсианских полярных льдов.

Марсианские полярные области удобны для глубинного радиозондирования по ряду причин. Исследования топографии поверхности средствами лазерной альтиметрии [205] показали, что полярные льды, особенно на северном полюсе, обладают весьма гладкой поверхностью [206], создающей минимальные боковые отражения. Полярные льды также обладают низким затуханием, что позволяет

достичь значительной глубины зондирования, в том числе на относительно высоких частотах. При больших солнечных зенитных углах, типичных для полярных областей, плотность ионосферной плазмы там невелика, и соответственно малы поглощение волн в ионосфере и вносимые ей дисперсионные искажения фазы сигналов. Кроме того, полярные орбиты космических аппаратов, несущих орбитальные радиолокаторы, обеспечивают преимущественное покрытие полярных областей сетью измерений. По этим причинам, значительная часть теоретических исследований и большинство опубликованных экспериментальных данных по глубинному радиозондированию Марса относятся к его полярным областям.

Марсианские полюса фактически являются холодными ловушками для различных летучих веществ, присутствующих в марсианской атмосфере. Скорость седиментации и физико-химический состав отложений определяется климатическими факторами, имеющими место на планете в целом. Исследование стратиграфии слоистых полярных отложений могло бы дать важную информацию об истории и эволюции климата планеты, особенно в части ее водного режима.

Множественные данные наблюдений показывают, что водяной лед является основным среди летучих веществ, входящих в состав северных и южных марсианских полярных отложений. Одними из наиболее известных являются следующие результаты: высокое давление водяного пара над поверхностью полярных льдов в летний период по данным прибора Mars Atmospheric Water Detector [207, 208], температуры, значительно превышающие точку замерзания углекислоты CO_2 [209], теплоинерция [210, 211] в пределах $600 - 2000 \text{ Дж м}^{-2} \text{ с}^{-1/2} \text{ К}^{-1}$. Наблюдения альбедо в видимом свете [212] и низкие оценки средней плотности северных полярных отложений [213, 214] свидетельствуют в пользу значительного содержания льда в полярных отложениях. Низкая отражательная способность северных полярных льдов в диапазоне 3.5 см [215] указывает на весьма однородную структуру верхних слоев северного полярного щита, какой мог бы обладать практически чистый лед.

Как северный, так и южный полярные ледяные щиты Марса характеризуются сложной слоистой структурой. Многочисленные слои можно наблюдать на снимках склонов и бортов марсианских канав [216]. В первом приближении, они практически горизонтальны и недеформированы. По результатам корреля-

ционной обработки изображений поверхности высокого разрешения [217] было показано, что слои почти горизонтальны (угол наклона к горизонтали порядка 0.5 градуса). Для северных полярных льдов была сделана оценка толщин отдельных слоев в пределах 14 - 45 м [218].

Большое количество публикаций посвящено взаимосвязи марсианского климата и стратиграфии марсианских полярных льдов. Обзор их можно найти, например, в [216].

Климатические модели предполагают циклически повторяющиеся периоды накопления и возгонки летучих веществ (см. обзор [213]). В течение периода накопления, некоторая часть летучих веществ покидает поверхностный слой отложений. В результате образуется пыльная корка, предотвращающая дальнейшее испарение льда. Толщина корки, по оценкам работы [213], составляет порядка 1 м. Циклическое повторение этого процесса ведет к чередованию ледяных и пыльных слоев.

Численное моделирование поверхностного слоя комет [219], однако, показало, что уже пыльный слой толщиной в несколько миллиметров на поверхности льда способен полностью прекратить дальнейшее испарение в условиях, близких к имеющим место на полюсах Марса. Таким образом, предложенное в [213] значение толщины пыльного слоя 1 м может оказаться сильно завышенным. Однако, изображения высокого разрешения [220] показывают развитый рельеф поверхности северных марсианских полярных льдов на метровых масштабах. Физические процессы, ответственные за формирование такого рельефа, могут быть связаны с перемешиванием вещества верхнего слоя льда на этих масштабах. При этом вероятно образование обогащенного пылью слоя метровой толщины. По этим причинам, значение толщины пыльного слоя $l_2 = 1$ м принято для дальнейших расчетов.

Мы рассмотрим модель полярных льдов в виде пачки чередующихся слоев двух типов, условно называемых "ледяными" и "пыльными" соответственно.

Толщина каждого отдельного ледяного слоя зависит от длительности соответствующего периода накопления. Теоретические расчеты толщин отдельных слоев на основе климатических моделей опубликованы в работе [221].

Под действием гравитации может происходить пластическая деформация (течение) вещества. Оценки скорости течения различаются от типичных вели-

чин порядка 1 мм/марсианский год [222] до отсутствия существенного течения вообще [223]. Если значительное течение льда имеет место [216], оно должно происходить преимущественно в основании ледяного щита. Следовательно, это течение может привести к систематической зависимости средней толщины слоев от глубины. Мы, однако, не будем принимать во внимание этот эффект.

Высота рельефа северных полярных льдов оценивается в 3 км на основе топографических данных MOLA. Изостатический прогиб марсианской коры согласно оценкам [224] должен составлять не менее одного километра. Работа [222], однако, содержит выводы об отсутствии значительной изостатической компенсации. Тем самым, для полной толщины северного полярного щита получается оценка 3-4 км.

Значительная часть поверхности северных полярных льдов является весьма гладкой [206]. Большинство ее относится к геологическому подразделению *Ap1*, для которого характерны очень малые региональные уклоны на километровом масштабе. Снимки высокого разрешения, доступные на момент публикации работы [216], показывают отсутствие рельефа и на меньших масштабах. По результатам экстраполяции топографических данных MOLA в область меньших масштабов, рельеф поверхности неспособен создать заметные боковые отражения в частотном диапазоне радиолокатора MARSIS [225] даже с учетом ненадежности процедур экстраполяции. Хотя авторы указывают на возможность недооценки мелкомасштабного рельефа по данным такой экстраполяции, эта недооценка скорее всего не превышает одного порядка величины. Боковые отражения сигналов радиолокатора MARSIS могут считаться незначительными даже с учетом такой недооценки.

По этим причинам, будем считать поверхность полярных отложений гладкой, плоской и горизонтальной. Некоторые оценки боковых отражений от рельефа поверхности [145, 226] приводятся в специальном разделе.

Физический и химический состав полярных марсианских отложений относительно мало исследован. Выше указаны некоторые данные, свидетельствующие о высоком среднем содержании водяного льда. Ключевым параметром, регулирующим состав отложений, является массовое отношение смеси воды и минеральной пыли, оседающих на поверхность ледяных щитов. В работах, цитируемых в [213], предлагаются значения от 16:1 до 1:15. В работе [227] массовая

доля пыли считается малой (15%). Мы будем считать, что ледяные слои состоят из водяного льда, содержащего некоторое количество минеральной пыли. С другой стороны, мы полагаем, что пыльные слои в основном состоят из минеральной пыли. Вероятно, они имеют пористую структуру, которая может быть заполнена льдом. Возможно также, что слоистые вариации альбедо, видимые на снимках, обусловлены весьма малыми изменениями состава вещества, так что его электрические свойства практически не меняются от слоя к слою.

Химические соли также вероятно присутствуют в марсианских грунтах [228, 229], так что они могут переноситься с пылью и накапливаться в полярных отложениях. Включения твердых и жидких растворов этих солей, типичные для земных морских льдов, могут вызывать дополнительное ослабление радиоволн в толще вещества. Количественная оценка эффекта затруднительна в силу недостаточности данных, доступных на текущий момент. Однако, моделирование температурного режима полярных щитов [230] показывает, что температура во всей толще значительно ниже эвтектических точек [231, 229] водных растворов всех солей, вероятно присутствующих в химическом составе полярных льдов, так что присутствие этих растворов в жидкой фазе маловероятно. Кроме того, в результате химических реакций часть этих солей перешла бы в нерастворимые формы.

Электрические свойства смеси двух веществ могут быть получены из соответствующих моделей [232], если известны электрические свойства компонент смеси (лед и пыль). Диэлектрические параметры чистого льда известны относительно хорошо в широком диапазоне частот [233, 234, 235]. Свойства нелетучих материалов, входящих в состав полярных отложений, определены с гораздо меньшей точностью. В некоторых работах [234, 235] принято, что эти свойства близки к свойствам лунного грунта. Диэлектрическая постоянная твердой компоненты лунного грунта находится в пределах от 5.1 до 11.6 [236]. Для земных минералов характерен более широкий разброс значений диэлектрической проницаемости 3.96-15.6 [237]. Тангенс угла потерь всех образцов лунного грунта, исследованных в работе [236], оказывается порядка 0.005. Таким образом, диэлектрическая проницаемость пыльных слоев определяется неизвестной диэлектрической проницаемостью минеральной фракции, и неизвестным содержанием льда в их пористых структурах.

Тем самым, действительная часть диэлектрической проницаемости пыльных слоев вероятно лежит в пределах от диэлектрической проницаемости чистого льда (3.15) до наибольшей величины, упомянутой в обсуждении (около 16).

Ледяные слои должны иметь свойства, близкие к свойствам чистого льда, если содержание пыли мало. Полагая типичную плотность пыли 3100 кг м^{-3} [236], получим, что даже для наибольших значений массового отношения смеси пыли и льда, согласующихся с данными наблюдений [144] (порядка 50 %) соответствующая объемная доля пыли κ составит около 15 %, т.е. значительно меньше единицы.

В первом приближении, действительная часть диэлектрической проницаемости ледяных слоев на частотах марсианских орбитальных радиолокаторов MARSIS и SHARAD может быть принята равной 3.15, также как для чистого льда. Ослабление волн в загрязненном льду при низких температурах практически определяется содержанием примесей в нем [234]. Ослабление, вносимое ледяной компонентой, при температурах ниже 200 К незначительно по сравнению с влиянием примесей. Для концентраций примесей более 1% и 10%, поглощение, вносимое ледяной фракцией, пренебрежимо мало при температурах ниже 210 К и 230 К соответственно [234].

Моделирование температурных профилей марсианских льдов [230] показывает, что при температура растет с глубиной от 150-170 К на поверхности до 220 К на глубине 3 км. Следовательно, вывод работы [234] о преимущественном влиянии примесей скорее всего справедлив для марсианских льдов, если для них выполняется формула смеси Максвелла-Гарнетта [232]. Относительно слабая температурная зависимость электрических свойств минеральной фракции также была отмечена в работе [234], но в пределах точности оценок, сделанной в этой работе, она пренебрежимо мала.

Для малого содержания примесей, ослабление согласно работе [234] пропорционально $\kappa \tan \delta_s$, где κ и $\tan \delta_s$ – объемная доля примеси и тангенс угла потерь в веществе примеси, соответственно. Используя формулу Максвелла-Гарнетта [232] для диэлектрической проницаемости смеси льда и пыли, также использованную в [234], в линейном приближении по $\kappa \tan \delta_s$ получим формулу для

тангенса угла потерь смеси, пригодную для малых κ и $\tan \delta_s$:

$$\tan \delta \approx 3 \varepsilon' \frac{2\varepsilon'_s + \varepsilon'}{(2\varepsilon' + \varepsilon'_s)^2} \kappa \tan \delta_s, \quad (3.1)$$

где ε' и ε'_s действительные части диэлектрической проницаемости льда и примесей, соответственно, $\tan \delta$ – тангенс потерь смеси в целом. В работе [233] дана приближенная формула коэффициента затухания электромагнитных волн во льду

$$\alpha \sim (\omega \sqrt{\varepsilon'}/2c) \tan \delta. \quad (3.2)$$

Подставляя в эту формулу указанные выше значения ε' и $\tan \delta$ из формулы (3.1), получим, что на частоте порядка 10 МГц полное ослабление волны на 3 км толщины равно нескольким единицам Дб.

Также возможны и другие источники поглощения радиоволн в загрязненном льду. Некоторые данные лабораторных измерений показывают, что диэлектрическая проницаемость загрязненного льда не подчиняется формуле смеси Максвелла-Гарнетта [238]. Это может приводить к весьма большим значениям тангенса угла потерь, как сообщается в цитированной работе. Применяя развитую там методику экстраполяции результатов измерений к заданным значениям частоты и температуры, можно показать, что на рабочих частотах радиолокатора MARSIS и температурах льда, найденных численным моделированием [230], материалы, исследованные в работе [238] имели бы $\varepsilon'' \approx 0.1$ или более. С другой стороны, по данным этих измерений значения ε' на частотах измерений и рабочих частотах MARSIS различаются не слишком сильно.

Соли также могут вызывать поглощение радиоволн во льду. Надежная модель для предсказания эффекта, однако, в настоящее время отсутствует. Обзор некоторых результатов по поглощению радиолокационных сигналов в соленых льдах различного типа приведен в работе [235]. По этим причинам, в работе [145] принято, что поглощение в марсианских полярных льдах в действительности может значительно превосходить оценки по формуле (3.1) и эти высокие значения учтены при численном моделировании. Оценки по формулам (3.1, 3.2) можно рассматривать как нижние оценки соответствующих величин.

Радиационные потери в результате объемного рассеяния, согласно оценкам, сделанным в работе [239], невелики, по крайней мере для нижних рабочих диа-

пазонов локатора MARSIS. Таким образом, в работах [145, 241, 242] эффекты объемного рассеяния не принимались в рассмотрение.

В указанных работах, действительная часть диэлектрической проницаемости ледяных слоев полагалась равной 3.15 также как для чистого льда, в то время как для пыльных слоев она варьировалась в пределах от 3.0 до 16.0. Следует полагать, что все реально возможные значения этой величины находятся в указанных пределах. Тангенс угла потерь среды также варьировался от нуля до некоторого значения. Однако, отношение тангенсов угла потерь пыльных и ледяных слоев сохранялось во всех расчетах равным 10, поскольку потери в слоях обоих типов обусловлены присутствием одних и тех же примесей в различных концентрациях.

Электрические свойства грунтов и горных пород, подстилающих полярные отложения, также могут зависеть от их температурного режима. Как действительная, так и мнимая части диэлектрической проницаемости могут изменяться от низких значений, типичных для сухих и глубоко замороженных реголитов, до высоких, характеризующих воду или растворы солей в жидкой фазе. Тройные водные растворы солей с эвтектическими точками значительно ниже 225 К [229] могут присутствовать в жидкой фазе при температурах, возможных в области подошвы полярных отложений [230]. Таким образом, электрические свойства подстилающей поверхности также весьма неопределены. Для ориентировочных оценок можно использовать электрические свойства типичных земных грунтов и жидкостей [240] (см. таблицу 3.1). Комплексная диэлектрическая проницаемость проводящей среды вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}, \quad (3.3)$$

где ε' – действительная часть проницаемости, σ – проводимость среды, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота, и ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Таблица 3.1: Электрические свойства типичных земных сред [240]

Тип среды	σ , С/м	ε'
Морская вода	4.000	80
Озерная вода	0.004	80
Влажный грунт	0.400	12
Сухой грунт	0.040	8

3.2 Модель марсианских слоистых полярных льдов и определение коэффициентов уравнения переноса.

Макроскопическими параметрами, характеризующими среду распространения излучения в теории переноса, являются объемный коэффициент ослабления κ , альбеда однократного рассеяния λ , и эффективная групповая скорость волн в среде c . Эти параметры должны быть определены для конкретной модели среды на основе ее физических свойств и геометрических параметров ее структуры.

Рассмотрим модель марсианских полярных отложений в виде вещества типа 1 (лед) с внедренными в нее тонкими слоями вещества типа 2 (пыль). Обозначения электродинамических параметров обоих веществ (комплексная диэлектрическая проницаемость, тангенс потерь и т.д.) будем снабжать индексами '1' и '2', соответственно.

Толщина пыльных слоев, как предполагалось в указанных работах, мала по сравнению с длиной волнового пакета сжатого радиолокационного импульса $\delta_{T2} = 1/Bn'_2$, где B – полоса ЛЧМ сигнала, $n_2 = n'_2 + in''_2$ – коэффициент преломления пыльных слоев. В работах [241, 242] это положение подтверждено численными расчетами. Вследствие этого, коэффициенты отражения и пропускания каждого отдельно взятого слоя могут считаться постоянными в пределах ширины полосы ЛЧМ сигнала. Толщина всех пыльных слоев полагается одинаковой и равной l_2 . Толщина ледяных слоев, напротив, считается в среднем большой по сравнению с $\delta_{T1} = 1/Bn_1$ и случайно распределенной со стандартным отклонением, также большим по сравнению с δ_{T1} . Согласно этим предположениям, рассеяние на пыльных слоях происходит взаимно некогерентно и независимо друг от друга. Покажем это.

3.2.1 О справедливости теории переноса излучения в одномерной слоистой среде.

Как показано в [1], на расстояниях, не превышающих длину локализации, и соответствующих временах, для описания волновых полей в случайной одномерной среде может приближенно использоваться двухпотоковое уравнение переноса излучения [1]. Убедимся в независимости рассеяния волн отдельными слоями среды, требуемого для обоснования применимости теории переноса.

Оценим вклад эффектов когерентного перерассеяния между слоями среды, нарушающих справедливость приближения независимого рассеяния отдельными слоями. Рассмотрим однократное перерассеяние волны между двумя соседними слоями. Изобразим соответствующую диаграмму рассеяния. Для этого возьмем какую либо лестничную диаграмму, и введем в одну из ее ветвей однократное переотражение между двумя соседними слоями. Поскольку для каждой подобной диаграммы всегда существует симметричная, их следует рассматривать парами. При этом соответствующий вклад такой пары диаграмм в интенсивность рассеянного поля будет вещественным.

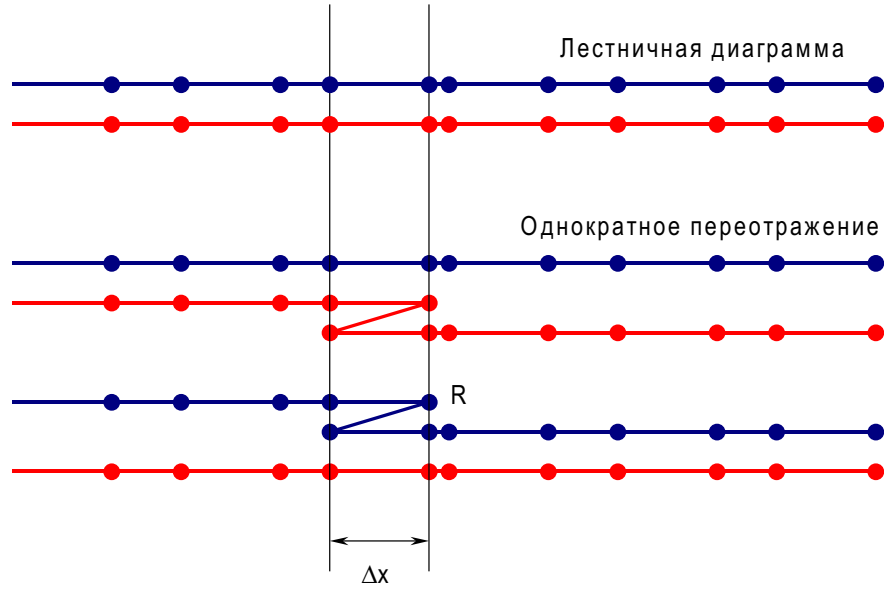


Рис. 3.1: К обоснованию теории переноса в одномерной слоистой среде. Диаграммы рассеяния.

Интенсивность излучения, рассеянного по такой диаграмме, будет равна

$$I_L R^4 \exp\left(2i \frac{\omega}{c} n \Delta x\right), \quad (3.4)$$

где I_L – интенсивность рассеяния по исходной лестничной диаграмме, R – амплитудный коэффициент отражения от границы слоя, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота волны, c – скорость света, n – коэффициент преломления среды между двумя отражающими границами, Δx – расстояние между этими двумя границами. Общий вклад пары диаграмм (рис. 3.2.1) соответственно равен

$$I_1 = I_L R^4 2 \cos\left(2 \frac{\omega}{c} n \Delta x\right) \quad (3.5)$$

Для грубой оценки примем входящий в формулу (3.5) коэффициент преломления n постоянным и равным характерному значению для чистого льда $n \approx 1.65$. Тогда, усредняя записанную здесь интенсивность (3.5) по статистическому распределению случайной толщины слоя Δx , будем иметь искомую среднюю ин-

тенсивность рассеяния по рассмотренной паре диаграмм. В частности, приближенно принимая это распределение нормальным

$$p(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.6)$$

получим оценку интенсивности

$$I_1 = 2R^4 \exp\left(-\frac{2n^2\omega^2\sigma^2}{c^2}\right) \cos\left(-\frac{2n\omega \langle \Delta x \rangle}{c}\right) \leq 2R^4 \exp\left(-\frac{2n^2\omega^2\sigma^2}{c^2}\right), \quad (3.7)$$

где $\langle \Delta x \rangle$ и σ – среднее значение и дисперсия толщины слоя, соответственно. Наблюдаемые толщины ледяных слоев для северного и южного полярных щитов Марса 30 ± 15 и 100 ± 20 м, соответственно. При этих значениях для рабочих частот радиолокаторов MARSIS и SHARAD согласно (3.7) получим следующие оценки относительного вклада рассмотренных здесь процессов рассеяния I_1/I_L

Таблица 3.2: Оценки вклада однократного когерентного перерассеяния между соседними слоями среды.

частота, МГц	I_1/I_L , север	I_1/I_L , юг	$I_1/I_L l/d$, север	$I_1/I_L l/d$, юг
1.8	0.266	0.055	44.33	2.76
3	0.0073	$9.4 \cdot 10^{-5}$	1.22	0.047
4	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$4.06 \cdot 10^{-8}$	0.015	$2.03 \cdot 10^{-6}$
5	$3.4 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-12}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-11}$
20	$\sim 10^{-108}$	$\sim 10^{-192}$	$\sim 10^{-106}$	$\sim 10^{-191}$

При конечном времени наблюдения, соответствующего заданному расстоянию пробега импульса в среде, число возможных диаграмм рассмотренного типа фактически ограничено величиной порядка l/d , где l и d – расстояние пробега в среде и средняя толщина слоя, соответственно. Тем самым, суммарный вклад диаграмм рассмотренного типа оказывается равным $I_1/I_L l/d$ (также приведены в таблице 3.2). Можно видеть, что по крайней мере для верхних рабочих диапазонов действующих локаторов указанный вклад, нарушающий справедливость приближения независимого рассеяния слоями в одномерной среде, может считаться малым. Аналогичным образом, может быть оценено влияние других диаграмм когерентного перерассеяния между слоями. Таким образом, макроскопические параметры уравнения переноса излучения в среде рассматриваемого типа могут вычисляться через индивидуальные характеристики рассеяния

плоского слоя между двумя полупространствами [243]. Соответствующие численные результаты приведены в работах [241, 242].

Практически, результат непосредственного численного решения уравнений электродинамики слоистой среды для рассмотренного случая [145] удовлетворительно согласуется с асимптотическими решениями уравнения переноса излучения [242, 241].

В сейсмологии встречается приближенное определение параметров теории переноса λ и κ на основе формулы О’Doherty-Anstey [244]. В этой работе были приняты более сильные ограничения, чем в работе [241], что приводит к переоценке интенсивности рассеяния на высоких частотах. Длина свободного пробега определяется как

$$l_s = \frac{\langle l_1 \rangle}{8 k_2^2 l_2^2 \langle |R_j^2| \rangle}, \quad (3.8)$$

где $\langle |R_j^2| \rangle$ – средний квадрат коэффициента отражения от границы раздела слоя и среды, N/L – среднее количество слоев на единицу глубины среды. Средний квадрат коэффициента отражения от границы $\langle |R_j^2| \rangle$ определяется по формуле

$$\langle |R_j^2| \rangle = \left\langle \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right\rangle \quad (3.9)$$

где $Z_{1,2} = \sqrt{n_1/n_2}$ – электрический импеданс для нормального падения. Таким образом, можно определить коэффициенты объемного поглощения и рассеяния [242] $\kappa_a = l_a^{-1}$ и $\kappa_s = l_s^{-1}$, а также альбедо λ и коэффициент ослабления κ

$$\kappa = \kappa_a + \kappa_s, \quad (3.10)$$

$$\lambda = \frac{\kappa_s}{\kappa}. \quad (3.11)$$

3.3 Уравнение переноса излучения в одномерной среде (двухпотокное приближение).

3.3.1 Полубесконечная среда.

Рассмотрим падение на поверхность полубесконечной одномерной слоистой среды импульса излучения с плоским фронтом, параллельным границе.

Как известно [203], в одномерных и двумерных случайных средах в результате когерентных эффектов при рассеянии на достаточно больших расстояниях неизбежно наступает локализация. Однако, на расстояниях, не превышающих длину локализации [203], распространение излучения удовлетворительно описывается теорией переноса. Поэтому будем считать, что распространение импульса в среде подчиняется одномерному нестационарному уравнению переноса [203, 88]. Если не требуется отдельный учет когерентной составляющей излучения в импульсе, ослабленное в среде проходящее излучение и рассеянное вперед излучение в одномерной модели среды неразличимы. Таким образом, слагаемое в уравнении переноса, соответствующее рассеянию вперед, может быть обращено в нуль перенормировкой коэффициентов уравнения:

$$\frac{\partial I^+(\theta, \tau)}{\partial \theta} + \frac{\partial I^+(\theta, \tau)}{\partial \tau} = -I^+(\theta, \tau) + \lambda I^-(\theta, \tau), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial I^-(\theta, \tau)}{\partial \theta} - \frac{\partial I^-(\theta, \tau)}{\partial \tau} = -I^-(\theta, \tau) + \lambda I^+(\theta, \tau), \quad (3.13)$$

где $d\tau = \kappa dz$ – оптическая толщина, $d\theta = \kappa c dt$ – нормированное безразмерное время, z – глубина в среде, κ – объемный коэффициент ослабления, λ – альбе-до однократного рассеяния, I^+ – поток излучения в прямом (положительном) направлении оси z , I^- – поток излучения в обратном (отрицательном) направлении оси z , и c – скорость распространения излучения в среде. Будем считать среду однородной, то есть ее оптические параметры – постоянными $\kappa = const$, $c = const$, $\lambda = const$. Начальные условия для обоих потоков

$$I^\pm(0, \tau) = 0. \quad (3.14)$$

На бесконечной глубине среды требуется ограниченность решения

$$I^\pm(\theta, \infty) < \infty. \quad (3.15)$$

В момент времени $t = t_0$ на границу среды падает короткий импульс излучения. Пренебрегая отражением от поверхности среды,

$$I^+(\theta, 0) = \delta(t - t_0) = \kappa c \delta(\theta - \theta_0), \quad (3.16)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Задачи с отражающими границами будут рассмотрены далее. Применяя преобразование Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-s\theta} d\theta \quad (3.17)$$

по времени θ к системе уравнений (3.12,3.13) с начальными (3.14) и граничными условиями (3.15,3.16), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для лапласовских образов $I^{\pm}$:

$$(1+s) \tilde{I}^+(s, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{I}^+(s, \tau) = \lambda \tilde{I}^-(s, \tau), \quad (3.18)$$

$$(1+s) \tilde{I}^-(s, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{I}^-(s, \tau) = \lambda \tilde{I}^+(s, \tau), \quad (3.19)$$

$$\tilde{I}^+(s, 0) = \kappa c e^{-s\theta_0}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{I}^{\pm}(s, \infty) < \infty. \quad (3.21)$$

Момент времени прибытия импульса на границу среды θ_0 без ограничения общности полагаем равным нулю. Решение уравнений (3.18-3.19), удовлетворяющее граничным условиям, (3.20-3.21), есть:

$$\tilde{I}^+(s, \tau) = \kappa c e^{-Q\tau}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{I}^-(s, \tau) = \kappa c \frac{\lambda}{1+s+Q} e^{-Q\tau}, \quad (3.23)$$

где

$$Q = \sqrt{1 - \lambda^2 + 2s + s^2}. \quad (3.24)$$

Выходящее через границу среды излучение $I^-(\theta, 0)$, может быть найдено обращением преобразования Лапласа:

$$I^-(\theta, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{I}^-(s, \tau) e^{s\theta} ds \quad (3.25)$$

где интегрирование ведется по прямой $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, лежащей в комплексной плоскости правее всех особых точек решения $\tilde{I}(s, \tau)$ как показано на рис. 3.2.

Единственными особыми точками решения являются его точки ветвления $s = -1 \pm \lambda$, так что контур можно деформировать, выделяя петлю вокруг разреза между точками ветвления, как показано на рис. 3.2. Квадратный корень Q

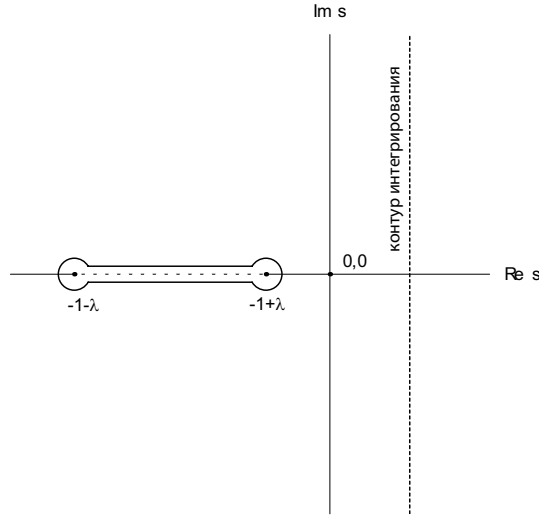


Рис. 3.2: Контур интегрирования обратного преобразования Лапласа.

принимает противоположные знаки на берегах разреза. Аналитически вычислить интеграл невозможно, но можно оценить асимптотику решения на малых и больших временах:

$$\oint \tilde{I}^-(s, 0) e^{s\theta} ds \approx \kappa c \frac{4}{3} \theta \lambda^2, \quad \theta \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

$$\oint \tilde{I}^-(s, 0) e^{s\theta} ds \approx \kappa c \frac{\theta^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-(1-\lambda)\theta}, \quad \theta \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Необходимо иметь в виду, что в случае присутствия в импульсе когерентной компоненты излучения решение (3.26) на малых временах неправомерно, поскольку когерентной компонентой изначально пренебрегли в исходных уравнениях. Сшивая асимптотики, можно получить выражение

$$I^-(\theta, 0) \approx \kappa c \frac{\theta e^{(-1+\lambda)\theta}}{\frac{3}{4\lambda^2} + \sqrt{2\pi\lambda} \theta^{\frac{5}{2}}} \quad (3.28)$$

стремящееся к (3.26) и (3.27) на малых и больших временах, соответственно. В работе [244] получено решение для бесконечной среды, отличающееся от решения для полубесконечной среды показателем степени t .

3.3.2 Среда с отражающей границей.

Рассмотрим плоскопараллельный слой среды толщины τ_0 с зеркально отражающей задней границей с коэффициентом отражения R по интенсивности.

Интенсивности потоков излучения $I^\pm$ подчиняются уравнениям (3.12-3.13) с граничным условием (3.16) на передней границе и начальным условием (3.14). Требование ограниченности решения на бесконечности (3.15) заменяется условием отражения

$$I^-(\theta, \tau_0) = RI^+(\theta, \tau_0), \quad (3.29)$$

на задней границе.

Соответственно, $\tilde{I}^\pm(s, \tau_0)$ удовлетворяет системе уравнений (3.18, 3.19, 3.20) и

$$\tilde{I}^-(s, \tau_0) = R\tilde{I}^+(s, \tau_0), \quad (3.30)$$

Интересующее нас решение, удовлетворяющее поставленным граничным условиям, на передней границе слоя равно

$$\tilde{I}^-(s, 0) = \kappa c \frac{-R (Q + e^{2Q\tau_0} (Q - \sigma) + \sigma) + \lambda - \lambda e^{2Q\tau_0}}{\sigma - Q - R\lambda - (Q + \sigma - R\lambda) e^{2Q\tau_0}}, \quad (3.31)$$

где $\sigma = s + 1$ и Q определяется формулой (3.24). В пределе $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $R = 0$ в (3.31), получается решение для полубесконечной среды (3.23). Можно показать, что выражение (3.31) не зависит от знака $Q \rightarrow (-Q)$, следовательно, оно не имеет точек ветвления. Однако, это выражение имеет полюса, удовлетворяющие трансцендентному уравнению

$$\exp(2Q\tau_0) = \frac{\sigma - Q - R\lambda}{\sigma + Q - R\lambda}. \quad (3.32)$$

Все эти полюса лежат в левой полуплоскости $Res < 0$, как показано на рис. 3.3. Полюса $s_{\pm n}$ асимптотически группируются вблизи двух экспоненциальных ветвей

$$Im s_{\pm n} \approx \pm \frac{R\lambda}{2} \exp(2\tau_0 (-1 - Re s_{\pm n})). \quad (3.33)$$

Полюс с наименьшей по модулю отрицательной действительной частью s_0 лежит на действительной оси. Деформацией контура интегрирования в (3.25) можно перенести его левее всех полюсов. Таким образом, асимптотика поведения $I^-(\theta, 0)$ на больших временах $\theta \gg \tau_0$ определяется вычетом (3.25) в главном полюсе s_0

$$I^-(\theta, 0) \approx \kappa c Res [e^{s\theta} I^-(s, 0)] \Big|_{s=s_0}. \quad (3.34)$$

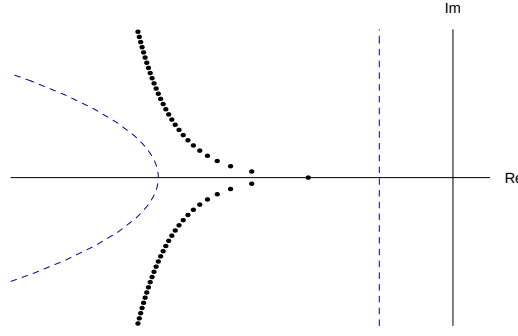


Рис. 3.3: Полюса выражения (3.31).

Можно показать, что эта асимптотика справедлива для достаточно больших времен $\theta > 2\tau_0$, т.е. после того, как импульс отразится от задней границы, пройдет среду в обратном направлении и покинет ее. На более коротких временах $\theta < 2\tau_0$ справедливо решение для полубесконечной среды (3.22, 3.23). Для достаточно толстых слоев ($\tau_0 \approx 1$ и более) полюс s_0 стремится к $-1 - \lambda$. В этом случае, решение также приближается к (3.22, 3.23).

Сходимость ряда вычетов может быть установлена непосредственно. При $|s| \rightarrow \infty$, уравнение (3.32) асимптотически стремится к

$$e^{2\tau_0\sigma} \approx -\frac{R\lambda}{2\sigma} \quad (3.35)$$

где $\sigma = s + 1$. Подставляя $\sigma = x + iy$, получаем уравнение для модуля

$$e^{2\tau_0x} \approx \frac{R\lambda}{2|x + iy|} \quad (3.36)$$

Формула (3.33) выражает приближенное решение (3.36) для больших $|y|$. Используя (3.33) и (3.36), можно показать, что вычеты $\rho_n = \text{Res}[I^-(s_n, 0)]$ выражения (3.31) в полюсах s_n при больших $|s|$ асимптотически приближаются к

$$|\rho_n| \propto \left| e^{s_n\theta} \frac{s_n}{\lambda\tau_0} \right|. \quad (3.37)$$

Таким образом, сумма ряда вычетов с точностью до постоянного множителя мажорируется выражением

$$\hat{\Sigma} = \sum_n |s_n e^{s_n\theta}|. \quad (3.38)$$

Подставляя (3.33) в (3.38), сходимость ряда $\theta > 2\tau_0$ можно установить по признаку Д'Аламбера.

3.3.3 Среда с двумя отражающими границами.

Рассмотрим слой оптической толщины τ_0 с коэффициентами отражения по интенсивности R_1 и R_2 на передней и задней границах, соответственно. Коэффициенты пропускания равны $T_1 = 1 - R_1$ и $T_2 = 1 - R_2$, независимо от направления потока. В момент времени $\theta = 0$, на внешнюю границу падает импульс излучения. Выделим нерассеянную часть излучения из общего решения. Распространяющийся в среде вперед и назад δ -импульс, отражающийся от обеих границ, есть

$$I_0^+(\theta, \tau) = T_1(R_1 R_2)^n e^{-\tau - 2n\tau_0} \delta(\tau + 2n\tau_0 - \theta), \quad 2n\tau_0 < \theta < (2n+1)\tau_0; \quad 0 \text{ otherwise}; \quad (3.39)$$

$$I_0^-(\theta, \tau) = T_1 R_2 (R_1 R_2)^n e^{\tau - 2(n+1)\tau_0} \delta(\tau - 2(n+1)\tau_0 + \theta), \quad (2n+1)\tau_0 < \theta < 2(n+1)\tau_0; \quad (3.40)$$

0 otherwise .

Начальное условие для $I^\pm(\theta, \tau)$ определяется формулой (3.14). Соответствующие неоднородные уравнения для лапласовских образов диффузных потоков излучения $I^\pm$

$$(1+s) \tilde{I}^+(s, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{I}^+(s, \tau) = \lambda \tilde{I}^-(s, \tau) + \lambda \tilde{I}_0^-(s, \tau), \quad (3.41)$$

$$(1+s) \tilde{I}^-(s, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{I}^-(s, \tau) = \lambda \tilde{I}^+(s, \tau) + \lambda \tilde{I}_0^+(s, \tau), \quad (3.42)$$

с граничными условиями

$$\tilde{I}^-(s, \tau_0) = R_2 \tilde{I}^+(s, \tau_0), \quad (3.43)$$

$$\tilde{I}^+(s, 0) = R_1 \tilde{I}^-(s, 0). \quad (3.44)$$

Лапласовские образы (3.39) и (3.40) есть

$$\tilde{I}_0^+(s, \tau) = \frac{T_1 e^{-\sigma \tau}}{1 - R_1 R_2 e^{-2\sigma \tau_0}}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{I}_0^-(s, \tau) = \frac{R_2 T_1 e^{\sigma(\tau - \tau_0)}}{1 - R_1 R_2 e^{-2\sigma \tau_0}}, \quad (3.46)$$

где $\sigma = 1 + s$. Решение этих уравнений на внешней границе

$$\tilde{I}^-(s, 0) =$$

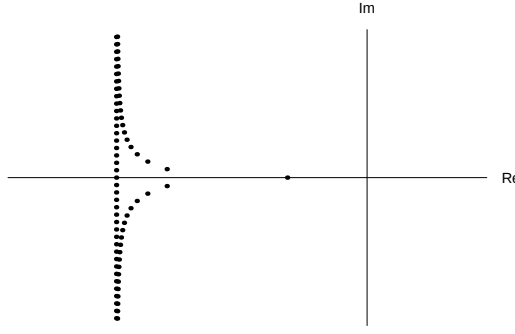


Рис. 3.4: Полюса выражения (3.47).

$$\frac{e^{\sigma \tau_0} (1 + e^{Q \tau_0}) T_1 ((1 + e^{Q \tau_0}) (-1 + e^{\sigma \tau_0}) Q R_2 + (-1 + e^{Q \tau_0}) (e^{\sigma \tau_0} (-R_2 \sigma + \lambda) - R_2 \sigma + R_2^2 \lambda))}{(e^{2 \sigma \tau_0} - R_1 R_2) (-((1 + e^{2 Q \tau_0}) Q (-1 + R_1 R_2)) + (-1 + e^{2 Q \tau_0}) (\sigma + R_1 R_2 \sigma - (R_1 + R_2) \lambda))}. \quad (3.47)$$

Полюса этого решения показаны на рис. 3.4. На больших временах $\theta > 2\tau_0$, асимптотическое поведение $I^-(\theta, 0)$ определяется самым правым полюсом (3.47) в комплексной плоскости, который лежит на действительной оси и может быть найден численно. Если τ_0 достаточно велико, решение на больших временах стремится к решению для полубесконечной среды (3.27).

Уравнения (3.41-3.42) также могут быть применены к полубесконечной среде с отражающей границей. Лапласовский образ нерассеянного в среде импульса излучения $I_0^+(\theta, \tau) = (1 - R_1) e^{-\tau} \delta(\theta - \tau)$ is

$$\tilde{I}_0^+(s, \tau) = (1 - R_1) e^{-\sigma \tau}, \quad (3.48)$$

причем $\tilde{I}_0^-(s, \tau) = 0$. Соответствующее решение этих уравнений, удовлетворяющее (3.44) на поверхности и ограниченное на бесконечности, (3.15), записывается в виде

$$\tilde{I}^-(s, 0) = \frac{(1 - R_1)^2 \lambda}{\sigma - R_1 \lambda + Q}. \quad (3.49)$$

Выражение (3.49) имеет единственный полюс $s = (-2 R_1 + (1 + R_1^2) \lambda) / (2 R_1)$, лежащий на ветви $Q < 0$, которую мы не рассматриваем. Таким образом, основной вклад в интеграл (3.25) вносит правый конец разреза (рис. 3.2). Можно показать, что на больших временах решение имеет асимптотику (3.27), не зависящую от коэффициента отражения границы R_1 .

3.3.4 Слой на полубесконечной среде

В общем случае произвольного распределения параметров среды $\lambda(\tau), \kappa(\tau)$, и $c(\tau)$ по толщине слоя уравнения переноса излучения требуется решать численно. Однако, в некоторых случаях на основе априорной информации о строении среды [217] можно принять модель кусочно-постоянных параметров. Рассмотрим простейшую модель среды такого типа. Рассмотрим слой среды, лежащий на полупространстве. Параметры обеих сред будем обозначать римскими цифрами 'I' и 'II' $\lambda_{I,II}, \kappa_{I,II}$, и $c_{I,II}$ для слоя и полупространства, соответственно. В нашей упрощенной модели примем $\kappa_I = \kappa_{II} = \kappa$ и $c_I = c_{II} = c$. В этом случае $\theta_I = \theta_{II} = \theta$. Пусть оптическая толщина слоя равна τ_0 . Интенсивности потоков $I_{I,II}^\pm(\theta, \tau)$ в обеих средах удовлетворяют уравнениям (3.12, 3.13) с параметрами $\lambda = \lambda_I$ и $\lambda = \lambda_{II}$, соответственно. На поверхности $I_I^+(\theta, \tau)$ удовлетворяют граничному условию (3.16). На бесконечной глубине среды $I_{II}^\pm(\theta, \tau)$ ограничены. На границах двух сред I и II должно выполняться условие непрерывности потоков излучения

$$I_I^\pm(\theta, \tau_0) = I_{II}^\pm(\theta, \tau_0). \quad (3.50)$$

Все интенсивности потоков в начальный момент времени равны нулю (3.14). Применяя преобразование Лапласа ко всем указанным уравнениям, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для четырех потоков $\tilde{I}_{I,II}^\pm(s, \tau)$. Интересующее нас решение для отраженного излучения имеет вид

$$\tilde{I}_I^-(\theta, 0) = \quad (3.51)$$

$$\frac{Q_{II} \left((-1 + e^{2Q_I \tau_0}) \sigma (\lambda_I - \lambda_{II}) + (1 + e^{2Q_I \tau_0}) Q_I \lambda_{II} \right) + (-1 + e^{2Q_I \tau_0}) \lambda_I (\sigma^2 - \lambda_{II}^2)}{(1 + e^{2Q_I \tau_0}) Q_I (Q_{II} \sigma + \sigma^2 - \lambda_{II}^2) + (-1 + e^{2Q_I \tau_0}) (\sigma^3 - \sigma \lambda_{II}^2 + Q_{II} (\sigma^2 - \lambda_I \lambda_{II}))},$$

где $\sigma = 1 + s$, $Q_I = \sqrt{\sigma^2 - \lambda_I^2}$, и $Q_{II} = \sqrt{\sigma^2 - \lambda_{II}^2}$. Мы видели, что для бесконечных сред асимптотики решений определяются точками ветвления $I^-(s, \tau)$, в то время как для слоев конечной толщины эти асимптотики определяются его полюсами. Решение (3.51) не зависит от выбора знака ветви $Q_I \rightarrow (-Q_I)$, но имеет точки ветвления $s = -1 \pm \lambda_{II}$ соответствующие точкам ветвления Q_{II} . Разрез проводится между этими двумя точками.

Физически это значит, что на больших по сравнению с временем прохождения слоя временах спад выходящего излучения определяется его распространением

нием в полубесконечной подложке. Таким образом, полюса правее точки ветвления $s = -1 + \lambda_{II}$ должны отсутствовать, в чем нетрудно убедиться численным расчетом. Интегрированием по контуру вокруг разреза 3.2, получается асимптотический вклад точки ветвления $s = -1 + \lambda_{II}$ на больших временах θ :

$$I_I^-(\theta, 0) = \frac{\kappa c \theta^{-\frac{3}{2}} e^{(-1+\lambda_{II})\theta} (\lambda_I + \lambda_{II})}{\sqrt{2\pi\lambda_{II}} (\lambda_I + \lambda_{II} \cosh(2\tau_0 \Lambda) + \Lambda \sinh(2\tau_0 \Lambda))}, \quad (3.52)$$

где $\Lambda = \sqrt{-\lambda_I^2 + \lambda_{II}^2}$. На временах, не превышающих $\theta < 2\tau_0$, решение приближается к асимптотическому решению для полубесконечной среды типа I.

3.4 Модель радиационного переноса в двумерной и трехмерной плоскостой среде.

Рассмотрим двумерную плоскостой модель среды, которая применялась для исследования подобных задач в сейсмологии [245]. Нестационарное уравнение переноса излучения записывается в виде [246]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} = j - \kappa I, \quad (3.53)$$

где c – скорость распространения волн в среде, $I = I(\mathbf{r}, \phi)$ – угловое распределение интенсивности излучения, t – время, s – расстояние вдоль траектории распространения излучения, κ – объемный коэффициент ослабления, j – интеграл рассеяния, в случае двумерной среды равный

$$j(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(\phi') g(\phi, \phi') d\phi'. \quad (3.54)$$

Среда рассматриваемого типа характеризуется индикатрисой рассеяния специального вида

$$g(\phi, \phi') \propto \lambda(\phi) \delta(\pi - \phi - \phi'), \quad (3.55)$$

поскольку единственным процессом рассеяния в среде является зеркальное отражение от плоскопараллельных слоев. Таким образом, при разделении переменных проблема сводится к независимому решению одномерных уравнений переноса в двупотоковом приближении $I(\pi \pm \phi)$ при всех значениях параметра разделения (угла ϕ) [241], как показано далее.

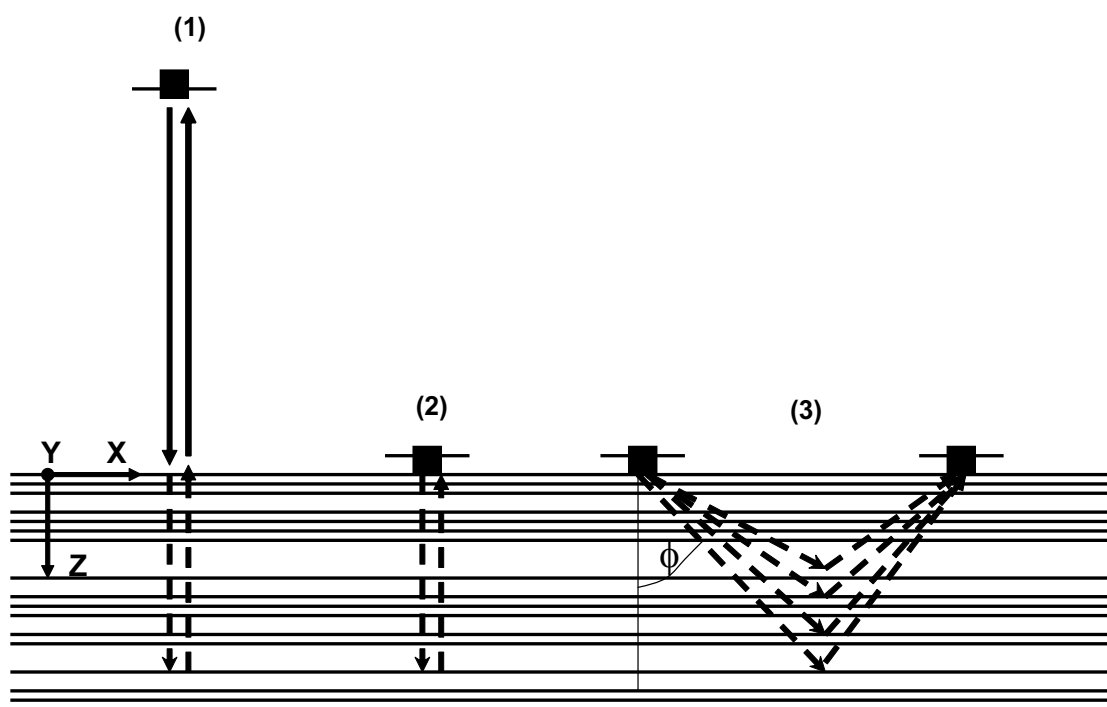


Рис. 3.5: Различные схемы эксперимента по глубинной радиолокации слоистых полярных льдов: (1) – орбитальная локация, (2) – однопозиционная локация, (3) – двухпозиционная локация

В безразмерных переменных, уравнения двухпоточкового приближения записываются в виде

$$\frac{\partial I^+}{\partial \theta} + \cos \phi \frac{\partial I^+}{\partial \tau} + \sin \phi \frac{\partial I^+}{\partial \chi} = -I^+ + \lambda I^-, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial I^-}{\partial \theta} - \cos \phi \frac{\partial I^-}{\partial \tau} + \sin \phi \frac{\partial I^-}{\partial \chi} = -I^- + \lambda I^+, \quad (3.57)$$

где $d\tau = \kappa dz$ – оптическая толщина в направлении z , $d\chi = \kappa dx$ – оптическая толщина в направлении x , $d\theta = \kappa c dt$ – нормированное (безразмерное) время, z – глубина в среде, $\kappa = \kappa(\phi)$ – объемный коэффициент ослабления, $\lambda = \lambda(\phi)$ – альбеда однократного рассеяния, $I^+ = I(\phi)$ и $I^- = I(\pi - \phi)$ – входящий и исходящий потоки соответственно в положительном и отрицательном направлении z , c – групповая скорость распространения волны в среде, ϕ – угол падения волны на систему параллельных слоев (см. рис 3.5)). Будем считать, что параметры среды $\kappa = \kappa(\phi)$ и $\lambda = \lambda(\phi)$ не зависят от координат в пространстве и являются только функциями угла ϕ . Для вычисления интегральной интенсивности излучения в среде необходимо проинтегрировать угловое распределение интенсивности $I^\pm$ по всем углам ϕ . В частности, полная интенсивность исходящего излучения, наблюдаемая изотропным приемником на поверхности, записывается в виде

$$I(x, 0) = \int_0^{\pi/2} I^-(x, 0, \phi) d\phi. \quad (3.58)$$

Определим начальные и граничные условия. При отсутствии излучения в среде до поступления импульса необходимо поставить нулевые начальные условия

$$I^\pm|_{\theta=0} = 0. \quad (3.59)$$

Граничные условия на верхней границе среды соответствуют импульсу излучения точечного источника в точке $(0, 0)$, в момент времени $\theta = \theta_0$.

$$I^+|_{\tau=0} = f(\phi)\delta(\chi)\delta(\theta - \theta_0), \quad (3.60)$$

где $f(\phi)$ соответствует угловому распределению интенсивности импульсного источника. Без ограничения общности, этот момент времени θ_0 можно положить

равным нулю. На нижней границе также формулируется соответствующее граничное условие. При анализе радиолокации марсианских полярных льдов в работах [145, 241] оптическая толщина слоя считалась достаточно большой, и было приближенно принято условие ограниченности решения на бесконечной глубине z . Линейной заменой переменных уравнения (3.56), (3.57) могут быть сведены к паре одномерных уравнений переноса

$$\frac{\partial I^+}{\partial \theta'} + \cos \phi \frac{\partial I^+}{\partial \tau} = -I^+ + \lambda I^-, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial I^-}{\partial \theta'} - \cos \phi \frac{\partial I^-}{\partial \tau} = -I^- + \lambda I^+. \quad (3.62)$$

Новые переменные θ', χ' определены следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \theta' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \psi \\ -\cos \psi \sin \psi & \cos^2 \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

где $\psi = \arctan(1/\sin \phi)$. В новых переменных, начальное условие принимает вид

$$I^+|_{\tau=0} = f(\phi) \delta(-\theta \cos \psi \sin \psi + \chi \cos^2 \psi) \delta(\theta') \quad (3.64)$$

Уравнения (3.61, 3.62) с граничным условием (3.64) и нулевым начальным условием можно решить с помощью преобразования Лапласа [88, 241]. В частном случае наблюдения рассеянного поля в точке источника $(0, 0)$ лишь $I^-(\theta)|_{x,y,\phi=0}$ вносит вклад в наблюдаемый сигнал. Интегрирование с дельта-функцией Дирака $\delta(\cdot)$ в (3.64) по углу ϕ дает множитель θ^{-1} в окончательном результате

$$I^-(\theta)|_{x,y=0} = \theta^{-1} f(0) I^-(\theta, 0), \quad (3.65)$$

где $I^-(\theta, 0)$ – соответствующее нестационарное решение системы одномерных нестационарных уравнений переноса излучения с соответствующими граничными условиями.

В случае трехмерной плоскостной среды, решение уравнений переноса излучения аналогично двумерному. Введем пару единичных векторов $\mathbf{n}^\pm$ таких, что $n_x^+ = n_x^-$, $n_y^+ = n_y^-$, $n_z^+ = -n_z^-$, соответственно в направлении падения и отражения луча на систему параллельных слоев. Уравнения (3.56) и (3.57) для парциальных интенсивностей $I^\pm$ потоков в направлениях $\mathbf{n}^\pm$, имеют вид

$$\frac{\partial I^+}{\partial \theta} + \mathbf{n}^+ \cdot \nabla_\tau I^+ = -I^+ + \lambda I^-, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial I^-}{\partial \theta} + \mathbf{n}^- \cdot \nabla_\tau I^- = -I^- + \lambda I^+, \quad (3.67)$$

где градиент $\nabla_\tau I^\pm \equiv \kappa^{-1} \left\{ \frac{\partial I^\pm}{\partial x}, \frac{\partial I^\pm}{\partial y}, \frac{\partial I^\pm}{\partial z} \right\}$, точка $(\cdot)$ означает скалярное произведение трехмерных векторов. Эти уравнения должны быть решены совместно с нулевыми начальными условиями (3.59) и граничными условиями на поверхности среды

$$I^+|_{\tau=0} = f(\mathbf{n}^+) \delta(\chi) \delta(\xi) \delta(\theta), \quad (3.68)$$

где $d\xi = \kappa dy$ – вторая нормированная поперечная координата в трех измерениях, $f(\mathbf{n}^+)$ – угловое распределение интенсивности источника излучения в точке $x, y, z = 0$. На бесконечной глубине необходимо потребовать ограниченности решения. В точке источника излучения решение для рассеянного поля записывается в виде [242]

$$I^-(\theta)|_{x,y,z=0} = \theta^{-2} f(\mathbf{n}_0) I^-(\theta, 0), \quad (3.69)$$

где $\mathbf{n}_0 \equiv \{0, 0, 1\}$ – единичный вектор нормали в направлении z , $I^-(0, t)$ – искомое решение системы нестационарных уравнений переноса излучения.

3.5 Численное решение уравнений электромагнитного поля в слоистых средах.

3.5.1 Численное моделирование радиолокационных сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ).

Амплитуда радиолокационного сигнала, принятого после отражения от среды, после согласованной фильтрации выражается формулой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) F_0(\omega) \tilde{F}_0(\omega) H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.70)$$

где $F_0(\omega)$ – спектр излучаемого сигнала, $\tilde{F}_0(\omega)$ – функция согласованного фильтра [247], $H(\omega)$ – спектральное окно [248], $R(\omega)$ – комплексный коэффициент отражения поверхности среды. Поверхность полярных ледяных отложений является достаточно гладкой, так что в расчете будем считать ее идеально плоской

горизонтальной поверхностью. Боковые отражения сигнала от рельефа поверхности будут рассмотрены отдельно.

В радиолокаторах MARSIS и SHARAD использовались сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Спектр ЛЧМ сигнала $F_0(\omega)$ выражается через интегралы Френеля [247]

$$F_0(\omega) = \sqrt{\frac{T}{2B}} \exp(-i\frac{(\omega - \omega_0)^2 T}{4\pi B}) (\Phi(u_1) - \Phi(u_2)), \quad (3.71)$$

где

$$\Phi(t) = C(t) + iS(t) = \int_0^t \exp(i\frac{\pi}{2}z^2)dz \quad (3.72)$$

– интеграл Френеля [150],

$$u_1 = -\frac{(\omega - \omega_0)}{\pi} \sqrt{\frac{T}{2B}} - \sqrt{\frac{BT}{2}},$$

$$u_2 = -\frac{(\omega - \omega_0)}{\pi} \sqrt{\frac{T}{2B}} + \sqrt{\frac{BT}{2}},$$

$\omega_0 = (\omega_2 - \omega_1)/2$ – средняя частота полосы ЛЧМ сигнала, B и T – ширина полосы и длительность сигнала, соответственно. При больших значениях базы ЛЧМ сигнала $BT \gg 1$ спектр сигнала в приближении стационарной фазы хорошо аппроксимируется выражением

$$F_0(\omega) \approx \sqrt{i\frac{T}{B}} \exp(-i\frac{(\omega - \omega_0)^2 T}{4\pi B}) \quad (3.73)$$

внутри рабочей полосы частот сигнала и приближается к нулю за пределами этой полосы. В реальных экспериментах MARSIS и SHARAD значения BT составляли порядка нескольких сотен, так что везде в наших расчетах используется приближенное выражение (3.73) для спектра сигнала. Таким образом, функция согласованного фильтра равна

$$\tilde{F}_0(\omega) \approx \exp(i\frac{(\omega - \omega_0)^2 T}{4\pi B}), \quad (3.74)$$

т.е. можно приближенно полагать $F_0(\omega)\tilde{F}_0(\omega) \approx const$. Это приближение будет использоваться нами в дальнейшем.

В процедуре обработки принятых сигналов радиолокатора MARSIS на борту космического аппарата [249] использовалось спектральное окно Хэннинга [248]

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1})), \quad (3.75)$$

где ω_1 и ω_2 – верхняя и нижняя частоты рабочей полосы сигнала, соответственно, Это же спектральное окно используется везде в настоящей работе.

3.5.2 Точное решение уравнений электромагнитного поля в одномерной слоистой среде.

Импеданс пачки слоев с постоянными электрическими свойствами в пределах каждого слоя в случае нормального падения волны можно вычислить по известной рекуррентной формуле [251]:

$$Z^{(n)} = \frac{Z^{(n-1)} - iZ_n \tan(k_n d_n)}{Z_n - iZ^{(n-1)} \tan(k_n d_n)} Z_n, \quad (3.76)$$

где $Z^{(n)}$ – импеданс n -слойной среды, $Z^{(n-1)}$ – импеданс $(n-1)$ -слойной среды, $Z_n = 1/\sqrt{\varepsilon_n}$ – собственный импеданс n -го слоя, $k_n = \omega/c\sqrt{\varepsilon_n}$ – волновое число в n -м слое, ε_n и d_n – комплексная диэлектрическая проницаемость и толщина n -го слоя, соответственно. Из этой формулы можно вывести рекуррентную формулу для амплитудного коэффициента отражения:

$$\tilde{R}_n = \frac{(k_n - k_{n-1}) + \tilde{R}_{n-1} \exp(2ik_{n-1}d_{n-1})(k_n + k_{n-1})}{(k_n + k_{n-1}) + \tilde{R}_{n-1} \exp(2ik_{n-1}d_{n-1})(k_n - k_{n-1})}, \quad (3.77)$$

где $\tilde{R}_n = R_n \exp(2ik_n z_n)$, z_n – глубина границы между $(n-1)$ -м и n -м слоями. С помощью этих соотношений вычисляется амплитудный коэффициент отражения от многослойной среды на данной частоте. Подставляя его в формулу (3.70), получим профиль отраженного от среды радиолокационного импульса.

3.5.3 Точное решение уравнений электромагнитного поля в двумерной слоистой среде.

Вычислим решение уравнений электромагнитного поля в модели двумерной слоистой среды с точечным источником излучения на ее поверхности [242]. (

рис. 3.5). Определим электрическое и магнитное поля посредством электрического вектора Герца [250]:

$$\mathbf{E} = k^2 \varepsilon \mu \mathbf{\Pi}^e + \text{grad div } \mathbf{\Pi}^e, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{H} = -ik\varepsilon \text{rot } \mathbf{\Pi}^e, \quad (3.79)$$

где $k = \omega/c_0$ – волновое число в свободном пространстве, $c_0 = 2.9979 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Аналогично, электрическое и магнитное поля можно определить посредством магнитного вектора Герца:

$$\mathbf{E} = ik\mu \text{rot } \mathbf{\Pi}^m, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{H} = k^2 \varepsilon \mu \mathbf{\Pi}^m + \text{grad div } \mathbf{\Pi}^m. \quad (3.81)$$

Рассмотрим сначала электрический вектор Герца. Пусть точечный источник излучает электрическое поле с вектором Герца $\mathbf{\Pi}^e = (0, \Pi_y^e, 0)$, с единственной отличной от нуля компонентой $\Pi_y^e = H_0^{(1)}(kr)$, которая выражается через функцию Ганкеля первого рода. можно показать, что вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в этом случае параллелен электрическому вектору Герца. $\mathbf{\Pi}^e$, который в свою очередь параллелен слоям среды и нормален к плоскости падения волны на среду (ТЕ-мода). В плоскости $z = 0$ электрический вектор Герца Π_y^e выражается через интеграл Вейля [250]:

$$H_0^{(1)}(kx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_z} \exp(ik_x x) dk_x, \quad (3.82)$$

где $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ – волновое число.

$$E_y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_z} \exp(ik_x x) R(k, k_x) dk_x, \quad (3.83)$$

где $R(k, k_x)$ – коэффициент отражения ТЕ-волны с поперечной компонентой волнового числа k_x . Алгоритмы вычисления коэффициента отражения $R(k, k_x)$ для слоистых сред хорошо известны [250, 251].

Подставляя полученное решение для напряженности электромагнитного поля $E_y(x)$ (3.83) в формулу согласованной свертки ЛЧМ сигнала, получим профиль сжатого ЛЧМ сигнала, отраженного от исследуемой среды.

Решение для ТМ-волны получается полностью аналогично. Источник излучает ТМ-волну с магнитным вектором Герца $\mathbf{\Pi}^m = (0, \Pi_y^m, 0)$, ненулевая компонента которого Π_y^m также выражается через функцию Ганкеля первого рода и интеграл Вейля (3.82). Поперечная компонента H_y отраженного поля также определяется формулой (3.83), с соответствующим значением коэффициента отражения ТМ волны от слоистой среды $R(k, k_x)$.

3.5.4 Точное решение уравнений электромагнитного поля в трехмерной слоистой среде.

В трехмерной модели среды электромагнитное поле электрического дипольного источника также выражается через электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}^e$, определяемого формулой [250]

$$\mathbf{\Pi}^e = \frac{\mathbf{\Pi}_0^e}{r} \exp(ikr - i\omega t), \quad (3.84)$$

где $\mathbf{\Pi}_0^e$ – постоянная, пропорциональная дипольному электрическому моменту осциллирующего электрического диполя. Рассмотрим дипольный источник, расположенный на поверхности слоистой среды в начале координат. В плоскости $z = 0$, вектор Герца, определяемый формулой (3.84), представляется интегралом Вейля [250]:

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int \exp(i(k_x x + k_y y - k_z z)) \frac{dk_x dk_y}{k_z}, \quad (3.85)$$

where $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Для определенности примем, что дипольный момент источника ориентирован параллельно оси y , т.е.

$$\mathbf{\Pi}_0^e = (0, \Pi_0^e, 0). \quad (3.86)$$

Излучение такого диполя в произвольном направлении, вообще говоря, содержит волны обеих поляризаций (ТЕ и ТМ) относительно местной плоскости падения. Отраженное поле, таким образом, состоит из двух слагаемых, которые должны быть независимо вычислены для обеих поляризаций. Перейдем к полярным координатам для горизонтальной компоненты волнового числа $\mathbf{k}_{xy} = (k_x, k_y, 0)$, $k_x = k_{xy} \cos \gamma$, $k_y = k_{xy} \sin \gamma$. Вектор Герца, определенный формулой (3.86), можно разложить на сумму двух компонент, нормальной и

параллельной к заданному волновому вектору $\mathbf{k}_{xy}$:

$$\Pi_{0\parallel}^e = \Pi_0^e \cos \gamma, \quad (3.87)$$

$$\Pi_{0\perp}^e = \Pi_0^e \sin \gamma, \quad (3.88)$$

соответствующих ТМ и ТЕ волнам. Если наблюдаемая поляризация отраженного поля соответствует поляризации излучаемого поля, как это часто имеет место в экспериментах по глубинной радиолокации, то наблюдаемая компонента отраженного поля E_y для каждой из поляризаций выражается интегралом Вейля

$$E_{\parallel y} = \frac{i}{2\pi} \Pi_0^e \int k_z R_{\parallel} \cos^2 \gamma k_{xy} dk_{xy} d\gamma, \quad (3.89)$$

$$E_{\perp y} = \frac{i}{2\pi} \Pi_0^e k^2 \int R_{\perp} \sin^2 \gamma \frac{k_{xy} dk_{xy} d\gamma}{k_z}, \quad (3.90)$$

где $k_z = \sqrt{k^2 - k_{xy}^2}$, $R_{\perp}$ и $R_{\parallel}$ – коэффициенты отражения поверхности для ТЕ и ТМ поляризаций, соответственно, рассмотренные выше в модели двумерной слоистой среды.

Подставляя наблюдаемые значения (3.89) и (3.90) для монохроматической волны в спектральное представление импульсного сигнала (3.70), получим профиль импульсного сигнала.

Абсолютная калибровка подобных измерений на практике весьма затруднительна. Вычисление диаграммы направленности антенны излучателя, непосредственно расположенной на границе неоднородной среды с заранее неизвестными параметрами, с учетом импеданса передающего устройства и т.д. в широкой полосе частот представляет собой отдельную сложную задачу, в свою очередь решаемую в тех или иных приближениях [252]. По этой причине в работах [242] проведено относительное сравнение различных решений для полей сигналов в слоистой среде с точностью до произвольного множителя. При этом информативной величиной является скорость спада интенсивности, пропорциональная истинному поглощению в среде [242, 164].

Значения полной оптической толщины $\tau_0 = \kappa z_0$ всего ледяного щита толщиной $z_0 = 3600$, показаны на рис. 3.6 для различных частот и значений электрических параметров модели n'_2 и $\tan \delta_2$, причем $\varepsilon'_1 = 3.15$, $\tan \delta_1 = 0.1 \tan \delta_2$ [145]. Каждая поверхность на графике соответствует одной из частот сигнала (показаны цифрами). Можно видеть, что для достаточно высоких частот

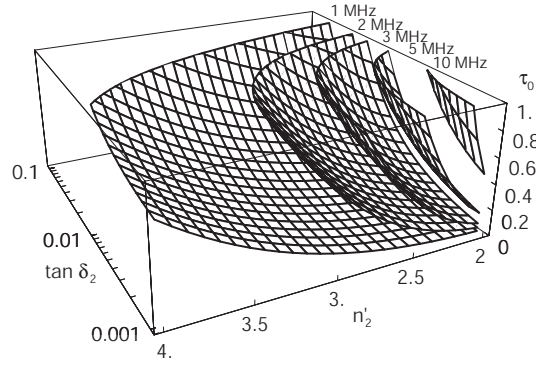


Рис. 3.6: Полная оптическая толщина слоистых отложений в зависимости от n'_2 и тангенса потерь $\tan \delta_2$.

модель предсказывает значения оптической толщины τ_0 , значительно превышающие единицу для большинства различных комбинаций n'_2 и $\tan \delta_2$. По этой причине, в работах [241] основное внимание уделялось оптически толстым (полубесконечным) средам.

Если полная оптическая толщина всего ледяного щита достаточно велика, следует ожидать хорошего согласия с асимптотическим решением для полубесконечной среды. Результаты численного моделирования сигналов радиолокаторов MARSIS (Band II) [253] и SHARAD [254], отраженных от северного полярного щита, показаны на рис. 3.7 и 3.8, соответственно. Следуя работе [145], были приняты значения параметров $l_1 = 14...45$ м (равномерное распределение со средним $\langle l_1 \rangle \approx 30$ м), $l_2 = 1$ м, $\varepsilon_1 = 3.15(1 + i \tan \delta_1)$, $\varepsilon_2 = 9(1 + i \tan \delta_2)$. Тангенсы потерь варьировались, с соблюдением соотношения $\langle \tan \delta_1 \rangle = \langle 0.1 \tan \delta_2 \rangle$.

Сплошными кривыми показан электродинамический расчет отражения от слоистой среды [145], пунктирными кривыми – асимптотическое решение уравнения переноса в двухпоточковом приближении. Значения тангенсов потерь $\tan \delta_2$ указаны цифрами при каждой паре кривых. Поскольку оптическая толщина щита достаточно велика, результаты обоих расчетов находятся в хорошем согласии друг с другом, в том числе на больших временах $\theta > 2\tau_0$, то есть после ожидаемого прихода отраженного сигнала от подошвы ледяного щита ($t \approx 40$ мкс). Пунктирные линии уровня показывают оценки уровня шума [145] для минимальной и максимальной рабочих высот MARSIS (250 и 800 км, соответственно). Для инструмента SHARAD, ориентировочные оценки уровня шума

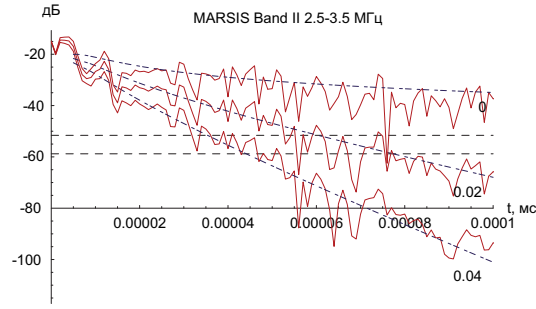


Рис. 3.7: Численное моделирование сигналов радиолокатора MARSIS band II (строгое решение и асимптотика по теории переноса). Цифрами у кривых указаны значения среднего тангенса диэлектрических потерь в среде. Горизонтальные пунктирные линии – границы области ожидаемых уровней шума согласно модели Крауса [145]

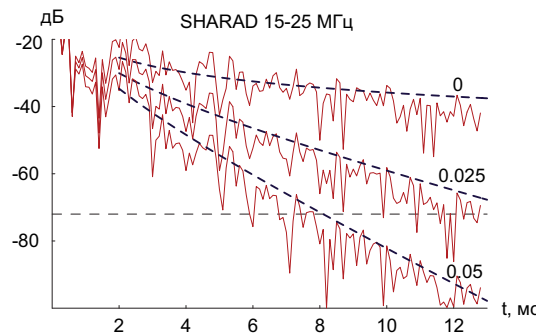


Рис. 3.8: Численное моделирование сигналов радиолокатора SHARAD (строгое решение и асимптотика по теории переноса). Цифрами у кривых указаны значения среднего тангенса диэлектрических потерь в среде. Горизонтальная пунктирная линия – ожидаемый уровень шума согласно модели Крауса [145]

сделаны при следующих значениях параметров [254]: высота орбиты $z = 300$, излучаемая мощность $P = 10\text{ W}$, коэффициент усиления дипольной антенны $G = 2.1$, $B = 10$, число импульсов в апертуре $N_A = 300$ (оценено исходя из частоты повторения импульсов $PRF \approx 700\text{ Гц}$).

Для умеренных значений оптической толщины, как это имеет место в случае южного полярного щита на низких частотах, следует ожидать справедливости асимптотического решения для ограниченных слоев. Результаты вычислений для третьего диапазона MARSIS (3.5-4.5 МГц) для южного щита показаны на рис. 3.9. Два типа подстилающей поверхности были исследованы: чистый лед ($\varepsilon = \varepsilon_1$) и чистая пресная вода $\varepsilon \approx 80$. Были приняты следующие значения параметров: равномерное распределение l_1 в пределах 80...120

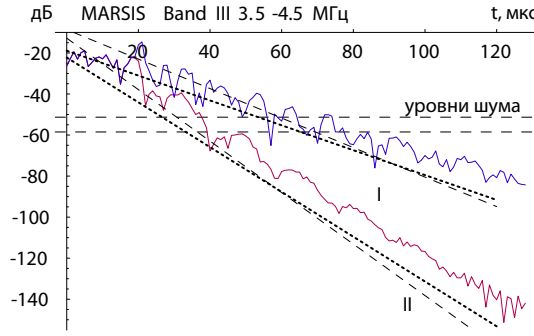


Рис. 3.9: Модель южного полярного ледяного щита Марса. Интенсивность отраженного сигнала (численное решение и асимптотики). I – жидкая вода, II – лед H_2O .

м [255], полная толщина 1900 м (типичное значение для периферийных областей южного ледяного щита), l_2 , ε_1 и ε_2 те же, что и для северного полярного щита (при этом, $\tan \delta_2 = 0.005$). Коэффициенты отражения мощности R_1 и R_2 на границах равны квадратам соответствующих амплитудных коэффициентов $R_A = (Z - 1)/(Z + 1)$. На том же рисунке показаны два асимптотических решения уравнения переноса: для одной отражающей границы (3.34) (тонкая пунктирная кривая) и для двух отражающих границ (3.47) (жирная пунктирная кривая). Несмотря на систематическое расхождение в абсолютном уровне мощности, строгое решение хорошо согласуется с асимптотиками по скорости спада уровня сигнала со временем. При этом решение (3.47), учитывающее отражение от обеих границ, находится в лучшем согласии со строгим решением.

Асимптотическое решение для исходящей интенсивности $I^-(0, t)$, полученное в [241] [241]:

$$I^-(\theta, 0) \approx \kappa_c \frac{\theta^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-(1-\lambda)\theta} = \frac{t^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\kappa_s c}} e^{-\kappa_a c t}. \quad (3.91)$$

позволяет получить оценку неизвестных параметров среды κ_a и κ_c по линейной регрессии методом наименьших квадратов:

$$-\frac{1}{2} \ln(2\pi\kappa_s c) - \kappa_a c t_i = I_i^- + \frac{3}{2} \ln t_i, \quad (3.92)$$

где I_i^- – интенсивность в моменты времени t_i , $-1/2 \ln(2\pi\kappa_s c)$ и $\kappa_a c$ – неизвестные параметры линейной регрессии

На рис. 3.10 показаны результаты вычислений [242] для следующих значений параметров: $\varepsilon_1 = 3.15$, $\tan \delta_1 = 0.0005$, $\varepsilon_2 = 9.0$, $\tan \delta_2 = 0.005$. Значения κ_a

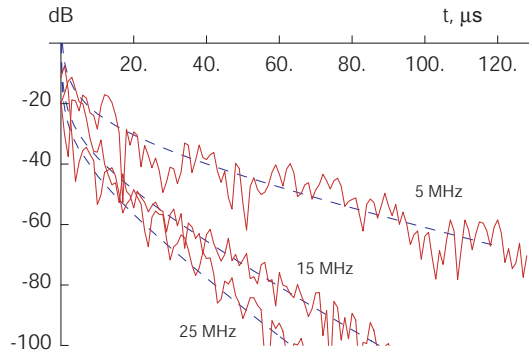


Рис. 3.10: Численное моделирование радиолокационных сигналов. Сплошные кривые – строгое решение, пунктирные кривые – асимптотика по теории переноса (3.91). Средние частоты диапазонов ЛЧМ показаны цифрами.

и κ_s асимптотического решения (показано пунктиром) оценены по результатам строгого решения по линейной регрессии (3.92).

Значения объемных коэффициентов поглощения κ_a для различных частот, оцененные по линейной регрессии (3.92) на основе численного моделирования сигналов, показаны на рис. 3.11. Точками показаны оцененные значения, сплошными кривыми показаны теоретические значения, предсказываемые по теории переноса с оценкой коэффициентов рассеяния на основе строгого решения задачи рассеяния на слое, пунктирными кривыми показаны значения $\kappa_a = 2k_1''$ согласно формуле О’Doherty-Anstey. В численном моделировании использовались ЛЧМ сигналы с полосой $B = 1$ МГц и центральными частотами 1-30 МГц. На рисунке показаны три реализации случайной среды с тангенсами потерь пыльных слоев $\tan \delta_2 = 0.001, 0.01$ и 0.1 (показаны цифрами при каждой кривой). Можно видеть, что точное решение задачи об одиночном слое [243] точнее приближенной формулы О’Doherty-Anstey соответствует оценкам по сравнению с приближенным значением $\kappa_a = 2k_1''$. Средняя скорость сигнала в среде приближенно полагалась равной $c = c_1 = c/n_1$.

3.5.5 Двумерная модель слоистой среды.

Электрофизическая модель полярных отложений Марса [241], введенная для расчета одномерных плоских волн в среде, также используется в численном моделировании распространения сигнала в двух и трех измерениях. Типичные зависимости модуля коэффициента отражения $R(k, k_x)$ от угла падения волны

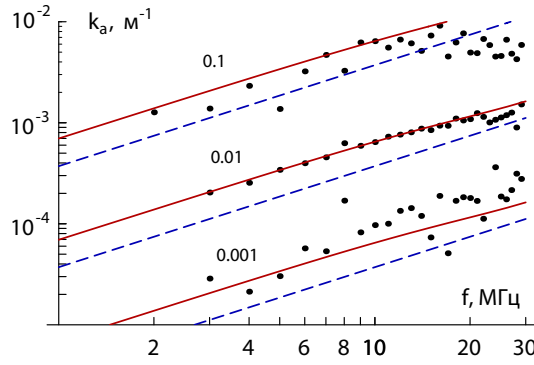


Рис. 3.11: Средние коэффициенты поглощения в среде. Сплошными линиями показаны значения, предсказанные моделью [241], пунктирными линиями – результаты модели [244]. Оценки по результатам численного моделирования сигналов показаны точками.

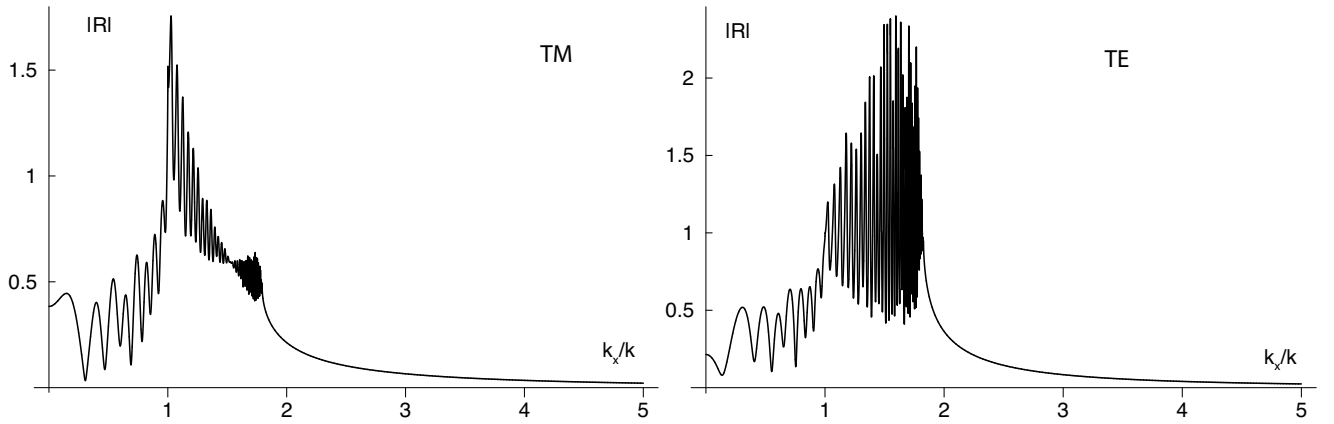


Рис. 3.12: Модуль амплитудного коэффициента отражения $|R(k, k_x)|$ для ТМ- и ТЕ-поляризации (слева и справа, соответственно).

(соответствующей проекции волнового вектора k_x) на частоте 1 МГц для двух возможных поляризаций показаны на рис. 3.12. Приняты следующие значения параметров: $\varepsilon'_1 = 3.15$, $\varepsilon'_2 = 9.0$, $\tan \delta_1 = 0.0005$, $\tan \delta_2 = 0.005$. Многочисленные пики $R(k, k_x)$ в области $k_x > k$ соответствуют волноводным модам и модам утечки, типичным для сложных слоистых сред. Для ТМ поляризации эти моды выражены значительно слабее, чем для ТЕ поляризации, по причине более слабых отражений неоднородных волн от внутренних границ в среде.

Вычисленные профили сигналов двухпозиционного глубинного радиозондирования модели северного ледяного щита (двумерная модель, ТЕ и ТМ поляризации) показаны на рис. 3.13 слева и справа, соответственно. Полоса частот ЛЧМ сигналов (10-15 МГц) близка к рабочему диапазону, предложенному

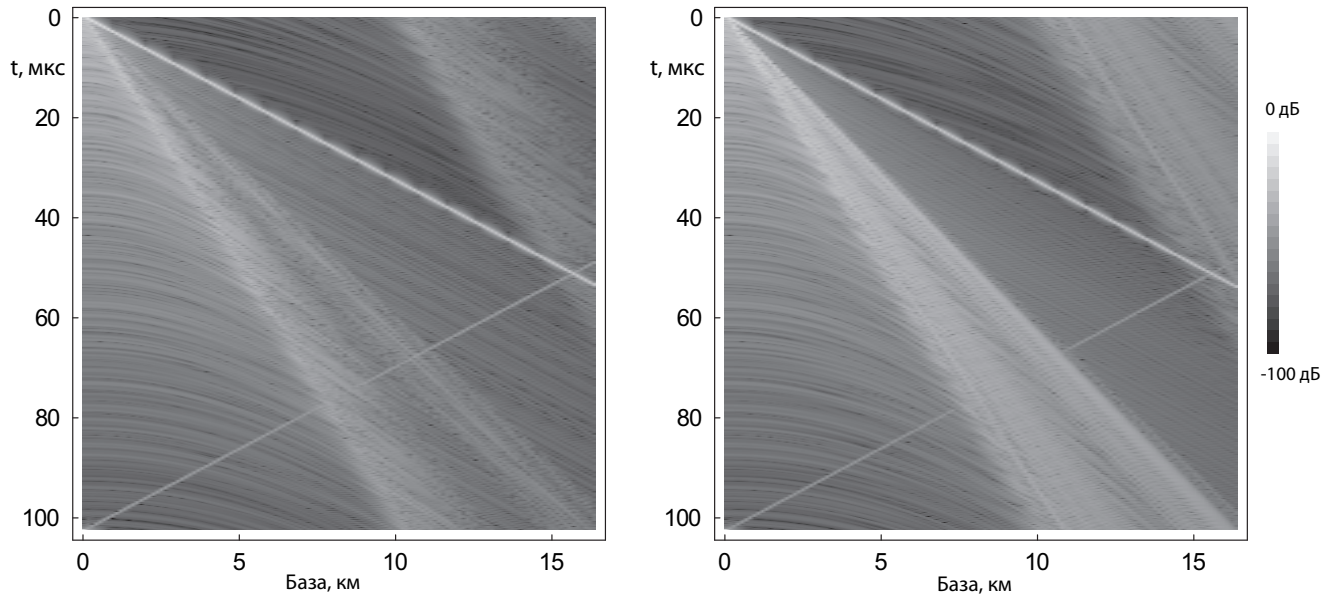


Рис. 3.13: Двухпозиционное зондирование двумерной слоистой среды (слева и справа, соответственно ТМ и ТЕ поляризация). Профили отраженного сигнала показаны в зависимости от расстояния между антеннами.

для использования в [256]. Показано семейство отраженных радиолокационных сигналов в зависимости от расстояния между пунктами передачи и приема. Основные компоненты сигнала (прямое прохождение волны в свободном пространстве, волноводные моды и моды утечки и диффузное поле) хорошо различимы на рисунках. Для ТМ волны, моды утечки менее интенсивны, как и следует ожидать по результатам сравнения спектров коэффициентов отражения $R(k, k_x)$, показанных на рис. 3.12. Приняты следующие значения параметров: $\varepsilon'_1 = 3.15$, $\varepsilon'_2 = 5.76$, $\tan \delta_1 = 0.0005$, $\tan \delta_2 = 0.005$. По результатам вычисления следует, что для больших углов падения ϕ , т.е. на больших расстояниях между антеннами при малых временах, эти моды нарушают применимость теории переноса излучения. На малых углах падения ϕ , задача в основном подобна задаче однопозиционного зондирования с вертикальным распространением волны (рис. 3.5). Таким образом, интерпретация на основе теории переноса излучения, описанная здесь, в действительности ограничена конфигурациями, близкими к однопозиционной. По этой причине расчет трехмерного поля сигнала приводится только для этой конфигурации.

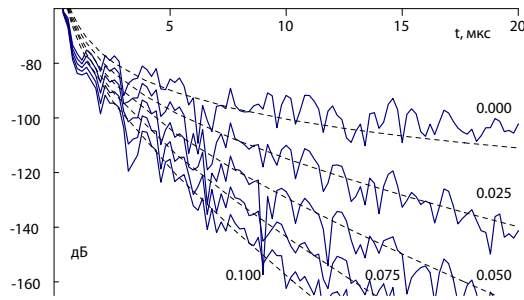


Рис. 3.14: Однопозиционное зондирование трехмерной слоистой среды. Строгое решение уравнений электромагнитного поля (сплошные линии) и асимптотика решения уравнения переноса (пунктирные линии). Значения тангенса потерь $\tan \delta_2$ указаны цифрами. Полоса ЛЧМ сигнала 10-15 МГц.

3.5.6 Трехмерная модель слоистой среды.

Результаты моделирования ЛЧМ сигналов (10-15 МГц) при различных значениях тангенса угла потерь в пыльных слоях показаны на рис. 3.14. Сплошными кривыми показаны строгие решения электромагнитных уравнений для распространения сигнала, вместе с асимптотическими решениями согласно формуле (3.69) которые показаны пунктирными кривыми. Приняты следующие значения параметров $\varepsilon'_1 = 3.15$, $\varepsilon'_2 = 9.0$. Значения тангенсов потерь в пыльных слоях обозначены цифрами при каждой паре кривых. Тангенс угла потерь в ледяных слоях равен одной десятой от тангенса потерь в пыльных слоях. На малых временах, диффузная структура поля не развита, так что строгие решения не полностью соответствуют асимптотическим. На больших временах асимптотические решения хорошо описывают среднюю скорость спада интенсивности сигнала, оценка которой дает возможность определить среднее значение истинного поглощения в среде. Поскольку это поглощение определяется главным образом наличием примесей во льду, [257, 238, 234], его оценка дает информацию о физическом и химическом составе полярных ледяных отложений.

Во всех расчетах, приведенных в главе 3, была принята идеальная модель гладких плоских слоев. Эффекты объемного рассеяния, растущие с ростом характерного размера неоднородностей к длине волны [258], таким образом не учитываются. Для северного полярного щита Марса такое приближение можно считать разумным, поскольку на масштабах от десятков метров до десятков километров его поверхность является весьма гладкой [206]. Анализ изображений

Таблица 3.3: Сводка известных результатов оценки диэлектрических свойств марсианских полярных льдов.

Источник	Инструмент	Объект зондирования	ε	σ , См/м	$\text{tg } \delta$
[260]	MARSIS	NPLD		$\leq 10^{-6}$	≤ 0.001
[261]	MARSIS	SPLD	$3.0 \dots 5.0$	$1.0 \dots 2.0 \cdot 10^{-6}$	
[262]	MARSIS	SPLD, Chasma Australe		$6 \cdot 10^{-6}$	0.003
[263]	SHARAD	NPLD	3.1		< 0.0026
[264]	SHARAD	NPLD, Borealis Scopuli		$\leq 3 \cdot 10^{-6}$	≤ 0.001

высокого разрешения [259], однако, показывает развитый рельеф поверхности на метровых масштабах. Подобные неоднородности, погребенные в толще слоистых отложений, могут вызывать эффекты объемного рассеяния, неучтенные в модели.

Некоторые модели переноса излучения, учитывающие объемное рассеяние [164], также предсказывают экспоненциальный спад интенсивности поля со временем $\propto \exp(-\kappa_a ct)$. Часто предполагают, однако, [239] что роль объемного рассеяния в рассмотренном случае незначительна.

В ряде расчетов, представленных в этой главе, отсутствуют оценки отношения сигнал/шум. В случае зондирования с поверхности, такие оценки затруднены по ряду причин. Как следствие, во многих работах эти оценки отсутствуют или сильно огрублены. Практически отношение сигнал/шум может быть значительно улучшено когерентным накоплением большого количества импульсов.

3.5.7 Экспериментальные оценки диэлектрических свойств марсианских полярных льдов.

В таблице 3.3 приведена сводка опубликованных результатов оценок диэлектрических свойств марсианских полярных щитов по данным радиолокации. Высокая степень радиопрозрачности полярных льдов для сигналов обоих радиолокаторов приводит к весьма низким оценкам тангенса угла потерь вещества и эквивалентной омической проводимости

На рис. 3.15 приведено сравнение асимптотических решений уравнения переноса излучения в одномерной среде с типичным радиолокационным эхом от северного полярного щита Марса. Результаты сравнения приводят к верхней

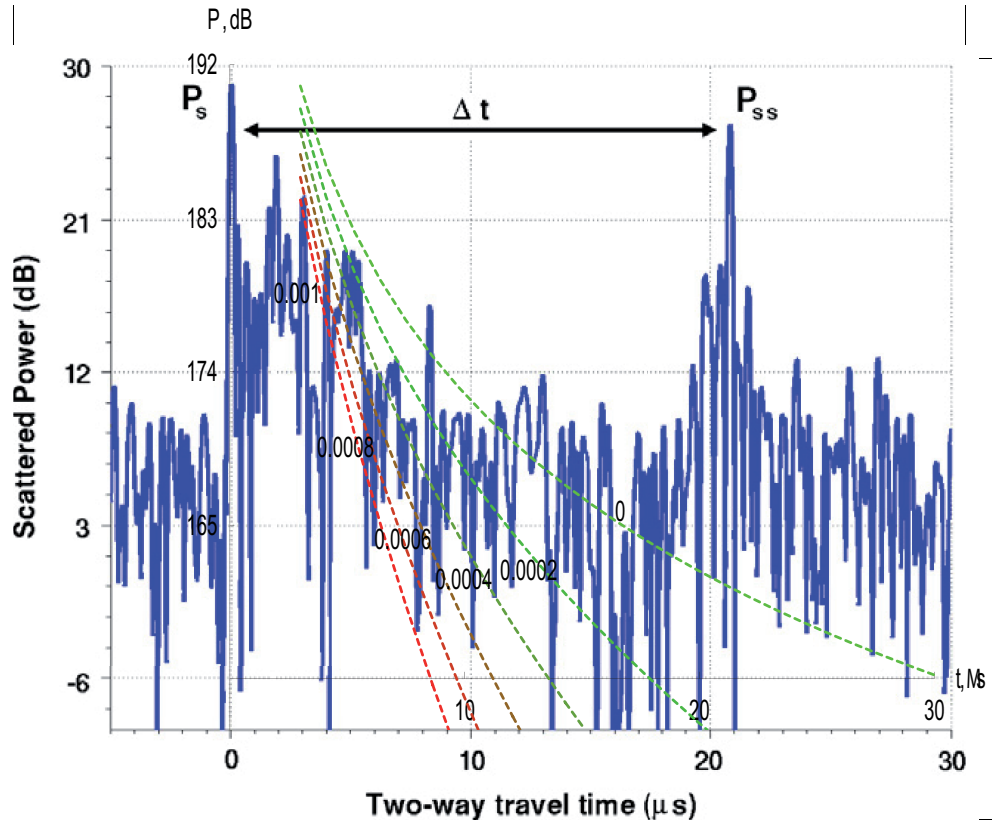


Рис. 3.15: Сравнение асимптотических решений теории переноса излучения с экспериментальными результатами зондирования орбитальным радиолокатором SHARAD [264]. Сигнал радиолокатора после согласованной фильтрации и ионосферной коррекции (сплошная линия) и асимптотика решения уравнения переноса (пунктирные линии). Значения среднего тангенса потерь в среде $\tan \delta$ указаны цифрами. Полоса ЛЧМ сигнала 15-25 МГц. На экспериментальной записи хорошо различимы отражения от дневной поверхности и подошвы ледяного щита.

оценке тангенса потерь в среде на уровне $\tan \delta < 10^{-3}$, что в целом согласуется с оценками по другим методикам, приведенными в таблице 3.3.

Глава 4

Рассеяние радиолокационных сигналов на флуктуациях плотности ионосферной плазмы и поверхностном рельефе планеты.

Подповерхностная радиолокация с орбитальных и летательных аппаратов в течение длительного времени широко применяется для решения задач дистанционной диагностики среды [265, 253, 254]. Одну из основных трудностей применения этой техники зондирования представляют собой боковые отражения радиолокационного сигнала от рельефа поверхности среды, маскирующие полезные отражения, несущие подлежащую обработке информацию. При наличии ионосферы рассеяние волн на неоднородностях ионосферной плазмы способно приводить к аналогичным эффектам. Проблема частично преодолевается применением направленных антенн, синтезированных апертур и т.д.

Возможности моделирования сигналов в численном эксперименте ограничены доступными на текущий момент вычислительными ресурсами. Так, расчеты FDTD в областях значительного сравнительно с длиной волны размера в настоящее время фактически ограничены одномерными и двумерными моделями среды [266]. Моделирование методом фазовых экранов с учетом неоднократно-

го прохождения излучения через флуктуирующую среду [267] также связано со значительными вычислительными затратами. При расчетах средних параметров сигналов усреднением по многим реализациям моделирования вычислительные затраты возрастают многократно.

Некоторые оценки рассеяния сигналов рельефом поверхности планеты можно найти в [269, 268] и цитируемых там работах. Влияние флуктуаций плотности плазмы в настоящее время гораздо менее изучено. Кроме того, строгое математическое моделирование синтеза апертуры представляет собой значительные вычислительные трудности. Опубликованные расчёты [269, 268] основываются на серьёзных упрощающих предположениях. Так, в работе [269] используется приближение плоской волны, что эквивалентно расположению радара на бесконечном расстоянии от среды, а неоднородность ионосферной плазмы считается изотропной. В работе [268] учитывается сферичность радиоволны, падающей на шероховатую поверхность планеты. Строгого моделирования синтеза апертуры в этой работе не делается, а вместо этого площадь рассеяния на поверхности планеты принудительно ограничена радиусом порядка зоны Френеля. Весьма актуальными являются расчеты с более строгим моделированием всех этапов обработки радиолокационных сигналов, в т.ч. процесса синтеза апертуры.

В настоящей работе предлагается общая вычислительная методика для численного моделирования глубинной радиолокации с учетом рельефа поверхностей и неоднородностей среды, а также с более высокой точностью моделирования апертурного синтеза.

4.1 Модель фазовых экранов.

Одним из общепринятых подходов к численному моделированию распространения волн в неоднородных средах является метод фазовых экранов. Геометрия принятой в настоящей работе модели показана на рис 4.1. Рельефные поверхности границ раздела сред, случайным образом модулирующие фазу проходящей или отраженной волны, приближенно моделируются фазовыми экранами

$$\phi_i = -2kh(x_i, y_i) \quad (4.1)$$

и

$$\phi_i = 2\Delta k h(x_i, y_i) = 2\frac{\omega}{c}\Delta n h(x_i, y_i), \quad (4.2)$$

при отражении и прохождении волны соответственно, где Δk – разность волновых чисел в средах, разделенных данной поверхностью.

В промежутках между границами раздела все среды считаются однородными, т.е. рассеяние на распределенных в объеме среды неоднородностях отсутствует. Считая направление распространения излучения приблизительно вертикальным, для поля прошедшей или отраженной от фазового экрана волны в среде в параксиальном приближении можно записать

$$E(x, y) = \int A_i \exp(i\phi_i) E(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}) dx' dy', \quad (4.3)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}' = (x', y', z')$ – координаты произвольной точки среды и на плоскости фазового экрана, соответственно, A_i – френелевский амплитудный коэффициент отражения или прохождения волны через границу, соответственно, ϕ_i – случайный сдвиг фазы (4.1) или (4.2), вносимый случайным экраном в фазу отраженной или проходящей волны, соответственно. Функция Грина уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении равна

$$G_{ij} = \frac{k}{2\pi i |z - z'|} \exp \left(ik|z - z'| + ik \frac{(x - x')^2}{2|z - z'|} + ik \frac{(y - y')^2}{2|z - z'|} \right). \quad (4.4)$$

В точке (x_0, y_0, z_0) располагается сосредоточенный (точечный) источник зондирующего излучения $E_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. В принятом здесь параксиальном приближении поле источника в среде равно

$$E(\vec{r}) = E_0 \int \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) G(\vec{r}', \vec{r}) d^3 \vec{r}' = E_0 G(\vec{r}_0, \vec{r}). \quad (4.5)$$

Тем самым, комплексная амплитуда поля волны источника в точке $\vec{r}_{N+1}$ для заданной частоты ω в среде после N -кратных отражений и прохождений рельефных границ раздела сред оказывается равным

$$E_\omega(\vec{r}_{N+1}) = E_0 \int \dots \int \prod_{i=1}^N A_i \exp(i\phi_i) G_{i,i+1} dx_i dy_i, \quad (4.6)$$

где $G_{i,i+1} \equiv G(\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1})$. Усредняя произведение двух комплексных амплитуд (4.6) на различных частотах $\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle$, получим двухчастотную функцию корреляции поля [105]

$$\Gamma_{\omega_1 \omega_2}(\vec{r}_{N+1}, \vec{r}_{2N+2}) = \langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle = \quad (4.7)$$

$$E_0 E_0^* \int \dots \int M\{\phi\} \prod_{i=1}^N A_i \exp(i\phi_i) G_{i,i+1} \prod_{i=N+2}^{2N} A_i^* G_{i,i+1}^* dx_i dy_i ,$$

где

$$M\{\phi\} = \langle \exp(\sum_{i=1}^N i\phi_i(x_i, y_i) - \sum_{i=N+2}^{2N} i\phi_i(x_i, y_i)) \rangle \quad (4.8)$$

– характеристическая функция совместного распределения случайных фаз. В случае нормально распределенных фаз характеристическая функция многомерного гауссовского распределения равна [270]

$$M\{\phi\} = \langle \exp(\sum i\phi_i) \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j) \right) , \quad (4.9)$$

где β_{ij} – ковариации случайных фаз $\phi_i(x_i, y_i) \phi_j(x_j, y_j)$ с учетом их знака в выражении (4.8). В случае применения апертурного синтеза и других процедур усреднения наблюдаемых полей выражения (4.6) и (4.7) необходимо проинтегрировать по соответствующим координатам источников и приемников с соответствующими весовыми (апертурными) функциями.

Выражение для характеристической функции $M\{\phi\}$ (4.9), входящее в формулу (4.7) для двухчастотной корреляционной функции, может быть разложено в степенные ряды по ковариациям случайных фаз β_{ij} . При гауссовских корреляционных функциях фаз, т.е. высот рельефа [271], и гауссовских апертурных функциях [274, 272, 273, 226], почленное интегрирование этих рядов приводит к суммированию слагаемых вида

$$\int \exp(-A_{ij}x_i x_j + B_i x_i) d^n x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A_{ij}}} \exp \left(\frac{B^T A_{ij}^{-1} B}{4} \right) . \quad (4.10)$$

По приведенной здесь схеме вычислений было проведено моделирование радиолокационных импульсов, отраженных от квазипериодической рельефной поверхности [226] и прошедших сквозь флуктуирующую ионосферу [274, 272, 273]

Если считать высоты рельефа дневной поверхности и глубинного горизонта некоррелированными между собой, то расчет отражения от рельефного глубинного горизонта с учетом двукратного прохождения волны через рельефную дневную поверхность приводит к вычислению семикратной суммы ряда. Аналогичным образом могут быть найдены высшие корреляционные моменты поля.

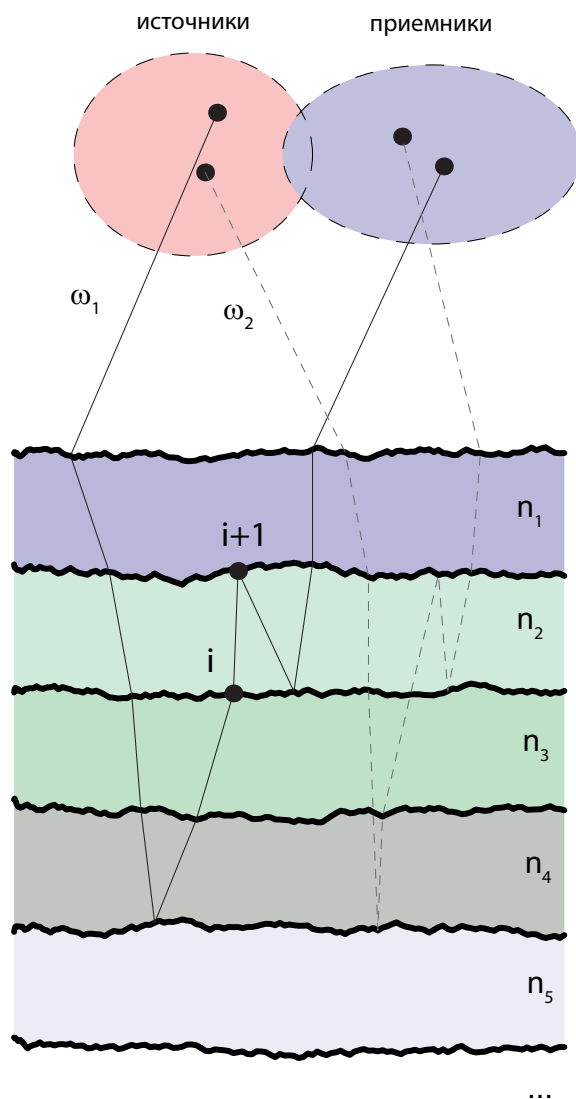


Рис. 4.1: Общая схема вычислительной методики фазовых экранов.

4.2 Численное моделирование глубинного зондирования через флуктуирующую ионосферу.

Принятая для численного моделирования модель эксперимента по глубинному зондированию схематически показана на рис. 4.3. Поверхность планеты счи-

тается гладкой и горизонтальной идеально отражающей плоскостью. Плоский фазовый экран, моделирующий слой неоднородной ионосферной плазмы, параллелен поверхности планеты и расположен на высоте z_2 над ней. Космический аппарат движется по прямой траектории параллельно поверхности планеты на постоянной высоте h , так что расстояние от космического аппарата до ионосферы равно $z_1 = h - z_2$.

Фазовый экран модулирует фазу волн, проходящих сквозь ионосферу. Почти вертикальное распространение волны от одной плоскости $z = z_i$ до другой плоскости $z = z_j$ в параксиальном приближении описывается интегралом [275]

$$E(x_i, y_i) = \int G_{ij} E(x_j, y_j) dx_j dy_j, \quad (4.11)$$

где

$$G_{ij} = \frac{k}{2\pi iz} \exp \left(ikz + i \frac{k(x_i - x_j)^2}{2z} + i \frac{k(y_i - y_j)^2}{2z} \right) \quad (4.12)$$

функция Грина параболического уравнения дифракции, $z = |z_i - z_j|$, $k = \omega/c$ – волновое число в пространстве между двумя плоскостями, (x_i, y_i) и (x_j, y_j) – декартовы координаты в i -той и j -той плоскости, соответственно. Таким образом, комплексная амплитуда отраженной от поверхности волны на некоторой частоте ω_I , приходящей обратно к космическому аппарату после двукратного прохождения ионосферы, выражается интегралом

$$E(x_5, y_5) = \int \dots \int E(x_1, y_1) G_{12} G_{25} \exp(i\phi_1 + i\phi_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2, \quad (4.13)$$

где

$$E(x_1, y_1) = \frac{1}{z_1} \exp \left(ik_I z_1 + \frac{ik_I(x_5 - x_1)^2 + ik_I(y_5 - y_1)^2}{2z_1} \right) \quad (4.14)$$

– поле сферической волны радиолокатора, падающей на плоскость ионосферного экрана, $\phi_1 = \phi_1(x_1, y_1)$ и $\phi_2 = \phi_2(x_2, y_2)$ – случайные фазовые сдвиги, вносимые в волновой фронт ионосферным экраном, $k_I = \omega_I/c$.

Синтез апертуры осуществляется когерентным суммированием принятых радиоимпульсов (4.13) в пределах некоторого участка траектории космического аппарата. Пусть траектория параллельна оси x , тогда синтез апертуры приближенно представим интегрированием по траектории с гауссовской весовой

функцией

$$E_{\omega_I} = \int E(x_5, y_5) \frac{1}{\sqrt{\pi}L} \exp \left(-\frac{(x_5 - x_0)^2}{L^2} + \frac{i\pi\nu(x_5 - x_0)}{L} \right) dx_5, \quad (4.15)$$

где L – эффективная полудлина синтезированной апертуры, ν – номер доплеровского фильтра. Поскольку наибольший интерес при глубинном зондировании представляют сигналы, приходящие из надира, ограничимся исследованием соответствующего доплеровского фильтра $\nu = 0$. Применяя стандартный метод сжатия ЛЧМ сигнала, получаем профиль сжатого импульса

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega_I) E_{\omega_I} \exp(i\omega_I t) d\omega_I, \quad (4.16)$$

где $H(\cdot)$ – функция спектрального окна. В наших расчетах везде используется окно Хэннинга [248].

Аналогично, с помощью (4.13) и (4.15) получим амплитуду принятого радиолокационного сигнала на частоте ω_{II} :

$$E_{\omega_{II}} = \int E(x_3, y_3) \int \dots \int \frac{1}{z_1} \exp \left(ik_{II}z_1 + \frac{ik_{II}(x_6 - x_3)^2 + ik_{II}(y_6 - y_3)^2}{2z_1} \right) G_{34}G_{46} \exp(i\phi_3 + i\phi_4) \frac{1}{\sqrt{\pi}L} \exp \left(-\frac{(x_6 - x_0)^2}{L^2} + \frac{i\pi\nu(x_6 - x_0)}{L} \right) dx_6 dx_3 dy_3 dx_4 dy_4, \quad (4.17)$$

где $E(x_3, y_3)$ – падающая на ионосферу волна с частотой ω_{II} аналогично (4.14), $\phi_3 = \phi_3(x_3, y_3)$ и $\phi_4 = \phi_4(x_4, y_4)$ – случайные компоненты фазовых сдвигов, вносимых ионосферным экраном, $k_{II} = \omega_{II}/c$ – волновое число. Систематическая (регулярная) часть фазового сдвига может быть скомпенсирована специальными методами [276, 277].

Усредняя квадрат амплитуды сжатого импульса (4.16), получим среднюю интенсивность сигнала после согласованной фильтрации

$$\langle |E(t)|^2 \rangle \propto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega_I) H(\omega_{II}) \Gamma(\omega_I, \omega_{II}) \exp(i(\omega_I - \omega_{II})t) d\omega_I d\omega_{II}, \quad (4.18)$$

где двухчастотная корреляционная функция [105] определяется как

$$\Gamma(\omega_I, \omega_{II}) = \langle E_{\omega_I} E_{\omega_{II}}^* \rangle. \quad (4.19)$$

Вычисление $\Gamma(\omega_I, \omega_{II})$ фактически сводится к вычислению среднего от экспоненты квадратичной формы четырех фазовых сдвигов $\phi_1 \dots \phi_4$

$$M(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \langle \exp(i\phi_1 + i\phi_2 - i\phi_3 - i\phi_4) \rangle . \quad (4.20)$$

Если принять, что фазы $\phi_1 \dots \phi_4$ нормально распределены, тогда характеристическая функция нормального распределения четырех случайных величин [270] равна

$$M(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum \lambda_{ij} \right) , \quad (4.21)$$

где коэффициенты матрицы λ_{ij} совпадают с коэффициентами корреляции фаз $\langle \phi_i \phi_j \rangle$ с точностью до знака $\pm$, поскольку эти фазы присутствуют в (4.20) с различными знаками.

4.3 Распространение волн в неоднородной изотропной плазме.

Неоднородность ионосферной плазмы по аналогии с рядом других работ [269, 105] в настоящей работе описывается анизотропной гауссовой функцией корреляции плотности флуктуаций (4.30), которая для плазмы в отсутствие магнитного поля совпадает с функцией корреляции диэлектрической проницаемости с точностью до постоянного множителя. Несмотря на критику [278, 279] и экспериментальные свидетельства справедливости колмогоровской модели структурной функции плотности флуктуаций среды [280], гауссовская модель флуктуаций [281] в силу ряда причин продолжает широко применяться в теоретических и вычислительных исследованиях.

Оценки параметров гауссовой модели для реальных ионосферных флуктуаций можно получить методом фиттинга параметров, аппроксимируя экспериментальные или теоретические пространственные спектры корреляций плотности плазмы [281, 288] гауссианами. В настоящее время надежные данные по флуктуациям марсианской ионосферы отсутствуют.

По этой причине, учитывая значительное сходство Марса с Землей, настоящее исследование ограничено рассмотрением гауссовской функции корреляций плотности с характерными масштабами корреляций типа земных (порядка сотен метров – единиц километров). Поверхность планеты считается идеально

гладкой плоскостью. В работах [282] и [272, 273] проведено численное моделирование изотропных и анизотропных флуктуаций плазмы, соответственно.

Интенсивность флуктуаций плотности плазмы в ионосфере сильно зависит от времени, места, геомагнитной обстановки, космической погоды и т.д. Характерное значение интенсивности флуктуаций плотности, приведенное в работе [269], составляет 0.5% плотности регулярной ионосферы. Для полярных областей, как указано в той же работе, интенсивность флуктуаций может составлять до 10% плотности регулярной ионосферы. Эти значения приблизительно соответствуют отношениям ω_{p1}/ω_p порядка 0.1 и 0.3, соответственно. Мы будем в дальнейшем говорить об этих двух случаях как о слабых и сильных флуктуациях.

Задача о распространении электромагнитных волн в изотропной плазме может быть сведена к скалярному волновому уравнению

$$\Delta u + \omega^2/c^2 \varepsilon u = 0, \quad (4.22)$$

где диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ зависит от концентрации свободных электронов в плазме

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (4.23)$$

плазменная частота ω_p определяется соотношением

$$\omega_{p0}^2 = 4\pi r_e N_{0e} c^2. \quad (4.24)$$

Выделяя регулярную и случайную (флуктуационную) составляющие концентрации электронов $N_e = N_{0e} + N_{1e}$, уравнение (4.22) можно переписать в виде

$$\Delta u + k^2 u + k^2 \varepsilon_1 u = 0, \quad (4.25)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}}, \quad (4.26)$$

приведенная случайная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_1 = \frac{-\omega_{p1}^2/\omega^2}{1 - \omega_{p0}^2/\omega^2}, \quad (4.27)$$

$$\omega_{p0}^2 = 4\pi r_e N_{0e} c^2 \quad (4.28)$$

и

$$\omega_{p1}^2 = 4\pi r_e N_{1e} c^2 \quad (4.29)$$

- плазменные частоты, характеризующие регулярную и случайную компоненты концентрации свободных электронов в плазме, соответственно. В случае гауссовской функции корреляции случайной компоненты неоднородной концентрации свободных электронов в плазме N_{1e} , когда корреляцией диэлектрической проницаемости в направлении распространения волны можно пренебречь [275], корреляционная функция может быть приближенно записана в виде

$$B_\varepsilon(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \langle \varepsilon_1(\vec{r}_1, t_1, \omega_1) \varepsilon_1(\vec{r}_2, t_2, \omega_2) \rangle \quad (4.30)$$

$$= \frac{\omega_{p1}^4 / (\omega_1 \omega_2)^2}{(1 - \omega_{p0}^2 / \omega_1^2)(1 - \omega_{p0}^2 / \omega_2^2)} \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{\sigma_y^2} - \frac{(z_1 - z_2)^2}{\sigma_z^2} - \frac{(t_1 - t_2)^2}{\tau^2}\right).$$

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда направление траектории полета космического аппарата совпадает с одним из главных горизонтальных направлений анизотропии флуктуаций плотности плазмы. В том случае ($\sigma_z \ll H$), когда корреляцией диэлектрической проницаемости в направлении распространения волны можно пренебречь [275], корреляционная функция может быть приближенно записана в виде

$$B_\varepsilon(\vec{\rho}, z) \approx A_{\omega_1, \omega_2}(\vec{\rho}) \delta(z), \quad (4.31)$$

где

$$A_{\omega_1, \omega_2}(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_\varepsilon(\vec{\rho}, z) dz = A_{\omega_1, \omega_2}(0) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{\sigma_y^2} - \frac{(t_1 - t_2)^2}{\tau^2}\right), \quad (4.32)$$

$$A_{\omega_1, \omega_2}(0) = \frac{\omega_{p1}^4 / (\omega_1 \omega_2)^2}{(1 - \omega_{p0}^2 / \omega_1^2)(1 - \omega_{p0}^2 / \omega_2^2)} \sqrt{\pi} \sigma_z, \quad (4.33)$$

$\vec{\rho} = (x, y)$. Можно показать, что коэффициент корреляции случайных сдвигов фаз, вносимых слоем неоднородной плазмы толщины H на частотах ω_i and ω_j выражается в виде

$$\langle \phi_i \phi_j \rangle = \frac{H}{4} k_i k_j A_{\omega_i, \omega_j}(\vec{\rho}), \quad (4.34)$$

которые совпадают с коэффициентами λ_{ij} в формуле (4.21) если условно принять следующие знаки волновых чисел:

$$k_1 \rightarrow k_I, k_2 \rightarrow k_I, k_3 \rightarrow -k_{II}, k_4 \rightarrow -k_{II}, \quad (4.35)$$

$$t_1 \rightarrow t_I = \frac{x_5}{v}, t_2 \rightarrow t_I = \frac{x_5}{v}, t_3 \rightarrow t_{II} = \frac{x_6}{v}, t_4 \rightarrow t_{II} = \frac{x_6}{v},$$

где v – скорость движения космического аппарата по траектории. Нестационарные эффекты, описываемые корреляционной функцией (4.32), присутствуют в окончательном результате в силу зависимости координат космического аппарата (x_5, x_6) от времени. Удобно ввести соответствующий корреляционный масштаб

$$L_c = \tau v, \quad (4.36)$$

равный расстоянию, проходимому космическим аппаратом за время τ (характерный временной масштаб ионосферных флуктуаций). Заметного проявления нестационарных эффектов следует ожидать в случае $L_c \leq L$.

Введем сокращенное обозначение

$$\beta_{ij} = -\frac{k_i k_j H}{4} A_{\omega_i \omega_j}(0). \quad (4.37)$$

Отрицательный знак перед выражением (4.37) связан с принятым здесь формальным определением волновых чисел (4.35). При таком выборе большая часть коэффициентов β_{ij} (4.37) получаются положительными. Очевидно, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

Разлагая входящую в выражение (4.21) экспоненциальную функцию в ряды Тейлора по слагаемым суммы в её показателе, получим (учитывая 4.20)

$$M(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \exp\left(\frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \beta_{44}}{2}\right) \quad (4.38)$$

$$\sum_{\{n_{ij}\}} \prod_{i,j} \frac{\beta_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!} \exp\left(-\frac{n_{ij}(x_i - x_j)^2}{\sigma_x^2} - \frac{n_{ij}(y_i - y_j)^2}{\sigma_y^2} - \frac{n_{ij}(t_i - t_j)^2}{\tau^2}\right).$$

Показатели экспонент в (4.38) равны нулю при $i = j$. Учитывая это, разложение (4.38) имеет смысл проводить лишь по шести коэффициентам $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{34}$ с суммированием по соответствующим индексам n_{ij} . Проводя вычисления по соответствующим формулам, (учитывая что $\beta_{11} = \beta_{22}$ and $\beta_{33} = \beta_{44}$), получим выражение для двухчастотной корреляционной функции принятого сигнала

$$\Gamma(\omega_I, \omega_{II}) = \left(\frac{k_I k_{II}}{4\pi z_1^2 z_2} \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \right)^2 \exp(\beta_{22} + \beta_{44}) \sum_{\{n\}} \frac{\beta_{12}^{n_{12}} \beta_{34}^{n_{12}} \beta_{13}^{n_{13}} \beta_{14}^{n_{14}} \beta_{23}^{n_{23}} \beta_{24}^{n_{24}}}{n_{12}! n_{34}! n_{13}! n_{14}! n_{23}! n_{24}!} \quad (4.39)$$

$$\int \exp \left(-A_{ij}^{(x)} x_i x_j \right) dx_1 \dots dx_6 \int \exp \left(-A_{ij}^{(y)} y_i y_j \right) dy_1 \dots dy_4,$$

где $A_{ij}^{(x)}$ и $A_{ij}^{(y)}$ – симметричные матрицы вида

$$A_{ij}^{(x)} = \begin{pmatrix} \frac{n_{12}+n_{13}+n_{14}}{\sigma_x^2} - \frac{ik_1(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & \frac{ik_1}{4z_2} - \frac{n_{12}}{\sigma_x^2} & -\frac{n_{13}}{\sigma_x^2} & -\frac{n_{14}}{\sigma_x^2} & \frac{ik_1}{2z_1} & 0 \\ \frac{ik_1}{4z_2} - \frac{n_{12}}{\sigma_x^2} & \frac{n_{12}+n_{23}+n_{24}}{\sigma_x^2} - \frac{ik_1(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & -\frac{n_{23}}{\sigma_x^2} & -\frac{n_{24}}{\sigma_x^2} & \frac{ik_1}{2z_1} & 0 \\ -\frac{n_{13}}{\sigma_x^2} & -\frac{n_{23}}{\sigma_x^2} & \frac{n_{13}+n_{23}+n_{34}}{\sigma_x^2} + \frac{ik_2(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & -\frac{ik_2}{4z_2} - \frac{n_{34}}{\sigma_x^2} & 0 & -\frac{ik_2}{2z_1} \\ -\frac{n_{14}}{\sigma_x^2} & -\frac{n_{24}}{\sigma_x^2} & -\frac{ik_2}{4z_2} - \frac{n_{34}}{\sigma_x^2} & \frac{n_{14}+n_{24}+n_{34}}{\sigma_x^2} + \frac{ik_2(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & 0 & -\frac{ik_2}{2z_1} \\ \frac{ik_1}{2z_1} & \frac{ik_1}{2z_1} & 0 & 0 & \frac{1}{L^2} - \frac{ik_1}{z_1} + \frac{n_{13}+n_{14}}{\tau^2 v^2} + \frac{n_{23}+n_{24}}{\tau^2 v^2} & -\frac{n_{13}+n_{14}}{\tau^2 v^2} - \frac{n_{23}+n_{24}}{\tau^2 v^2} \\ 0 & 0 & -\frac{ik_2}{2z_1} & -\frac{ik_2}{2z_1} & -\frac{n_{13}+n_{14}}{\tau^2 v^2} - \frac{n_{23}+n_{24}}{\tau^2 v^2} & \frac{ik_2}{z_1} + \frac{1}{L^2} + \frac{n_{13}+n_{14}}{\tau^2 v^2} + \frac{n_{23}+n_{24}}{\tau^2 v^2} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

и

$$A_{ij}^{(y)} = \begin{pmatrix} \frac{n_{12}+n_{13}+n_{14}}{\sigma_y^2} - \frac{ik_1(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & \frac{ik_1}{4z_2} - \frac{n_{12}}{\sigma_y^2} & -\frac{n_{13}}{\sigma_y^2} & -\frac{n_{14}}{\sigma_y^2} \\ \frac{ik_1}{4z_2} - \frac{n_{12}}{\sigma_y^2} & \frac{n_{12}+n_{23}+n_{24}}{\sigma_y^2} - \frac{ik_1(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & -\frac{n_{23}}{\sigma_y^2} & -\frac{n_{24}}{\sigma_y^2} \\ -\frac{n_{13}}{\sigma_y^2} & -\frac{n_{23}}{\sigma_y^2} & \frac{n_{13}+n_{23}+n_{34}}{\sigma_y^2} + \frac{ik_2(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} & -\frac{ik_2}{4z_2} - \frac{n_{34}}{\sigma_y^2} \\ -\frac{n_{14}}{\sigma_y^2} & -\frac{n_{24}}{\sigma_y^2} & -\frac{ik_2}{4z_2} - \frac{n_{34}}{\sigma_y^2} & \frac{n_{14}+n_{24}+n_{34}}{\sigma_y^2} + \frac{ik_2(z_1+2z_2)}{4z_1z_2} \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Интегралы с экспоненциальными функциями от квадратичных форм по группам из шести переменных $x_1 \dots x_6$ и четырех переменных $y_1 \dots y_4$ выражаются через определители соответствующих матриц (4.40) и (4.41):

$$\int \exp(-A_{ij}x_i x_j) d^n x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A_{ij}}}. \quad (4.42)$$

4.4 К обоснованию приближения фазового экрана.

В системе спутник - ионосфера - шероховатая поверхность планеты, как правило, характерная толщина неоднородного ионосферного слоя невелика по сравнению с высотой ионосферы над поверхностью и высотой орбиты спутника. Это позволяет сделать предположение, что эффекты, связанные с протяженным характером неоднородного слоя, несущественны по сравнению с эволюцией корреляционной функции при распространении волны в свободном пространстве. При таком допущении является оправданным приближенное описание ионосферы моделью фазового экрана [283], широко применяемое также и для весьма протяженных сред [284]. В работе [143] приведена соответствующая аргументация в пользу обоснования правомерности применения приближения фазового экрана в численном моделировании экспериментов по радиолокации Марса инструментами MARSIS и SHARAD. Непосредственное сравнение результатов

вычисления двухчастотных корреляционных функций полей в приближении фазового экрана и численным решением дифференциальных уравнений Марковского приближения также показывает удовлетворительное согласие этих результатов для возможных ожидаемых экспериментальных ситуаций. Кроме того, степень достоверности приближения фазового экрана в проблемах распространения радиоволн в земной ионосфере многократно выявлена обширной практикой его применения. По сравнению с земной ионосферой, марсианская ионосфера характеризуется значительно меньшим полным электронным содержанием (порядка $1TECU$) и меньшей толщиной (порядка 15 км). Тем самым, в дальнейшем будем считать приближение фазового экрана обоснованным на уровне справедливости Марковского приближения для плавных возмущений плотности ионосферной плазмы.

В этом приближении при моделировании влияния неоднородной ионосферы на корреляционную функцию можно перейти от оператора матричной экспоненты, описывающего решение дифференциального уравнения, к обыкновенному матричному оператору, соответствующему искажению фазы волнового фронта, вносимого тонким фазовым экраном:

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2, z_+, |\vec{\rho}|) = \Gamma(\omega_1, \omega_2, z_-, |\vec{\rho}|) \left\langle \exp \left(\int ik_1 \frac{\varepsilon_1(0, z)}{2} dz - \int ik_2 \frac{\varepsilon_2(\vec{\rho}, z)}{2} dz \right) \right\rangle, \quad (4.43)$$

где $\Gamma(\omega_1, \omega_2, z_{\pm}, |\vec{\rho}|)$ - корреляционная функция до и после фазового экрана, соответственно, $\varepsilon_{1,2}$ - (малое) возмущение диэлектрической проницаемости на обеих частотах в различных точках среды. В рамках предположений, аналогичных сделанных в книге о нормальном распределении возмущения диэлектрической проницаемости среды с нулевыми средними, входящая в уравнение усредненная экспонента от суммы интегралов выражается через характеристическую функцию нормального распределения

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(\int ik_1 \frac{\varepsilon_1(0, z)}{2} dz - \int ik_2 \frac{\varepsilon_2(\vec{\rho}, z)}{2} dz \right) \right\rangle = \\ \exp \left(-\frac{k_1^2}{8} \left\langle \left(\int_z^{z'} \varepsilon_1(0, z) dz \right)^2 \right\rangle - \right. \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{k_2^2}{8} \left\langle \left(\int_z^{z'} \varepsilon_2(\vec{\rho}, z) dz \right)^2 \right\rangle + \frac{k_1 k_2^2}{4} \left\langle \int_z^{z'} \varepsilon_1(0, z) dz \int_z^{z'} \varepsilon_2(\vec{\rho}, z) dz \right\rangle ,$$

где интегрирование ведется по всей толщине неоднородного ионосферного слоя. Вычисляя входящие в это выражение средние величины аналогично тому, как это сделано в [275], найдём для гауссовской функции корреляции плотности неоднородностей

$$\left\langle \exp \left(\int ik_1 \frac{\varepsilon_1(0, z)}{2} dz - \int ik_2 \frac{\varepsilon_2(\vec{\rho}, z)}{2} dz \right) \right\rangle = \quad (4.45)$$

$$\exp \left(-\frac{H}{8} \left(k_1^2 A_{\omega_1, \omega_1}(0) + k_2^2 A_{\omega_2, \omega_2}(0) - 2k_1 k_2 A_{\omega_1, \omega_2}(0) \exp\left(-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \right) \right) .$$

Практически, результаты сравнения расчетов двухчастотных функций когерентности в приближении фазового экрана и численным интегрированием уравнений марковского приближения показали хорошее соответствие двух подходов для рассмотренных здесь ситуаций (см. пример расчета на рис. 4.2).

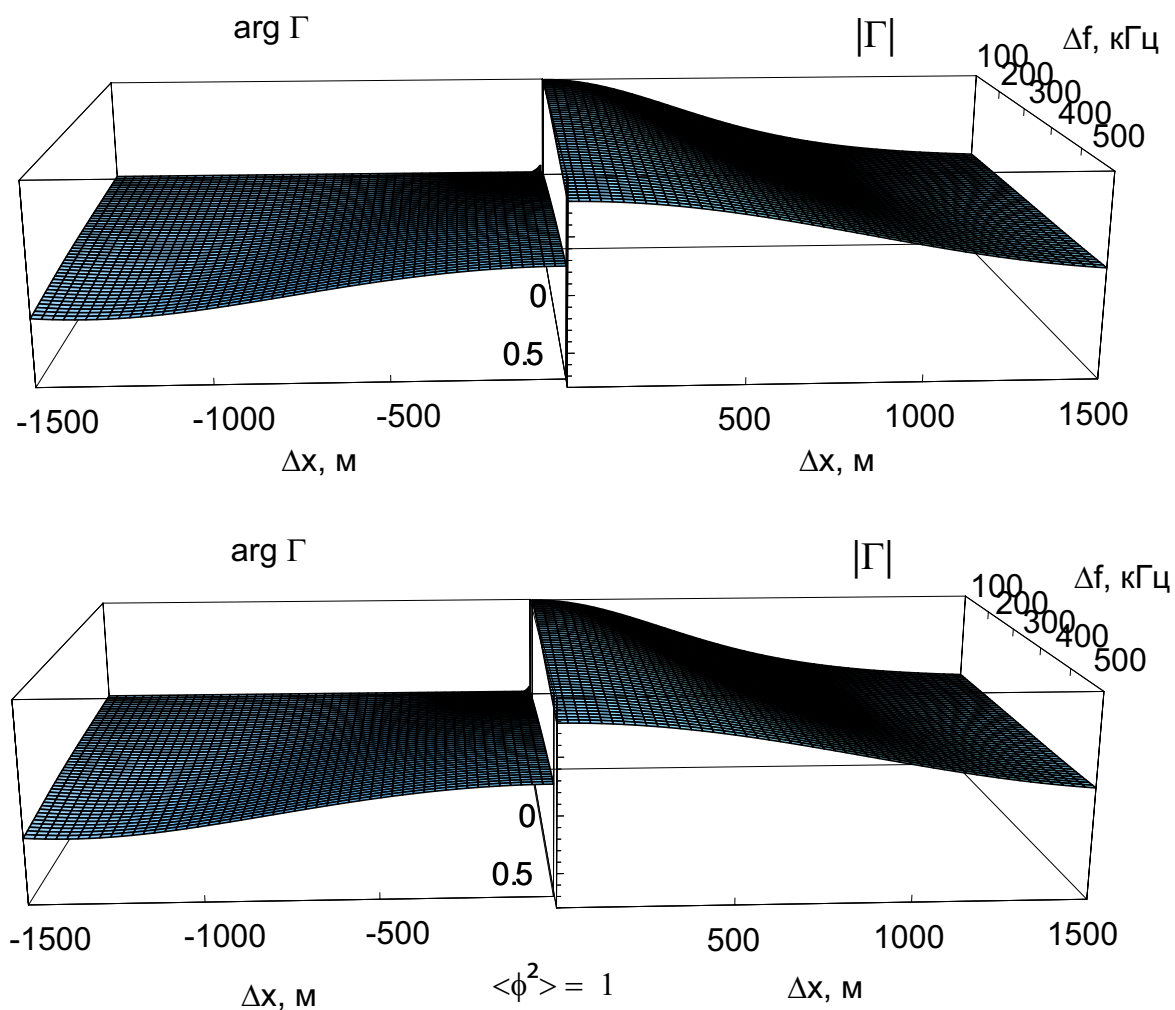


Рис. 4.2: Пример численного расчета двухчастотных корреляционных функций поля волн радиолокатора на поверхности планеты, однократно прошедших неоднородную ионосферу. Верхний график – приближение фазового экрана, нижний график – численное решение уравнений Марковского приближения. Толщина ионосферы 15 км, изотропные гауссовские флуктуации плотности плазмы, корреляционный масштаб r_0^{193} 1 км, средний квадрат флуктуаций фазы $\langle \phi^2 \rangle = 1$, средняя частота $f_0 = 5$ МГц. Левые части диаграмм – аргумент комплексной корреляционной функции, правые части – модуль корреляционной функции (произвольные единицы).

Тем самым, применительно к рассмотренным здесь задачам приближение фазового экрана для распространения радиоволн в ионосфере Марса можно считать обоснованным на уровне справедливости марковского приближения.

4.5 Обсуждение результатов численного моделирования.

Примеры вычисленных сжатых сигналов в присутствии изотропных ($\sigma_x = \sigma_y$) нестационарных ионосферных флуктуаций показаны на рис. 4.4. Следующие значения параметров были приняты для моделирования: ширина полосы ЛЧМ сигнала $B = 1$, центральная частота диапазона ЛЧМ $f_0 = 5$ (диапазон MARSIS IV), плазменная частота регулярной ионосферы $f_{p0} = 4$ (постоянная в пределах слоя), высота ионосферы над поверхностью планеты $z_2 = 120$ км, высота космического аппарата над ионосферой $h = 250$ км, толщина ионосферного слоя $H = 15$ км, длина синтезированной апертуры $2L = 1500$ м, относительный уровень возмущения ионосферной плазмы $\Delta N/N = 0.4\%$, пространственные корреляционные масштабы $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ указаны цифрами при каждой паре кривых на рис. 4.4. Сплошные кривые соответствуют нестационарным корреляциям с масштабом $L_c = \tau v = 333$ м, пунктирные кривые – $L_c = 1669$ м. Пространственный корреляционный масштаб вдоль направления распространения волны принят равным $\sigma_z = 1000$ м.

Можно видеть, что ионосферные флуктуации вызывают увеличение длительности и уменьшение пиковой амплитуды сжатого импульса. Характерная ширина импульса, однако, зависит в основном от пространственного масштаба σ , в то время как пиковая амплитуда сигнала зависит от значений обоих параметров σ и τ .

Невозмущенный импульс (кривая с подписью "Нанп") показана для сравнения в левой части рисунка. Сравнительно большие потери пиковой интенсивности импульса (около -10 дБ при теоретических потерях окна Хэннинга -6 дБ) обусловлены дискретизацией спектра [248] и другими неточностями, допущенными при упрощенной численной процедуре обработки ЛЧМ сигнала в целях повышения вычислительной эффективности алгоритма моделирования.

На рисунке 4.5 показана пиковая амплитуда сжатого импульса в зависимости от σ и $L_c = \tau v$ для различных уровней флуктуаций плотности плазмы $\Delta N/N$, которые указаны цифрами при соответствующих поверхностях на графике.

На рис. 4.6 показаны аналогичные зависимости ширины импульса по уровню -30 дБ ниже максимума. Можно видеть, что ширина импульса фактически зависит лишь от пространственного масштаба корреляции σ .

Для исследования влияния анизотропии корреляционной функции флуктуаций плотности плазмы, проводилось моделирование стационарного фазового экрана ($\tau = \infty$) с различными корреляционными масштабами σ_x и σ_y . Соответствующие результаты показаны на рис. 4.7. Значения корреляционного масштаба σ_y (поперек траектории) указаны цифрами при каждой паре кривых. Каждая пара кривых соответствует двум различным значениям корреляционного масштаба σ_x вдоль траектории (сплошная и пунктирная кривые соответствуют значениям $\sigma_x = 333$ м и $\sigma_x = 1669$ м). Все остальные параметры те же, что и в модели нестационарных флуктуаций плазмы (рис. 4.4, 4.5 и 4.6).

Можно видеть, что два корреляционных масштаба σ_x и σ_y ответственны за различные эффекты искажений радиационного сигнала. Пиковая амплитуда зависит в основном от масштаба вдоль траектории σ_x , в то время как увеличение длительности импульса зависит в основном от поперечного масштаба σ_y . Это можно видеть на рис. 4.8 и 4.9, на которых соответственно показаны зависимости пиковой амплитуды и ширины импульса от корреляционных масштабов σ_x и σ_y для различных уровней флуктуаций плазмы $\delta = \Delta N/N$.

Обнаруженный тип зависимостей связан с характерными особенностями апертурного синтеза, как показано на рис. 4.10. Пиковая амплитуда импульса определяется конструктивной интерференцией импульсов, зарегистрированных в пределах всей длины синтетической апертуры (сплошные стрелки на рис. 4.10). Эти сигналы проходят главным образом через небольшую площадку фазового экрана под космическим аппаратом. Конструктивная интерференция этих сигналов определяется корреляцией флуктуаций фазы во времени и вдоль траектории. Поэтому пиковая амплитуда зависит в основном от σ_x и τ , а не от σ_y .

В отличие от пиковой амплитуды, уширение длительности импульса определяется боковыми отражениями, приходящими со всех боковых направлений, близких к нормали к траектории полета (пунктирные стрелки на рис. 4.10). Сигналы в направлениях, далеких от нормали, подавляются направленным действием синтетической апертуры. Эти отражения образуются волнами, дифрагирующими в целой полосе фазового экрана, как показано на рис. 4.10, и интенсивность этой дифракции определяется корреляционным масштабом σ_y , то есть поперек траектории.

Параметры, выбранные для моделирования ($f_{p0} = 4$ МГц) соответствуют дневной марсианской атмосфере. По результатам радиозатменных экспериментов [285] и радиолокационным данным [286], максимальная плазменная частота ионосферы Марса превышает 3.5 МГц при солнечных зенитных углах, меньших 50° . При солнечных зенитных углах, меньших 40° , она приближается к 4 МГц и превосходит это значение во время интенсивных солнечных вспышек. В то же время, в литературе опубликованы данные полного электронного содержания (ПЭС) марсианской атмосферы по результатам обработки радиолокационных данных MARSIS при солнечных зенитных углах от 25° и более.

Таким образом, проявления исследованных здесь эффектов следует ожидать в основном в дневных условиях. В ночных условиях, когда критическая частота плазмы падает ниже 1 МГц, оценки дают малые значения фазовых флуктуаций даже для высоких относительных уровней флуктуаций плотности плазмы (см. таблицу 4.1). Таким образом, влияние флуктуаций ночной марсианской ионосферы на радиолокационные сигналы декаметрового диапазона следует считать пренебрежимо малым.

Некоторые оценки среднего квадрата флуктуаций фазы $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ на средней частоте четвертого диапазона радиолокатора MARSIS Band IV (5 МГц) приведены в таблице 4.1 для различных значений плазменной частоты f_{p0} и уровней флуктуаций плотности плазмы $\delta = \Delta N/N$ ($H = 15$ км, $\sigma_z = 1$ км). Для наиболее вероятных значений $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ согласно таблице 4.1, проведено численное моделирование.

Типичные частотные зависимости двухчастотной корреляционной функции, характерные для рассматриваемой модели, показаны на рис. 4.11.

Таблица 4.1: Среднеквадратичные флуктуации фазы сигнала $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$

δ	1. МГц	2. МГц	3. МГц	4. МГц
0.001	0.011	0.047	0.122	0.288
0.002	0.022	0.094	0.243	0.576
0.003	0.033	0.141	0.365	0.865
0.004	0.044	0.189	0.486	1.153
0.005	0.055	0.236	0.608	1.441
0.006	0.066	0.283	0.729	1.729
0.007	0.077	0.33	0.851	2.017
0.008	0.088	0.377	0.973	2.305
0.009	0.099	0.424	1.094	2.594
0.01	0.11	0.472	1.216	2.882

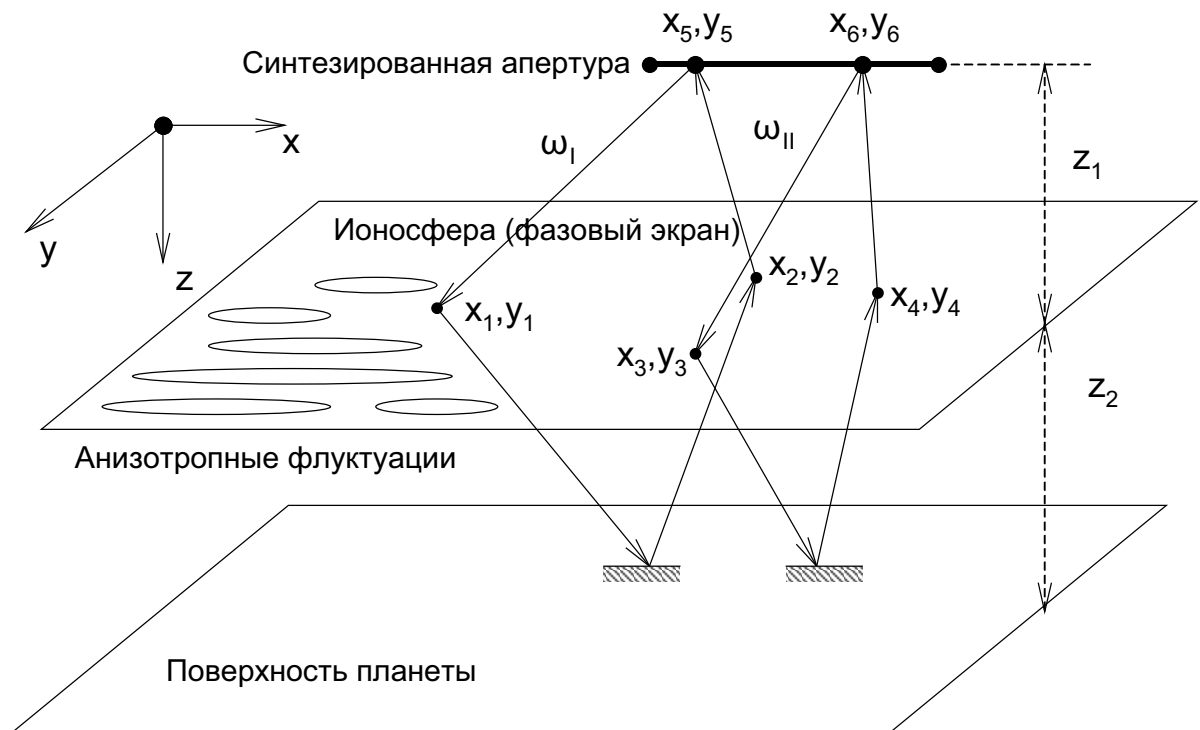


Рис. 4.3: Схематическое изображение эксперимента по глубинной радиолокации.

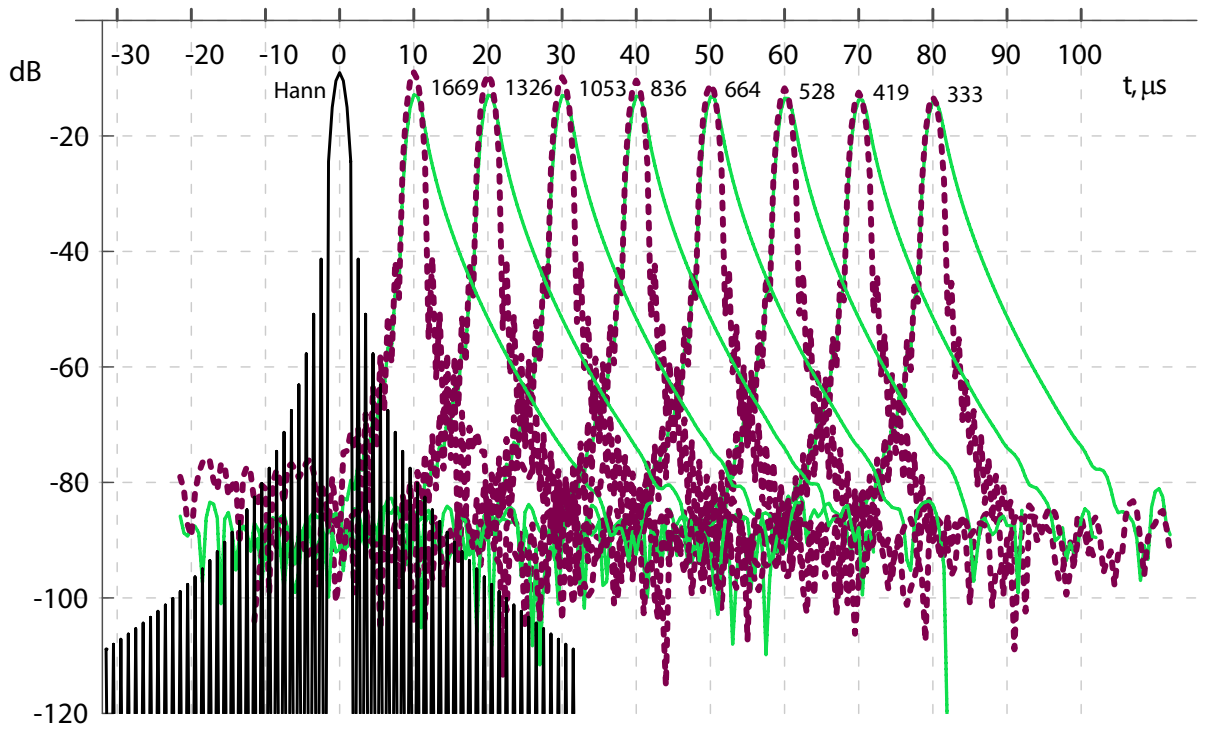


Рис. 4.4: Численное моделирование ионосферных искажений ЛЧМ сигналов глубинной радиолокации. Диапазон 4.5 - 5.5 МГц (четвертый рабочий диапазон инструмента MARSIS). Толщина ионосферного слоя $H = 15$ км, плазменная частота ионосферы $f_{p0} = 4$ МГц. Сплошные кривые соответствуют нестационарным корреляциям с масштабом $L_c = \tau v = 333$ м, пунктирные кривые – $L_c = 1669$ м.

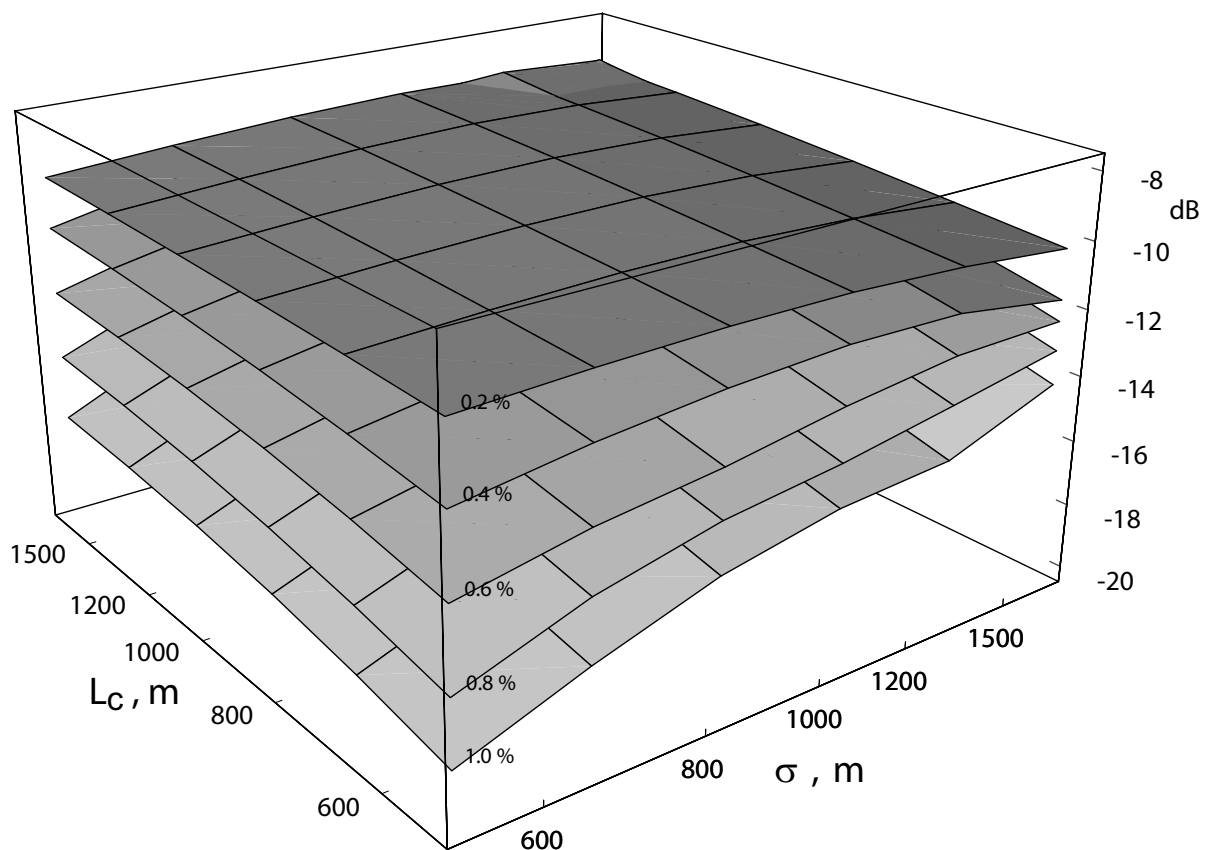


Рис. 4.5: Деградация пиковой амплитуды ЛЧМ сигналов в зависимости от масштаба корреляции флуктуаций плотности ионосферной плазмы σ и характерного масштаба L_c (4.36).

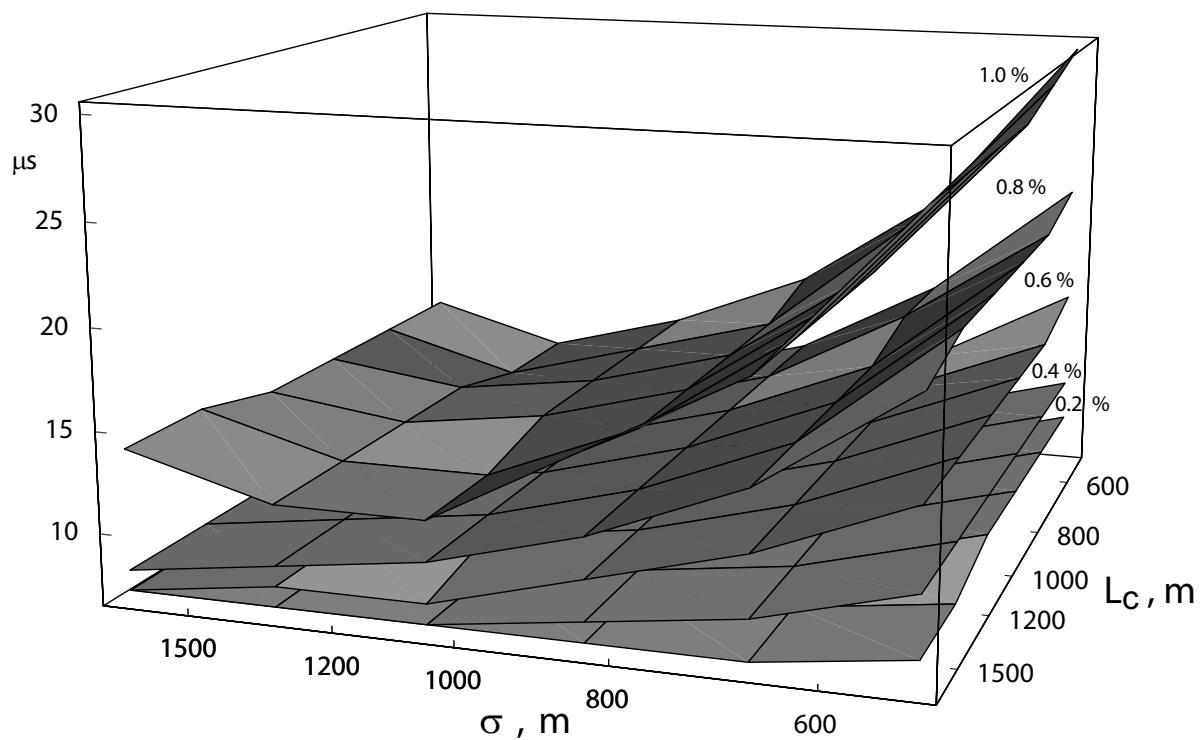


Рис. 4.6: Увеличение длительности сжатых ЛЧМ импульсов в зависимости от масштаба корреляции флуктуаций плотности ионосферной плазмы σ и характерного масштаба L_c (4.36).

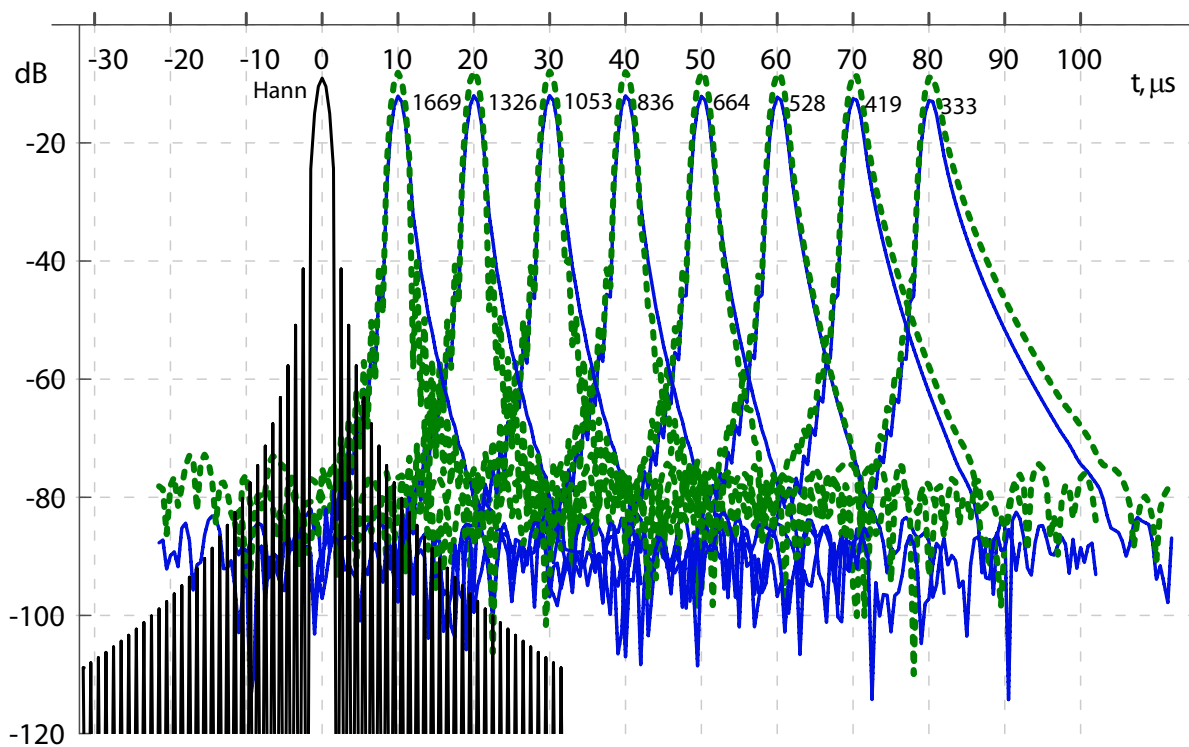


Рис. 4.7: Численное моделирование ионосферных искажений ЛЧМ сигналов глубинной радиолокации при анизотропных флуктуациях плотности плазмы. Диапазон 4.5 - 5.5 МГц (четвертый рабочий диапазон инструмента MARSIS). Толщина ионосферного слоя $H = 15$ км, плазменная частота ионосферы $f_{p0} = 4$ МГц. Сплошная и пунктирная кривые соответствуют значениям $\sigma_x = 333$ м и $\sigma_x = 1669$ м.

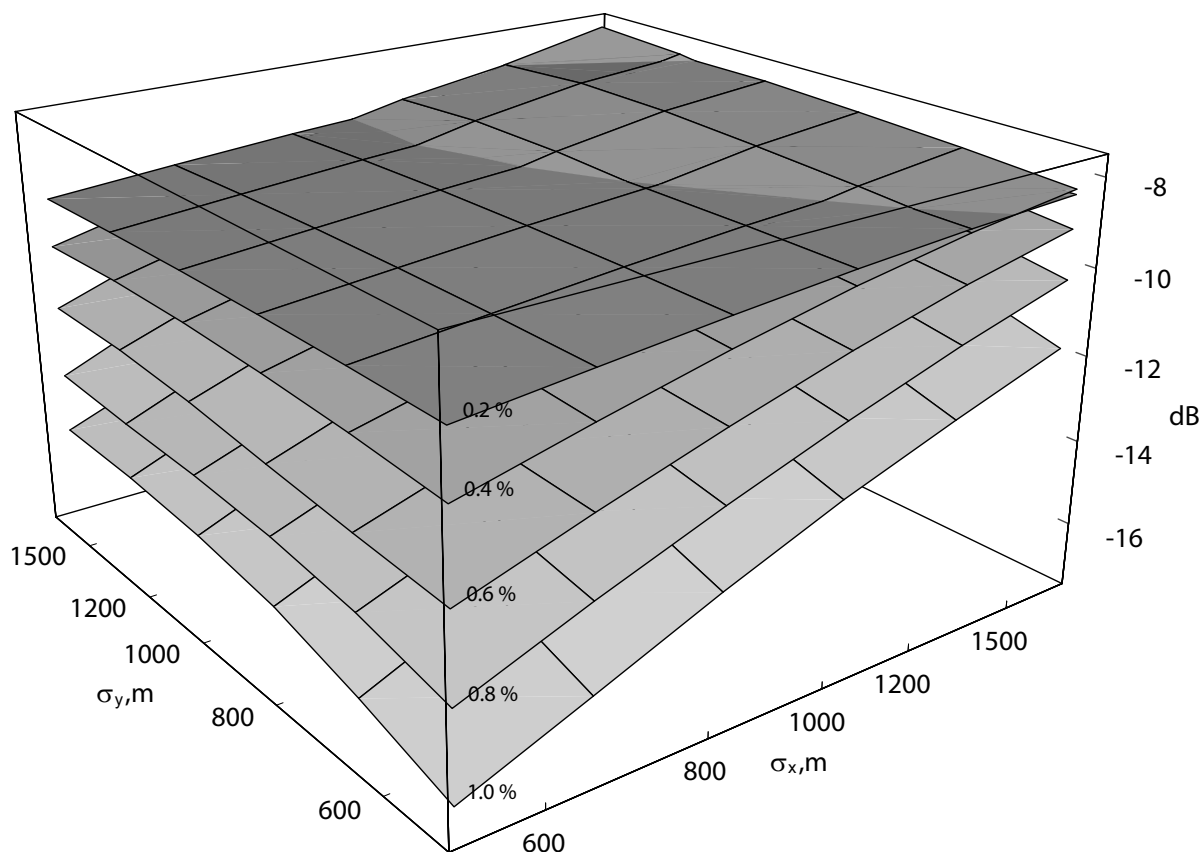


Рис. 4.8: Дегерация пиковой амплитуды ЛЧМ сигналов в зависимости от масштабов корреляции анизотропных флуктуаций плотности плазмы σ_x and σ_y (вдоль и поперек траектории космического аппарата, соответственно). Сплошная и пунктирная кривые соответствуют значениям $\sigma_x = 333$ м и $\sigma_x = 1669$ м.

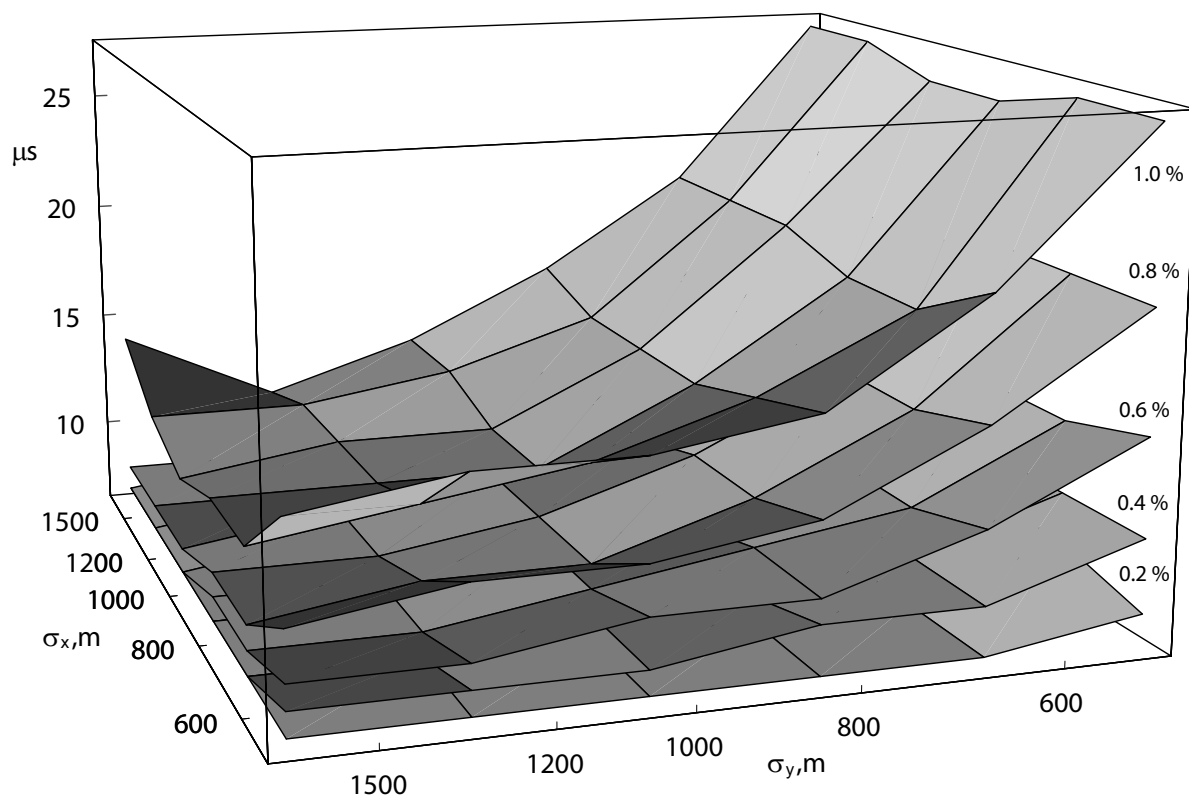


Рис. 4.9: Увеличение длительности ЛЧМ сигналов в зависимости от масштабов корреляции анизотропных флуктуаций плотности плазмы σ_x and σ_y (вдоль и поперек траектории космического аппарата, соответственно).

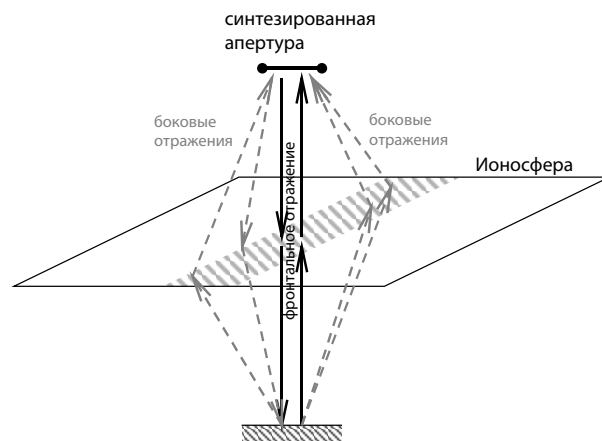


Рис. 4.10: Схема распространения радиолокационных сигналов (к пояснению влияния различных масштабов корреляции флуктуаций плотности плазмы).

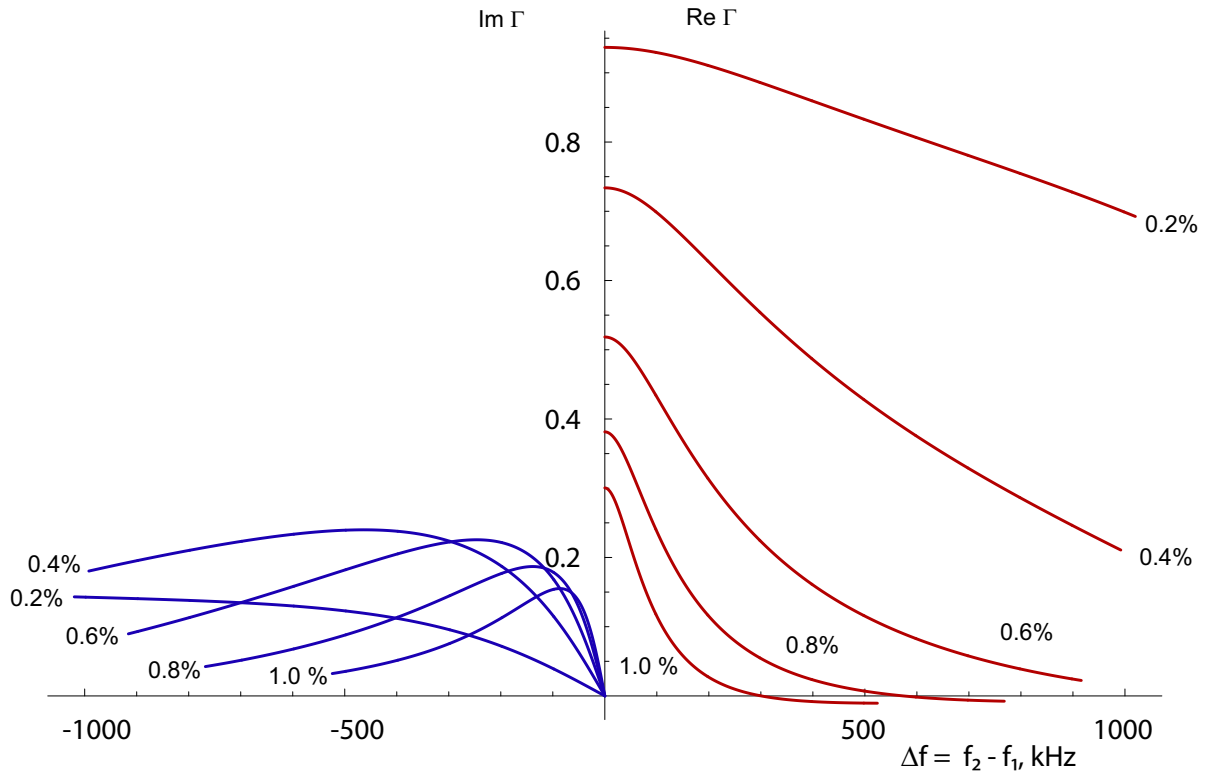


Рис. 4.11: Типичная двухчастотная функция корреляции ЛЧМ сигнала согласно формуле (4.39). $f_{p0} = 4$ МГц, $\sigma_x = 528$ м, $\sigma_y = 419$ м.

4.6 Квазислучайная модель фазового экрана.

Схема эксперимента по глубинному радиозондированию радиолокатором с синтезированной апертурой показана на рис. 4.12. Запишем выражение для комплексной амплитуды монохроматического сигнала, принимаемого приемником радиолокатора после отражения от поверхности планеты с двукратным прохождением ионосферы по пути от космического аппарата к поверхности и обратно. Поверхность планеты будем считать плоской и горизонтальной. На высоте z_2 над поверхностью планеты расположен слой ионосферы, содержащий флуктуации плотности плазмы. Космический аппарат движется параллельно поверхности планеты по горизонтальной траектории на высоте $h = z_1 + z_2$ над поверхностью планеты. Ионосферный слой с неоднородностями приближенно описывается моделью фазового экрана, вносящего в волновой фронт проходящей волны фазовый сдвиг, зависящий от координаты и частоты.

Поскольку в данной работе основное внимание уделяется влиянию ионосферных флуктуаций, эффекты, связанные с шероховатостью поверхности рас-

смотрены не будут. Как поверхность планеты, так и глубинные отражающие горизонты считаются плоскими и горизонтальными. Распространение волн от передатчика к поверхности и обратно к приемнику можно рассматривать в приближении параболического уравнения дифракции [275], а коэффициент отражения сигнала от слоистой коры планеты вычислять для нормально падающей волны. В этом приближении сигнал радиолокатора частоты ω , принятый на космическом аппарате после отражения от поверхности планеты и двукратного прохождения ионосферы, будет выражаться при помощи формулы:

$$E(\omega) = R(\omega) \int dx_2 dy_2 \int dx_3 dy_3 \frac{1}{z_1} \frac{k}{4\pi i z_2} \frac{k}{2\pi i z_1} \exp \left(i k z_1 + i \frac{k(x_1 - x_2)^2}{2z_1} + i \frac{k(y_1 - y_2)^2}{2z_1} + i \phi(x_2, y_2) + 2i k z_2 + i \frac{k(x_2 - x_3)^2}{4z_2} + i \frac{k(y_2 - y_3)^2}{4z_2} + i \phi(x_3, y_3) + i k z_1 + i \frac{k(x_3 - x_4)^2}{2z_1} + i \frac{k(y_3 - y_4)^2}{2z_1} \right), \quad (4.46)$$

где $R(\omega)$ - коэффициент отражения плоской волны поверхностью планеты, $\phi(x, y)$ - вносимый ионосферой фазовый сдвиг, x_1, y_1 - координаты источника сигнала (космического аппарата в момент излучения импульса), x_2, y_2 и x_3, y_3 - координаты на плоскости фазового экрана при первом и втором прохождении сигнала через ионосферу соответственно, x_4, y_4 - координаты приемника сигнала (космического аппарата в момент приема отраженного импульса), z_2 - высота ионосферы над поверхностью планеты, $z_1 = h - z_2$ - расстояние от спутника до ионосферного слоя. Будем считать, что траектория космического аппарата расположена параллельно оси x . Синтез апертуры сводится к интегрированию выражения (4.46) по участку траектории соответствующей длины. Перемещением космического аппарата по траектории за время распространения импульса до поверхности и обратно будем пренебрегать и приближенно полагать $x_1 = x_4$, $y_1 = y_4$.

Фазовый сдвиг $\phi(x, y)$, вносимый ионосферой в проходящий сигнал, в приближении фазового экрана равен фазовому пути по прямолинейной траектории, пересекающей ионосферный слой. Регулярную часть вносимого экраном фазового сдвига, связанную с дисперсией в слоистой ионосфере, будем считать полностью скомпенсированной. В случае нормального распределения флуктуаций плотности плазмы средний квадрат случайной компоненты фазового сдвига

волны, прошедшей неоднородный слой толщины H , равен [275]

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{k^2}{4} \left\langle \left(\int \varepsilon_1 dz \right)^2 \right\rangle = \frac{k^2}{4} A(0) H, \quad (4.47)$$

где

$$A(\rho) = 2\pi \int \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}, \rho) d^2 \vec{\kappa}, \quad (4.48)$$

где $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ - фурье-трансформанта корреляционной функции случайной компоненты диэлектрической проницаемости. Учитывая, что [275]

$$\langle \varepsilon_1^2 \rangle = \int \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}, \rho) d^2 \vec{\kappa} d\rho, \quad (4.49)$$

можно записать

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{k^2}{4} H \langle \varepsilon_1^2 \rangle \frac{\int 2\pi \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}, 0) d^2 \vec{\kappa}}{\int \Phi_\varepsilon(\vec{\kappa}, \rho) d^2 \vec{\kappa} d\rho}. \quad (4.50)$$

Входящее в выражение (4.50) отношение двух интегралов определяет характерный масштаб продольных корреляций флуктуаций диэлектрической проницаемости среды. Для приблизительных оценок можно считать, что этот масштаб приблизительно совпадает с характерным размером неоднородностей ионосферы, и одного порядка величины с поперечным масштабом корреляций, т.е. единиц километров. Подставляя формулы (4.26, 4.27) в (4.49, 4.50), можно видеть, что средний квадрат флуктуаций фазового пути в ионосфере определяется главным образом отношением ω_{p1}^2/ω^2 , т.е. относительным возмущением плотности плазмы, который может варьироваться в весьма широких пределах. Так, в работе [269] при исследовании разрешающей способности радиолокатора рассмотрен диапазон значений возмущений концентрации электронов в земной ионосфере от 0.5% (ионосфера средних широт) до 10% (авроральные области). В зависимости от интенсивности флуктуаций, критической частоты ионосферы, частоты сигнала и других факторов средний квадрат фазового пути в ионосфере может изменяться в широком диапазоне значений, в частности, он может быть как мал, так и велик по сравнению с единицей. Так, при типичных для Марса значениях толщины ионосферного слоя $H = 15$ км и критической частоты 4 МГц (характерная величина для солнечных зенитных углов порядка $40 - 50^\circ$ [285]), для частоты сигнала 5 МГц, масштаба продольных корреляций 1 км и возмущения концентрации электронов 1%, формулы (4.27)-(4.50) дают

величину среднеквадратичного отклонения фазы $\sqrt{\langle\phi^2\rangle} \approx 4$ радиан. Хотя этот средний квадрат случайного фазового сдвига зависит от частоты сигнала, эта зависимость не является определяющим фактором, приводящим к принципиальным физическим эффектам. Для не очень широкополосных сигналов этой зависимостью можно пренебречь и считать среднеквадратичный фазовый сдвиг постоянным в пределах всего диапазона ЛЧМ сигнала.

4.7 Численное моделирование квазислучайного экрана.

В работе [274] принята упрощенная квазислучайная модель неоднородной ионосферы, представляющая собой суперпозицию нескольких синусоидальных компонент со случайными амплитудами и фазами вида

$$\phi = \sum_i A_i \cos(k_i x), \quad (4.51)$$

зависящими от одной координаты (той, по которой производится синтез апертуры). Подобная модель использовалась в работе [287] для анализа хаоса лучевых траекторий в случайно-неоднородной ионосфере. Можно показать, что фазовый множитель, связанный со сдвигом фазы в ионосфере, разлагается в ряд по синусоидальным компонентам в соответствии с формулой

$$\exp(iA_1 \cos(k_1 x) + iA_2 \cos(k_2 x) + iA_3 \cos(k_3 x) + \dots) = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} i^{n_1+n_2+n_3+\dots} J_{n_1}(A_1) \times J_{n_2}(A_2) \times J_{n_3}(A_3) \times \dots \times \exp(ik_1 n_1 x + ik_2 n_2 x + ik_3 n_3 x + \dots), \quad (4.52)$$

где $J_n(\cdot)$ - цилиндрические функции Бесселя. Суммирование по каждому из индексов n_i ведется по всему множеству целых чисел.

Для численного расчета значения параметров A_i и k_i должны выбираться таким образом, чтобы обеспечить наилучшее соответствие модельного спектра, определенного формулами (4.51) и (4.52) с пространственным спектром реальных флуктуаций. Наиболее изученными являются флуктуации плотности плазмы земной ионосферы [288]. Имеются также теоретические и экспериментальные факты, указывающие на возможность присутствия флуктуаций плотности плазмы в ионосферах других планет, в частности, Марса [289]. Надежные дан-

ные измерений флуктуаций марсианской ионосферы в рассматриваемом диапазоне масштабов пока отсутствуют [290].

В такой ситуации, в качестве разумного допущения для выбора конкретных значений пространственных параметров масштаба k_i и соответствующих амплитуд пространственного спектра A_i могут использоваться экспериментальные результаты по измерению флуктуаций в земной ионосфере.

Кроме того, как указано в работе [291], диапазон масштабов неоднородностей среды, эффективно участвующих в рассеянии, также ограничен. В частности, при не очень сильных флуктуациях наиболее эффективно участвуют в рассеянии структуры с размером порядка зоны Френеля, в данной задаче по порядку величины совпадающим с характерным корреляционным масштабом. С другой стороны, используемое в наших расчетах приближение плавных возмущений также является справедливым в некотором диапазоне масштабов неоднородностей среды. Таким образом, параметры численной модели должны быть выбраны с учетом всех этих соображений.

В численных расчетах применялась аппроксимация фазового экрана по формуле (4.51) с тремя синусоидальными компонентами с периодами 1500, 1900 и 2400 м. и относительными амплитудами, спадающими в соответствии с выбранной моделью [274]. В такой модели средний квадрат фазового сдвига $\langle \phi^2 \rangle$, вносимого экраном, равен половине суммы квадратов амплитуд синусоидальных компонент фазового сдвига (4.51). В численных расчетах среднеквадратичное отклонение фазы $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ варьировалось в широких пределах от 10^{-1} до 5 радиан.

Подставляя разложение (4.52) в выражение для отраженного сигнала (4.46), дважды прошедшего ионосферу, получим сумму по двум наборам индексов $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$, $\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$, где каждый индекс принимает целочисленные значения от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} E(\omega) = R(\omega) \int dx_2 dy_2 \int dx_3 dy_3 \frac{1}{z_1} \frac{k}{4\pi i z_2} \frac{k}{2\pi i z_1} \\ \sum_{n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3} i^{n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3} J_{n_1}(A_1) J_{n_2}(A_2) J_{n_3}(A_3) J_{m_1}(A_1) J_{m_2}(A_2) J_{m_3}(A_3) \\ \exp \left(ikz_1 + i \frac{k(x-x_2)^2}{2z_1} + i \frac{ky_2^2}{2z_1} \right. \\ \left. + i\kappa_2 x_2 + 2ikz_2 + i \frac{k(x_2-x_3)^2}{4z_2} + i \frac{k(y_2-y_3)^2}{4z_2} + i\kappa_3 x_3 + ikz_1 + i \frac{k(x_3-x)^2}{2z_1} + i \frac{ky_3^2}{2z_1} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

где принято $x_1 = x_4 = x$, $y_1 = y_4 = 0$, $\kappa_2 = k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3$, $\kappa_3 = k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3$, соответственно. Синтез апертуры, т.е. интегрирование по x по участку траектории космического аппарата длины $2L$, приближенно заменим интегрированием по всей траектории с весом $(\sqrt{\pi}L)^{-1} \exp(-(x-x_0)^2/L^2 + i\pi\nu(x-x_0)/L)$, быстро спадающим за пределами синтезированной апертуры (ν - номер доплеровского фильтра, x_0 - середина синтезированной апертуры). В результате вычисление выражения (4.53) сведется к суммированию интегралов вида (4.10)

$$\int \exp(-A_{ij}x_i x_j + B_i x_i) d^n x = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A_{ij}}} \exp\left(\frac{B^T A_{ij}^{-1} B}{4}\right). \quad (4.54)$$

Переменные интегрирования в (4.53) разделяются на группы координат $\{x_2, x_3, x\}$ и $\{y_2, y_3\}$ для которых матрица A_{ij} и столбец B_i равны соответственно

$$A_{ij}^{(x)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{L^2} - \frac{ik}{z_1} & \frac{ik}{2z_1} & \frac{ik}{2z_1} \\ \frac{ik}{2z_1} & -\frac{ik(z_1+2z_2)}{4z_1 z_2} & \frac{ik}{4z_2} \\ \frac{ik}{2z_1} & \frac{ik}{4z_2} & -\frac{ik(z_1+2z_2)}{4z_1 z_2} \end{vmatrix}, \quad (4.55)$$

$$B_i^{(x)} = \begin{vmatrix} \frac{iL\pi\nu+2x_0}{L^2} \\ i\kappa_2 \\ i\kappa_3 \end{vmatrix} \quad (4.56)$$

и

$$A_{ij}^{(y)} = \begin{vmatrix} -\frac{ik(z_1+2z_2)}{4z_1 z_2} & \frac{ik}{4z_2} \\ \frac{ik}{4z_2} & -\frac{ik(z_1+2z_2)}{4z_1 z_2} \end{vmatrix}, \quad (4.57)$$

$$B_i^{(y)} = 0. \quad (4.58)$$

Можно показать, что произведение определителей матриц равно

$$\det A_{ij}^{(x)} \det A_{ij}^{(y)} = \frac{k^4(z_1 + z_2)^2}{16L^2 z_1^4 z_2^2}. \quad (4.59)$$

Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведём конечный результат

$$E(\omega) = \sum i^{(n_1+n_2+n_3+m_1+m_2+m_3)} J_{n_1}(A_1) J_{n_2}(A_2) J_{n_3}(A_3) J_{m_1}(A_1) J_{m_2}(A_2) J_{m_3}(A_3) \exp\left(-\frac{iz_1((z_1+2z_2)(\kappa_2^2+\kappa_3^2)+2\kappa_3\kappa_2 z_1)L^2+k((\kappa_2+\kappa_3)L^2+\pi\nu L-2ix_0)^2(z_1+z_2)}{4kL^2(z_1+z_2)}\right), \quad (4.60)$$

где суммирование производится по всем шести индексам $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, n_3$. В выражении (4.60) проведена нормировка на амплитуду волны, отраженной от поверхности в отсутствие ионосферы $E_0(\omega) = \exp(2i(z_1 + z_2))/2(z_1 + z_2)$.

Численное моделирование проводилось при значениях параметров, близких к характерным для реальных экспериментов по радиозондированию марсианского грунта [253, 254]: высота ионосферы над поверхностью планеты $z_2 = 100$ км, высота космического аппарата над ионосферой $z_1 = 150$ км, диапазон частот ЛЧМ сигнала $2.5 - 3.5$ МГц, соответствующий второму рабочему диапазону эксперимента MARSIS [253]. Случайная структура ионосферы была приближенно представлена суммой трех синусоидальных компонент с указанными выше пространственными периодами, средний квадрат флуктуаций фазы варьировался в пределах от 0.01 до 25. Структура планетного грунта представлялась двухслойной моделью (слой-полупространство) с поверхностью раздела на глубине 2 км. Электрические параметры сред (слой с коэффициентом преломления $n = 3$, тангенс угла потерь $\tan \delta = 0.01$, на полупространстве $n = 4$ без потерь) были выбраны близкими к типичным значениям, характерным для реального грунта планет [292, 237, 236]. Выражение для коэффициента отражения электромагнитных волн от среды рассматриваемого типа (слой на полупространстве) хорошо известно [243].

4.8 Обсуждение результатов.

На рис. 4.13 и 4.14 показаны профили сжатых ЛЧМ сигналов при нескольких различных длинах синтезированных апертур, включая оптимальное значение для несфокусированного апертурного синтеза (половина радиуса зоны Френеля $2L = \sqrt{\lambda z}/2$ на средней частоте рабочего диапазона ЛЧМ). Среднеквадратичное значение флуктуаций фазы в ионосфере принималось равным $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle} = 2$ радиан (умеренные флуктуации, рис. 4.14) и $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle} = 5$ радиан (сильные флуктуации, рис. 4.13) соответственно. Длина синтезированной апертуры $2L$ указана цифрами при каждой кривой. Можно видеть, что постепенное увеличение длины синтезированной апертуры от нуля до оптимальной величины приводит к росту подавления побочных всплесков сигнала, обусловленных дифракцией волн на неоднородностях ионосферы. При достаточно сильных

флуктуациях фазы (среднеквадратичное значение случайной фазы $\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ порядка нескольких единиц радиан и более) вредные побочные импульсы трудноотличимы от полезного пика сигнала, отраженного от глубинной поверхности раздела.

На рис. 4.15 и 4.16 показаны семейства профилей сжатых ЛЧМ импульсов в зависимости от среднего квадрата случайных флуктуаций фазы $\langle \phi^2 \rangle$ сигнала в ионосфере без применения (рис. 4.15) и с применением синтезированной апертуры оптимальной длины (рис. 4.16) соответственно. Можно видеть, что применение апертурного синтеза позволяет значительно подавить дифракционные помехи в области умеренных флуктуаций фазы ($\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ порядка единицы радиан и менее). При достаточно интенсивных флуктуациях фазы ($\sqrt{\langle \phi^2 \rangle}$ более нескольких единиц радиан) дифракционные помехи оказываются весьма сильными и в случае применения апертурного синтеза. Увеличение длины синтезированной апертуры сверх оптимального значения для несфокусированного апертурного синтеза $2L = \sqrt{\lambda z}/2$ также не дает дополнительного выигрыша в подавлении дифракционных помех.

На рис. 4.17 показаны результаты численного моделирования отраженных ЛЧМ сигналов при пролете спутника с глубинным радиолокатором по рабочему участку траектории полета. Как и следовало ожидать, отражение от глубинного горизонта ($\tau \approx 40\mu s$) становится все менее и менее различимым с увеличением высоты космического аппарата. Флуктуации фазы сигнала в ионосфере считались умеренными ($\sqrt{\langle \phi^2 \rangle} = 2$), интервал высот спутника над поверхностью планеты ($h = 250 - 800\text{ км}$) соответствует рабочему интервалу высот космического георадара MARSIS [253] диапазон частот ЛЧМ и другие параметры те же, что и для остальных численных расчетов в этой работе.

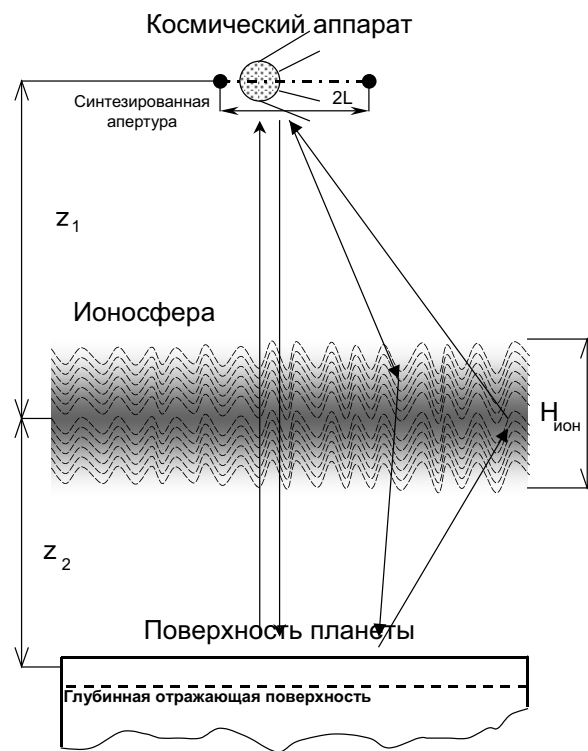


Рис. 4.12: Схема эксперимента по глубинному радиозондированию недр планеты.

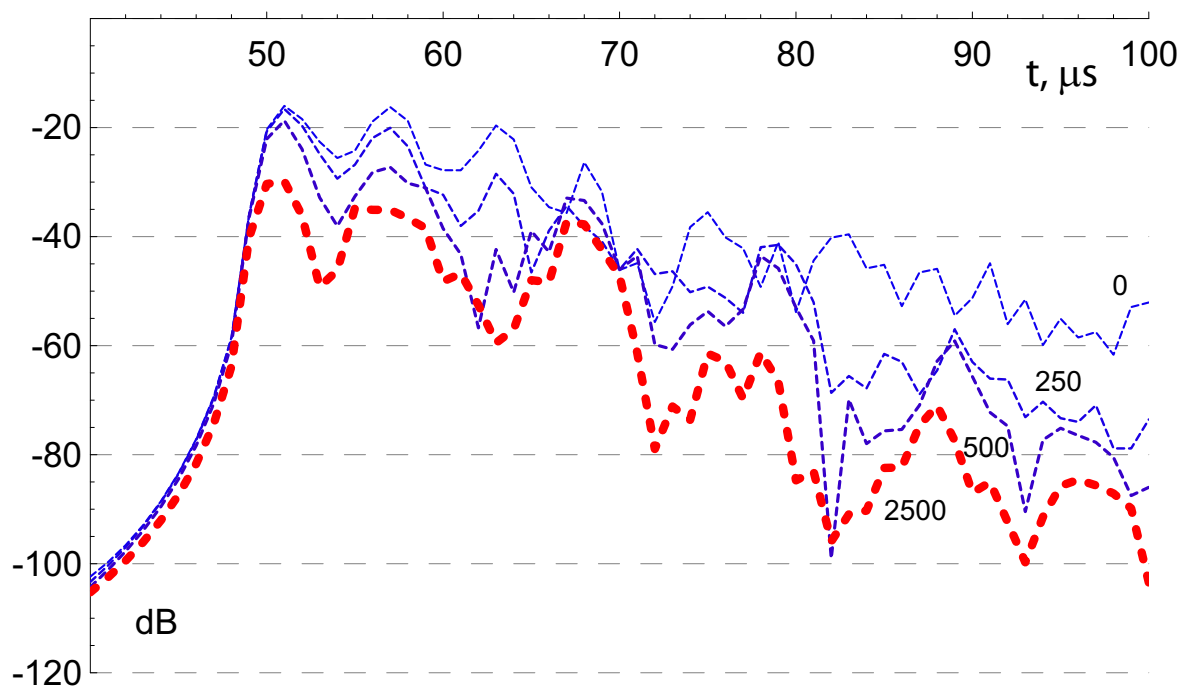


Рис. 4.13: Сильные флуктуации плотности плазмы. $\langle \phi^2 \rangle = 25$

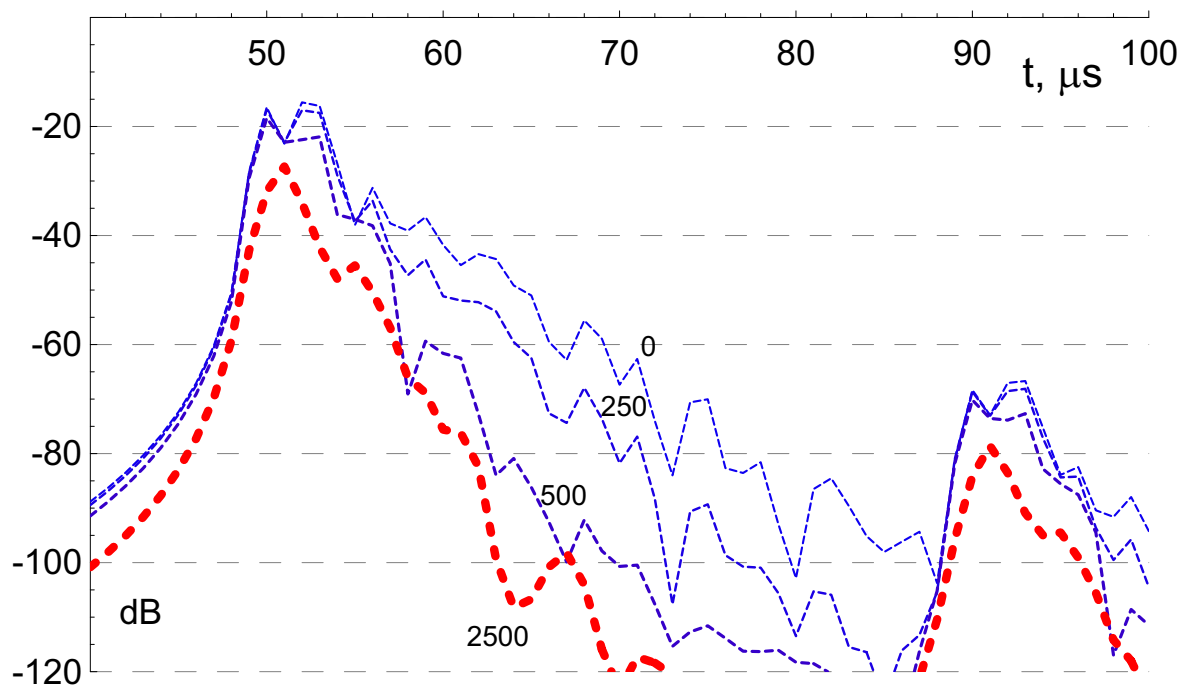


Рис. 4.14: Умеренные флуктуации плотности плазмы. $\langle \phi^2 \rangle = 4$

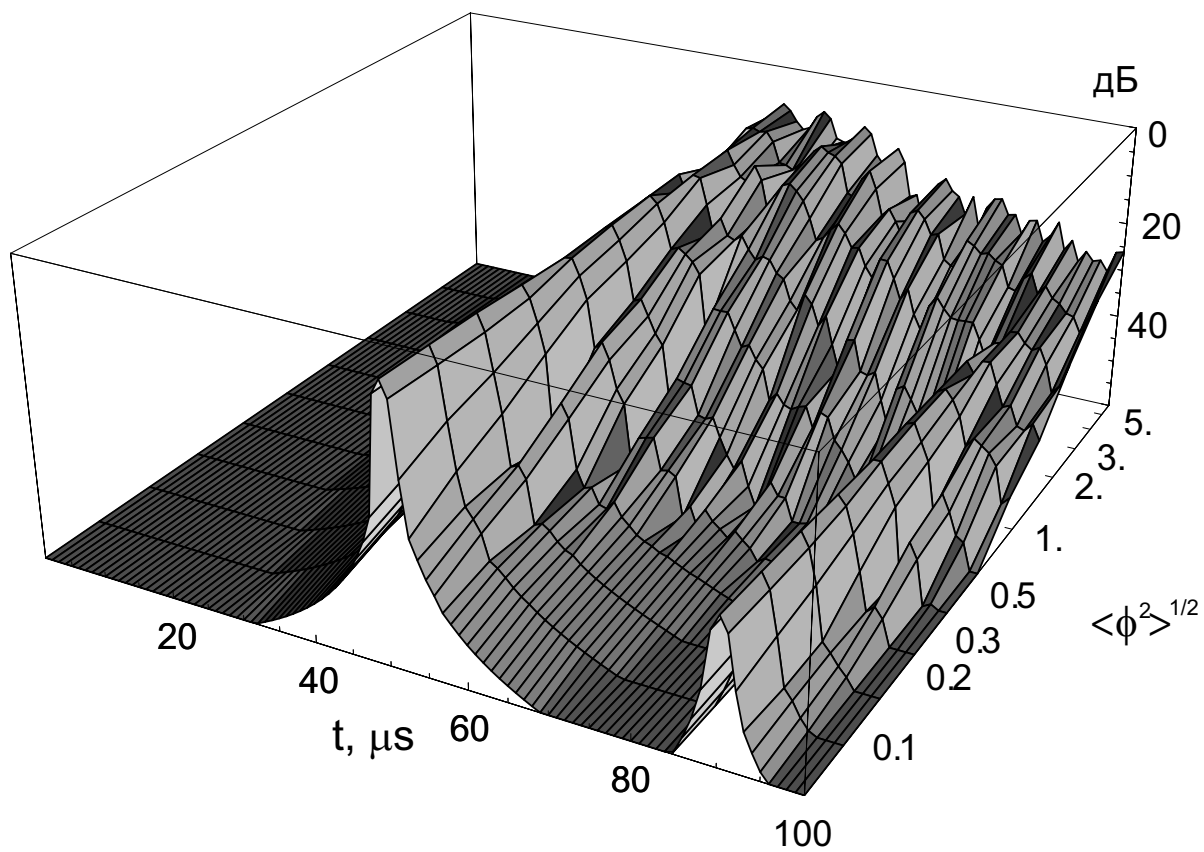


Рис. 4.15: Зондирование одиночным импульсом

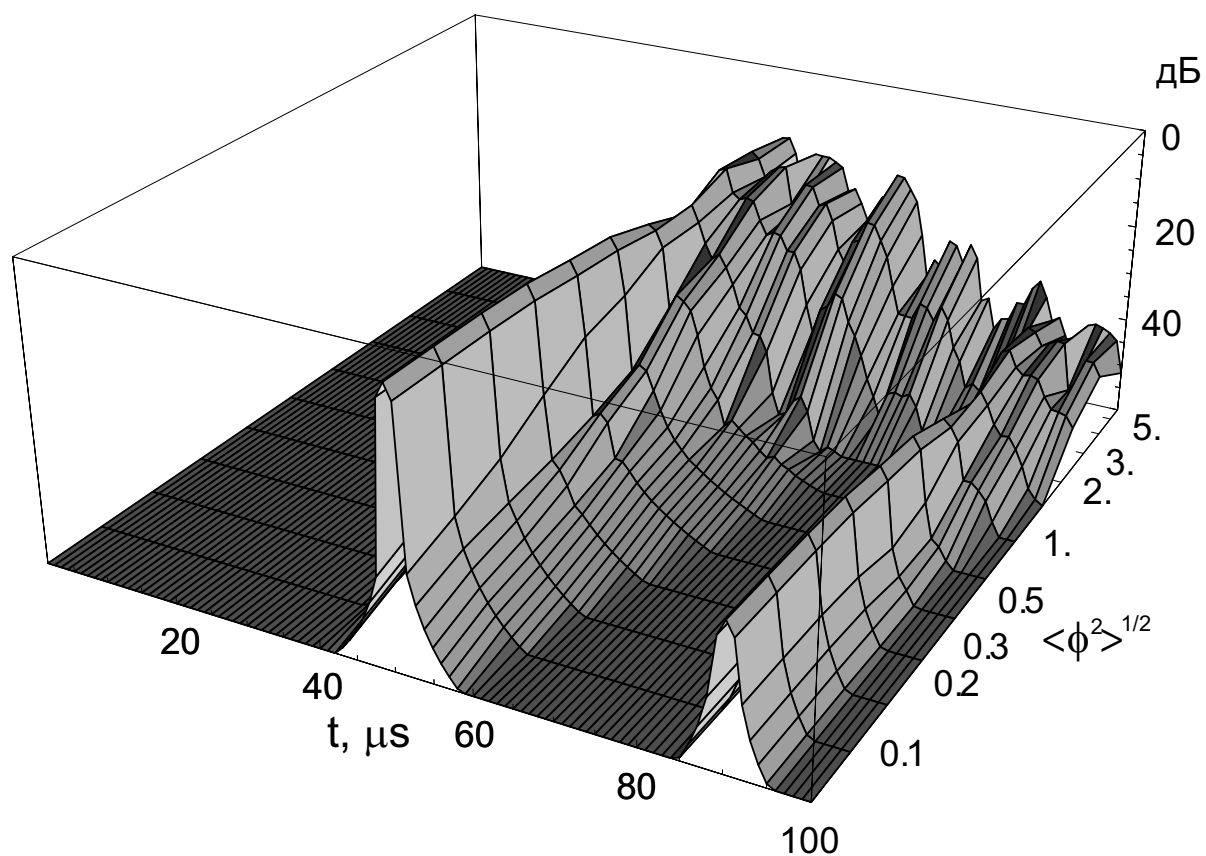


Рис. 4.16: Синтезированная апертура оптимальной длины.

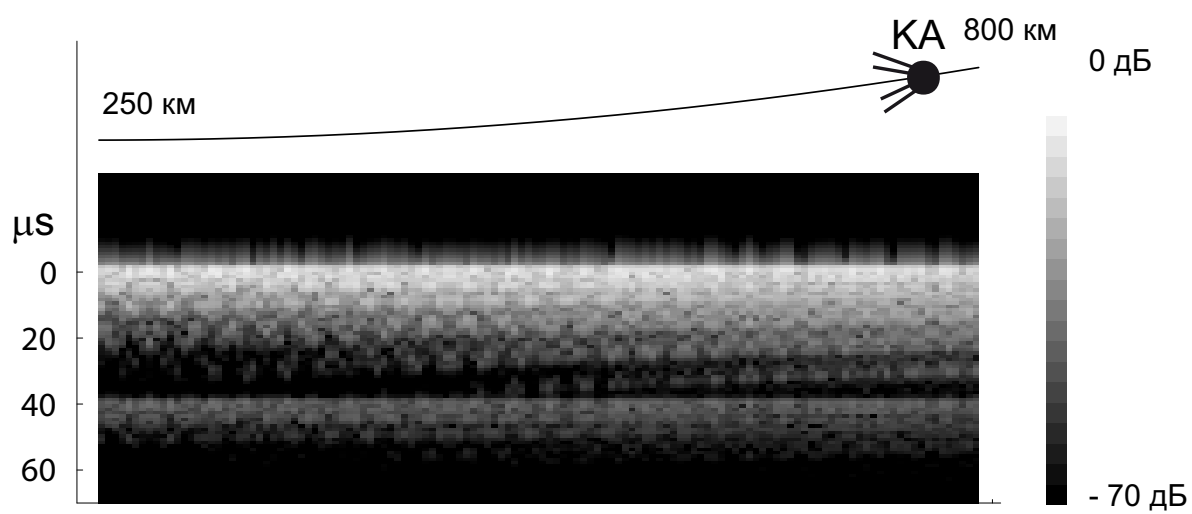


Рис. 4.17: Численное моделирование пролета космического аппарата по орбите.

4.9 Дисперсионные искажения фазы сигналов в регулярной слоистой ионосфере.

Регулярная слоистая ионосфера, расположенная на пути прохождения сигнала, вносит в него регулярные фазовые искажения, которые должны быть соответствующим образом учтены при обработке сигналов. Вопросам оценки и компенсации этих фазовых искажений посвящена обширная литература (см. обзоры в работах [1], а также [2]). В работе [3] представлен алгоритм компенсации искажений, разработанный в рамках проекта MARSIS. Отличительными чертами данного алгоритма являются следующие:

1. Разработана и применена гибридная схема адаптивной компенсации искажений, сочетающая в себе принцип оптимизации контраста сигнала и непосредственной обработки его фазы. Это позволило значительно повысить устойчивость алгоритма при низких отношениях сигнал/шум.

2. Проанализировано большое количество результатов экспериментов по радиозатменному зондированию атмосферы Марса с различных космических аппаратов. По результатам анализа построены оптимальные фазокомпенсирующие функции для адаптивной компенсации искажений, что также значительно повысило качество разработанного алгоритма.

В работе [3] проведено моделирование работы алгоритма в условиях флуктуирующей атмосферы. Показана устойчивость работы алгоритма при наличии флуктуаций ионосферной плазмы. На рис. 4.18 показаны профили сигналов во флуктуирующей ионосфере с частичной компенсацией искажений. На рис. 4.19 показано поведение функции контраста в зависимости от уровня флуктуаций. Видно, что максимум контраста надежно определяется даже при наличии умеренных флуктуаций плотности плазмы. Тем самым, в настоящей работе вопрос компенсации систематических фазовых искажений отдельно не рассматривается. Во всех расчетах регулярные искажения фазы в слоистой ионосфере считаются полностью скомпенсированными.

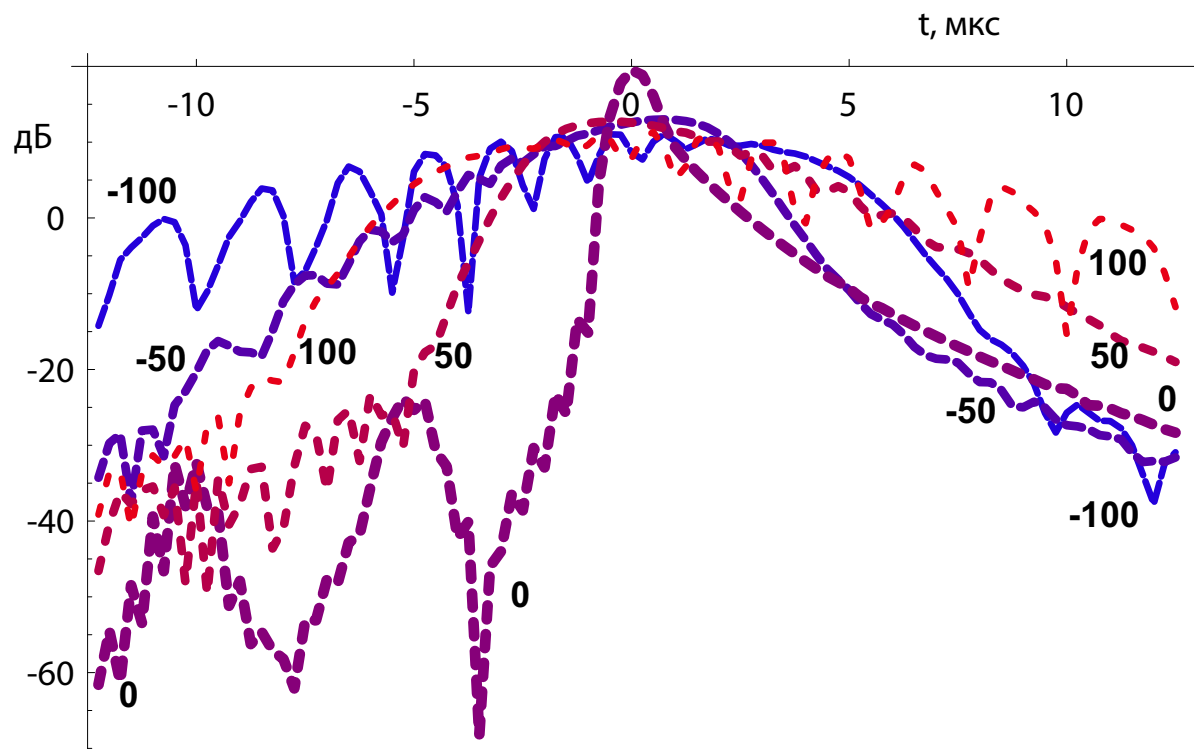


Рис. 4.18: Одновременное влияние регулярной ионосферы и случайных флуктуаций. Частичная компенсация искажений.

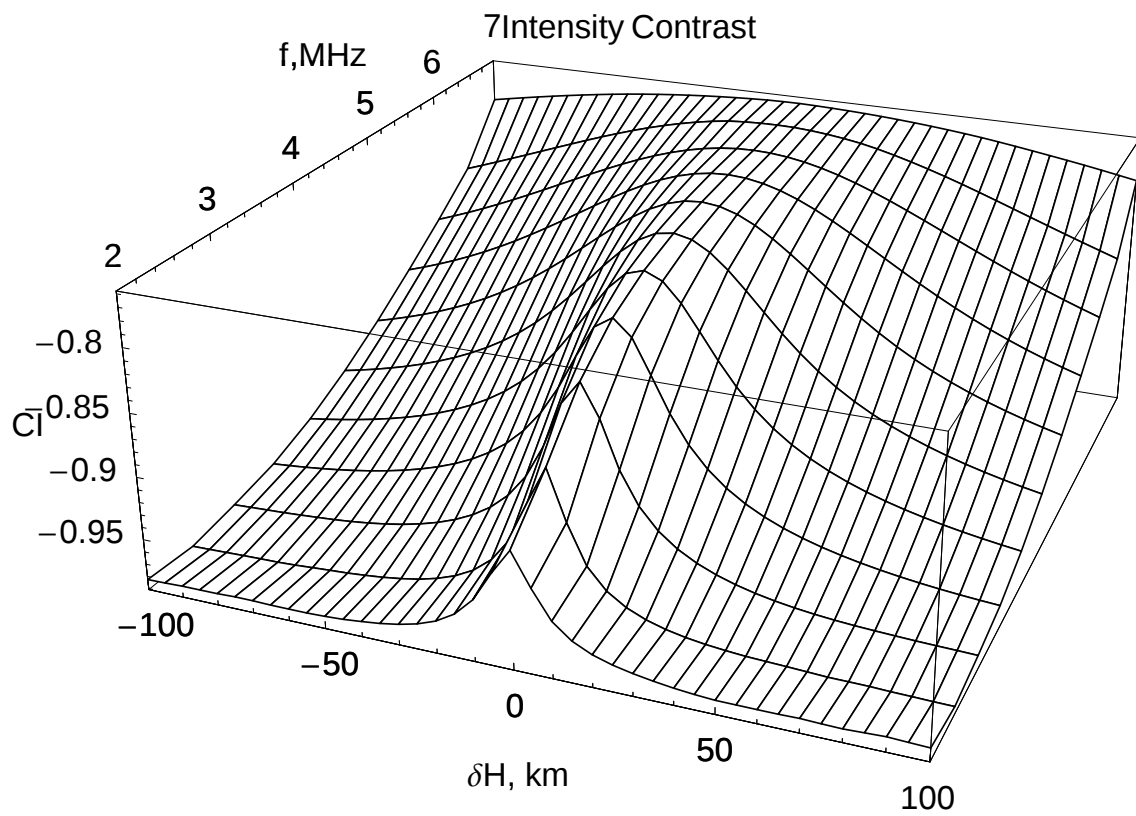


Рис. 4.19: Функции контраста ЛЧМ сигналов с частичной компенсацией фазовых искажений.

Кроме того, в реальности как поверхность планеты, так ее ионосфера являются сферическими. В ряде работ, однако, их кривизной пренебрегается. На рис. 4.20 показана лучевая структура поля в ионосфере для одной из самых неблагоприятных ситуаций (минимальная рабочая высота космического аппарата над поверхностью, частота зондирования близка к критической частоте ионосферы). Как можно видеть из рисунка, в пределах информативного диапазона времен групповой задержки радиолокационного импульса (эквивалентного нескольким километрам пробега в свободном пространстве) можно считать малым искривление лучей, не учитывать кривизны ионосферы и поверхности планеты и влияния лучевых каустических структур. По этой причине в настоящей работе всюду принято приближение плоской слоистой ионосферы. За исключением случаев, оговоренных отдельно, также принято приближение плоской поверхности планеты.

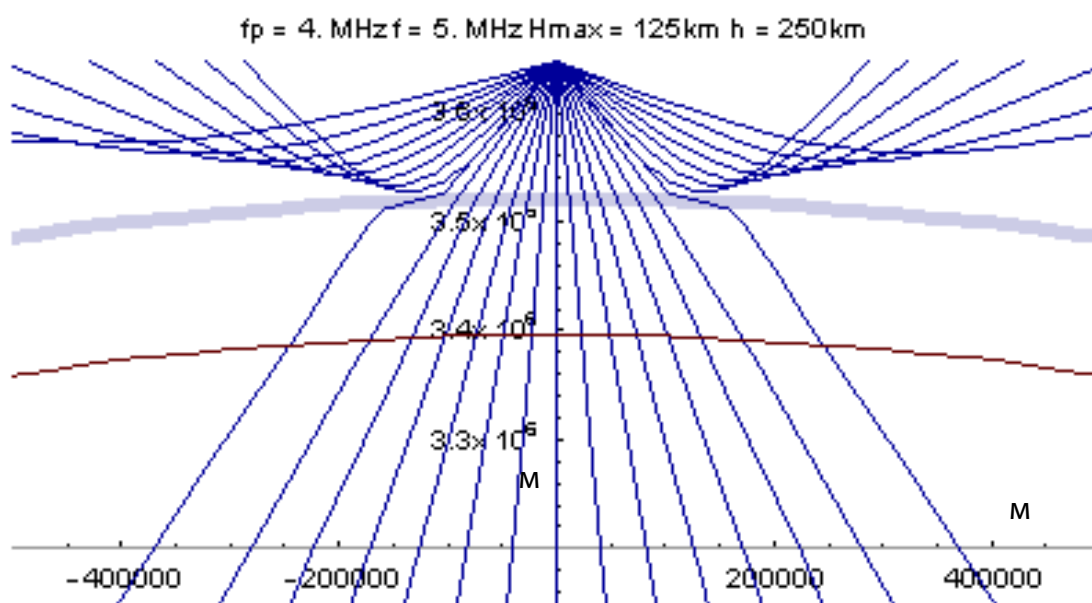


Рис. 4.20: Лучевая структура поля радиоволн в сферической ионосфере Марса. Высота космического аппарата над поверхностью Марса 250 км. Критическая частота ионосферы $f_p = 4$ МГц, частота излучения $f = 5$ МГц, эквивалентная толщина ионосферы 15 км, чепменовское распределение плотности плазмы по высоте.

4.10 Учет априорной информации о рельефе поверхности планеты.

Возможности разработки моделей рассеяния радиоволн рельефными поверхностями в значительной степени определяются наличием в распоряжении исследователя дополнительной априорной информации, в частности топографических карт поверхности. Необходимость привлечения контекстной топографической информации к анализу данных радиолокации была выявлена еще в первых экспериментах по глубинной радиолокации Луны [265].

До последнего времени доступная информация о топографии поверхности Марса ограничивалась главным образом данными глобальной съемки профилей поверхности с помощью марсианского орбитального лазерного альтиметра (MOLA) [205]. Горизонтальная разрешающая способность этого прибора на практике оказывается не лучше нескольких сотен метров. Это не позволяет получить информацию о структурах поверхности меньших масштабов, составляющих от единиц до нескольких десятков длин волн в зависимости от частотного диапазона, применяемого в эксперименте по радиолокации. В то же время указанные структуры эффективно участвуют в процессе рассеяния волн [293, 294], что безусловно должно учитываться на практике.

Это, в свою очередь, с одной стороны явилось стимулом для многочисленных исследований фрактальных свойств и законов подобия масштабов топографии поверхности планеты [206, 295] и попыток их экстраполяции в область малых пространственных масштабов [225]. С другой стороны, некоторые существующие модели отражения волн от шероховатой поверхности были уточнены по данным съемок альтиметра MOLA в соответствующей области масштабов [296]. В области меньших масштабов эти модели продолжают базироваться на весьма общих предположениях, не подкрепленных никакими опытными данными.

Ситуация изменилась в последнее время, когда с появлением высококачественных оптических инструментов (MOC [297], CTX [298], HiRise [299] и так далее) стали доступны снимки поверхности Марса высокого разрешения. Непосредственная реконструкция топографии поверхности по данным этих съемок осложнена многими обстоятельствами различного характера. Тем не менее,

некоторые оценки параметров рельефа поверхности по этим данным позволяют сделать определенные выводы о характере отражения радиоволн от шероховатой поверхности. Мотивацией к предлагаемому исследованию явилась необходимость учета информации, содержащейся в снимках высокого разрешения, в существующих моделях рассеяния радиоволн рельефом планеты в области малых масштабов.

4.11 Оценка параметров рельефа поверхности по данным обработки снимков высокого разрешения.

Для восстановления рельефа поверхности по оптическим снимкам предложены и используются методы фотоклинометрии [300]. При наличии затенений, характерных для полярных областей, применение этих методов осложняется [301]. В некоторых особых случаях могут быть предложены специальные подходы к оценке статистических свойств шероховатой поверхности. Рассмотрим квазипериодический рельеф (подобный дюнам, например), который является типичным для многих различных регионов марсианской поверхности, в т.ч. полярных. Такой ландшафт состоит из почти одинаковых горбов рельефа, расположенных в приблизительно периодическом порядке на более или менее случайных расстояниях друг от друга. Обозначим профиль высоты отдельного горба за $H(x)$, тогда общий профиль высоты поверхности будет

$$h(x) = \sum_i H(x - x_i). \quad (4.61)$$

Общий пространственный спектр высоты, следовательно, есть

$$\tilde{h}(\kappa_x) = \int h(x) \exp(i\kappa_x x) dx = \sum_i \exp(i\kappa_x x_i) \tilde{H}(\kappa_x),$$

где $\tilde{H}(\kappa_x)$ является пространственным спектром высоты отдельной дюны. Средний квадрат этого спектра $\langle h(\kappa_x) h^*(\kappa_x) \rangle$, является спектром функции корреляции высоты (согласно теореме Винера-Хинчина),

$$\langle \tilde{h}(\kappa_x) \tilde{h}^*(\kappa_x) \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \exp(i\kappa_x (x_i - x_j)) \right\rangle \left\langle |\tilde{H}(\kappa_x)|^2 \right\rangle.$$

Аналогично, изображение такого рельефа на снимке состоит из периодических изображений почти одинаковых горбов. Таким образом, соответствующий спектр яркости изображения равен

$$\langle \tilde{I}(\kappa_x) \tilde{I}^*(\kappa_x) \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \exp(i\kappa_x(x_i - x_j)) \right\rangle \left\langle |\tilde{I}_0(\kappa_x)|^2 \right\rangle ,$$

где $\tilde{I}_0(\kappa_x)$ есть спектральная яркость отдельного образца дюны. Если ландшафт почти периодический, его пространственный спектр имеет форму узкого пика, centered around some value of the wave number $\kappa_x = \kappa_0$, так что

$$\langle \tilde{h}(\kappa_x) \tilde{h}^*(\kappa_x) \rangle \approx \left\langle \sum_{i,j} \exp(i\kappa_x(x_i - x_j)) \right\rangle \left\langle |\tilde{H}(\kappa_0)|^2 \right\rangle ,$$

$$\langle \tilde{I}(\kappa_x) \tilde{I}^*(\kappa_x) \rangle \approx \left\langle \sum_{i,j} \exp(i\kappa_x(x_i - x_j)) \right\rangle \left\langle |\tilde{I}_0(\kappa_0)|^2 \right\rangle .$$

Это значит, что приблизительно верно соотношение

$$\langle \tilde{h}(\kappa_x) \tilde{h}^*(\kappa_x) \rangle \propto \langle \tilde{I}(\kappa_x) \tilde{I}^*(\kappa_x) \rangle , \quad (4.62)$$

то есть для квазипериодического масштаба функция корреляции высоты практически пропорциональна функции корреляции яркости изображения.

Фрагменты космических снимков различных участков полярных областей Марса приведены на рис. 4.21. На рис. 4.22 показан двумерный пространственный спектр изображения по результатам обработки фрагментов снимка R0900626 [297].

Для численных расчетов была выбрана простая аналитическая модель корреляционной функции высоты квазипериодического рельефа, учитывающая основные особенности реальных ландшафтов:

$$\langle h(x, y) h(x', y') \rangle = h_0^2 \exp \left(-\frac{(x - x')^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - y')^2}{\sigma_y^2} \right) \cos \left(2\pi i \frac{x - x'}{d} \right) , \quad (4.63)$$

где d - характерный период, σ_x и σ_y - масштабы корреляции.

Графическое изображение функции (4.63) для нескольких различных значений среднего квадрата высоты схематически показано на рис. 4.24. Соответ-

ствующий пространственный спектр

$$\pi\sigma_y\sigma_y\frac{h_0^2}{2}\exp\left(-\frac{\kappa_y^2\sigma_y^2}{4}\right)\left[\exp\left(-\frac{(\kappa_x d + 2\pi)^2\sigma_x^2}{4d^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\kappa_x d - 2\pi)^2\sigma_x^2}{4d^2}\right)\right], \quad (4.64)$$

имеет два симметричных максимума, характерных для квазипериодической структуры (рис. 4.23).

4.12 Рассеяние сигналов на квазипериодическом рельефе поверхности.

Геометрия эксперимента по глубинному радиозондированию схематически показана на рис. 4.25. Поле сферической волны, приходящей от космического аппарата на поверхность, тем самым, в параксиальном приближении выражается формулой

$$E_{inc}(x_2, y_2) = \frac{ikz}{z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x_1 - x_2)^2 + \frac{ik}{2z}(y_1 - y_2)^2\right)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число. Комплексная амплитуда волны, отраженной и принятой обратно на частоте ω_1 в приближении Кирхгофа равна

$$E_{\omega_1} = \frac{e^{2ikz}}{z} \frac{k}{2\pi iz} \int E_{inc}(x_2, y_2) \exp(-2ikh(x_2, y_2)) G(x_2 - x_1) G(y_2 - y_1) dx_2 dy_2$$

где $k_1 = \omega_1/c$, где x_1, y_1 и x_3, y_3 – координаты КА в момент излучения и приема импульса, соответственно, x_2, y_2 – переменные интегрирования (горизонтальные координаты на поверхности планеты), траектория полета КА считается горизонтальной прямой, проходящей параллельно поверхности планеты на высоте z , поверхность планеты считается бесконечной в среднем горизонтальной плоскостью со случайными отклонениями высоты $h(x_2, y_2)$, функция Грина параболического уравнения дифракции [275]

$$G(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi iz}} \exp\left(\frac{ik}{2z}x^2\right). \quad (4.65)$$

Подставляя выражение для функции Грина (4.65) в формулу (4.12), получим обратно пришедшее отраженное поле, т.е.

$$E_{\omega} = \frac{e^{2ikz}}{z} \frac{k}{2\pi iz} \int dx_2 dy_2$$

$$\exp \left(\frac{ik}{2z}(x_1 - x_2)^2 + \frac{ik}{2z}(y_1 - y_2)^2 + \frac{ik}{2z}(x_2 - x_1)^2 + \frac{ik}{2z}(y_2 - y_1)^2 - 2ikh(x_2, y_2) \right).$$

Процедура синтеза апертуры сводится к когерентному суммированию регистрируемого поля принятых сигналов в пределах некоторого участка траектории движения космического аппарата, то есть к интегрированию выражения 4.12 по соответствующим координатам. Положим $x_1 = l_1 \cos \phi$, $y_1 = l_1 \sin \phi$, где ϕ - азимут направления движения КА, $dl_1 \approx 2vz/c$ - перемещение КА по траектории в течение времени распространения импульса до поверхности планеты и обратно.

Интегрирование по конечному участку траектории приближенно заменим интегрированием по l_1 в бесконечных пределах с весовой функцией

$$W_{SA} = \frac{1}{\sqrt{\pi}L_1} \exp \left(-\frac{(l_1 - l_{01})^2}{L_1^2} \right),$$

где L_1 - половина эффективной длины синтетической апертуры на частоте ω_1 .

Амплитуда отраженного ЛЧМ сигнала после согласованной фильтрации может быть записана в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega F_0(\omega) \tilde{F}_0(\omega) H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega W_{SA} dl_1 \quad (4.66)$$

$F_0(\omega)$ - спектр ЛЧМ сигнала, излучаемого космическим аппаратом, $\tilde{F}_0(\omega)$ - функция согласованного фильтра, $H(\omega)$ - спектральное окно, используемое для подавления нежелательных боковых лепестков ЛЧМ сигнала, E_ω - отраженное от поверхности поле (4.12).

В данной работе всюду используется спектральное окно Хэннинга (3.75) [248]. При больших значениях базы ЛЧМ сигнала, можно считать $F_0(\omega) \tilde{F}_0(\omega) \approx \text{const}$. Это приближение будет учитываться в дальнейшем. Фазовые искажения, вносимые ионосферой в спектр принятого ЛЧМ сигнала, в выражении (4.66) не учтены. Таким образом, для среднего квадрата амплитуды получим следующее выражение :

$$\begin{aligned} \langle f(t)f^*(t) \rangle &\propto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_1) H(\omega_2) \Gamma(\omega_1, \omega_2) \exp(-i\omega_1 t + i\omega_2 t) d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega - \Omega/2) H(\omega + \Omega/2) \Gamma(\omega - \Omega/2, \omega + \Omega/2) \exp(i\Omega t) d\omega d\Omega \end{aligned} \quad (4.67)$$

где введены следующие обозначения: $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ и $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$.

Как правило зависимость двухчастотной корреляционной функции $\Gamma(\omega - \Omega/2, \omega + \Omega/2)$ от средней частоты ω выражена значительно слабее, чем ее зависимость от разности частот $\Omega = \omega_2 - \omega_1$. При не слишком широкополосном сигнале этой зависимостью можно пренебречь. В таком сравнительно узкополосном приближении корреляционную функцию вместе с экспоненциальным множителем $\exp(i\Omega t)$ - можно вынести за интеграл (4.67) по средней частоте ω , в результате чего получим:

$$\langle f(t)f^*(t) \rangle \propto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_i(\Omega) \Gamma(\omega - \Omega/2, \omega + \Omega/2) \exp(i\Omega t) d\Omega \quad (4.68)$$

где интегральная функция спектрального окна

$$H_i(\Omega) = \int_{\omega_0 - |\Omega| - 2\pi B}^{\omega_0 + |\Omega| - 2\pi B} H(\omega - \Omega/2) H(\omega + \Omega/2) d\omega \quad (4.69)$$

для функции спектрального окна Хэннинга (3.75) равна

$$H_i(\Omega) = \frac{1}{8\pi} (\pi|1 - |\Omega'|||(\cos(2\pi\Omega') + 2) + (4\cos(\pi\Omega') + \cos(\pi|1 - |\Omega'|)|)) \sin(\pi|1 - |\Omega'|)| \quad (4.70)$$

где $\Omega' = \Omega/2\pi B$ - относительная нормированная расстройка частоты.

4.13 Двухчастотная корреляционная функция

Амплитуда волны, приходящая обратно к космическому аппарату на частоте ω_2 , выражается формулами (4.66) с соответствующей заменой параметров κ_1 и L_1 и набора переменных интегрирования x_2, y_2, l_1 на κ_2, L_2 и x_4, y_4 и l_2 соответственно, а также l_{01} на l_{02} и L_1 на L_2 . Нахождение двухчастотной корреляционной функции поля $\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle$, т.е. среднего второго момента поля, необходимого для вычисления средней интенсивности отраженного импульса, сводится к вычислению характеристической функции случайных высот шероховатости, в случае многомерного нормального (гауссового) закона распределения вариации высот равной [270]

$$\langle \exp(2i\kappa_1 h(x_1, y_1) - (2i\kappa_2 h(x_2, y_2))) \rangle = \quad (4.71)$$

$$\exp(-ik_1^2 \langle h^2 \rangle - 2k_2^2 \langle h^2 \rangle + 4k_1k_2 \langle h^2 \rangle \rho(x_1 - x_2, y_1 - y_2)),$$

где $\rho(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ - корреляционная функция высоты шероховатости, зависящая от координат на поверхности. С учетом (4.71) двухчастотную корреляционную функцию электрического поля в точке приема можно записать в виде

$$\Gamma(\omega_1, \omega_2) \equiv \langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle = \frac{e^{2i(k_1 - k_2)z}}{z\pi L_1 L_2} \frac{k_1 k_2}{4\pi^2 z^2} \int e^S dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dl_1 dl_2 \quad (4.72)$$

где показатель экспоненты под знаком интеграла

$$S = \frac{ik_1}{2z}(x_1 - x_2)^2 + \frac{ik_1}{2z}(y_1 - y_2)^2 + \frac{ik_1}{2z}(x_3 - x_4)^2 + \frac{ik_1}{2z}(y_3 - y_4)^2 - \quad (4.73)$$

$$\frac{(l_1 - l_{01})^2}{L_1^2} - \frac{(l_2 - l_{02})^2}{L_2^2} - 2(k_1^2 + k_2^2) \langle h^2 \rangle + \beta \rho(x_1 - x_2, y_1 - y_2),$$

где $\beta = 4k_1k_2 \langle h^2 \rangle$. В нашем случае для выбранной модели корреляционной функции рельефа (4.63) можно разложить экспоненту в (4.72) в ряд Тейлора по $\rho(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ и получить выражение для двухчастотной корреляционной функции поля

$$\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle = \sum_{n_1, n_2} \frac{e^{2i(k_1 - k_2)z}}{z\pi L_1 L_2} \frac{k_1 k_2}{4\pi^2 z^2} \int \frac{\beta^{n_1 + n_2} e^{S_{n_1, n_2}}}{n_1! n_2!} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dl_1 dl_2, \quad (4.74)$$

где показатель экспоненты

$$S_{n_1, n_2} = \frac{ik_1}{2z}(x_1 - x_2)^2 + \frac{ik_1}{2z}(y_1 - y_2)^2 + \frac{ik_1}{2z}(x_3 - x_4)^2 + \frac{ik_1}{2z}(y_3 - y_4)^2 - \frac{(l_1 - l_{01})^2}{L_1^2} \quad (4.75)$$

$$- \frac{(l_2 - l_{02})^2}{L_2^2} - 2(k_1^2 + k_2^2) \langle h^2 \rangle + \beta \exp\left(-\frac{n_1(x - x')^2}{\sigma_x^2} - \frac{n_2(y - y')^2}{\sigma_x^2}\right).$$

В случае статистически однородной шероховатости на всей поверхности можно положить $l_{01} - l_{02} = l_0$. Для простоты ограничимся анализом случая, когда траектория движения космического аппарата направлена поперек периодического рельефа, т.е. параллельно гребням дюн ($\phi = 0$), а практически используются значения параметров синтеза апертуры $L_1 = L_2 = L$, $l_0 = 0$. В этом случае переменные в интегралах (4.72, 4.74) разделяются на группы x и y - переменных, соответственно. Нахождение корреляционной функции поля (4.74) сводится к

вычислению многомерных интегралов от гауссовых функций вида (4.10), где элементы матриц вычисляются по формуле

$$A_{ij} = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\} \Big|_{x \rightarrow 0}, \quad (4.76)$$

$$B_i = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (S + A_{ij} x_i x_j) \right\} \Big|_{x \rightarrow 0}. \quad (4.77)$$

Для группы x -переменных, соответствующих направлению движения космического аппарата, по которому производится синтез апертуры, матрица A_{ij} и столбец B_i соответственно равны

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L^2} - \frac{ik_1}{z} & \frac{ik_1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{ik_1}{z} & \frac{n_1+n_2}{\sigma^2} - \frac{ik_1}{z} & 0 & -\frac{n_1+n_2}{\sigma^2} \\ 0 & 0 & \frac{ik_2}{z} + \frac{1}{L^2} & -\frac{ik_2}{\sigma^2} \\ 0 & -\frac{n_1+n_2}{\sigma^2} & -\frac{ik_2}{z} & \frac{ik_2 \sigma^2 + n_1 z + n_2 z}{z \sigma^2} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$B_i = \left\{ \frac{2x(0)}{L^2}, i(n_1 - n_2)\kappa, \frac{2x(0)}{L^2}, -i(n_1 - n_2)\kappa \right\}, \quad (4.79)$$

где $\kappa = 2\pi/d$ - параметр масштаба периодической структуры рельефа. Определитель матрицы A_{ij} и квадратичная форма $B^T A_{ij}^{-1} B$ соответственно равны

$$\det A_{ij} = \frac{ik_2(n_1 + n_2)z + k_1 (k_2 (2(n_1 + n_2)L^2 + \sigma^2) - i(n_1 + n_2)z)}{L^4 z^2 \sigma^2}, \quad (4.80)$$

$$B^T A_{ij}^{-1} B = -\frac{(n_1 - n_2)^2 (2k_1 k_2 L^2 - ik_1 z + ik_2 z) \kappa^2 \sigma^2}{ik_2(n_1 + n_2)z + k_1 (k_2 (2(n_1 + n_2)L^2 + \sigma^2) - i(n_1 + n_2)z)}. \quad (4.81)$$

Подставляя полученные выражения (4.81) и (4.80) в (4.10), получим искомое значение интеграла по группе x -переменных. В рассматриваемом случае (полет космического аппарата параллельно периодической структуре) в интеграле по x -переменным следует положить $d \rightarrow \infty$, то есть $\kappa = 0$. Соответственно для вычисления интегралов по группе y -переменных, соответствующих направлению, перпендикулярному траектории движения космического аппарата, в котором синтез апертуры не производится, достаточно в указанных выражениях перейти к пределу $L \rightarrow 0$.

4.14 Численное моделирование и обсуждение результатов.

Для изображения R0900626 [302], фрагмент которого представлен на рис. 4.21, был вычислен пространственный спектр яркости изображения, показанный на рис. 4.22. По результатам вычисления были оценены характерный период $d \approx 100$ м и параметры ширины $\sigma_x \approx 1000$ м, $\sigma_y \approx 1000$ м модельного спектра (4.64) и корреляционной функции (4.63). Полученные значения использовались для моделирования отражения радиолокационных сигналов от рельефной поверхности планеты. На рис. 4.26 приведен пример результатов численного моделирования СШП радиолокационных импульсов, отраженных от поверхности планеты. Для частотного диапазона радиолокатора SHARAD 15-25 МГц [254] результаты представлены для высоты, близкой к минимальной рабочей (250 км). Поскольку функция корреляции высот по приведенной методике определяется с точностью до произвольного множителя, на каждом рисунке приведено семейство кривых, соответствующих различным значениям среднего квадрата вариации высоты рельефа (указаны цифрами при каждой кривой). Хорошо заметен запаздывающий импульс рассеянного излучения, соответствующий брэгговскому отражению от периодического рельефа. С увеличением среднего квадрата вариации высоты рельефа, т.е. с увеличением интенсивности брэгговского рассеяния на периодической структуре, наблюдается рост энергии запаздывающего импульса и ослабление фронтального отражения от поверхности. Практически в реальном эксперименте возможна маскировка глубинных отражений запаздывающим импульсом. Это должно учитываться при совместном анализе радиолокационных сигналов и изображений поверхности, доступных в качестве априорной информации или получаемых при помощи контекстной камеры [298] на космическом аппарате.

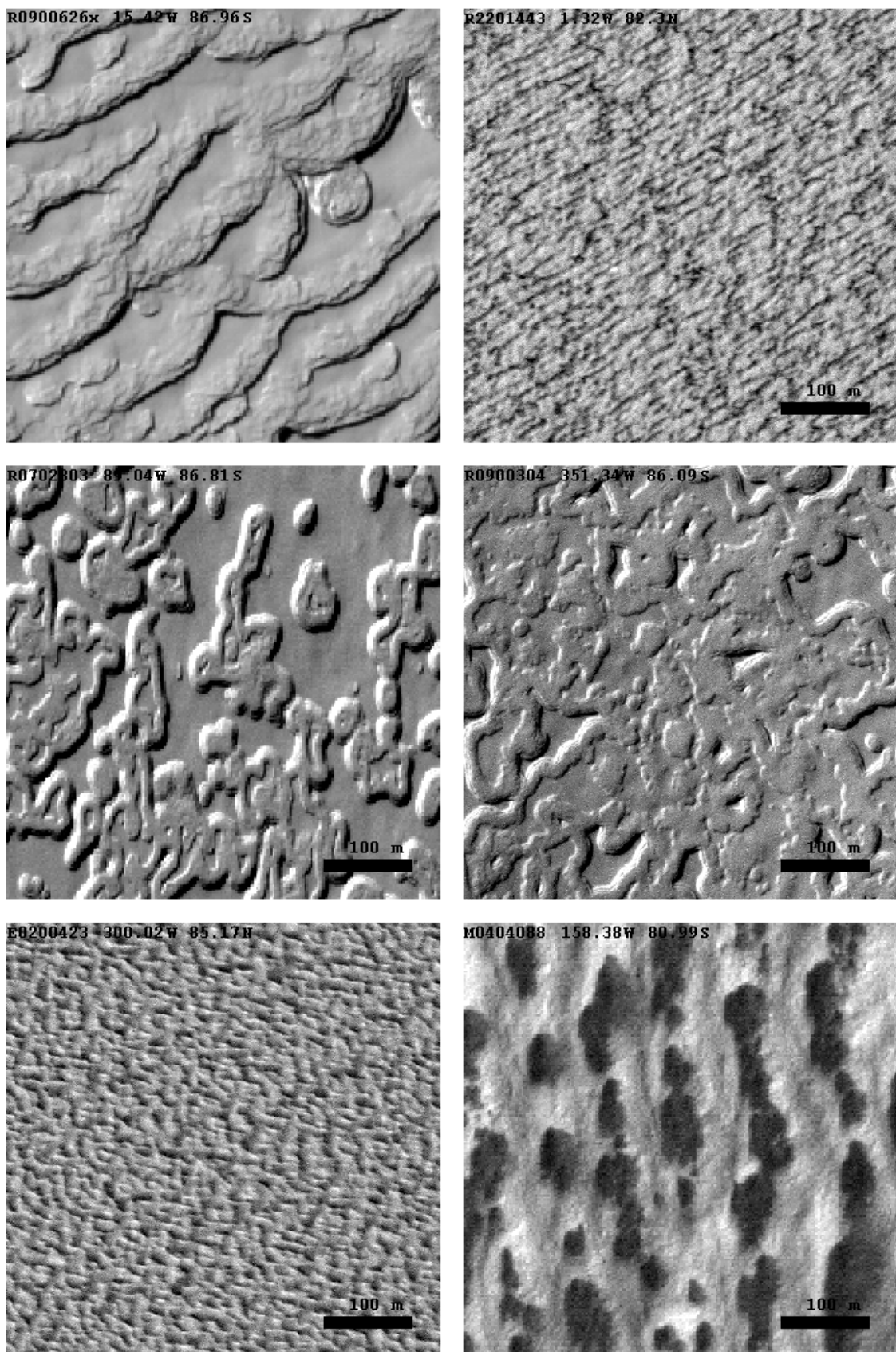


Рис. 4.21: Фрагменты изображений орбитальной камеры МОС.

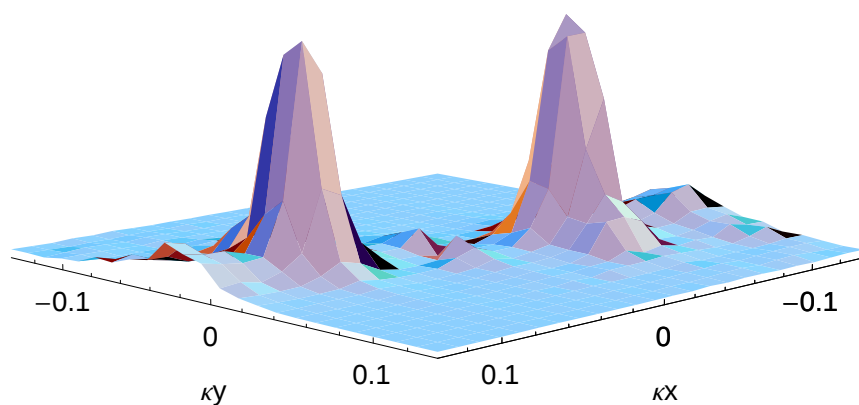


Рис. 4.22: Обработка изображения МОС R0900626. Пространственный спектр вариаций яркости изображения.

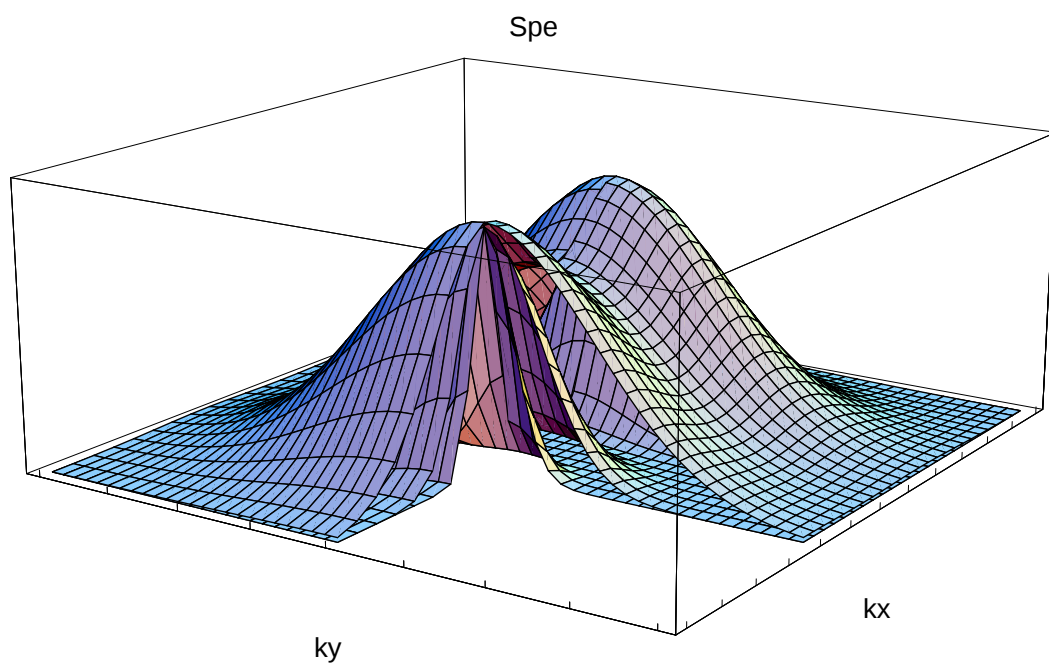


Рис. 4.23: Модельные пространственные спектры вариации высоты квазипериодического рельефа поверхности.

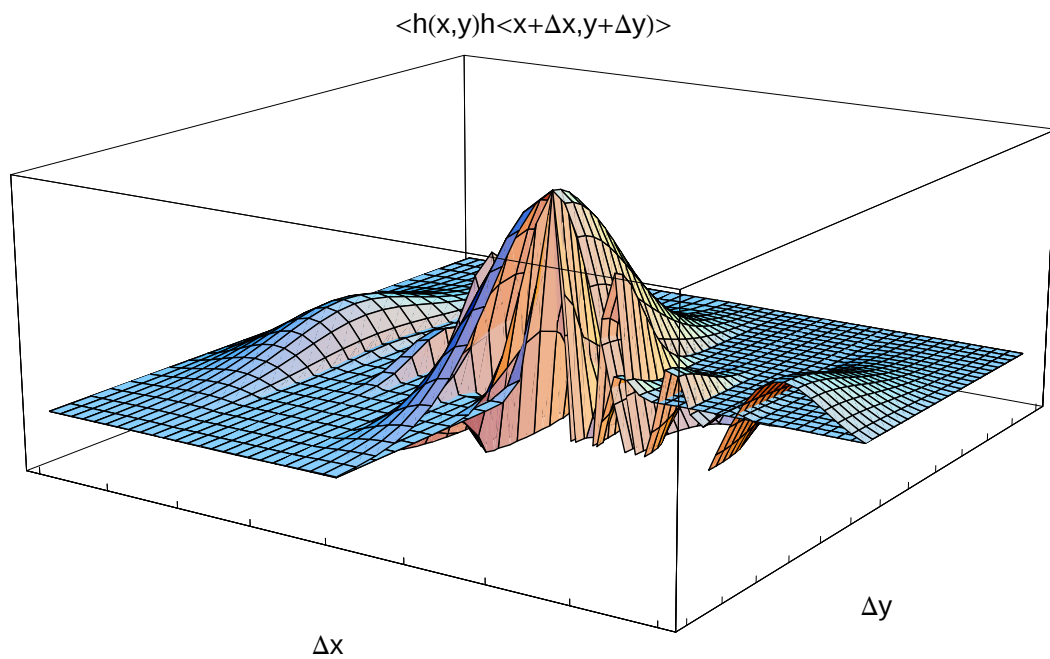


Рис. 4.24: Модельные корреляционные функции вариации высоты квазипериодического рельефа поверхности.

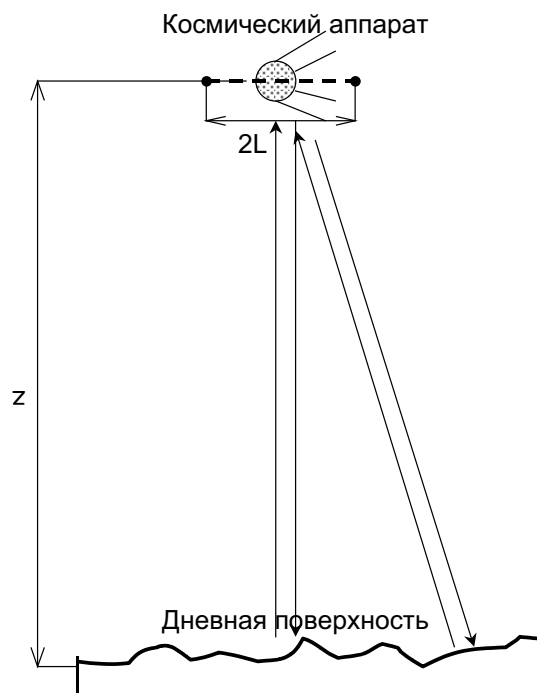


Рис. 4.25: Схематическое изображение эксперимента по радиолокационному зондированию.

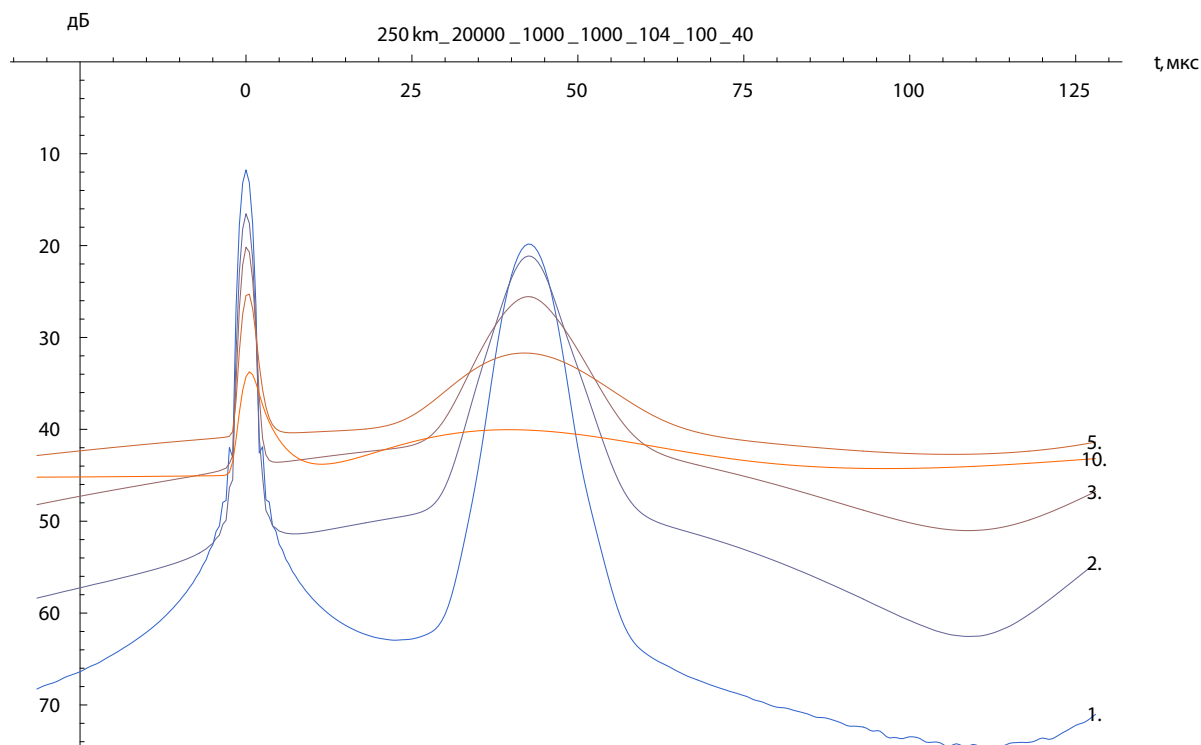


Рис. 4.26: Моделирование отраженных сигналов. Диапазон SHARAD (15-25 МГц), высота космического аппарата 250 км.

4.15 Численное моделирование радиолокации рельефного глубинного горизонта и обсуждение результатов.

По формулам раздела 4.1 проведено численное моделирование глубинного радиозондирования марсианских полярных ледяных щитов с учетом рельефа границ (рис. 4.27). Электрические и геометрические параметры модели были выбраны на основе совокупности наблюдательных данных, ранее опубликованных в литературе.

Выбранная толщина ледяного слоя 5 км соответствует максимальной расчетной глубине зондирования глубинного радиолокатора MARSIS [253], близкой к оценкам реальной толщины марсианских полярных льдов, в дальнейшем уточненным по результатам радиолокации [260]. Коэффициент преломления $n = 1.77$ выбран близким к значениям, характерным для чистого льда. Несущественное в данной задаче малое поглощение не учитывалось. Диэлектрическая

проницаемость подложки $\varepsilon = 15$ выбрана близкой к значениям, типичным для коренных пород земной коры [237].

Корреляционные функции высоты рельефа обеих поверхностей считаются гауссовыми, изотропными $\langle h(x, y)h(x', y') \rangle = \langle h^2 \rangle \exp(-(x - x')^2/\sigma_x^2 - (y - y')^2/\sigma_y^2)$. Масштабы корреляции рельефа $\sigma_x = \sigma_y = \sigma = 1000$ м, типичные для соответствующих геологических подразделений, были выбраны в соответствии с результатами анализа данных лазерного альтиметра MOLA [206] и снимков поверхности высокого разрешения МОС [226]. Среднеквадратичные высоты рельефа дневной поверхности h_s и подошвы ледяного щита h_{ss} варьировались. Моделирование проводилось для третьего рабочего диапазона инструмента MARSIS (3.5-4.5 МГц). Траектория полета космического аппарата – горизонтальная, высота траектории 250 км соответствует минимальной рабочей высоте инструмента MARSIS [253]. Длина синтезированной апертуры соответствует принятой для указанного диапазона в реальном эксперименте, апертурная функция приближенно заменена гауссовской [274, 272, 273, 226].

Результаты моделирования приведены на рис. 4.28, 4.29. На рис. 4.28 показаны типичные профили сигналов, вычисленные для сформулированной модели. На рис. 4.29 показаны максимальные амплитуды отражения от глубинного горизонта в зависимости от среднеквадратичных высот рельефа поверхности и подповерхности. В соответствии с полученными результатами, влияние двукратного прохождения через рельефную дневную поверхность на характеристики радиолокационного импульса относительно невелико по сравнению с отражением от рельефного глубинного горизонта. Тем самым, по результатам численного моделирования получено прямое расчетное подтверждение высокого качества результатов зондирования реальных марсианских льдов, проведенного с помощью орбитальных радиолокаторов MARSIS и SHARAD [260].

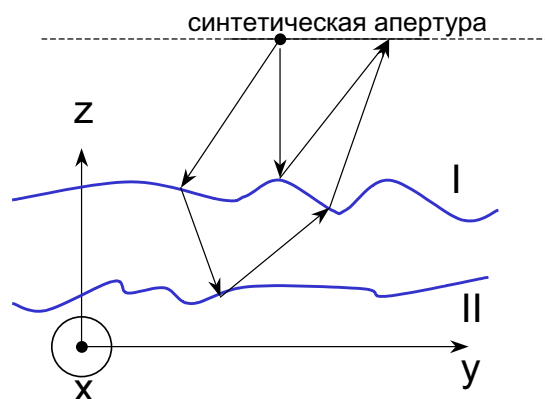


Рис. 4.27: Геометрическая схема модели глубинного радиозондирования плоско-слоистой среды с рельефными границами. I – дневная поверхность, II – подошва ледяного щита.

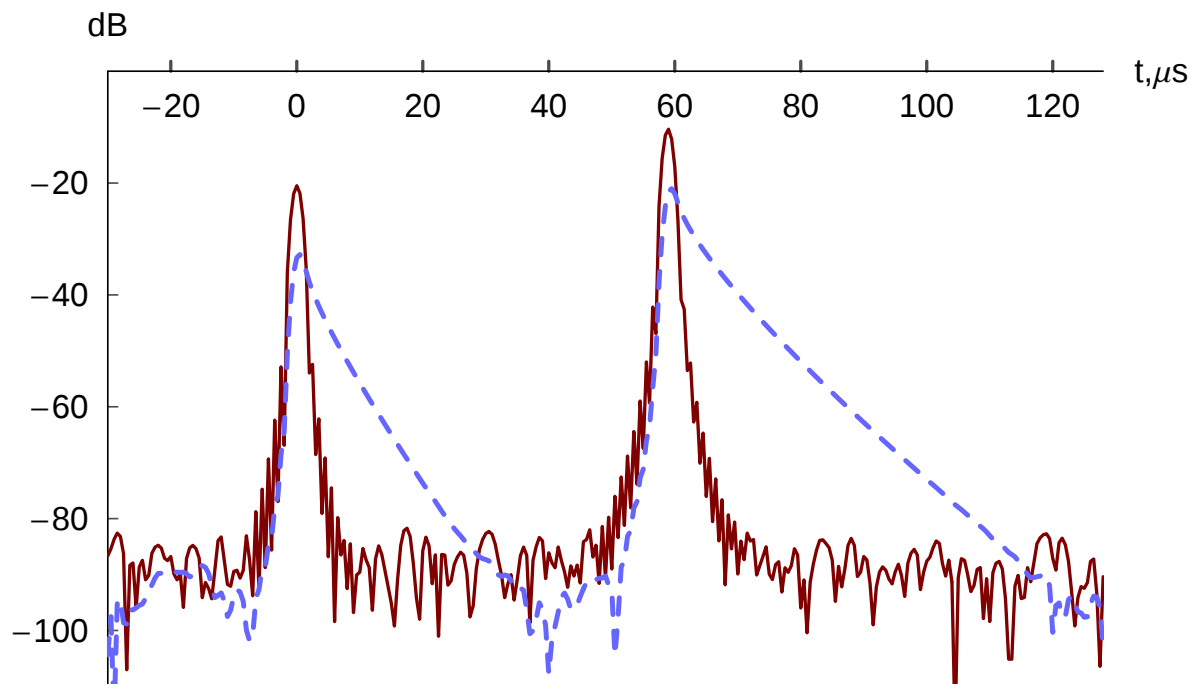


Рис. 4.28: Типичные профили ЛЧМ сигналов, отраженных от модели среды. Сплошная кривая: $h_s = 3$ м, $h_{ss} = 2$ м. Пунктирная кривая: $h_s = 30$ м, $h_{ss} = 14$ м.

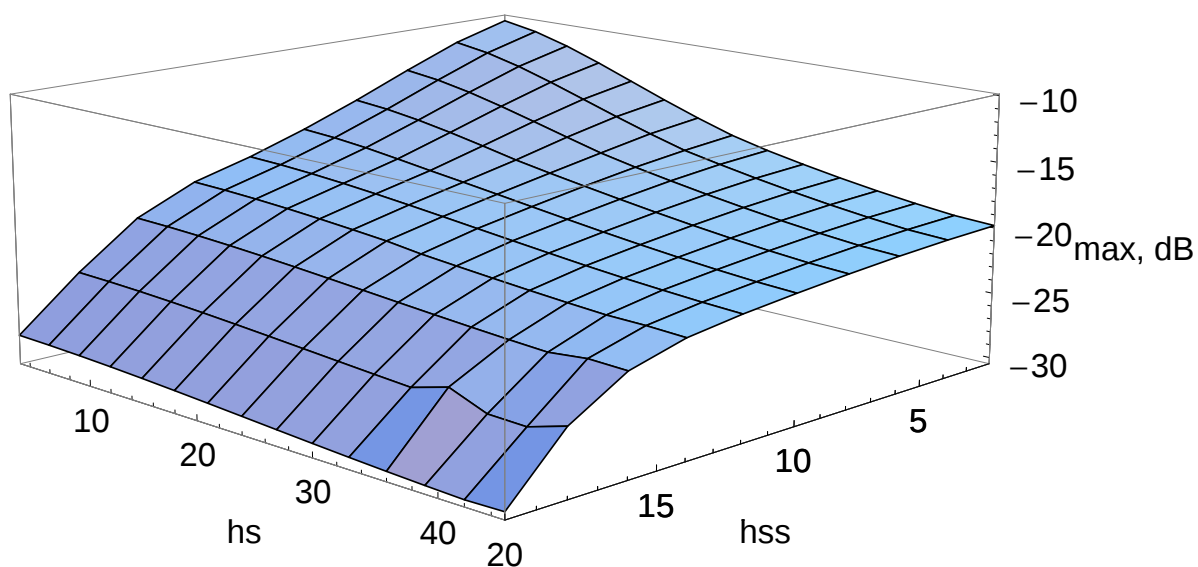


Рис. 4.29: Максимальные амплитуды подповерхностного отражения в зависимости от среднеквадратичных высот рельефа поверхностей. $\sigma_x = \sigma_y = 1000$ м.

4.16 Глубинное зондирование океана на Ганиমেде: численное моделирование.

Ганимед является крупнейшим среди естественных спутников планет Солнечной системы. Подобно другим спутникам планет-гигантов, Ганимед покрыт ледяной оболочкой. Различные наблюдательные данные и результаты моделирования свидетельствуют о наличии океана жидкой воды под ледяной оболочкой Европы и Ганимеда.

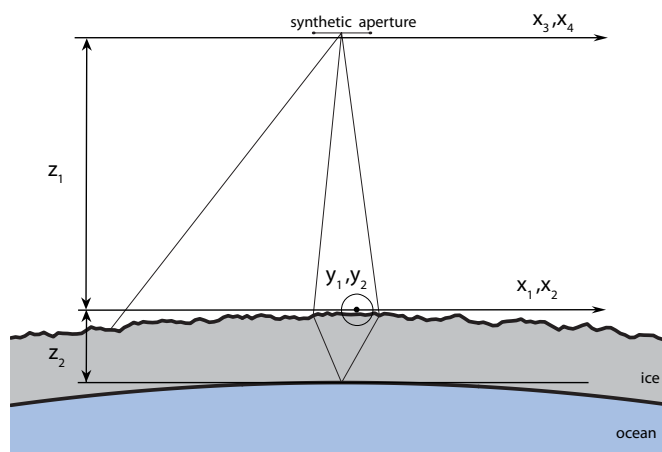


Рис. 4.30: Схема глубинного радиозондирования ледяной коры Ганимеда.

Получение прямых доказательств присутствия этого океана под толщей льда является одной из важнейших задач, непрерывно обсуждаемых в связи с планируемыми межпланетными миссиями по исследованию планет-гигантов и их спутников.

Применение глубинной радиолокации на Ганиমেде осложняется наличием развитого рельефа поверхности [1]. В одной из недавних работ приведены статистические характеристики высот рельефа различных геологических подразделений Ганимеда по данным фотоклинометрической обработки изображений высокого разрешения [2]. Оказывается, что приведенные там структурные функции высот рельефа хорошо соответствуют гауссовым корреляционным функциям (Рис. 4.31). Согласно цитированным там работам, толщина ледяного слоя на поверхности океана Ганимеда составляет 60-80 км. В нашей модели для расчетов подповерхностного отражения принято, что гладкая поверхность океана располагается на глубине 70 км ниже рельефной дневной поверхности. При этом теория и техника моделирования, развитая в разделе 4.3, пригодна для проведения расчетов без каких-либо изменений.

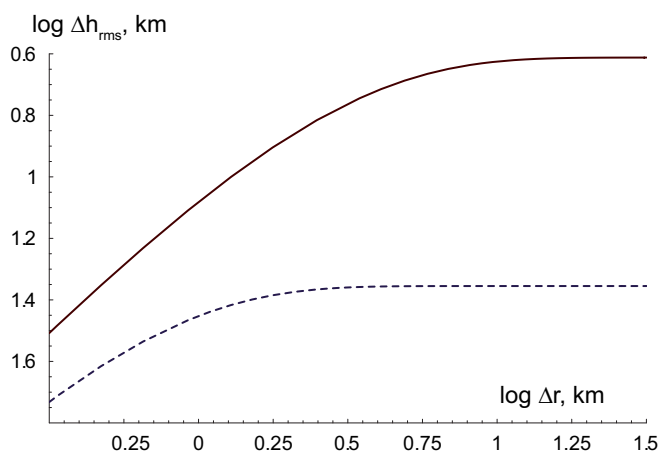


Рис. 4.31: Модельные структурные функции случайного рельефа поверхности, аппроксимирующие статистику рельефа реальной поверхности Ганимеда по результатам фотоклинометрии. Сплошная и пунктирная линии – различные геологические подразделения Ганимеда, исследованные в [300].

Аналогично, можно вычислить отражения волн от рельефной сферической поверхности небесного тела (рис. 4.30). С учетом кривизны сферической рельефной поверхности, ее профиль в принятой здесь декартовой системе координат задается функцией

$$z = h(x, y) - \frac{x^2}{2R} - \frac{y^2}{2R}, \quad (4.82)$$

где кривизна сферической поверхности учитывается в квадратичном приближении. Тогда амплитуда волны некоторой частоты ω_1 , отраженной от поверхности небесного тела и принятой радиолокатором, записывается в виде

$$E_1 = \frac{k_1}{2\pi i z_1} \int \exp \left(2ik_1 z_1 - 2ikh(x_1, y_1) + ik_1 \frac{(x_1 - x_3)^2}{z_1} + ik_1 \frac{x_1^2}{R} + ik_1 \frac{y_1^2}{R} \right) dx_1 dy_1 dx_3 \quad (4.83)$$

где z_1 – высота космического аппарата над поверхностью Ганимеда, $k_1 = \omega_1/c$ – волновое число излучения данной частоты в вакууме, x_1 и y_1 – декартовы координаты в плоскости, касательной к сферической средней поверхности Ганимеда в подспутниковой точке, соответствующей середине синтетической апертуры, x_3 – координата космического аппарата вдоль траектории полета (приближенно считается горизонтальной в направлении оси x). Выражение для комплексной амплитуды принятого сигнала на частоте ω_2 записывается аналогично (4.83). Двухчастотная функция когерентности выражается через произведение комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega_1 \omega_2} = \langle E_1 E_2^* \rangle = & \frac{k_1 k_2}{4\pi^2 z_1^2} \frac{1}{\pi L^2} \langle \exp(-2ikh(x_1, y_1) + 2ikh(x_2, y_2)) \rangle \\ & \int \exp \left(2i(k_1 - k_2)z_1 + ik_1 \frac{(x_1 - x_3)^2}{z_1} - ik_2 \frac{(x_2 - x_4)^2}{z_1} + ik_1 \frac{x_1^2}{R} + ik_1 \frac{y_1^2}{R} \right. \\ & \left. - ik_2 \frac{x_2^2}{R} + ik_2 \frac{y_2^2}{R} - \frac{(x_1 - x_3)^2}{L^2} - \frac{(x_2 - x_4)^2}{L^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Производя усреднение, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega_1 \omega_2} = \langle E_1 E_2^* \rangle = & \frac{k_1 k_2}{4\pi^2 z_1^2} \frac{1}{\pi L^2} \\ & \int \exp \left(2i(k_1 - k_2)z_1 + ik_1 \frac{(x_1 - x_3)^2}{z_1} - ik_2 \frac{(x_2 - x_4)^2}{z_1} + ik_1 \frac{x_1^2}{R} + ik_1 \frac{y_1^2}{R} \right. \\ & \left. - ik_2 \frac{x_2^2}{R} + ik_2 \frac{y_2^2}{R} - \frac{(x_1 - x_3)^2}{L^2} - \frac{(x_2 - x_4)^2}{L^2} - \frac{\langle \phi_1^2 \rangle + \langle \phi_2^2 \rangle - 2\langle \phi_1 \phi_2 \rangle}{2} \right) \\ & dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (4.85)$$

где $\phi_1 = 2k_1 h(x_1, y_1)$ и $\phi_2 = 2k_2 h(x_2, y_2)$ – случайные фазы, соответствующие местным высотам рельефа поверхности в точках x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно.

При гауссовых функциях корреляции высот рельефа

$$\langle h(x_1, y_1)h(x_2, y_2) \rangle = \langle h^2 \rangle \exp \left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{r_0^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{r_0^2} \right) \quad (4.86)$$

и соответственно гауссовых корреляционных функциях случайной фазы

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = 4k_1 k_2 \langle h^2 \rangle \exp \left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{r_0^2} - \frac{(y_1 - y_2)^2}{r_0^2} \right) \quad (4.87)$$

выражение для двухчастотной корреляционной функции Γ может быть разложено в степенной ряд по параметру $\beta = 2k_1 k_2 \langle h^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\omega_1 \omega_2} = \langle E_1 E_2^* \rangle &= \frac{k_1 k_2}{4\pi^2 z_1^2} \frac{1}{\pi L^2} e^{-\beta} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \int \exp(2i(k_1 - k_2)z_1 + ik_1 \frac{(x_1 - x_3)^2}{z_1} - ik_2 \frac{(x_2 - x_4)^2}{z_1} + ik_1 \frac{x_1^2}{R} + ik_1 \frac{y_1^2}{R} \\ &- ik_2 \frac{x_2^2}{R} + ik_2 \frac{y_2^2}{R} - \frac{(x_1 - x_3)^2}{L^2} - \frac{(x_2 - x_4)^2}{L^2} - \frac{n(x_1 - x_2)^2}{r_0^2} - \frac{n(y_1 - y_2)^2}{r_0^2}) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy_1 dy_2, \end{aligned} \quad (4.88)$$

Интегрирование в (4.88) приводит к компактному выражению для общего члена ряда (4.10), где матрица A_{ij} имеет вид

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{ik_1}{R} - \frac{ik_1}{z_1} + \frac{n}{r_0^2} & -\frac{n}{r_0^2} & \frac{ik_1}{z_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{r_0^2} & \frac{ik_2}{R} + \frac{ik_2}{z_1} + \frac{n}{r_0^2} & 0 & -\frac{ik_2}{z_1} & 0 & 0 \\ \frac{ik_1}{z_1} & 0 & \frac{1}{L^2} - \frac{ik_1}{z_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ik_2}{z_1} & 0 & \frac{ik_2}{z_1} + \frac{1}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ik_1}{R} - \frac{ik_1}{z_1} + \frac{n}{r_0^2} & -\frac{n}{r_0^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{r_0^2} & \frac{ik_2}{R} + \frac{ik_2}{z_1} + \frac{n}{r_0^2} \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Используя формулы раздела 4.1, получаем расчетные формулы для искомой функции когерентности в виде суммы членов ряда вида (4.10). Область справедливости записанных здесь выражений ограничена снизу по частоте условием применимости метода плавных возмущений $\lambda < r_0$ (длина волны не превышает характерного размера неоднородностей среды), а сверху – практической сходимостью суммируемых рядов. Результаты расчетов в указанной области частотного спектра показаны на рис. 4.32. Уровень калибровки интенсивности 0 дБ соответствует интенсивности отражения неискаженного ЛЧМ сигнала от идеальной отражающей плоскости в подспутниковой точке Ганимеда без учета оконных и других потерь при численной обработке ЛЧМ сигнала [248]. В расчетах используется окно Хэннинга, длина синтезированной апертуры принята

равной оптимальной для нефокусированного апертурного синтеза (половина размера зоны Френеля).

При этом, из-за большого различия диэлектрических проницаемостей льда и жидкой воды коэффициент отражения от поверхности океана приблизительно равен единице. Таким образом, основными источниками неопределенности в принятой модели являются шероховатость подошвы ледяного слоя и поглощение волн в толще льда. Оба этих фактора в настоящей работе не учтены. Следовательно, предлагаемый здесь сценарий можно рассматривать как наиболее оптимистичный вариант с точки зрения перспективы обнаружения океана методом глубинной радиолокации. Согласно результатам моделирования, предпочтительным является зондирование с малых высот на низких частотах.

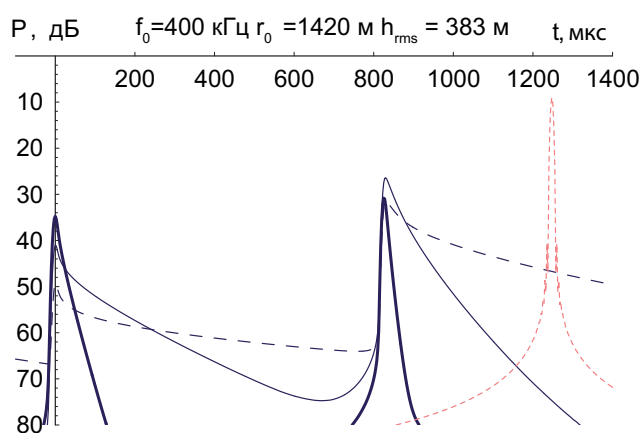


Рис. 4.32: Поверхностное и подповерхностное отражение ЛЧМ сигнала при глубинной радиолокации Ганимеда. Средняя частота ЛЧМ сигнала – 400 кГц, ширина полосы ЛЧМ – 200 кГц. Жирная, тонкая и штриховая кривые – высота космического аппарата 16, 128 и 1024 км соответственно. Тонкая пунктирная кривая – неискаженный профиль ЛЧМ сигнала. Параметры рельефа поверхности: $r_0 = 1420$ м, $h_{rms} = 383$ м соответствуют так называемым ярким ландшафтам поверхности Ганимеда (по данным съемки с космического аппарата Voyager [300]).

Глава 5

Влияние пространственной структуры осадков на поляризационные характеристики уходящего микроволнового излучения атмосферы.

Многие природные среды состоят из несферических частиц, полностью или частично ориентированных в пространстве, и вследствие этого обладают дихроизмом. Перенос поляризованного излучения в таких средах подчиняется несколько более сложному уравнению по сравнению с изотропной рассеивающей средой. В настоящей главе обсуждаются вопросы формирования и регистрации пространственного и углового распределения теплового радиоизлучения дождевых осадков в микроволновом диапазоне. Проводится численное моделирование переноса теплового радиоизлучения в трехмерной дождевой ячейке при различной интенсивности осадков с учетом несферической формы падающих дождевых капель и распределения их по размерам. Показана определяющая роль трехмерной неоднородности полей дождевых осадков в формировании поля их собственного теплового радиоизлучения в микроволновом диапазоне.

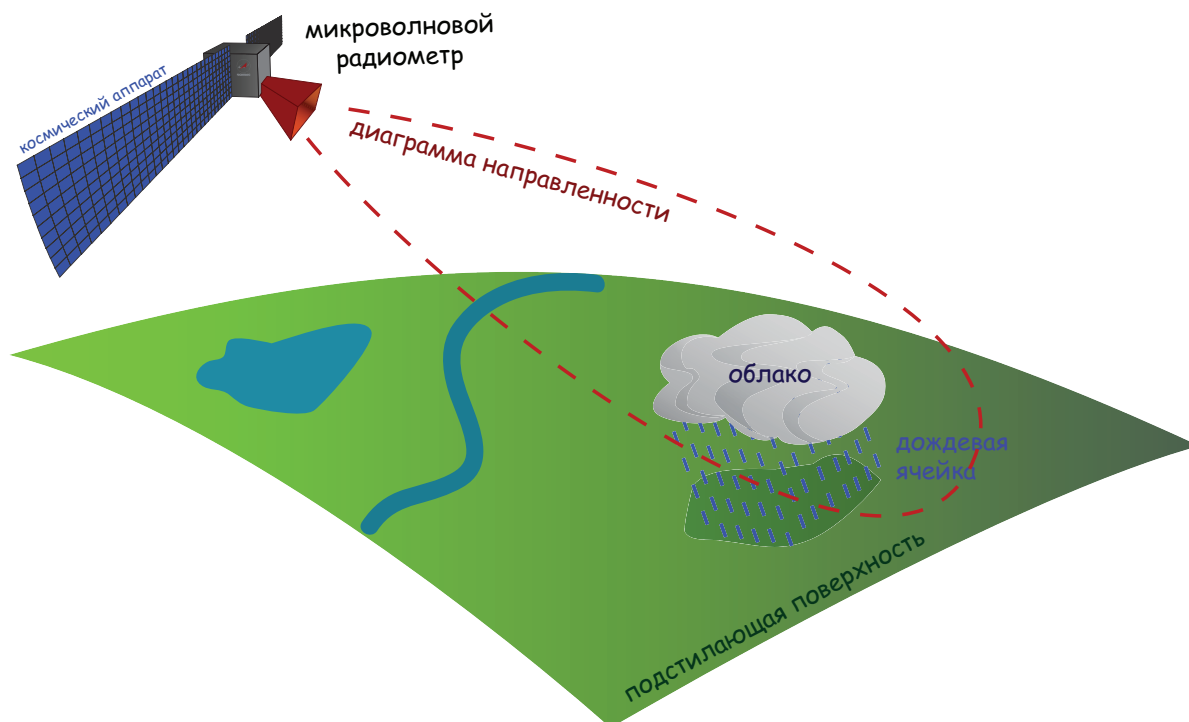


Рис. 5.1: Микроволновая радиометрия дождевых осадков из космоса (схема эксперимента).

5.1 Пассивное радиометрическое зондирование дождевых осадков в микроволновом диапазоне длин волн.

Исследование осадков с использованием данных космических наблюдений (рис. 5.1) – одна из важных проблем дистанционного зондирования. Впервые возможность определения интенсивности дождя по данным наблюдений микроволнового излучения была показана в 1968 г. по результатам эксперимента на ИСЗ Космос 243 [303]. Зоны выпадения осадков над морской поверхностью были зарегистрированы по характерным значениям радиоярких температур на длинах волн 0.8, 1.35 и 3.2 см. При этом, интенсивность выпадения осадков можно определить по интенсивности излучения.

Дальнейшее развитие техники наблюдения атмосферных осадков из космоса связано с американским ИСЗ DMSP с микроволновым радиометром SSM/I [304] с рабочим диапазоном длин волн 0.35 до 1.6 см. Зоны осадков определялись как области с пониженной радиояркой температурой на длине волны 0.35 см в связи с увеличением альбедо при многократном рассеянии микро-

волн на крупных дождевых каплях. Также, в последние годы дистанционное зондирование атмосферных осадков проводилось на американо-японском спутнике TRMM. В настоящее время крупный проект GPM (Global Precipitation Mission) находится в стадии разработки.

В связи с этими и другими направлениями исследований, в течение последнего времени интенсивно изучается взаимодействие микроволнового излучения с осадками и облаками различных типов [305, 306, 307, 307]. Многие из них состоят из частиц несферической формы, обладающих преимущественной ориентацией (падающие дождевые капли, снег и другие кристаллические частицы льда). По сравнению с макроскопически изотропными средами, в распространении излучения в таких средах особенно существенную роль играют поляризационные эффекты. Сочетание эффектов рассеяния, значительной пространственной неоднородности выпадающих осадков в атмосфере и в некоторой степени также отражающих свойств поверхности приводит к необходимости рассмотрения полей микроволнового излучения в трехмерно-неоднородной среде, обладающей дихроизмом.

Теория переноса излучения предоставляет достаточно общую физическую модель, адекватно описывающую процесс взаимодействия излучения с неоднородными средами весьма различной природы, и соответствующий математический аппарат. Однако, к настоящему времени известно относительно небольшое число опубликованных работ по численному решению векторного уравнения переноса излучения в трехмерно-неоднородных анизотропных рассеивающих средах [306]. Целью настоящей работы является исследование интенсивности и поляризации теплового излучения дождевых осадков, регистрируемых микроволновыми радиометрами на орбитальных космических аппаратах.

5.2 Модель излучательных характеристик среды.

Комплексная диэлектрическая проницаемость жидкой воды определяется формулой Дебая [309, 310]

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_0}{1 + i\Delta\lambda/\lambda}, \quad (5.1)$$

где

$$\Delta\lambda = 2\pi\tau_p \frac{\varepsilon_s + 2}{\varepsilon_0 + 2}, \quad (5.2)$$

ε_s – статическая диэлектрическая проницаемость воды (на частотах $\nu \ll 1/\tau_p$), $\varepsilon_0 \approx 4.9$ – оптическая диэлектрическая проницаемость воды (на частотах $\nu \gg 1/\tau_p$), время релаксации [307]

$$\tau_p = \exp \left\{ 9.8 \left(\frac{273}{T + 273} - 0.955 \right) \right\} \cdot 10^{-12} \text{ сек.} \quad (5.3)$$

Статическая диэлектрическая проницаемость воды описывается приближенной формулой [311]

$$\varepsilon_s(T) = 88.045 - 0.4147 T + 6.295 \cdot 10^{-4} T^2 + 1.075 \cdot 10^{-5} T^3. \quad (5.4)$$

Геометрическую модель дождевых капель несферической формы можно найти, например, в [313]. С хорошей степенью приближения можно считать, что падающие капли имеют форму сплюснутого сфероида с вертикально ориентированной осью симметрии. Отношение осей сфероида приближенно задается формулой [308]

$$\frac{b}{a} = 1 - 0.091\bar{a}, \quad (5.5)$$

где $\bar{a}$ – радиус сферической капли эквивалентного объема в мм.

Распределение капель по размерам в дождевых осадках задается формулой Маршалла-Пальмера [312]

$$n(r) = N_0 \exp(-qr), \quad (5.6)$$

$N_0 = 16000 \text{ м}^{-3} \text{ мм}^{-1}$, $q = 8.2R^{-0.21}$, R – интенсивность дождя, мм в час.

Сечения ослабления и рассеяния для сфероидальных частиц фиксированной ориентации могут быть вычислены методом Т-матриц с помощью общедоступных компьютерных кодов [314, 315, 316]. Таким образом, в рамках построенной модели могут быть вычислены радиационные характеристики среды (поглощение и рассеяние электромагнитных волн заданной частоты и поляризации единицей объема).

На графиках 5.2, 5.3 и 5.4 изображены зависимости объемных коэффициентов экстинкции и поглощения в зависимости от угла падения излучения для

дождевых осадках различной интенсивности (длины волн 3, 8 и 22 мм, соответственно). Полученные значения радиационных характеристик среды близки к величинам, полученным в [317]. Можно видеть, что с увеличением длины волны уменьшается объемный коэффициент экстинкции (ослабления) в среде. Одновременно растет и доля истинного поглощения в общем ослаблении (снижается альбедо однократного рассеяния), что качественно согласуется с известным характером зависимости для рассеяния на малых поглощающих частицах (облака). При этом, с ростом длины волны становятся более выражены поляризационные различия в поглощении и ослаблении излучения (различия между горизонтальной и вертикальной поляризацией).

5.3 Перенос излучения в анизотропной рассеивающей среде.

Пространственно-угловое распределение интенсивности и поляризации теплового излучения в среде дождевых осадков подчиняется векторному уравнению переноса излучения

$$(\vec{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{I}(\vec{r}, \vec{\Omega}) = -\hat{\sigma}_\varepsilon \mathbf{I}(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \bar{\sigma}_a B(T) + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \hat{x}(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \mathbf{I}(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}', \quad (5.7)$$

где $\vec{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – единичный вектор произвольного направления, $\mathbf{I}(\mathbf{z}, \vec{\Omega}) = \{I, Q, U, V\}$ – вектор параметров Стокса поляризованного излучения, $\hat{\sigma}_\varepsilon = \hat{\sigma}_\varepsilon(\vec{\Omega})$ – матрица ослабления поляризованного излучения в среде, $\bar{\sigma}_a$ – вектор истинного поглощения излучения в среде, $\hat{x}(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ – матрица рассеяния, $B(T)$ – функция Планка.

Матрицы ослабления и рассеяния для сфероидальных частиц фиксированной ориентации могут быть вычислены методом Т-матриц с помощью общедоступных компьютерных кодов [314, 315, 316]. Формулы для вычисления компонент вектора поглощения $\bar{\sigma}_a$ приведены в [312].

Моделирование пространственных и угловых распределений интенсивности и поляризации микроволнового излучения в среде с осадками заключается в численном решении уравнения (5.7) в соответствующей области среды вместе с граничными условиями, определяемыми излучением внешних источников, па-

дающим на границы области. В частности, поляризованное излучение в плоскостной среде подчиняется одномерному уравнению переноса излучения

$$\mu_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}(\mathbf{z}, \vec{\Omega}) = -\hat{\sigma}_\varepsilon \mathbf{I}(\mathbf{z}, \vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \hat{x}(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \mathbf{I}(\mathbf{z}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + \bar{\sigma}_a(\vec{\Omega}) B(T), \quad (5.8)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{I}(0, \vec{\Omega} \cdot \mathbf{z} > 0) = \{2T_0, 0, 0, 0\}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{I}(z_0, \vec{\Omega} \cdot \mathbf{z} < 0) = \{0, 0, 0, 0\}, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{z}$ – единичный вектор положительного направления оси z , T_0 – радиояркая температура подстилающей поверхности. В настоящей работе принято, что тепловое излучение подстилающей поверхности изотропно и не поляризовано, что является хорошим приближением для поверхности суши различного типа (грунтов, растительных покровов и т.д.).

Согласно методу дискретных ординат, интеграл рассеяния в (5.8) приближенно заменяется конечной суммой [87]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{I}_i = -\mu_i^{-1} \mathbf{I}_i + 2\pi \Lambda \mu_i^{-1} \sum_{l,j} x_l a_j Y_l^0(\mu_i) Y_l^0(\mu_j) \mathbf{I}_j + \mu_i^{-1} S F_i, \quad (5.11)$$

где a_i и μ_i – веса и направляющие косинусы (дискретные ординаты) используемой квадратурной формулы, $S F_i = \bar{\sigma}_a(\mu_i) B(T)$ – функция источников теплового излучения, $Y_l^0(\cdot)$ – сферические гармоники, $\mathbf{I}_i$ – потоки излучения в дискретных направлениях. Дискретизованное таким образом уравнение (5.11) вместе с граничными условиями

$$\mathbf{I}_i(0, \mu_i > 0) = \{2T_0, 0, 0, 0\}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{I}_i(z_0, \mu_i < 0) = \{0, 0, 0, 0\}, \quad (5.13)$$

может быть решено численно с помощью конечно-разностной схемы [87]. Кроме того, эта задача может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений для исходящих потоков излучения. В матричных обозначениях уравнение (5.11) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\mathbf{I}} = \hat{B} \hat{\mathbf{I}} + \mu_i^{-1} \hat{S} F, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \exp(-\hat{B}\tau) \hat{\mathbf{I}} = \exp(-\hat{B}\tau) \mu_i^{-1} \hat{S} F, \quad (5.15)$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ – столбец потоков излучения, $\hat{B}$ – матрица линейных коэффициентов уравнения. Решение выражается в форме матричной экспоненты

$$\exp(-\hat{B}\tau) \hat{\mathbf{I}}(\tau) - \hat{\mathbf{I}}(0) = \int_0^\tau \exp(-\hat{B}\tau) \mu_i^{-1} S F_i d\tau. \quad (5.16)$$

Оператор матричной экспоненты $\exp(-\hat{B}\tau)$ может быть диагонализирован в виде

$$\exp(-\hat{B}\tau) = \hat{U} \exp(-\hat{\Gamma}\tau) \hat{U}^{-1}, \quad (5.17)$$

где $\hat{\Gamma}$ – диагональная матрица, $\hat{U}$ – ортогональный оператор. Если функция источников в уравнении (5.11) не зависит от координат, правая часть уравнения (5.16) имеет вид

$$\int_0^\tau \exp(-\hat{B}\tau) \mu_i^{-1} S F_i d\tau = \hat{U} \int_0^\tau \exp(-\hat{\Gamma}\tau) d\tau \hat{U}^{-1} \mu_i^{-1} S F_i, \quad (5.18)$$

где

$$\int_0^\tau \exp(-\hat{\Gamma}\tau) d\tau = \text{Diag} \frac{1 - \exp(-\Gamma_i \tau)}{\Gamma_i} \quad (5.19)$$

– диагональная матрица, Γ_i – соответствующие диагональные элементы матрицы $\hat{\Gamma}$. Система линейных алгебраических уравнений (5.16) с правой частью (5.18) дополняется соответствующими краевыми условиями (5.13), (5.12) на граничных поверхностях плоского слоя, и после применения операции масштабного преобразования $\parallel$ решается относительно неизвестных исходящих потоков $\mathbf{I}_i$ с помощью стандартных алгоритмов матричной алгебры.

Краевая задача для уравнения переноса излучения в дождевой ячейке состоит из уравнения (5.8) и граничных условий для входящего в среду излучения $I = 2T_1$ на нижней грани куба, $\mathbf{I} = 0$ на верхней грани куба и $I(\mu_z > 0, \vec{n} \cdot \vec{\Omega} < 0) = 2T_1$ на боковых гранях, где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к боковой грани куба.

Решение проводилось итерационным способом по методу дискретных ординат с помощью конечно-разностной схемы со встречными разностями [87]. Интеграл рассеяния на сфере приближенно вычислялся по гауссовой квадратурной формуле G29 [178]. Результаты моделирования приведены на рис. 5.6 –

5.11. Точки на графиках соответствуют узлам квадратурной формулы в пределах одного из октантов сферы направлений. Показаны интегральные (средние) значения параметров Стокса теплового излучения со всей поверхности ячейки, наблюдаемой с данного ракурса (верхняя и две боковые грани) (рис. 5.5).

По результатам моделирования показано, что тепловое излучение кубической дождевой ячейки с ориентированными несферическими каплями дождя обладает ярко выраженной поляризацией в широком диапазоне углов. Угловое распределение радиояркостной температуры излучения, интегрально регистрируемой прибором со всей наблюдаемой поверхности дождевой ячейки, близко к соответствующему угловому распределению однородного плоского слоя дождевых осадков. В то же время, степень поляризации теплового радиоизлучения дождевой ячейки значительно меньше степени поляризации излучения плоского слоя. Тем самым, показана определяющая роль ячеистой структуры дождевых осадков в формировании пространственно-углового распределения интенсивности и поляризации наблюдаемого теплового излучения, и необходимость рассмотрения переноса излучения в трехмерно-неоднородной рассеивающей среде для моделирования и анализа полей радиотеплового излучения реальных дождевых осадков.

5.4 Заключение и выводы по главе.

В работе прямым численным решением уравнения переноса излучения проведено компьютерное моделирование теплового радиоизлучения дождевой ячейки в микроволновом диапазоне на длине волны 3, 8 и 22 мм. По результатам моделирования показано, что характерные для дождевых осадков поляризационные эффекты в тепловом радиоизлучении ячейки наблюдаются на всех исследованных длинах волн, в т.ч. на длине волны 22 мм, где характер рассеяния наиболее близок к рэлеевскому. По сравнению с моделью сплошного плоского слоя дождя, тепловое радиоизлучение трехмерной дождевой ячейки обладает типичными характерными особенностями. В частности, различие яркостных температур излучения вертикальной и горизонтальной поляризаций (второй параметр Стокса Q) в трехмерной модели менее выражено, по сравнению с плоским слоем. Таким образом, результаты моделирования показывают,

что трехмерная ячеистая структура реальных осадков оказывает определяющее влияние на пространственное и угловое распределение интенсивности и поляризации теплового радиоизлучения, регистрируемого средствами дистанционного зондирования.

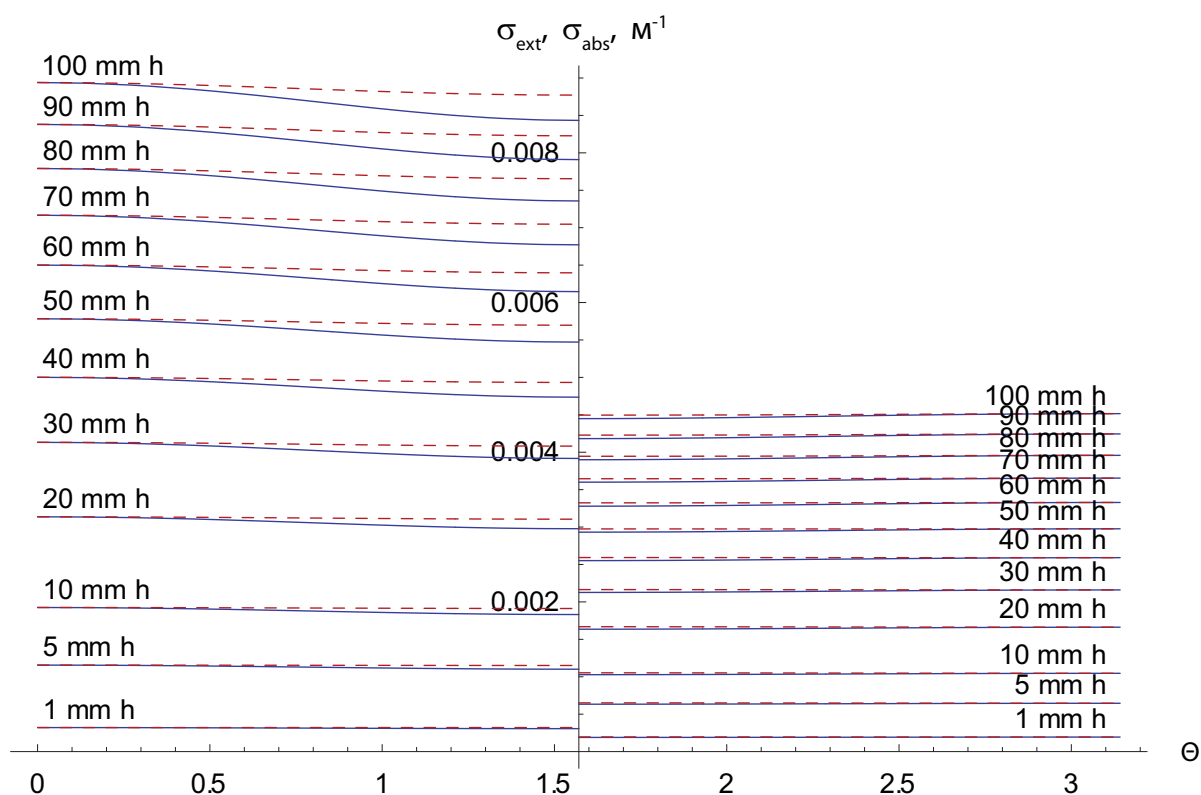


Рис. 5.2: Радиационные характеристики дождевых осадков различной интенсивности на длине волны 3 мм в зависимости от направления распространения. Левая часть графика $\theta < \pi/2$ – экстинкция, правая часть графика $\theta > \pi/2$ – истинное поглощение. Сплошные кривые – вертикальная поляризация, пунктирные кривые – горизонтальная поляризация.

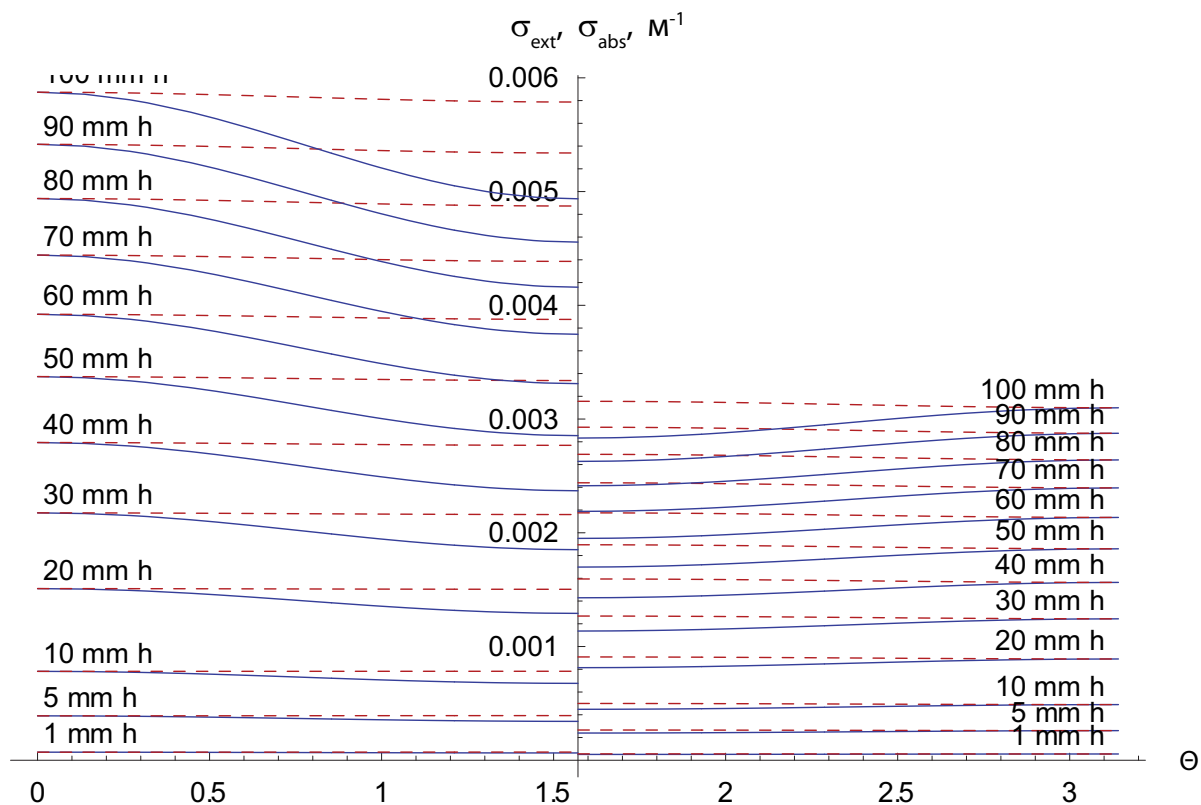


Рис. 5.3: Радиационные характеристики дождевых осадков различной интенсивности на длине волны 8 мм в зависимости от направления распространения. Левая часть графика $\theta < \pi/2$ – экстинкция, правая часть графика $\theta > \pi/2$ – истинное поглощение. Сплошные кривые – вертикальная поляризация, пунктирные кривые – горизонтальная поляризация.

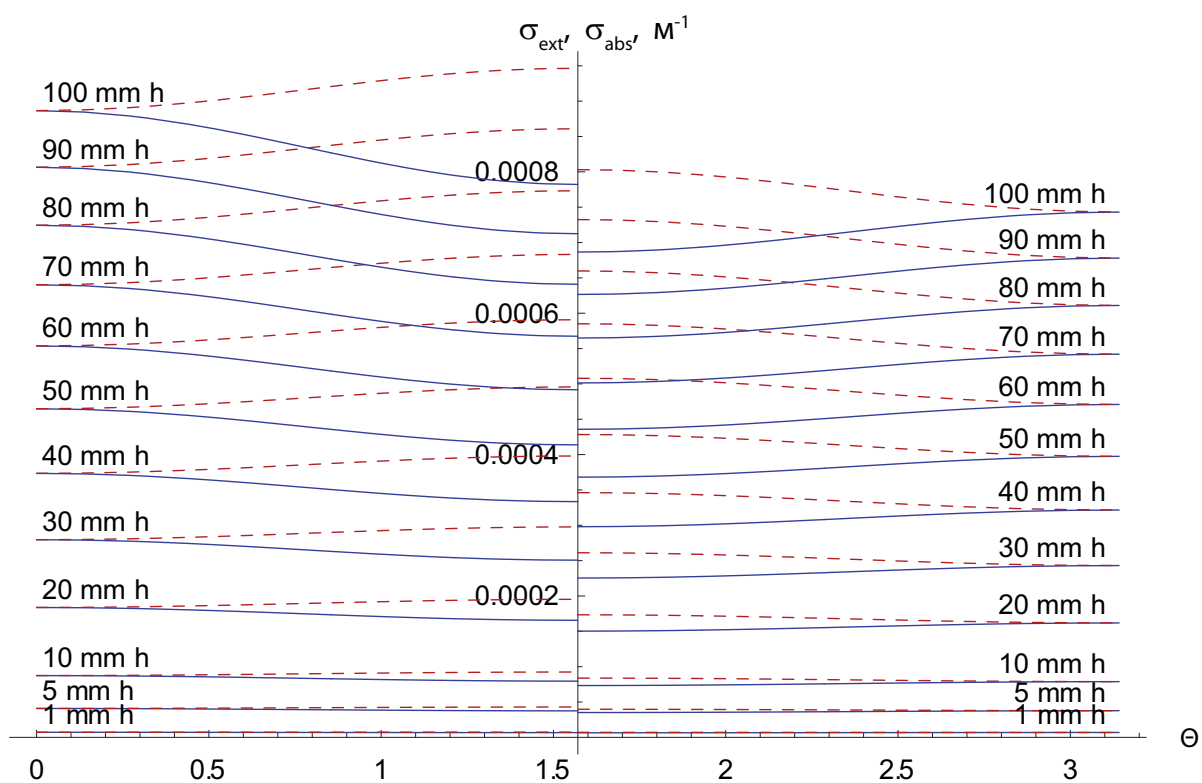


Рис. 5.4: Радиационные характеристики дождевых осадков различной интенсивности на длине волны 22 мм в зависимости от направления распространения. Левая часть графика $\theta < \pi/2$ – экстинкция, правая часть графика $\theta > \pi/2$ – истинное поглощение. Сплошные кривые – вертикальная поляризация, пунктирные кривые – горизонтальная поляризация.

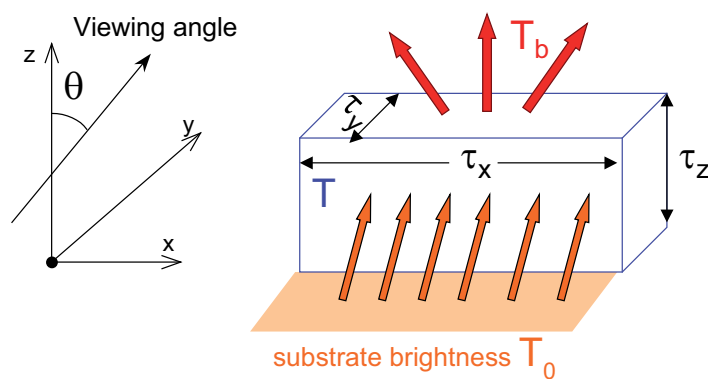


Рис. 5.5: Схематическое изображение радиотепловой вычислительной модели дождевой ячейки. T_0 – радиояркостная температура подстилающей поверхности, K , T – термодинамическая температура среды в ячейке, K .

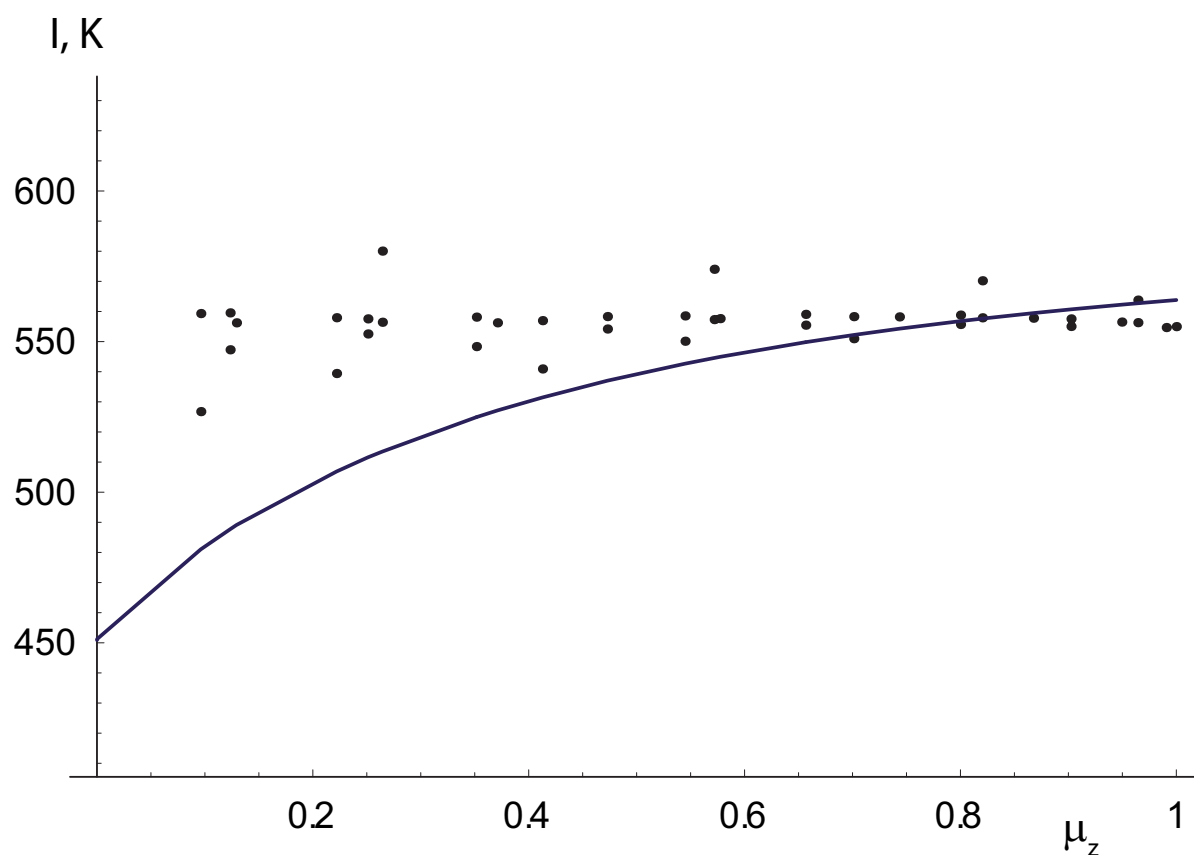


Рис. 5.6: Первый параметр Стокса I теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 30 мм/ч, длина волны 3 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

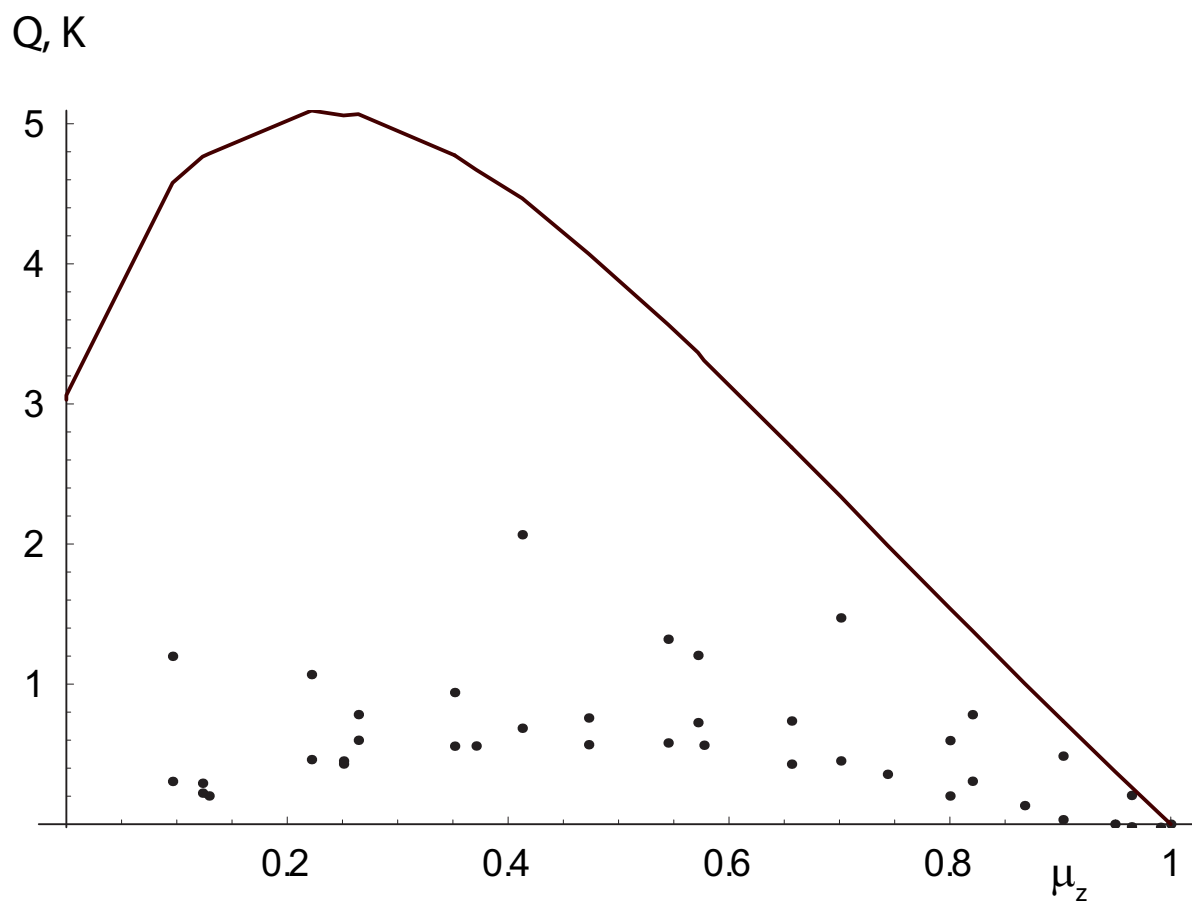


Рис. 5.7: Второй параметр Стокса Q теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 30 мм/ч, длина волны 3 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

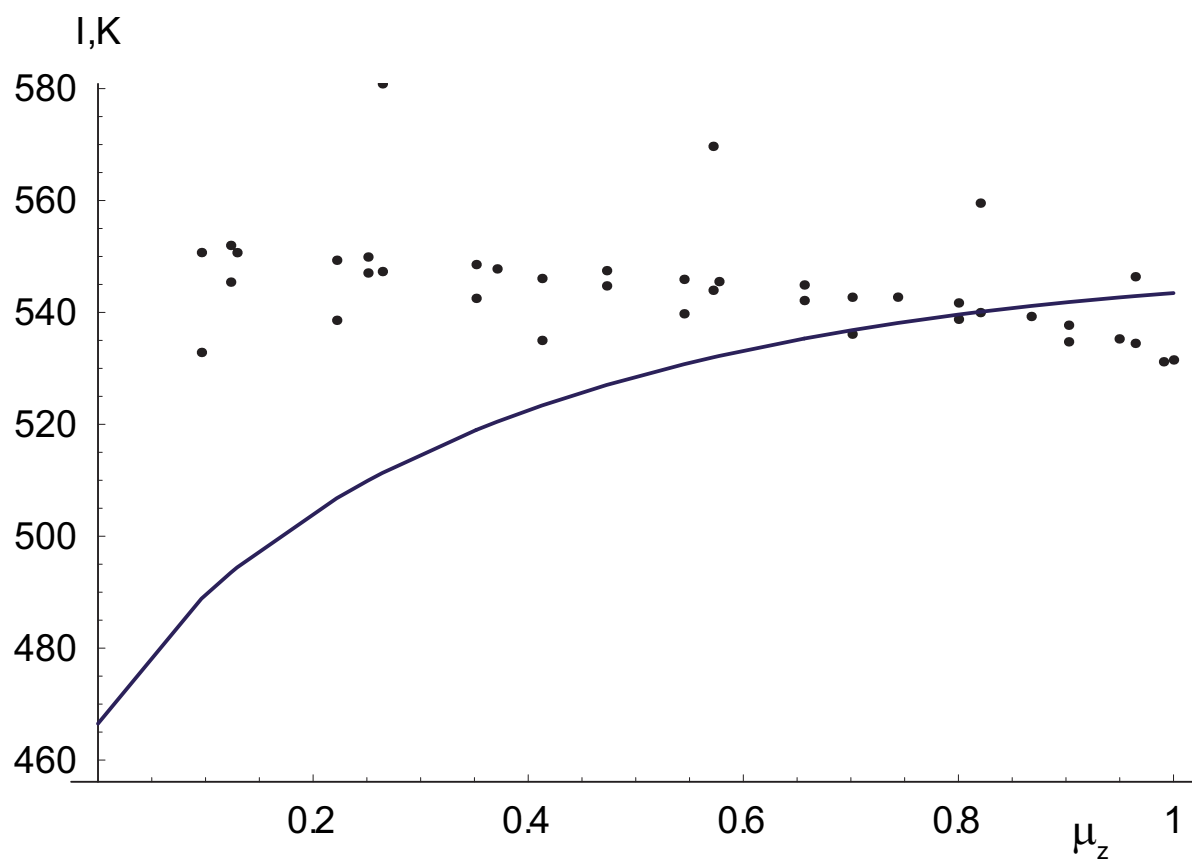


Рис. 5.8: Первый параметр Стокса I теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 40 мм/ч, длина волны 8 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

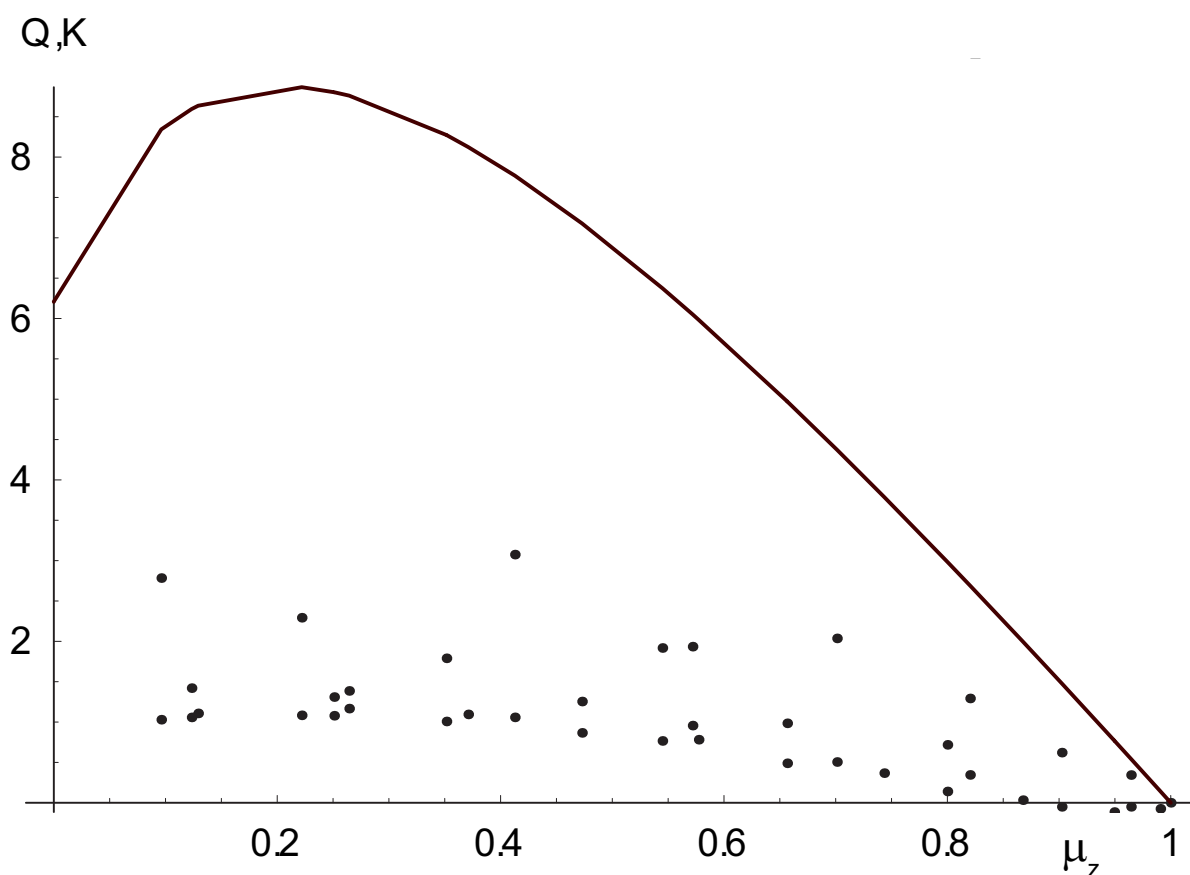


Рис. 5.9: Второй параметр Стокса Q теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 40 мм/ч, длина волны 8 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

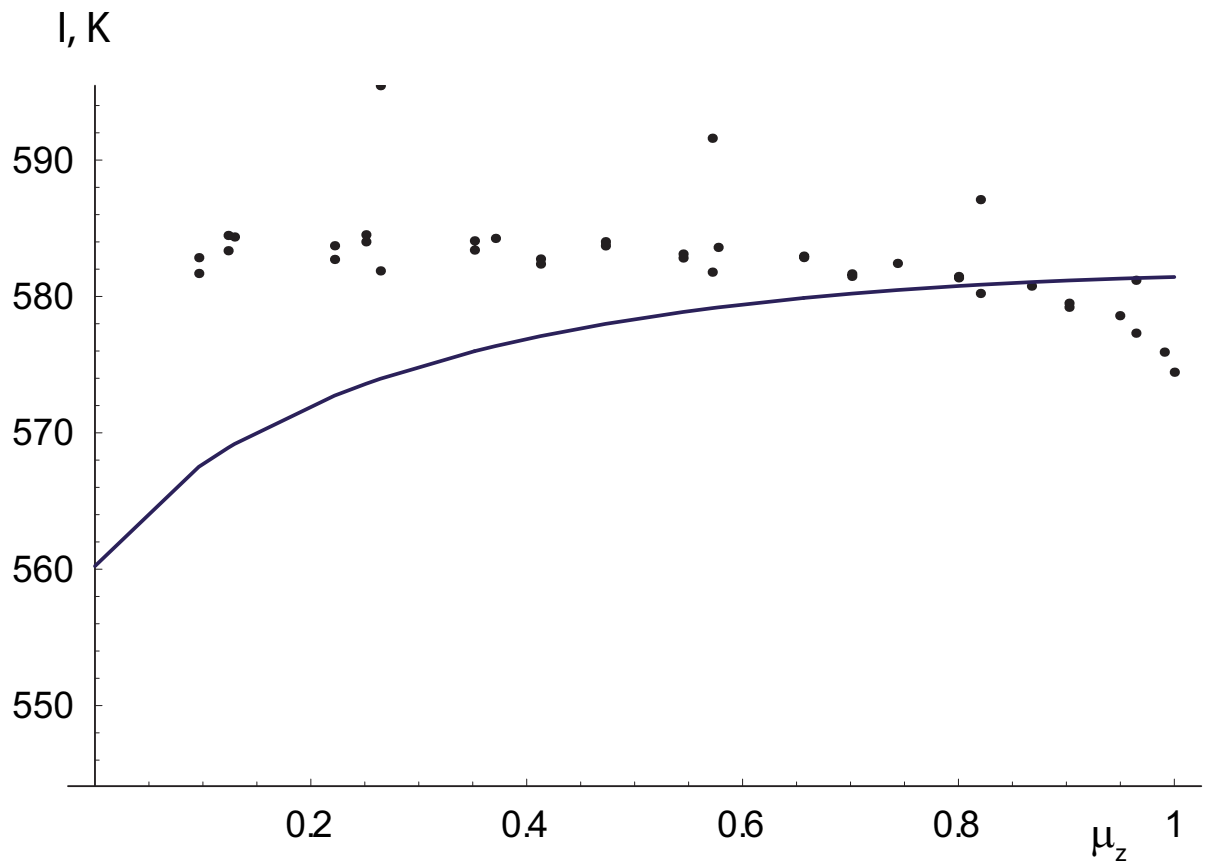


Рис. 5.10: Первый параметр Стокса I теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 90 мм/ч, длина волны 22 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

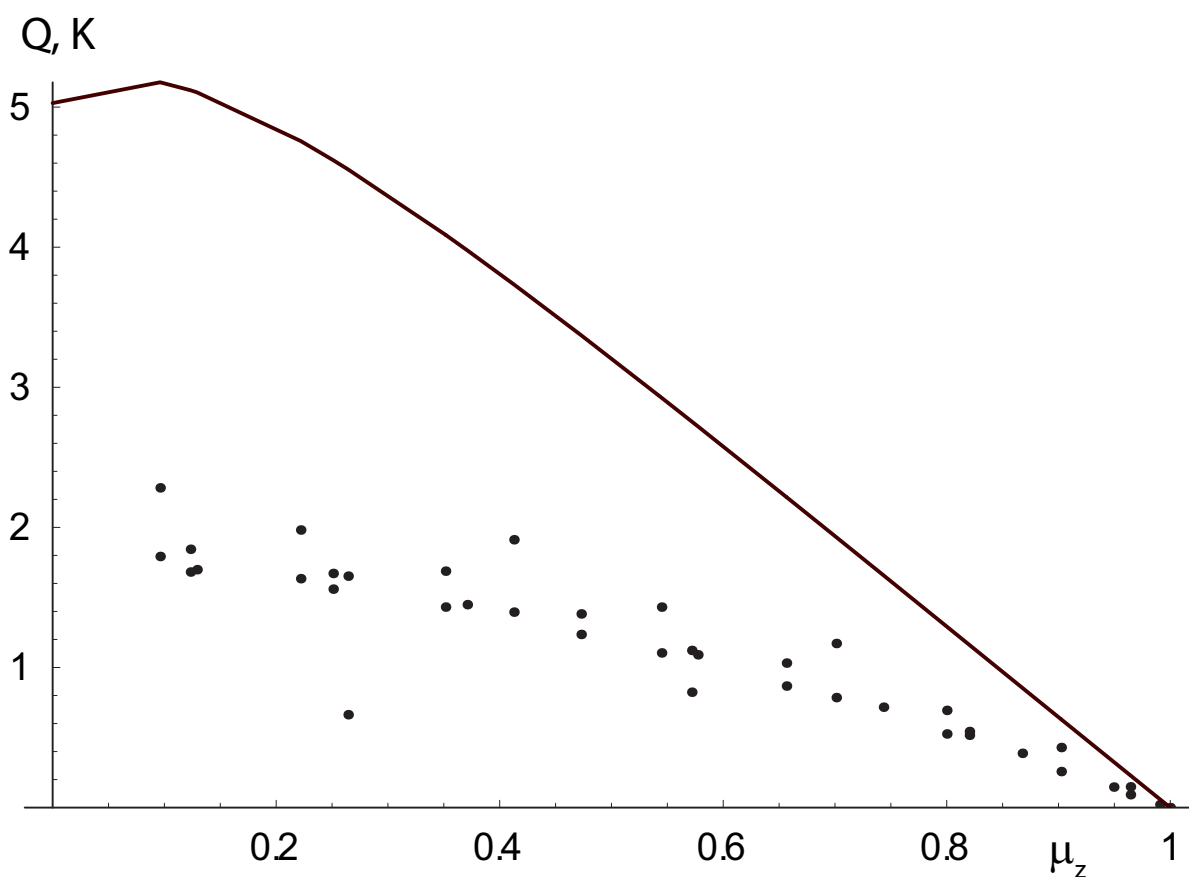


Рис. 5.11: Второй параметр Стокса Q теплового излучения дождевых осадков. Сплошная кривая – сплошной плоский слой толщины 3 км, точки – кубическая ячейка 3 x 3 x 3 км. Интенсивность осадков 90 мм/ч, длина волны 22 мм. Термодинамическая температура среды $T = 300\text{ K}$, радиояркостная температура подстилающей поверхности $T_0 = 300\text{ K}$.

Основные результаты диссертации

Предложен новый общий способ учета дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения в малоугловом приближении теории переноса излучения, значительно повышающий точность решения по сравнению с ранее известными подходами. На основе малоугловых приближений нового типа предложены эффективные численные схемы решения уравнения переноса излучения с разделением компонент решения. По предложенной схеме проведены расчеты полей сосредоточенных и коллимированных источников излучения в средах с сильно анизотропным рассеянием. Проведены расчеты распространения коротких импульсов излучения, в т.ч. с линейной и круговой поляризацией.

Исследованы поля узких пучков излучения в неоднородной среде. Получены соотношения симметрии особенностей углового и пространственного распределения интенсивности излучения точечного мононаправленного источника в рассеивающей среде. Проведены расчеты частотных спектров импульсных и модулированных пучков излучения в среде с сильно анизотропным рассеянием. Проведены расчеты видимости авиационных и морских навигационных лазерных маяков в тумане.

Исследовано распространение узких пучков излучения в рассеивающей среде с градиентом коэффициента преломления. В малоугловом приближении теории переноса излучения получены асимптотические решения уравнения переноса излучения для основных фундаментальных типов источников излучения (плоский мононаправленный, точечный изотропный, точечный мононаправленный) в среде с градиентом коэффициента преломления. Исследован эффект слабой локализации в преломляющих средах.

Построена количественная теория эффекта гало обратного рассеяния узкого пучка в среде с сильно анизотропным рассеянием.

Исследованы искажения радиолокационных сигналов локаторов с синтезированной апертурой в случайно-неоднородной ионосфере. Проведены исследования эффективности апертурного синтеза.

Исследовано рассеяние радиолокационных сигналов на поверхностном рельефе некоторых геологических подразделений Марса и Ганимеда.

На основе опубликованных наблюдательных данных построена электрофизическая модель марсианских полярных льдов. Исследовано распространение

радиолокационных импульсов в толще слоистых ледяных отложений. Предложены методики оценки электрических параметров среды. Сделаны оценки электрических свойств северного полярного ледяного щита Марса.

Предложены адаптивные алгоритмы коррекции систематических фазовых искажений радиолокационных сигналов в ионосфере с высокой устойчивостью к аддитивным шумам и случайным фазовым флуктуациям волн в турбулентной среде.

Вычислены характеристики поглощения и рассеяния микроволнового радиоизлучения дождем различной интенсивности. Проведено численное решение уравнения переноса теплового радиоизлучения миллиметрового диапазона в плоском слое дождя и дождевой ячейке. Получены оценки углового распределения интенсивности и поляризации теплового излучения дождевых ячеек. Показана определяющая роль ячеистой структуры дождевых осадков в формировании пространственного и углового распределения интенсивности и поляризации теплового радиоизлучения.

Основные публикации автора по теме диссертации.

1. Ilyushin Ya. A. Martian northern polar cap : layering and possible implications for radar sounding. // Planetary and Space Science. 2004. V.52. P.1195-1207.
2. Ilyushin Ya. A., Seu R., Phillips R. J. Subsurface radar sounding of the Martian polar cap: radiative transfer approach. // Planetary and Space Science. 2005. V.53. P.1427-1436.
3. Ilyushin Ya. A. Radiative transfer in layered media: application to the radar sounding of Martian polar ices. II. // Planetary and Space Science. 2007. V.55 P.100-112.
4. Илюшин Я. А. Искажения сверхширокополосных сигналов радиолокаторов глубинного зондирования в неоднородной ионосфере. // Радиотехника и электроника. 2008. Т.53. С.403-412.

5. Ilyushin Ya. A. Impact of the plasma fluctuations in the Martian ionosphere on the performance of the synthetic aperture ground-penetrating radar. // Planetary and Space Science. 2009. V.57. P.1458-1466.
6. Илюшин Я. А. Влияние флуктуаций концентрации ионосферной плазмы на глубинное радиозондирование марсианского грунта радаром с синтезированной апертурой. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2009. Т.ЛII. С.365-374.
7. Илюшин Я. А. Влияние анизотропных флуктуаций плотности ионосферной плазмы на глубинное радиозондирование сверхширокополосным радиолокатором с синтезированной апертурой. // Космические исследования. 2010. том 48. С.161-168.
8. Будаков В. П., Илюшин Я. А. Учет дисперсии длин путей рассеянного света в малоугловом приближении теории переноса излучения. // Оптика атмосферы и океана. 2010. Т.23. С.102-105.
9. Будаков В. П., Илюшин Я. А. Выделение особенностей поля яркости в мутной среде на основе малоугловых решений теории переноса. // Оптика атмосферы и океана. 2011. Т.24. С.93-100.
10. Илюшин Я. А., Будаков В. П. Вычисление световых полей сосредоточенных источников в мутных средах с сильно анизотропным рассеянием. // Оптика и Спектроскопия. 2011. Т.111. С.893-899.
11. Илюшин Я. А. Анализ боковых отражений орбитального глубинного радиолокатора с использованием снимков высокого разрешения поверхности Марса. // Радиотехника. 2010. N9. С.105-111.
12. Ilyushin Ya. A., Budak V. P. Analysis of the propagation of the femtosecond laser pulse in the scattering medium. // Computer Physics Communications. 2011. V.182. P.940–945.
13. Ilyushin Ya. A., Budak V. P. Narrow-beam propagation in a two-dimensional scattering medium. // J. Opt. Soc. Am. A. 2011. V.28. P.76–81.

14. Ilyushin Ya. A., Budak V. P. Narrow beams in scattering media: the advanced small-angle approximation. // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V.28, P.1358–1363
15. Ilyushin Ya. A. Coherent backscattering enhancement in highly anisotropically scattering media: numerical solution. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2013. V.113. P.348–354.
16. Ilyushin Ya. A. Backscattering halo from the beam in the scattering medium with highly forward peaked phase function: is it feasible? // J. Opt. Soc. Am. A. 2012. V.29. PP.1986–1991.
17. Ilyushin Ya. A. Coherent backscattering enhancement in medium with variable refractive index. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2013. V.117. P.133–139.
18. Ilyushin Ya. A. Propagation of a Collimated Beam in the Refractive Scattering Medium // Radiophysics and Quantum Electronics. 2013. V.55. P.648–653.
19. Ilyushin Ya. A. Coherent backscattering enhancement in refracting media: diffusion approximation. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V.30. P.1305–1309.
20. Ошлаков В. Г., Илюшин Я. А., Цвык Р. Ш., Солдатов А. Н. Принципы построения лазерных лучевых инструментальных систем ориентирования. Ч.1. // Изв. Вузов. Физика. 2013. Т56. С.60–70.
21. Ilyushin Ya. A. Subsurface radar location of the putative ocean on Ganymede: Numerical simulation of the surface terrain impact. // Planetary and Space Science 2014. V.92. P.121–126.
22. Ilyushin Ya. A. Weak Localization in Media with Refractive-Index Gradient: the Diffusion Approximation. // Radiophysics and Quantum Electronics. 2015. V.57. P.730-736.
23. Илюшин Я. А., Кутуза Б. Г. Влияние пространственной структуры осадков на поляризационные характеристики уходящего микроволнового излучения атмосферы. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т.52. С.83–91.

24. Hartogh P., Ilyushin Ya. A. A passive low frequency instrument for radio wave sounding the subsurface oceans of the Jovian icy moons: An instrument concept. // Planetary and Space Science. 2016. V.130. P.30-39.

Литература

- [1] Chwolson O. D. Grundzuge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes. // Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersburg. 1889. B.33. S.221-256.
- [2] Апресян Л. А., Кравцов Ю. А. Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты. М.: Наука, 1983. 216 с.
- [3] Mishchenko, M. I. Multiple scattering, radiative transfer, and weak localization in discrete random media: Unified microphysical approach. // Rev. Geophys. 2008. V.46. P.RG2003.
- [4] Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
- [5] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.:Наука, 1981. 416 с.
- [6] Duntley S. Q. Light in the sea. // J. Opt. Soc. Am. 1963. V.53 P.214.
- [7] Peters V. G., Wyman D. R., Patterson M. S., Frank G. L. Optical properties of normal and disease breast tissues in the visible and near infrared // Phys. Med. Biol. 1990. V.35. P.1317–1334.
- [8] Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 167 с.
- [9] Elliott R. A. Multiple scattering of optical pulses in scale model clouds. // Appl. Opt. 1983. V.22. P.2670–2681.
- [10] Akkermans E., Wolf P. E., Maynard R. Coherent backscattering of light by disordered media: Analysis of the peak line shape. // Phys. Rev. Lett. 1986. V.56. P.1471–1474.

- [11] Iwabuchi H., Suzuki T. Fast and accurate radiance calculations using truncation approximation for anisotropic scattering phase functions. // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2009. V.110. P.1926–1939.
- [12] Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.:БИНОМ, 2006. 661 с.
- [13] Aristova E. N., Goldin V. Ya. Computation of anisotropy scattering of solar radiation in atmosphere (monoenergetic case). // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2000. V.67. P.139–157.
- [14] Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.:ИЛ, 1953. 432 с.
- [15] Романова Л.М. Решение уравнения переноса излучения в случае индикатрисы рассеяния, сильно отличающейся от сферической. I. // Оптика и спектроскопия. 1962. Т.13. С.429-435.
- [16] Irvine W. M. Diffuse reflection and transmission by cloud and dust layers // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1968. V.8. P.471–85.
- [17] Ленобль Ж. П. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчета. Л.:Гидрометеиздат. 1990. 264 с.
- [18] Wiscombe W. J. The delta-M method: rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions. // J. Atmos. Sci. 1977. V.34. P.1408–1422.
- [19] Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons. Part I. // Phys. Rev. 1940. V.57. P.24-29.
- [20] Dave J. V., Gazdag J. A Modified Fourier Transform Method for Multiple Scattering Calculations in a Plane Parallel Mie Atmosphere. // Appl. Opt. 1970. Vol. 9. P. 1457–1466.
- [21] Ito S., Oguchi T. Approximate solutions of the vector radiative transfer equation for linearly polarized light in discrete random media. // J. Opt. Soc. Am. A. 1989 V.6 P.1852 – 1858.

- [22] Wentzel G. Zur Theorie der Streuung von β -Strahlen // Ann. d. Phys. 1922. B.69. S.335-368.
- [23] Bothe W. Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen // Zeit. f. Physik. 1929. B. 54. S. 161–178.
- [24] Компанеец А. С. Многократное рассеяние тонких пучков быстрых электронов // Ж. эксперим. и теор. физ. 1947. Т. 17. С. 1059–1062.
- [25] Kokhanovsky A. A., Small-angle approximations of the radiative transfer theory // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. V.30. P.2837–2840.
- [26] Будаков В. П., Козельский А. В. О точности и границах применимости малоуглового приближения. // Оптика атмосферы и океана. 2005. Т.18. С.38-44.
- [27] Remizovich V. S., Rogozkin D. B., Ryazanov M. I. Propagation of a light signal in a substance with large-scale random inhomogeneities with photon path-length fluctuations due to multiple scattering taken into account // Izv. Akad. Sci. USSR, Atmos. Ocean. Phys. 1982. V.18. P.480–485.
- [28] Remizovich V. S., Rogozkin D. B., Ryazanov M. I. Propagation of a narrow modulated light beam in a scattering medium with fluctuations of the photon pathlength in multiple scattering // Radiophys. Quantum Electron. 1982. V.25. P.639–645.
- [29] Remizovich V. S., Rogozkin D. B., Ryazanov M. I. Propagation of a light-flash signal in a turbid medium // Izv. Acad. Sci. USSR, Atmos. Ocean. Phys. 1983. V.19 P.796–801.
- [30] Alexandrov M. D., Remizovich V. S. Calculation of light field characteristics in the depth mode of real turbid media // Opt. Atmos. 1991. V.4. P.1017–1024.
- [31] Maleyev S. V., Toperverg B. P. Small-angle multiple scattering by statical inhomogeneities. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1980. 78. 315–330.
- [32] Remizovich V. S. Theoretical discription of elastic reflection of particles (photons) incident at grazing angles without the use of the diffusion approximation. // Sov. Phys. JETP 1984. V.60. P.290–297.

- [33] Muehlschlegel B., Koppe H. Theorie der Vielfach-streuung polarisierter Elektronen // Zeit. f. Physik. 1958. V.150. P.474–496.
- [34] Budak V. P., Korkin S. V. On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2008. V.109. PP.220–234.
- [35] Erukhimov L. M., Kirsh P. I., Polarization transfer in a statistically inhomogeneous cosmic plasma. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. 1973. V.16. P.1783–1788.
- [36] Kukushkin A. V., Olyak M. R., Transfer of a polarization of radio-frequency radiation in a randomly inhomogeneous, magnetically active plasma. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. 1990. 33. P.1361–1369.
- [37] McLean J. W., Freeman J. D., and Walker R. E. Beam spread function with time dispersion. // Appl. Opt. 1998. V.37. PP.4701–4711.
- [38] Walker R. E., McLean J. W. Lidar equations for turbid media with pulse stretching. // Appl. Opt. 1999. V.38. P.2384–2397.
- [39] Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.:Мир, 1972. 384 с.
- [40] Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде Минск:Наука и техника. 1985. 328 с.
- [41] Scott W. T. The theory of small-angle multiple scattering of fast charged particles. Rev. Mod. Phys. 35, 231–313 (1963).
- [42] Долин Л. С. О рассеянии светового пучка в слое мутной среды. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1964. Т.7. С.380.
- [43] Dolin L. S. On propagation of a narrow light beam in a medium with strongly anisotropic scattering. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. 1966. V.9. P.61–71.

- [44] Fante R. L. Propagation of electromagnetic waves through turbulent plasma using transport theory. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1973. V.21. P.750–755.
- [45] Dolin L. S. Automodel approximation in the theory of multiple sharply anisotropic scattering of light. // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1981. V.260. P.1344–1347.
- [46] Ilyushin Ya. A., Budak V. P. Analysis of the propagation of the femtosecond laser pulse in the scattering medium. // Computer Physics Communications. 2011. V.182. P.940–945.
- [47] Ishimaru A., Jaruwatanadilok S., Kuga Y. Polarized pulse waves in random discrete scatterers. // Appl. Opt. 2001. V.40. P.5495–5502.
- [48] Sergeeva E. A., Kirillin M. Y., Priezzhev A. V. Propagation of a femtosecond pulse in a scattering medium: theoretical analysis and numerical simulation. // Quantum Electron. 2006. V.36. P.1023–1031.
- [49] Sergeeva E. A., Korytin A. I. Theoretical and experimental study of blurring of a femtosecond laser pulse in a turbid medium. // Radiophysics and Quantum Electronics. 2008. V.51. P.301–314.
- [50] Kurkina L. I. Density-functional study of multielectron ionization of sodium clusters by strong femtosecond laser pulses. // Computer Physics Communications 2002. V.147. P.205 – 208.
- [51] Буда́к В. П., Илю́шин Я. А. Учет дисперсии длин путей рассеянного света в малоугловом приближении теории переноса излучения. // Оптика атмосферы и океана 2010. Т.23. С.102-105.
- [52] Буда́к В. П., Илю́шин Я. А. Выделение особенностей поля яркости в мутной среде на основе малоугловых решений теории переноса. // Оптика атмосферы и океана. 2011. Т.24. С.93-100.
- [53] Y. A. Ilyushin, V. P. Budak. Narrow-beam propagation in a two-dimensional scattering medium. J. Opt. Soc. Am. A. 2011. V.28 N.2 P.76–81.

- [54] Ilyushin Y. A., Budak V. P. Narrow beams in scattering media: the advanced small-angle approximation. // J. Opt. Soc. Am. A 2011. V.28. P.1358–1363.
- [55] Илюшин Я. А., Будаков В. П. Вычисление световых полей сосредоточенных источников в мутных средах с сильно анизотропным рассеянием. // Оптика и Спектроскопия, 2011. Т.111. С.893-899.
- [56] Alexandrov M. D., Remizovich V. S. Depth mode characteristics of light propagation in real turbid media and media with two-dimensional scattering. // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V.12. P.2726–2735.
- [57] Harris J. F. S. Water and ice cloud discrimination by laser beam scattering. // Appl. Opt. 1971. V.10. P.732–737.
- [58] Arnush D. Underwater light-beam propagation in the small-angle-scattering approximation. // J. Opt. Soc. Am. 1972. V.62. P.1109–1111.
- [59] Stotts L. B. The radiance produced by laser radiation transversing a particulate multiple-scattering medium. // J. Opt. Soc. Am. 1977. V.67. P.815–819.
- [60] Stotts L. B. Limitations of approximate fourier techniques in solving radiative-transfer problems. // J. Opt. Soc. Am. 1979. V.69. P.1719–1722.
- [61] Tam W. G., Zardecki A. Laser beam propagation in particulate media. // J. Opt. Soc. Am. 1979. V.69. P.68–70.
- [62] Helliwell W. S. Finite-difference solution to the radiative-transfer equation for in-water radiance. // J. Opt. Soc. Am. A 1985. V.2. P.1325–1330.
- [63] Walker P. L. Beam propagation through slab scattering media in the small angle approximation. // Appl. Opt. 1987. V.26. P.524–528.
- [64] Tessororf J. Time dependent radiative transfer and pulse evolution. // J. Opt. Soc. Am. A 1989. V.6. P.280–297.
- [65] Hanson F., Lasher M. Effects of underwater turbulence on laser beam propagation and coupling into single-mode optical fiber. // Appl. Opt. 2010. V.49. P.3224–3230.

- [66] Bellman R., Kalaba R., Ueno S. Invariant imbedding and time dependent diffuse reflection of a pencil of radiation by a finite inhomogeneous flat layer - I. // J. Math. Anal. Appl. 1963. V.7 P.310-321.
- [67] Chandrasekhar S. On the diffuse reflection of a pencil of radiation by a plane-parallel atmosphere. Proc. Nat. Acad. Sci. 1958. V.44. P.933-940.
- [68] Ambarzumian V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. // Dokl. Akad. Nauk SSSR 1943. V.38. P.229-232.
- [69] Plass G. N., Kattawar G. W. Monte Carlo Calculations of Light Scattering from Clouds. // Appl. Opt. 1968. V.7. P.415.
- [70] Bucher E. A. Computer Simulation of Light Pulse Propagation for Communication Through Thick Clouds. // Appl. Opt. 1973. V.12. P.2391.
- [71] Poole L. R., Venable D. D. Campbell J. W. Semianalytic Monte Carlo radiative transfer model for oceanographic lidar systems. // Appl. Opt. 1981. V.20. P.3653.
- [72] Brusaglioni P., Zaccanti G., Pantani L., Stefanutti L. An approximate procedure to isolate single scattering contribution to lidar returns from fogs. // Int. J. Remote Sensing. 1983. V.4. P.399.
- [73] Battistelli E., Brusaglioni P., Ismaelli A., Zaccanti G. Use of two scaling relations in the study of multiple-scattering effects on the transmittance of light beams through a turbid atmosphere. // J. Opt. Soc. Am. A 2, 903-911 (1985)
- [74] Долин Л. С., Сергеева Е. А. Модель распространения облученности от направленного источника света в слабо поглощающей мутной среде. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2001. Т.44. С.931-939.
- [75] Siewert C. E. On the singular components of the solution to the searchlight problem in radiative transfer. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1985. V.33. P.551 – 554.

- [76] Sanchez R. On the singular structure of the uncollided and first-collided components of the green's function. *Annals of Nuclear Energy* 2000. V.27. P.1167–1186.
- [77] Ilyushin Ya. A. Backscattering halo from the beam in the scattering medium with highly forward peaked phase function: is it feasible? // // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2012. V.29. P.1986-1991.
- [78] Ilyushin Ya. A. Coherent backscattering enhancement in highly anisotropically scattering media: numerical solution. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2013. V.113. P.348–354.
- [79] Zardecki A., Gerstl S. A. W., Embury J. F. Application of the 2-D discrete-ordinates method to multiple scattering of laser radiation. // *Appl. Opt.* 1983. V.22. P.1346.
- [80] Elliott J. P. Milne's problem with a point-source. // *Proc. R. Soc. London A*. 1955. V.228. P.424.
- [81] Rybicki G. B. The searchlight problem with isotropic scattering. // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 1971. V.11. P.827.
- [82] Barichello, L. B., Siewert, C. E. The Searchlight Problem for Radiative Transfer in a Finite Slab // *Journal of Computational Physics*, 2000. V.157. P.707-726.
- [83] Siewert, C. E., Dunn W. L. The Searchlight Problem in Radiative Transfer. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 1989. V.41. P.467-481.
- [84] Garcia R. D. M. A review of the facile (FN) method in particle transport theory // *Transp. Theory Stat. Phys.* 1985. V.14. P.391.
- [85] Barichello, L. B., Garcia R. D. M., Siewert, C. E. Particular solutions for the discrete-ordinates method. // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2000. V.64. P.219.

- [86] Barichello, L. B., Siewert, C. E. A discrete-ordinates solution for a non-grey model with complete frequency redistribution // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1999. V.62. P.665.
- [87] Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
- [88] D. I. Nagirner. Theory of nonstationary transfer of radiation. // Astrophysics. 1974. V.10. P.274.
- [89] Кауль Б.В., Самохвалов И.В. // Изв. вузов СССР. Сер. Физика. 1976. N 1. С. 80–85.
- [90] Deepack A., Farrukh U. O., Zardecki A. Significance of higher-order multiple scattering for laser beam propagation through hazes, fogs, and clouds. // Appl. Opt. 1982. V.21. P.439.
- [91] Tam W. G., Zardecki A. Multiple scattering corrections to the Beer-Lambert law. 1: Open detector. // Appl. Opt. 1982. V.21. P.2405.
- [92] Zardecki A., Tam W. G. Multiple scattering corrections to the Beer-Lambert law. 2. Detector with a variable field of view. // Appl. Opt. 1982. V.21. P.2413.
- [93] Snyder H. S., Scott W. T. Multiple scattering of fast charged particles. // Phys. Rev. 1949. V.76. P.220–225.
- [94] Tsang L., Ishimaru A. Backscattering enhancement of random discrete scatterers. // J. Opt. Soc. Am. A 1984. V.1. P.836–839.
- [95] Tam W. G. Aerosol backscattering of a laser beam. // Appl. Opt. 1983. V.22. P.2965–2969.
- [96] Eloranta E. W. Practical model for the calculation of multiply scattered lidar returns. // Appl. Opt. 1998. V.37. P.2464–2472.
- [97] Ito S. Theory of beam light pulse propagation through thick clouds: effects of beamwidth and scatterers behind the light source on pulse broadening. // Appl. Opt. 1981. V.20. P.2706–2715.

- [98] Sreenivasiah I., Ishimaru A. Beam wave two-frequency mutual-coherence function and pulse propagation in random media: an analytic solution. // Appl. Opt. 1979. V.18. P.1613–1618.
- [99] Benke K. K., McKellar B. H. J. Modulation transfer function of photographic emulsion: the small-angle approximation in radiative transfer theory. // Appl. Opt. V.29. P.151–156. (1990).
- [100] Tam W. G., Zardecki A. Multiple scattering corrections to the beer-lambert law. 1: Open detector. // Appl. Opt. 1982. V.21. P.2405–2412.
- [101] Box M. A., Deepak A. Limiting cases of the small-angle scattering approximation solutions for the propagation of laser beams in anisotropic scattering media. // J. Opt. Soc. Am. V.71. P.1534–1539. 1981.
- [102] Tam W. G., Zardecki A. Laser Beam Propagation in Particulate Media. // J. Opt. Soc. Am. 1979. V.69. P.68.
- [103] Tam W. G., Zardecki A. Multiple Scattering of a Laser Beam by Radiational and Advective Fogs. // Opt. Acta 1979. V.26. P.659.
- [104] Zardecki A., Deepak A. Forward Multiple Scattering Corrections as a Function of the Detector Field of View. // Appl. Opt. 1983. V.22. P.2970.
- [105] Ишимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. Т.2. М.:Мир, 1981. 317 с.
- [106] Zardecki A., Gerstl S. A. W., De Kinder R. E. Two- and Three-Dimensional Radiative Transfer in the Diffusion Approximation. // Appl. Opt. 1986. V.25. P.3508.
- [107] Ishimaru A., Kuga Y., Cheung R. L.-T., Shimuzu K. Scattering and Diffusion of a Beam in Randomly Distributed Scatterers. // J. Opt. Soc. Am. 1983. V.73. P.131.

- [108] Gerstl S. A. W., Zardecki A., Unruh W. P. , Stupin D. M., Stokes G H., Elliott N. E. Off-Axis Multiple Scattering of a Laser Beam in Turbid Media: Comparison of Theory and Experiment. // Appl. Opt. 1987. V.26. P.779.
- [109] Bissonnette L. R. Multiscattering model for propagation of narrow light beams in aerosol media. // Appl. Opt. 1988. V.27. P.2478-2484.
- [110] Барабаненков Ю. Н. О волновых поправках к уравнению переноса для направления рассеяния «назад» // Изв. высш. уч. зав. Радиофизика. 1973. Т. 16 С.88-96.
- [111] Tsang L., Ishimaru A., Backscattering enhancement of random discrete scatterers. // J. Opt. Soc. Am. A 1984. V.1. P.836–839.
- [112] Mishchenko M., Dlugach J. Coherent backscatter and the opposition effect for e-type asteroids. // Planetary and Space Science 1993. V.41. P.173–181.
- [113] Picard G., Toan T. L., Quegan S. A three-dimensional radiative transfer model to interpret ranging scatterometer measurements from a pine forest. // Waves in Random Media. 2004. V.14.P.S317–S331.
- [114] Berry M. J., Baskey J. H., Westervelt R. M., Gossard A. C. Coherent electronic backscattering in ballistic microstructures. // Phys. Rev. B. 1994. 50.P.8857–8860.
- [115] Oguchi T. Effect of incoherent scattering on attenuation and cross polarization of millimeter wave due to rain: preliminary calculations at 34.8 GHz and 82GHz for spherical raindrops. // J. Radio Res. Lab. 1980. V27.P.51.
- [116] Mishchenko M.I. Enhanced backscattering of polarized light from discrete random media: calculations in exactly the backscattering direction. // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V.9. P.978–82.
- [117] Kobayashi S., Tanelli S., Iguchi T., Im E. Backscattering enhancement with a finite beam width for millimeter-wavelength weather radars. // Proceedings of SPIE. Microwave remote sensing of the atmosphere and environment IV. 2004. V.5654. P.106–13.

- [118] van Albada M. P., Lagendijk A. Vector character of light in weak localization: spatial anisotropy in coherent backscattering from a random medium. // Phys. Rev. B. 1987. V.36. P.2353.
- [119] Mandt C. E., Tsang L., Ishimaru A. Copolarized and depolarized backscattering enhancement of random discrete scatterers of large size based on second-order ladder and cyclical theory. // J. Opt. Soc. Am. A. 1990. V.7. P.585–92.
- [120] Ihara T., Oguchi T., Tazaki T. Measurement of backscattering enhancement due to random particles at 30 GHz band using mirror image technique. // Proceedings of the URSI Commission F. Open Symposium. Cairns, Australia. 2004. P.59–64.
- [121] Kobayashi S., Oguchi T., Tanelli S., Im E. Backscattering enhancement on spheroid-shaped hydrometeors: considerations in water and ice particles of uniform size, and Marshall–Palmer distributed rains. // Radio Sci. 2007. V.42. P.RS2001.
- [122] Oguchi T., Ihara T. Computer simulation of enhanced backscattering from randomly distributed spherical scatterers at 30 GHz and comparison with measurement. // Radio Sci. 2006. V.41. P.RS6002.
- [123] Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. // N.Y.:IEEE Press, 1997. P.147–74.
- [124] Wolf P.-E., Maret G. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. // Phys. Rev. Lett. 1985. V.55. P.2696–2699.
- [125] Kuga Y., Ishimaru A. Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles. // J. Opt. Soc. Am. A. 1984. V.1 P.831–835.
- [126] van der Mark M. B., van Albada M. P., Lagendijk A. Light scattering in strongly scattering media: Multiple scattering and weak localization. // Phys. Rev. B. 1988. V.37. P.3575–3592.
- [127] Rogozkin D., Coherent backscattering of waves from disordered systems with large-scale inhomogeneities. // Laser Physics. 1995. V.5. P.787–792.

- [128] Marinyuk V. V., Rogozkin D. B. Effects of nondiffusive wave propagation upon coherent backscattering by turbid media. // *Laser Physics* 2009. V.19. P.176–184.
- [129] Marinyuk V. V., Rogozkin D. B. Wings of coherent backscattering from a disordered medium with large inhomogeneities. // *Phys. Rev. E*. 2011. V.83. P.066604.
- [130] Tishkovets V. P. Multiple scattering of light by a layer of discrete random medium: backscattering. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 2002. V.72. P.123 – 137.
- [131] Tishkovets V. P., Mishchenko M. I. Coherent backscattering of light by a layer of discrete random medium. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. V.86. 2004. P.161–180.
- [132] Tishkovets V. P., Mishchenko M. I. Approximate calculation of coherent backscattering for semi-infinite discrete random media. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2009. V.110. P.139–145.
- [133] Hapke B. W. Bidirectional reflectance spectroscopy: 5. the coherent backscatter opposition effect and anisotropic scattering. // *Icarus* V.157. 2002. P.523–534.
- [134] Hapke B. W., Shepard M. K., Nelson R. M., Smythe W. D., Piatek J. L. A quantitative test of the ability of models based on the equation of radiative transfer to predict the bidirectional reflectance of a well-characterized medium. // *Icarus*. 2009. V.199. P.210–218.
- [135] Muinonen K. Coherent backscattering of light by complex random media of spherical scatterers: numerical solution. *Waves in Random Media*. 2004. V.14. P.365–388.
- [136] Dlugach J. M., Mishchenko M. I., Liu L., Mackowski D. W. Numerically exact computer simulations of light scattering by densely packed, random particulate media. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. V.112. 2011. P.2068 – 2078.

- [137] den Outer P. N., Lagendijk A. Influence of the refractive index contrast on coherent backscattering. // Optics Communications. 1993. V.103. P.169–173.
- [138] Krishna A. N., Mishra S. C. Discrete transfer method applied to radiative transfer in a variable refractive index semitransparent medium. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 102(3):432 – 440, 2006.
- [139] Ilyushin Y. A. Coherent backscattering enhancement in medium with variable refractive index. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2013. V.117. P.133–139.
- [140] Ilyushin Y. A. Coherent backscattering enhancement in refracting media: diffusion approximation. // J. Opt. Soc. Am. A. V.30. P.1305-1309. 2013.
- [141] Hapke B. Coherent backscatter and the radar characteristics of outer planet satellites. // Icarus. 1990. V.88. P.407–417.
- [142] Afanasiev A. The energy spectrum of spacecraft radio signals in the caustic shadow zone of the sun: A new diagnostic of the solar coronal plasma. // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2005. V.67. P.1002–1013.
- [143] Ilyushin Y. A. Impact of the plasma fluctuations in the martian ionosphere on the performance of the synthetic aperture ground-penetrating radar. // Planetary and Space Science V.57. P.1458–1466. 2009.
- [144] Arthern R., Winebrenner D., Waddington E. Densification of water ice deposits on the residual north polar cap of mars. // Icarus. 2000. V.144. P.367–381.
- [145] Ilyushin Y. A. Martian northern polar cap : layering and possible implications for radar sounding. // Planetary and Space Science. 2004. V.52. P.1195–1207.
- [146] Lemonnier D. Dez V. L. Discrete ordinates solution of radiative transfer across a slab with variable refractive index. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2002. V.73. P.195–204.
- [147] Дашей Р., Захариасен Ф., Манк У., Уотсон К. Распространение звука во флуктуирующем океане. М.:Мир, 1982. 336 с.

- [148] Bitjukov, A. A., Gherm, V. E., Zernov, N. N. On the solution of Markov's parabolic equation for the second-order spaced frequency and position coherence function. // Radio Science. 2002. V.37. N.4. P.19.
- [149] Илюшин Ю. А. Propagation of a Collimated Beam in the Refractive Scattering Medium. // Radiophysics and Quantum Electronics. 2013. V.55. P.648-653.
- [150] Справочник по специальным функциям. М.:Наука, 1979. 830 с.
- [151] Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантомеханической теории атомных спектров М.: ИЛ, 1961. 444 с.
- [152] Karp A. H., Greenstadt J., Fillmore J. A. Radiative transfer through an arbitrarily thick, scattering atmosphere. // J. Quant. Spectr. and Radiat. Transfer. 1980. V.24. P.391–406.
- [153] Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. М.:Мир, 1976. 615 с.
- [154] Лубенченко А. В. Функция распределения отраженных электронов по пробегам. // Тез. докл. XXIII Конференции по эмиссионной электронике. Т.1. Ташкент.:Ин-т электроники. 1997. С.163.
- [155] Kuščer I., Ribarič M. Matrix formalism in the theory of diffusion of light. // Optica Acta. 1959. V.6. P.42–51.
- [156] Зеге Э. П., Чайковская Л. И. Разложение элементов матрицы рассеяния морской воды по обобщённым сферическим функциям. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т.17. С.604–613.
- [157] Городничев Е. Е., Кузовлев А. И., Рогозкин Д. Б. Многократное рассеяние поляризованного света в среде с крупными неоднородностями. // ЖЭТФ. 2007. Т.131. С.357-380.
- [158] Hofer M., Glatte O. Mueller matrix calculations for randomly oriented rotationally symmetric objects with low contrast. // Appl. Opt. 1989. V.28. P.2389–2400.

- [159] Буда́к В. П., Козельский А. В., Савицкий Е. Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии. // Оптика атмосферы и океана. 2004. Т.17. С.365-41.
- [160] Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.:Наука, 1987. 544 с.
- [161] Gedzelman S. D. , Ángel López-Álvarez M., Hernandez-Andrés J., Greenler R. Quantifying the “milky sky” experiment. // Appl. Opt. 2008. v.47. P.H128–H132.
- [162] Swanson N. L., Gehman V. M., Billard B. D., Gennaro T. L. Limits of the small-angle approximation to the radiative transport equation, // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V.18. P.385–391.
- [163] Swanson N. L., Billard B. D., Gehman V. M., Gennaro T. L. Application of the small-angle approximation to ocean water types. // Appl. Opt. 2001. V.40. P.3608–3613.
- [164] Arridge S. R. Optical tomography in medical imaging. // Inverse problems. 1999. V.15. P.R41–R93.
- [165] Hanson F., Radic S. High bandwidth underwater optical communication. // Appl. Opt. 2008. V.47. P.277–283.
- [166] Ошлаков В. Г. Патент РФ № 2322371. Способ ориентирования движущегося транспорта по световому лучу и устройство для его реализации. Приоритет 01.02.2006 г.
- [167] Громов Г. Н. Дифференциально-геометрический метод навигации. М.: Радио и связь, 1986. 384 с.
- [168] Лазерный контроль атмосферы. / Под ред. Э. Д. Хинклн. - М: Мир, 1979.- 416 с.
- [169] Справочник по лазерам. / Под ред. А. М. Прохорова. М.: Сов. Радио, 1978. — 504 с.
- [170] Бисярин В. П., Соколов А. В., Сухонин Е. В. и др. Ослабление лазерного излучения в гидрометеорах. М.: Наука, 1977.

- [171] Иванов А. П. Оптика рассеивающих сред. Минск: Наука и техника, 1969. 592 с.
- [172] Бартенева О. Д. Индикатрисы рассеяния света в призмном слое атмосферы // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1960. С. 1852-1865.
- [173] Gordon G., Richard W. Integrating nephelometer and implication // Appl. Opt. 1985. V. 24. P.2721-2730.
- [174] Ошлаков В. Г., Ошлаков В. К., Еремина Т. А. Оптимальные поляризационные характеристики приборов, регистрирующих рассеянное излучение // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20. С.635–640
- [175] Ошлаков В. Г., Цвык Р. Ш., Илюшин Я. А. Оптическая инструментальная система ориентирования в условиях недостаточной видимости. // Сборник трудов научно-технической конференции "Техническое зрение в системах управления 2012"Москва, ИКИ РАН. С.16-25.
- [176] Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the galaxy. // Astrophys. J. 1941. V.93. P.70–83.
- [177] Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. О структуре узкого пучка света в морской воде. // Изв. АН СССР Физика атмосферы и океана. 1969. Т.5. С.160-167.
- [178] Лебедев В. И. О квадратурах на сфере. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1976. Т.16. С.293.
- [179] Mishchenko M. I. Polarization effects in weak localization of light: Calculation of the copolarized and depolarized backscattering enhancement factors. // Phys. Rev. B. 1991. V.44. P.12597–12600.
- [180] Mishchenko M. I. Enhanced backscattering of polarized light from discrete random media: calculations in exactly the backscattering direction. // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V.9. P.978–982.
- [181] Бекефи Дж. Радиационные процессы в плазме. М.:Мир, 1971. 438 с.

- [182] Smerd S. F., Westfold K. C. The characteristics of radio-frequency radiation in an ionized gas, with applications to the transfer of radiation in the solar atmosphere. // *Phil. Mag.* 1949. V.40. P.831–848.
- [183] Ferwerda H. A. The radiative transfer equation for scattering media with a spatially varying refractive index. // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics.* 1999. V.1. P.L1.
- [184] Tualle J. M., Tinet E. Derivation of the radiative transfer equation for scattering media with a spatially varying refractive index. // *Optics Communications.* 2003. V.228. P.33–38.
- [185] Shendeleva M. L. Radiative transfer in a turbid medium with a varying refractive index: comment. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2004. V.21. P.2464–2467.
- [186] Liu L., Zhang L., Tan H. Radiative transfer equation for graded index medium in cylindrical and spherical coordinate systems. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 2006. V.97. P.446–456.
- [187] Liu L., Zhang H., Tan H. Monte-Carlo discrete curved ray-tracing method for radiative transfer in an absorbing-emitting semitransparent slab with variable spatial refractive index. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 2004. V.84. P.357–362.
- [188] Zhu K.-Y., Huang Y., Wang J. Curved ray tracing method for one-dimensional radiative transfer in the linear-anisotropic scattering medium with graded index. // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 2011. V.112., P.377–383.
- [189] Sassaroli A., Martelli F. Equivalence of four Monte-Carlo methods for photon migration in turbid media. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2012. V.29. P.2110–2117.
- [190] Haskell R. C., Svaasand L. O., Tsay T.-T., Feng T.-C., McAdams M. S., Tromberg B. J. Boundary conditions for the diffusion equation in radiative transfer. // *J. Opt. Soc. Am. A.* V.11. P.2727–2741. 1994.
- [191] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

- [192] Kim A. D., Moscoso M. Backscattering of beams by forward-peaked scattering media. // Opt. Lett. 2004. V.29. P.74–76.
- [193] Campbell S. D., O’Connell A. K., Rutherford G. H., Grobe R. Impact of large-angle scattering on diffusively backscattered halos. // Opt. Lett. 2007. V.32. P.560–562.
- [194] Wiersma D. S., van Albada M. P., van Tiggelen B. A., Lagendijk A., Experimental evidence for recurrent multiple scattering events of light in disordered media. // Phys. Rev. Lett. 1995. V.74. P.4193–4196.
- [195] Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 с.
- [196] Berkovits R., Kaveh M. Weak localisation of photons in a disordered two-dimensional medium. // J. Phys. C. 1987. V.20. P.L181–L185.
- [197] Freund I. , Rosenbluh M., Berkovits R., Kaveh M. Coherent backscattering of light in a quasi-two-dimensional system. // Phys. Rev. Lett. 1988. V.61. P.1214–1217.
- [198] Gorodnichev E. E., Dudarev S. L., Rogozkin D. B. Coherent backscattering enhancement under conditions of weak wave localisation in disordered 3D and 2D systems. // Sov. Phys. JETP 1989. V.69. P.481–490.
- [199] Mishchenko M. I. Polarized light transfer in a medium containing perfectly oriented elongated particles. // Kinem. Phys. Celest. Bodies. 1987. V.3. P.53–62.
- [200] Mishchenko M. I., Yanovitskij E. G. Polarized light transfer in a medium containing perfectly oriented elongated particles. General theory. ‘Rayleigh’ scattering. // Kinem. Phys. Celest. Bodies. V.4. P.19–29. 1988.
- [201] Mishchenko M. I., Dlugach J. M., Yanovitskij E. G. Multiple light scattering by polydispersions of randomly distributed perfectly-aligned, infinite Mie cylinders illuminated perpendicularly to their axes // J. Quantum Spectrosc. Radiat. Transfer. V.47. P.401–410. 1992.

- [202] Alexandrov M. D., Remizovich V. S., Rogozkin D. B. Multiple light scattering in a two-dimensional medium with large scatterers. // J. Opt. Soc. Am. A. 1993. V.10. P.2602-2610.
- [203] van Wijk K., Haney M. M., Scales J. A. 1D energy transport in a strongly scattering laboratory model. // Physical Review E. 2004. V.69. P.036611.
- [204] Буда́к В.П., Илю́шин Я.А. Устранение особенностей решения трехмерных краевых задач теории переноса излучения. // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2. С. 471-474.
- [205] Abshire J. B., Sun X., Afzal R. S. Mars Orbiter Laser Altimeter: Receiver Model and Performance Analysis. // Appl. Opt. 2000. V.39. P.2449-2460.
- [206] Kreslavsky M. A., Head, J. W.. Kilometer-scale roughness of Mars: results from MOLA data analysis. // J. Geophys. Res. 2000. V.105. P.26,695–26,711.
- [207] Davies D. W. The Mars water cycle. // Icarus. 1981. V.45. P.398–414.
- [208] Farmer C. B., Davies D. W., LaPorte D. D. Mars: Northern summer ice cap - water vapor observations from Viking 2. // Science. 1976. V.194. P.1339–1340.
- [209] Kieffer H.H., Chase S. C., Martin T. Z., Miner E. D., Palluconi F. D. Martian north pole summer temperatures: Dirty water ice. // Science. 1976. V.194. P.1341–1343.
- [210] Paige D. A., Barchman J. E., Keegan K. D.. Thermal and albedo mapping of the polar regions of Mars using Viking thermal mapper observations. 1. North polar region. // J. Geophys. Res. 1994. V.99. P.25,959–25,991.
- [211] Paige D. A., Keegan K. D.. Thermal and albedo mapping of the polar regions of Mars using Viking Thermal Mapper observations. 2. South polar region. // J. Geophys. Res. 1994. V.99. P.25,993–26,013.
- [212] Kieffer, H. H. H₂O grain size and the amount of dust in Mars' residual north polar cap. // J. Geophys. Res. 1990. V.95. P.1481–1493.
- [213] Malin M. C. Density of martian north polar layered deposits: implications for composition. // Geophys. Res. Lett. 1986. V.13. P.444–447.

- [214] Schenk P. M. Moore J. M. Stereo topography of the south polar region of Mars: volatile inventory and Mars Polar Lander landing site. // J. Geophys. Res. V.105. P.24,529–24,546. 2000.
- [215] Muhleman D. O., et al. Radar investigation of Mars, Mercury and Titan. // Ann. Rev. Earth Planet Sci. 1995. V.23. P. 337–374.
- [216] Clifford S. M., et al. The state and future of Mars polar science and exploration. // Icarus. 2000. V.144. P.210–242.
- [217] Milkovich, S. M., Head J .W. North Polar Cap of Mars: Polar Layered Deposit Characterization and Identification of a Fundamental Climate Signal. // J. Geophys. Res. 2005. V.110. P.1005.
- [218] Blasius K. R., Cutts J. A., Howard A. D. Topography and stratigraphy of martian polar deposits. // Icarus. 1982. V.50. P.140–160.
- [219] Skorov Yu. V. et al. Stability of water ice under a porous nonvolatile layer: implications to the south polar layered deposits of Mars. // Planetary and Space Science. 2001. V.49. P.59–63.
- [220] Thomas P. C. et al. North-south geological differences between the residual polar caps on Mars. // Nature. 2000. V.404. P.161–164.
- [221] Cutts J.A., Lewis B. H. Models of climate cycles recorded in martian polar layered deposits. // Icarus. 1982. V.50. P.216–244.
- [222] Greve R. Waxing and Waning of the Perennial North Polar H₂O Ice Cap of Mars over Obliquity Cycles. // Icarus. 2000. V.131. P.419–431.
- [223] Fishbaugh K. E. Hvidberg C. S. Martian north polar layered deposits stratigraphy: Implications for accumulation rates and flow. J. Geophys. Res. 2006. V.111. P.E06012.
- [224] Johnson C. L., Solomon S. C., Head J. W., Phillips R. J., Smith D. E., Zuber M. T. Lithospheric loading by the northern polar cap of Mars. // Icarus. 2000. V.144. P.313–328.

- [225] Campbell, B. A., Ghent R. R., Shepard M. K. Limits of inference of Mars small scale topography from MOLA data. // Geophysical Research Letters. 2003. V.30. P.1115.
- [226] Илюшин Я. А. Анализ боковых отражений орбитального глубинного радиолокатора с использованием снимков высокого разрешения поверхности Марса // Радиотехника. 2010. N.9. С.105-111.
- [227] Toon O. W., et al. The astronomical theory of climatic change on Mars. // Icarus. 1980. V.44. P.552–607.
- [228] Gooding J. L. Soil mineralogy and chemistry on Mars: Possible clues from salts and clays in SNC meteorites. // Icarus. 1992. V.99. P.28–41.
- [229] Burt D. M., Knauth L. P. Electrically conducting, Ca-rich brines, rather than water, expected in the martian subsurface. // J. Geophys. Res. 2003. V.108. P. 8026.
- [230] Larsen J., Dahl-Jensen D. Interior temperatures of the north polar caps. // Icarus. 2000. V.144. P.456–462.
- [231] Clark B. C., van Hart D. C. The salts on Mars. // Icarus. 1981. V.45. P.370–378.
- [232] Sihvola A., Kong J. A. Effective permittivity of dielectric mixtures. // IEEE Transactions on Geosciences and Remote Sensing. 1988. V.26. P.420-429.
- [233] Evans S. Dielectric properties of ice and snow - a review. // J. Glaciol. 1965. V.5. P.773–792.
- [234] Chyba C. F., Ostro S. J., Edwards B. C. Radar detectability of a subsurface ocean on Europa. // Icarus. 1998. V.134. P.292–302.
- [235] Moore J. C. Models of radar absorption in European ice. // Icarus. 2000. V.147. P.292–300.
- [236] Olhoeft G. R., Strangway D. W. Dielectric properties of the first 100 meters of the Moon. // Earth and Planetary Science Letters. 1975. V.24. P.394–404.

- [237] Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах. М.:Мир, 1984. 416 с.
- [238] Herique A., Gilchrist J., Kofman W., Klinger J. Dielectric properties of cometary analog refractory materials. // Planetary and Space Science. 2002. V.50. P.857–863.
- [239] Shchuko O. B., Kartashov D. V., Picardi G., Orosei R. Martian underground water detection: Thermal model and simulations of radar signal propagation. // J. Geophys. Res. 2003. V.108. P.8022.
- [240] King R. W. P., Sandler S. S. The electromagnetic field of a vertical electric dipole over the Earth or sea. // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1994. V.AP-42. P.382–389.
- [241] Ilyushin Ya. A., Seu R., Phillips R. J. Subsurface radar sounding of the Martian polar cap: radiative transfer approach. // Planetary and Space Science. V.53. P.1427–1436. 2005.
- [242] Ilyushin Ya. A. Radiative transfer in layered media: application to the radar sounding of Martian polar ices. II. // Planetary and Space Science. 2007. V.55. P.100-112
- [243] Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.:ОГИЗГостехиздат, 1948. 540 с.
- [244] Haney M. M., van Wijk K., Snieder R. Radiative transfer in layered media and its connection to the O'Doherty-Anstey formula. // Geophysics. 2005. V.70. P.T1–T11.
- [245] Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы: В 2-х т. М.:Мир, 1983. 520 с.
- [246] Code A. D. A Solution of a Time-Dependent Equation of Radiative Transfer. // Astrophys. J. 1970. V.159. P.1029–1039.
- [247] Klauder J.R., et al. The theory and design of chirp radars. // Bell Syst. Tech. J.. 1960. V.XXXIX. PP.745–809.

- [248] Harris F. J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. // Proceedings of the IEEE. 1978. V.66. P.51–83.
- [249] Picardi G., Sorge S., Seu R., et al. Martian Advanced Radar for Subsurface and Ionospheric Sounding (MARSIS): Models and System Analysis. InfoCom Tech.Rep. MRS-001/005/99 V.2.0 21/05/1999.
- [250] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.:Наука, 1973. 343 с.
- [251] Борн М., Вольф, Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
- [252] Gaikovich K. P. Subsurface near-field scanning tomography. // Phys. Rev. Lett. 2007. V.98. P.183902.
- [253] Picardi G., Biccari D., Seu R., et al. Performance and surface scattering models for the Mars Advanced Radar for Subsurface and Ionosphere Sounding (MARSIS). // Planetary and Space Science. 2004. V.52. P.149–156.
- [254] Seu R., Biccari D., Orosei R., Lorenzoni L. V., Phillips R. J., Marinangeli L., Picardi G., Masdea A., Zampolini E. SHARAD: The MRO 2005 shallow radar. // Planetary and Space Science. 2004. V.52. P.157–166.
- [255] Herkenhoff K.E., Murray B. C. High resolution topography and albedo of the south polar layered deposits on Mars. J. Geophys. Res.. // 1990. V.95. P.14,511–14,529.
- [256] Barbin Y., Nicollin F., Kofman W., Zolotarev V., Glotov V. Mars 96 GPR program. // Journal of Applied Geophysics. 1995. V.33. P.27–37.
- [257] Pettinelli E., Vannaroni G., Cereti A., Pisani A. R., Paolucci F., Del Vento D., Dolfi D., Riccioli S., Bella F. Laboratory investigations into the electromagnetic properties of magnetite/silica mixtures as Martian soil simulants. // J. Geophys. Res.. 2005. V.110. P.E04013.
- [258] Kong J. A. Electromagnetic Wave Theory. N.Y.:John Wiley, 1986.
- [259] Malin M. C., Edgett K. S. Mars global surveyor mars orbiter camera: Interplanetary cruise through primary mission. J. Geophys. Res. 2001. V.106. P.23429–23570.

- [260] Picardi, G., Plaut J. J., Biccari D., et al. Radar Soundings of the Subsurface of Mars. // Science. 2005. V.310. P.1925.
- [261] Zhang, Z. , Hagfors, T. , Nielsen, E. , Picardi, G. , Mesdea, A. , Plaut, J. J. Dielectric properties of the Martian south polar layered deposits: MARSIS data inversion using Bayesian inference and genetic algorithm // J. Geophys. Res. 2008. E. V.113. P.E05004.
- [262] Farrell W. M., et al. MARSIS subsurface radar investigations of the South Polar reentrant Chasma Australe. // J. Geophys. Res. 2008. V.113. P.E04002.
- [263] Grima C., Kofman W., Mouginot J., Phillips R. J., Herique A., Biccari D., Seu R., Cutigni M. North polar deposits of Mars: Extreme purity of the water ice. // Geophysical Research Letters. 2009. V.36. P.L03203.
- [264] Lauro S. E., Mattei E., Soldovieri F., Pettinelli E., Orosei R., Vannaroni G. Dielectric constant estimation of the uppermost Basal Unit layer in the martian Boreales Scopuli region. // Icarus. 2012. 219. P.458-467.
- [265] Peeples W. J., Sill W. R., May T. W. et al. Orbital Radar Evidence for Lunar Subsurface Layering in Maria Serenitatis and Crisium. // J.Geophys.Res. 1978. V.83. P.3459-3468.
- [266] Xu Y., Cummer S. A., Farrell W. M. Application of an orbital radar sounder model to detecting martian polars subsurface features. // J. Geophys. Res. 2006. V.111. P.E06S17.
- [267] Кравцов А. И., Саичев А. И. Эффекты двукратного прохождения волн в случайно-неоднородных средах. // Успехи Физических Наук. 1982. V.137. С.501-529.
- [268] Арманд Н. А. Восстановление формы сигналов, искаженных ионосферной дисперсией и боковым рассеянием шероховатой поверхностью. // Радиотехника. 2005. N.8. С.32–39.
- [269] Арманд Н. А. Об ограничениях разрешающих способностей космических радаров с синтезированной апертурой, обусловленных условиями распро-

- странения радиоволн в ионосфере. // Исследование Земли из космоса. 2005. Т.43. С.27-38.
- [270] Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М.:ИИЛ, 1960. 468 с.
- [271] Ostro, S. Planetary radar astronomy. // Rev. Mod. Phys. 1993. V.65. P.1235–1279.
- [272] Ilyushin Ya. A. Impact of the plasma fluctuations in the Martian ionosphere on the performance of the synthetic aperture ground-penetrating radar. // Planetary and Space Science. 2009. V.57 P.1458-1466.
- [273] Илюшин Я. А. Влияние анизотропных флуктуаций плотности ионосферной плазмы на глубинное радиозондирование сверхширокополосным радиолокатором с синтезированной апертурой. // Космические исследования. 2010. Т.48. С.161-168.
- [274] Илюшин Я. А. Влияние флуктуаций концентрации ионосферной плазмы на глубинное радиозондирование марсианского грунта радаром с синтезированной апертурой. // Известия ВУЗов Радиофизика. 2009. Т.ЛII. С.365–374.
- [275] Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. М.:Наука, 1978. 464 с.
- [276] Zhang Z., Nielsen E., Plaut J. J., Orosei R., Picardi G. Ionospheric corrections of marsis subsurface sounding signals with filters including collision frequency. // Planetary and Space Science. 2009. V.57. P.393–403.
- [277] Mouginot J., Kofman W., Safaeinili A., Herique A. Correction of the ionospheric distortion on the marsis surface sounding echoes. // Planetary and Space Science. 2008. V.56. P.917–926.
- [278] Morozov A. V. Two-frequency mutual coherence function of electromagnetic waves in random media: a path-integral variational solution // J. Opt. Soc. Am. A. 2002. V.19. P.2074.

- [279] Samelsohn G., Freilikher V., Haridim M. Spectral coherence and time-domain transport of waves in random media. // Phys. Rev. E. 2008. V.78, P.066602.
- [280] van de Kamp M., Cannon P. S., Terkildsen M. Effect of the ionosphere on defocusing of space-based radars. // Radio Sci. 2009. V.44. P.RS1003.
- [281] Yeh, K. C., Liu, C.-H. Radio wave scintillations in the ionosphere. // Proceedings of the IEEE. 1982. V.70. P.324–360.
- [282] Илюшин Я. А. Искажения сверхширокополосных сигналов радиолокаторов глубинного зондирования в неоднородной ионосфере. // Радиотехника и электроника. 2008. Т.53. С.403-412.
- [283] Воронцов А. М., Парамонов П. В. Моделирование протяженных фазовых экранов в задачах распространения оптического излучения в атмосфере. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т.49. N.1. С.21.
- [284] Gwinn, C. R., Britton M. C., Reynolds J. E., et al. Interstellar optics. Astrophysical J. 1998. V.505. P.928–940.
- [285] Zhang, M. H. G., Luhmann, J. G., Kliore, A. J., Oct. 1990. An observational study of the nightside ionospheres of Mars and Venus with radio occultation methods. J. Geophys. Res. V.95. P.17095–17102.
- [286] Gurnett D. A., Kirchner D. L., Huff R. L., Morgan D. D., Persoon A. M., Averkamp T. F., Duru F., Nielsen E., Safaeinili A., Plaut J. J., Picardi G., // Science. 2005. V.310. P.1929.
- [287] Ерухимов Л.М. Рындык Е.Ю., Чугурин В.В. Динамика лучей за набором пространственно-периодических фазовых экранов. Изв.Вузов. Радиоф. 1993. Т.36 N.8. С.825-831.
- [288] Crane, R. K. Ionospheric scintillation. // Proceedings of the IEEE. 1977. V.65. P.180–199.
- [289] Gurnett D. A. , Huff R. L. , Morgan D. D. , Persoon A. M. , Averkamp T. F. , Kirchner D. L. , Duru F. , Akalin, F. , Kopf A. J. , Nielsen E. , Safaeinili A. , Plaut J. J. , Picardi G. An overview of radar soundings of the martian

- ionosphere from the Mars Express spacecraft. // *Advances in Space Research*. 2008. V.41 PP.1335-1346.
- [290] Gurnett D. A., Morgan D. D., Duru F., Akalin F. , Winningham J. D., Frahm R. A., Dubinin E., Barabash S., Large density fluctuations in the martian ionosphere as observed by the Mars Express radar sounder, // *Icarus*. 2010. V.206. P.83-94.
- [291] Andrews L. C., Phillips R. L. I-K distribution as a universal propagation model of laser beams in atmospheric turbulence. // *J. Opt. Soc. Am. A*. 1985. V.2. P.160-163.
- [292] Nouvel, J.-F., Martelat J.-E., Herique A., Kofman W. Top layers characterization of the Martian surface: Permittivity estimation based on geomorphology analysis. // *Planet. and Space Sci*. 2006. V.54 PP.337-344.
- [293] Beckmann, P., Spizzichino A. *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces* . N.Y.:Macmillan and Company, 1963.
- [294] Ogilvy J.A. *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces* . Bristol:Adam Hilger, 1991.
- [295] Orosei R. , Bianchi R., Coradini A., Espinasse S., Federico C., Ferriccioni A., Gavrishin A. I. Self-affine behavior of Martian topography at kilometer scale from Mars Orbiter Laser Altimeter data. // *J. Geophys. Res*. 2003. V. 108. 8023.
- [296] J.-F. Nouvel, A. Herique, and W. Kofman and A. Safaeinili Radar signal simulation: Surface modeling with the Facet Method. // *Radio Sci*. 2004. V.39. P.RS1013.
- [297] Malin, M. C., and K. S. Edgett (2001), Mars Global Surveyor Mars Orbiter Camera: Interplanetary cruise through primary mission. // *J. Geophys. Res*. V.106. P.23,429– 23,570.
- [298] Malin M. C., Bell J. F. III, Cantor B. A., et al. Context Camera Investigation on board the Mars Reconnaissance Orbiter. // *J. Geophys. Res*. 2007. V.112. P.E05S04.

- [299] McEwen, A. S., Eliason E. M. , Bergstrom J. W. et al. Mars Reconnaissance Orbiter's High Resolution Imaging Science Experiment (HiRISE). // J. Geophys. Res. 2007. V.112. P.E05S02.
- [300] Berquin Y., Kofman W., Herique A., Alberti G., Beck P. A study on ganymede's surface topography: Perspectives for radar sounding. // Planetary and Space Science. 2013. V.77. P.40–44.
- [301] Mushkin A., Gillespie A. R. Mapping sub-pixel surface roughness on Mars using high-resolution satellite image data. // Geophys. Res. Lett. 2006. V.33. P.L18204.
- [302] <http://www.msss.com/>
- [303] Башаринов А. Е., Гуревич А. С., Егоров Т. С. Радиоизлучение Земли, как планеты. М.: Наука, 1974.
- [304] Spencer R. W. , Goodman H. M., Hood R. E. Precipitation retrieval over land and ocean with the SSM/I: Identification and characteristics of the scattering signal. // J. of Oceanic Technol. 1989. V.6. P.254-273.
- [305] Roberti, L., Haferman, J., Kummerow, C. Microwave radiative transfer through horizontally inhomogeneous precipitating clouds. // Journal of Geophysical Research. 1994. V.99. P.16,707-16,718.
- [306] Battaglia A., Davis C P., Emde C., Simmer C. Microwave radiative transfer intercomparison study for 3-D dichroic media. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2007. V.105. P.55-67.
- [307] Казарян Р. К., Кутуза Б. Г. О влиянии температурного профиля облака на микроволновое нисходящее излучение атмосферы. // Тезисы докладов V Всероссийской научной конференции «Радиофизические методы в дистанционном зондировании сред», МИВлГУ, Муром. 2012. с.180-184.
- [308] Евтушенко А. В., Загорин Г. К., Кутуза Б. Г., Собачкин А. А., Хорнбостел А., Шрот А. Определение вектора Стокса собственного и рассеянного СВЧ излучения атмосферы с осадками. // Известия Академии наук. Физика атмосферы и океана. 2002. Т.38. С.529–536.

- [309] Башаринов А. Е., Кутуза Б. Г. Определение температурной зависимости времени релаксации молекул воды в облаках и возможности оценки эффективной температуры капельных облаков по СВЧ радиометрическим измерениям. // Изв. ВУЗов, Радиопизика. 1974. Т.XVII. N.1. С.52-57.
- [310] Красюк Н.П., Розенберг В.И Корабельная радиолокация и метеорология Л.:Судостроение, 1970. 325 с.
- [311] Ulaby F. T., Moore R. K., Fung A. K. Microwave Remote Sensing, Active and Passive, V.1. Reading:Addison-Wesley, 1981.
- [312] Czekala H., Simmer C. Microwave radiative transfer with nonspherical precipitating hydrometeors. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1998. V.60. P.365-374.
- [313] Czekala H., Havemann S., Schmidt K., Rother T., Simmer C. Comparison of microwave radiative transfer calculations obtained with three different approximations of hydrometeor shape. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1999. V.63. P.545–558.
- [314] Mishchenko M. I. Extinction and polarization of transmitted light by partially aligned nonspherical grains. // Astrophys. J. 1991. V.367. P.561-574.
- [315] Mishchenko M. I. Calculation of the Amplitude Matrix for a Nonspherical Particle in a Fixed Orientation. // Appl. Opt. 2000. V.39. P.1026-1031.
- [316] Moroz A. Improvement of Mishchenko's T-matrix code for absorbing particles. // Appl. Opt. 2005. V.44. P.3604-3609.
- [317] Hornbostel A. Investigation of Tropospheric Influences on Earth-satellite Paths by Beacon, Radiometer and Radar Measurements. Doctoral Thesis. University Hanover, 1995.
- [318] Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., Соболев С.И., Антонов А.С., Брызгалов П.А., Никитенко Д.А., Стефанов К.С., Воеводин Вад.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов"// Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы 2012.