

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.84

## КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ДИНАМО В СЛУЧАЙНОМ ПОТОКЕ

С. А. Молчанов, А. А. Ружмайкин, Д. Д. Соколов

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	593
2. Общее решение задачи Коши для уравнения индукции . . . . .	596
а) Вмороженность . . . . .	596
б) Мультипликативный интеграл . . . . .	597
в) Винеровские траектории . . . . .	597
3. Прелюдия к динамо. Линейное поле скорости . . . . .	599
4. Проблема кинематического динамо . . . . .	602
а) Формулировка проблемы . . . . .	602
б) Классификация динамо . . . . .	603
в) Замечания о неоднородной и анизотропной магнитной диффузии. Течения сжимаемой жидкости . . . . .	605
5. Короткокоррелированное случайное течение . . . . .	607
а) Уравнение для среднего магнитного поля . . . . .	607
б) Асимптотические решения . . . . .	609
в) Изучение второго момента . . . . .	611
г) Учет конечности корреляционного времени . . . . .	612
д) Роль временного спектра поля скорости . . . . .	614
е) О трансформационных свойствах коэффициентов диффузии . . . . .	615
6. Динамо-теорема . . . . .	616
а) Функция переноса магнитного поля в потоке с обновлением . . . . .	616
б) Показатели Ляпунова и случайный базис . . . . .	617
в) Эволюция матрицы переноса вдоль случайной траектории . . . . .	619
г) Переменяемость . . . . .	620
д) Замечания о случае плоского движения . . . . .	622
7. Стационарные поля скорости со стохастическими свойствами . . . . .	623
а) Роль сдвига и экспоненциального растяжения жидких частиц . . . . .	624
б) Промежуточное динамо в периодическом потоке . . . . .	625
8. Заключение . . . . .	626
Список литературы . . . . .	627

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Идея гидромагнитного динамо, принадлежащая Лармору <sup>1</sup>, родилась из попыток понять природу магнетизма Земли и Солнца. Суть ее в том, что движения проводящей жидкости усиливают начальное слабое магнитное поле в отсутствие внешних электродвижущих сил.

Первоначально идея динамо была встречена скептически. Во-первых, рассмотрение симметричных ситуаций (обычный прием упрощения) привело к отрицательному результату. Оказалось, что сферически-симметричное и плоское течения не дают растущих магнитных полей <sup>2,3</sup>. Во-вторых, оказалось, что в хорошо проводящей среде, когда особенно значима роль движений, магнитное поле вморожено в среду и увеличение количества магнитных линий невозможно <sup>4</sup>.

Однако затем были построены отдельные контрпримеры, показавшие, что оба эти возражения не имеют общего характера. Герценберг <sup>5</sup> впервые нашел незатухающее решение для течений, сосредоточенных на двух сферах. В работах <sup>6,7</sup> были построены динамо для осесимметричного течения на цилин-

древесных поверхностях. (Известная теорема Каулинга<sup>4</sup> о невозможности динамо для осесимметричных решений означает лишь то, что растущее магнитное поле не обладает осевой симметрией.) Хорошо известны примеры, обобщающие эти решения на случай нескольких роторов<sup>8,9</sup> и тороидальных вихрей<sup>10,11</sup>. Брагинский<sup>12</sup> построил теорию динамо, основанного на малых отклонениях от цилиндрической симметрии. Ее развитие см. в<sup>13,14</sup>.

Ответ на второе возражение против концепции динамо, касающееся возможности размножения магнитных силовых линий в среде с высокой проводимостью, впервые был дан в работе Альвена<sup>15</sup>. На рис. 1, взятом из этой

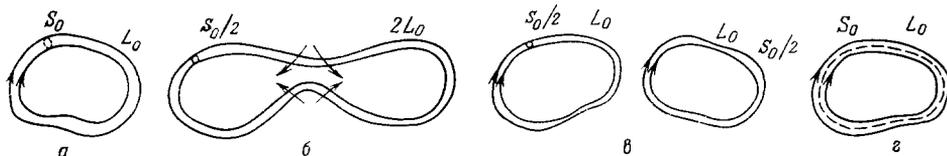


Рис. 1. Механизм размножения магнитных линий, предложенный Альвеном. Разделение петли на две (переход от б к в) происходит под действием магнитной диффузии

работы, наглядно показано, как это может произойти. Первоначальная петля магнитного поля растягивается вдвое. Затем вдоль одного из диаметров происходит сближение двух противоположно направленных участков поля и разделение первоначальной петли на две под действием молекулярной

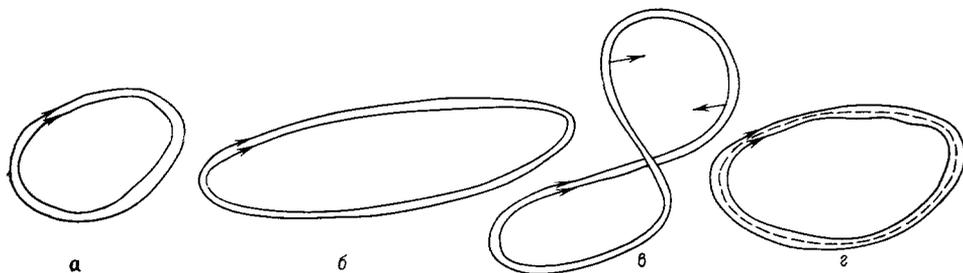


Рис. 2. Восьмерка Я. Б. Зельдовича — механизм быстрого динамо. Скорость роста магнитного потока не зависит от магнитной диффузии

магнитной диффузии  $v_m$ . После наложения двух получившихся петель, скажем путем простого сдвига, получаем удвоенную петлю с диаметром, равным начальному, и магнитным потоком через поперечное сечение петли вдвое больше исходного. Разумеется, магнитная диффузия играет в этом механизме принципиальную роль. Характерное время отделения петель порядка  $(\Delta L)^2/v_m$ , где  $\Delta L$  — область сближения противоположно направленных участков поля. Ясно, что в пределе  $v_m \rightarrow 0$  (при  $\Delta L$ , определяемом только течением и поэтому не зависящем от  $v_m$ ) эффективность процесса стремится к нулю.

В 1971 г. на симпозиуме по динамике жидкостей в Кракове Я. Б. Зельдович (впервые опубликовано в<sup>16</sup>) придумал другой наглядный механизм усиления магнитного поля (рис. 2), который, несмотря на некоторое сходство с механизмом Альвена, имеет качественно иную природу. Сходство состоит в первом шаге — растяжении петли вдвое. Сворачивание в восьмерку и последующее сложение, качественно трехмерная операция, приводящая к удвоению магнитного потока, — это принципиально новый момент. Скорость роста поля теперь не зависит от магнитной диффузии:  $H = H_0 \cdot 2^n$ , где  $n$  — число операций удвоения.

В пределе малых  $v_m$  первый механизм (рис. 1) естественно назвать медленным, а второй (рис. 2) — быстрым динамо. Заметим, что во втором меха-

низме магнитная диффузия должна играть роль в формировании пространственной формы (в разрыве петель, меняющим топологию), но не в скорости роста поля. Понятия медленного и быстрого динамо были сформулированы в работе <sup>17</sup>, хотя эффективность динамо типа рис. 2 отмечалась еще в <sup>16</sup>. Экспоненциально растущее решение в заданном проводящем потоке называется быстрым динамо, если скорость роста поля  $\gamma$  не убывает при  $\nu_m \rightarrow 0$  \*), и медленным, если  $\gamma \rightarrow 0$  при  $\nu_m \rightarrow 0$ . Впоследствии выяснилось, что возможны решения еще одного промежуточного типа, когда скорость роста отдельной моды поля положительна лишь на конечном интервале изменения  $\nu_m$  и становится отрицательной при  $\nu_m \rightarrow 0$ .

Конкретное решение такого типа построено для периодического трехмерного потока <sup>18</sup>. Особенность этого течения в том, что наряду с «ламинарными» участками в нем имеются области, каждая из которых всюду плотно (столбически) заполняется отдельной линией тока.

В класс медленных динамо попали отмеченные выше решения типа <sup>5-11</sup>. Их общность в том, что течения стационарны  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  и располагаются на поверхностях (сфер, цилиндра, тора и т. п.). Решения этого типа возможны и для периодических полей скорости  $(v_x, v_y, v_z)$ , зависящих от двух координат <sup>19</sup>. Впрочем, такие потоки топологически эквивалентны течениям вдоль поверхностей.

Быстрое динамо осуществляется нестационарным полем скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  <sup>20</sup>. Интуитивно это можно почувствовать на примере восьмерки (рис. 2), хотя вопрос о возможности быстрого динамо в стационарном течении до конца не ясен. Подчеркнем, что нестационарный поток может дать и медленное динамо. Таков известный пример Бэкаса <sup>21</sup> с выключением поля скорости, поскольку в нем длительность промежутков с  $\mathbf{v} = 0$  определяется магнитной диффузией  $\nu_m$  (должны затухнуть все гармоники, кроме первой).

Быстрое динамо естественно реализуют случайные турбулентные поля скорости, обычно наблюдаемые в природе. Принято рассматривать поля скорости со стационарными статистическими характеристиками. В таких течениях удается достигнуть существенного упрощения задачи динамо. Впервые это было продемонстрировано в работе Паркера <sup>22</sup> и хорошо известных работах Штейнбека, Краузе, Рэдлера и их последователей (см., например, <sup>23, 24</sup>) на примере задачи динамо для среднего магнитного поля в отражательно-несимметричном турбулентном потоке и в работе Казанцева <sup>25</sup> на примере задачи о генерации второго момента (корреляционной функции) в отражательно-симметричном короткокоррелированном течении. По современным воззрениям оба эти примера — быстрое динамо. В быстром динамо скорость роста поля не зависит от магнитной диффузии в пределе  $\nu_m \rightarrow 0$ , поэтому в качестве старта можно воспользоваться явным лагранжевым решением уравнения индукции. Лагранжев подход к описанию крупномасштабных магнитных полей развит Крейкнаном <sup>26</sup> и применен в <sup>27, 28</sup> к задаче турбулентного динамо в отражательно-инвариантной среде. Основная проблема в таком подходе заключается в следующем шаге — правильном учете малой магнитной диффузии. Наивный подход, заключающийся в добавлении обычного диффузионного члена (типа  $\nu_m \Delta(\mathbf{H})$ ) к уравнениям для среднего поля или второго момента, априори не обоснован и, вообще говоря, неверен уже потому, что в общем случае эти уравнения являются интегральными, несмотря на то, что исходное уравнение индукции является дифференциальным (ср. <sup>28</sup>). Последовательный учет магнитной диффузии в рамках лагранжевого подхода может быть выполнен путем рассмотрения вместо одной лагранжевой траектории пучка случайных, винеровских траекторий и последующего усреднения по ним, как это делается в теории броуновского движения <sup>38, 46</sup>. Такой

\*) Точнее, надо говорить о возрастании безразмерного магнитного числа Рейнольдса  $Re_m = lv/\nu_m$ , измеряя  $\gamma$  в единицах  $v/l$ , где  $l, v$  — характерные масштаб и скорость течения. Здесь и далее  $\gamma$  и  $\nu_m$  выражены в этих единицах.

подход к задаче кинематического динамо в случайном потоке был развит в последние годы авторами и составляет основное содержание настоящего обзора. В него естественно укладываются с некоторыми обобщениями результаты о динамо среднего поля и среднего квадрата. Существенно то, что удается сделать выводы о поведении всех моментов и истинного магнитного поля в случайном потоке. При этом выяснилось, что в пределе малой магнитной диффузии скорость роста увеличивается с номером момента. Поэтому изучение второго момента (см., например, <sup>27,28</sup>) было не достаточно для решения проблемы генерации мелкомасштабных магнитных полей, поставленной Бэтчелором <sup>29</sup>.

Структура магнитного поля, генерируемого в случайном потоке, является перемежаемой в пределе малых  $\nu_m$ , т. е. в распределении поля имеются высокие и редко расположенные пики. Формально это доказывается отмеченным выше поведением скоростей роста моментов поля. Впервые перемежаемость была обнаружена в численных экспериментах для двумерной МГД-турбулентности <sup>30,31</sup> и прямом интегрировании трехмерных совместных уравнений индукции и Навье — Стокса для несжимаемой проводящей жидкости, движимой случайной короткокоррелированной гауссовской силой <sup>32</sup>. Вообще, вычислительный эксперимент имеет большое значение для теории гидромагнитного динамо. С ним связаны практически все приложения этой теории к космическим магнитным полям. В настоящем обзоре мы не будем останавливаться на приложениях, этому посвящена недавно вышедшая монография Зельдовича и др. <sup>20</sup> (см. также более ранние монографии Моффатта <sup>23</sup>, Паркера <sup>33</sup> и Краузе, Рэдлера <sup>24</sup>). Отметим только новые работы по генерации магнитных полей, выполненные в основном благодаря успешному вычислительному эксперименту.

В работе <sup>34</sup> изучены условия возбуждения и найдены периоды колебаний трехмерного среднего магнитного поля в приложениях к крупномасштабным солнечным полям, трехмерности которых проявляется в ряде наблюдаемых явлений (секторная структура, корональные дыры и др.). Численному исследованию поведения корреляционной функции поля в изотропном зеркально-симметричном случайном течении посвящены работы <sup>35,36</sup>. Отметим также вычислительные эксперименты, в которых изучалось поведение магнитных полей в стационарных периодических (неслучайных) потоках <sup>18,37</sup> с использованием предельных возможностей современных компьютеров.

Наряду с численными методами в приложениях теории динамо полезен еще один подход — асимптотические методы решения моментных уравнений (см. гл. 5).

Говоря о приложениях, необходимо подчеркнуть, что гидромагнитное динамо не является единственным механизмом генерации магнитных полей в космических (и тем более в лабораторных) условиях. В определенных условиях, например в пекулярных А-звездах и нейтронных звездах, основную роль могут играть термоэдс <sup>39-42</sup>. О роли термо-э. д. с. и других механизмов в генерации магнитных полей в лабораторных условиях см., например, <sup>43</sup>. Обсуждаются также механизмы генерации магнитных полей, комбинирующие действия гидродинамических движений и внешних э. д. с. <sup>44</sup>.

## 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИНДУКЦИИ

а) **В м о р о ж е н н о с т ь.** Наиболее популярным понятием магнитной гидродинамики хорошо проводящей жидкости является вмороженность. На одном языке она, как в известной гидродинамической теореме Кельвина, означает сохранение магнитного потока через любой контур, движущийся вместе с идеально проводящей жидкостью. На другом — говорят, что магнитное поле деформируется подобно линейному элементу, соединяющему две бесконечно близкие частицы жидкости.

Для нас важен еще один аспект понятия вмороженности. Уравнение индукции в идеально проводящей несжимаемой жидкости

$$\frac{dH_i}{dt} = H_k \nabla_k v_i, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \nabla_k \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

эквивалентно переносу поля вдоль лагранжевой траектории жидкой частицы. В самом деле, будем решать это уравнение последовательными приближениями<sup>33</sup>. Пусть  $\xi = \mathbf{x}(t = 0)$  — начальное положение жидкой частицы. Тогда через время  $\Delta t$

$$H_i(\xi + \Delta \mathbf{x}, \Delta t) = H_i(\xi) + \frac{dH_i}{dt} \Delta t = \frac{\partial (\xi_i + v_i(\xi) \Delta t)}{\partial \xi_j} H_j(\xi) = \frac{\partial x_i(\xi, \Delta t)}{\partial \xi_j} H_j(\xi).$$

Повторение этой процедуры приводит к формуле

$$H_i^t(\mathbf{x}, t) = H_i(\mathbf{x}(\xi, n\Delta t), n\Delta t) = \frac{\partial x_i(\xi, n\Delta t)}{\partial x_k(\xi, (n-1)\Delta t)} \cdots \frac{\partial x_l(\xi, 2\Delta t)}{\partial x_m(\xi, \Delta t)} \frac{\partial x_m(\xi, \Delta t)}{\partial \xi_j} H_j(\xi) = \frac{\partial x_i(\xi, t)}{\partial \xi_j} H_j(\xi). \quad (2.2)$$

Таким образом, в условиях вмороженности для нахождения магнитного поля достаточно знать только траекторию

$$x_i(\xi, t) = \xi_i + \int_0^t v_i(x, s) ds, \quad (2.3)$$

которая полностью определяется заданием поля скорости. Мы записали траекторию в виде  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ . Ее можно записать в обращенной форме:

$$\xi_i = x_i - \int_0^t v_i(\xi, t-s) ds. \quad (2.4)$$

Для получения этой формулы достаточно провести процедуру вывода (2.2) в обратном направлении по времени.

б) М у л ь т и п л и к а т и в н ы й и н т е г р а л. Из второй строчки формулы (2.2) мы видим, что перенос магнитного поля по траектории на конечном интервале времени можно представить в виде произведения переносов по бесконечно малым кускам траектории. Переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , мы получим бесконечное произведение или, говоря математическим языком, мультипликативный интеграл (об этом понятии см., например,<sup>45</sup>)

$$G_{ij}(t, \xi, \mathbf{x}) = \prod_{s=0}^t \left( \delta_{ij} - \frac{\partial v_i(\xi, t-s)}{\partial x_j} ds \right) = \prod_{s=0}^t \left( \delta_{ij} + \frac{\partial v_i(x, s)}{\partial x_j} ds \right) = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad (2.5)$$

явно показывающий, как связана функция переноса (Грина) с полем скорости, причем

$$H_i(\mathbf{x}, t) = G_{ij} H_j(\xi). \quad (2.6)$$

Для большей ясности выпишем дифференциальное уравнение для  $G_{ij}$ , которое получается после подстановки (2.6) в уравнение (2.1):

$$\frac{dG_{ij}}{ds} = -G_{ej}(t, s, \mathbf{x}, \xi_s) \frac{\partial v_i(t-s, \xi_s)}{\partial x_l}. \quad (2.7)$$

Решение этого уравнения формально можно записать в виде матричной экспоненты, эквивалентной мультипликативному интегралу (2.5).

в) В и н е р о в с к и е т р а е к т о р и и. Лагранжево решение, полученное в п. а), замечательно тем, что оно допускает обобщение на случай, когда в процессе переноса магнитного поля включается магнитная диффузия,

т. е. когда поле подчиняется полному уравнению индукции

$$\frac{dH_i}{dt} = H_k \nabla_k v_i + v_m \Delta H_i, \quad \nabla_i H_i = 0. \quad (2.8)$$

Из теории броуновского движения известно, что процесс диффузии можно описать как среднее от движения по пучку случайных траекторий (см., например, <sup>38,46</sup>). Координаты случайной траектории  $w_t$  являются в каждый момент времени гауссовскими случайными величинами со средним квадратичным отклонением, пропорциональным  $t^{1/2}$  (при условии  $w_{t=0} = 0$ ) и независимыми приращениями по времени. Поэтому случайные траектории, обобщающие (2.4), можно определить уравнением

$$\xi_t = x - \int_0^t v(t-s, \xi_s) ds + \sqrt{2v_m} w_t, \quad (2.9)$$

где  $w_t$  — случайный (винеровский) процесс, обладающий свойствами

$$M w_t = 0, \quad M(w_{ti} w_{tj}) = \delta_{ij} t. \quad (2.10)$$

Знак  $M$  означает среднее по распределению  $w_t$ . Уравнение (2.9) описывает совокупность случайных траекторий, приходящих в момент  $t$  в рассматриваемую точку  $x$  (рис. 3). Подчеркнем, что начальная координата  $\xi_t$  в отличие от  $x$  является случайной величиной.

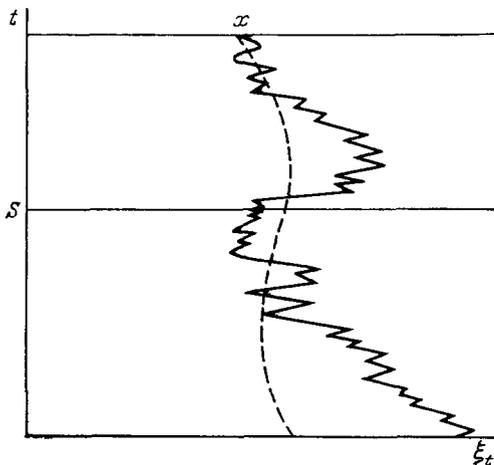


Рис. 3. В идеально проводящей среде поле переносится по лагранжевой траектории (штриховая линия).

Учет магнитной диффузии эквивалентен рассмотрению множества случайных траекторий, приходящих в момент  $t$  в точку  $x$  (одна из них показана извилистой линией) с последующим усреднением результата переноса по всем траекториям

Поэтому (2.9) не допускает обращения  $x = x(\xi, t)$ , подобного (2.3). Более того, траектория (2.9) не является дифференцируемой, поскольку при  $\Delta t \rightarrow 0$   $\Delta \xi$  пропорциональна не  $\Delta t$ , а  $\sqrt{\Delta t}$ . Говорят, что случайная траектория имеет половинную производную.

Перенос магнитного поля вдоль одной случайной траектории (2.9) эквивалентен решению (2.6) уравнения (2.1) без лапласиана. Истинное решение получается путем усреднения по всем случайным траекториям, приходящим в данную точку  $x$  в момент  $t$ :

$$H_i(x, t) = M_x G_{ij}(t, \xi_t, x) H_{0j}'(\xi_t). \quad (2.11)$$

В математическом смысле знак  $M_x$  означает взятие интеграла [по винеровской мере, в котором интегрирование ведется по  $w$ , а траектории сходятся в точке  $x$ . Это общее решение задачи Коши для уравнения индукции (2.8) проверяется путем подстановки в уравнение с использованием (2.7) и (2.10).

Чтобы яснее показать, как такое псевдолагранжево решение подчиняется уравнению с лапласианом, удобно отвлечься от векторной природы поля и рассмотреть уравнение теплопроводности в движущейся среде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v \nabla) T = \kappa \Delta T. \quad (2.12)$$

Общее решение этого скалярного уравнения имеет простой вид:

$$T(x, t) = M_x T_0(\xi_t). \quad (2.13)$$

Покажем, что (2.13) действительно является решением уравнения (2.12). Температура в момент  $t + \Delta t$  в силу независимости приращений винеровского процесса выражается через температуру в момент  $t$  по той же формуле:

$$T(\mathbf{x}, t + \Delta t) = M_{\mathbf{x}} T(\xi_{\Delta t}, t) = \\ = M_{\mathbf{x}} \left[ T(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial T}{\partial x_i} (\xi_{\Delta t} - x)_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} (\xi_{\Delta t} - x)_i (\xi_{\Delta t} - x)_j \right]. \quad (2.14)$$

Чтобы сохранить члены порядка  $\Delta t$ , нам пришлось в силу (2.10) в разложении правой части решения в ряд Тейлора учесть члены со вторыми производными. Именно здесь учитываются свойства случайной траектории, которая является не дифференцируемой, а имеет только половинную производную. Теперь достаточно воспользоваться тем, что  $(\xi_{\Delta t} - x)_i = v_i \Delta t + \sqrt{2\chi} w_{\Delta t i}$ , свойствами (2.10) и выполнить предельный переход  $\Delta t \rightarrow 0$ . При этом во второй член разложения (2.14) в первом порядке по  $\Delta t$  даст вклад только  $v_i \Delta t$ , а в третий — только члены  $M(w_{\Delta t i} w_{\Delta t j}) = \delta_{ij} \Delta t$ .

Таким образом, рассматриваемый способ описания магнитной диффузии математически обоснован, подробнее см. <sup>38,46</sup>. Он подобен известному фейнмановскому методу интегрирования по траекториям в квантовой механике. Его достоинство и удобство в применении к задаче гидромагнитного динамо заключаются в использовании явного лагранжевого решения уравнения индукции. Остается выполнить усреднение этого решения по совокупности случайных траекторий с известным статистическим весом. Разумеется, в общем случае, интегрирование по траекториям — задача тоже сложная. Однако в наиболее интересном и близком к лагранжевому случае малых  $\chi_m$  и при выводе моментных уравнений таким методом удается получить результаты, которые (по меньшей мере технически) трудно получить иными способами.

Уместно отметить, что случайная траектория (в отличие от лагранжевой) и перенос поля вдоль нее фиктивны. Физический смысл имеет поле, усредненное по всей совокупности траекторий. Усреднение делает ситуацию неинвариантной относительно обращения времени, как и должно быть при учете диффузии.

### 3. ПРЕЛЮДИЯ К ДИНАМО. ЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ СКОРОСТИ

Поток проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью, не может изменить магнитное поле в силу галилеевой инвариантности магнитной гидродинамики. Простейшим полем скорости, в котором возможно преобразование кинетической энергии в магнитную, является линейное поле  $v_i = c_{ik} x_k$ , где  $i, k = 1, 2, 3$  и  $c_{ik}(t)$  — тензор, не зависящий от координат. Такое распределение скорости хорошо известно в космологии как закон Хаббла, сохраняющий однородность, в том смысле, что наблюдатель, движущийся с веществом, в любой точке видит одинаковую картину удаления (или приближения) окружающих частиц <sup>47</sup>.

Линейное поле скорости обычно понимают как локальное приближение к гладкому полю скорости общего типа. В этом смысле оно использовано в гидродинамике для описания мелкомасштабной турбулентности <sup>48-50</sup>. Это приближение кажется еще более привлекательным в задаче кинематического динамо, <sup>51-53</sup>, поскольку магнитное поле, в отличие от вихря, не связано определенным соотношением со скоростью. Рассмотрение переноса магнитного поля в линейном поле скорости полезно во многих отношениях. Во-первых, эта задача допускает точное решение для матрицы  $c_{ik}(t)$  общего вида, в частности случайной <sup>54</sup>. Результаты получаются для истинного (а не усредненного) магнитного поля. При этом ясно прослеживается техника применения понятий мультипликативного интеграла и произведения большого числа независимых случайных матриц. Во-вторых, поучительным с физической

точки зрения оказывается результат. Любое достаточно быстро убывающее на бесконечности начальное магнитное поле экспоненциально затухает, а его магнитная энергия экспоненциально растет благодаря резкому росту размера области, занятой полем. (Аналогичный эффект в гидродинамике был впервые указан Пирсоном<sup>55</sup>.) Это свидетельствует о том, что локальное приближение не может дать окончательного ответа на вопрос об усилении магнитного поля при  $t \rightarrow \infty$ . Принципиально знать вид поля скорости в больших масштабах.

Мы дадим ниже качественный анализ поведения магнитного поля в линейном поле скорости. Общее и строгое рассмотрение см. в<sup>54</sup>.

В линейном поле скорости бесконечно малый вектор  $\delta x_i$ , соединяющий две близкие жидкие частицы, подчиняется уравнению

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = c_{ik} \delta x_k. \quad (3.1)$$

Пусть для простоты матрица  $c_{ik}$  постоянна и диагональна с элементами  $c_1 > c_2 > c_3 \neq 0$ , а жидкость несжимаема,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , т.е.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad (3.2)$$

Ясно, что по крайней мере одна из этих постоянных положительна, так что соответствующая компонента вектора  $\delta x_i$  растет экспоненциально. В условиях вмороженности так же будет расти соответствующая компонента магнитного поля, первоначально ориентированного вдоль вектора  $\delta x_i$ . Однако оказывается, что учет даже сколь угодно малой, но конечной диффузии приводит к противоположному результату. Поле, достаточно быстро спадающее на бесконечности (не медленнее, чем  $|x|^{-3}$ ), затухает при  $t \rightarrow \infty$  \*).

Удобно проводить рассмотрение в фурье-пространстве. При этом следует различать два типа матриц  $c_{ik}$ :

а)  $c_1 > 0$ ,  $0 > c_2 > c_3$  (растяжение в нить). В этом случае волновые векторы  $k_2$  и  $k_3$  растут как  $k_{02} \exp(|c_2|t)$  и  $k_{03} \exp(|c_3|t)$ , а вектор  $k_1$  экспоненциально убывает. Отсюда следует, что почти все фурье-гармоники магнитного поля резко затухают как

$$\exp\left(-v_m \int_0^t k^2(s) ds\right),$$

т.е. как экспонента в экспоненте. Исключение составляют гармоника с  $k_0 = 0$  и гармоники из экспоненциально узкого конуса с осью  $k_{01}$  (рис. 4, а), для которых

$$v_m \int_0^t k^2 ds = O(1).$$

Конус имеет эллиптическое поперечное сечение с полуосями, пропорциональными  $\exp(-|c_2|t)$  и  $\exp(-|c_3|t)$ . Благодаря соленоидальности поля ( $H_k \mathbf{k} = 0$ ) направления гармоник с волновыми векторами конуса почти перпендикулярны оси конуса или, более точно, образуют «ортогональный конус». Проекция гармоник ортогонального конуса на ось  $k_{01}$  по порядку величины составляет  $k_{01}/k_{02} \sim \exp(-|c_2|t)$ , поэтому они растут как  $\exp(c_1 t) \times \exp(-|c_2|t)$ . Первый множитель возникает из-за растяжения поля вдоль оси  $k_{01}$ .

Магнитное поле в  $x$ -пространстве можно оценить как произведение амплитуды растущей гармоники на объем конуса, который пропорционален

\*) Такое начальное поле порождается распределением тока в конечном объеме. Более медленного убывания поля может оказаться недостаточным. В тривиальном случае  $(H_1)_0 = H_0$ ,  $H_2 = H_3 = 0$  всегда есть решение  $H_1 = H_0 \exp(c_1 t)$ .

$\exp[-(|c_2| + |c_3|)t]$ . В результате поле затухает как

$$H(t, x) \sim \int H_k d^3k_0 \sim \exp(-|c_2|t). \quad (3.3)$$

Однако область, занятая магнитным полем, экспоненциально растет благодаря растяжению вдоль первой оси. Поэтому полная магнитная энергия растет:

$$\int H^2 d^3x \sim \exp[(c_1 - 2|c_2|)t] = \exp[(|c_3| - |c_2|)t], \quad (3.4)$$

поскольку  $|c_3| > |c_2|$ .

Любопытно, что магнитная диффузия не входит в ответ. Однако она сыграла принципиальную роль, устранив почти все гармоники поля. Конечная

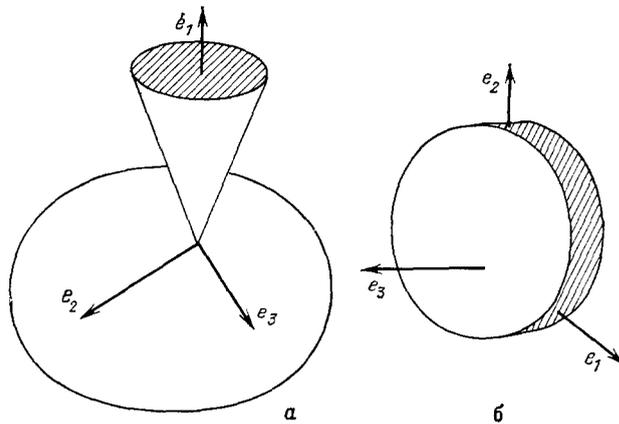


Рис. 4. Конус в фурье-пространстве, внутри которого гармоники магнитного поля экспоненциально растут, вне — затухают как экспонента в экспоненте.

а:  $c_2 < 0$ ; б:  $c_2 > 0$

диффузия стабилизирует масштабы поля вдоль осей 2,3 ( $\sim v_m^{1/2}$ ) и не препятствует растяжению вдоль первой оси, делая поле нитеобразным. Читатель легко убедится, что если вначале положить  $v_m = 0$ , то получится растущее поле  $H_1 \sim \exp(c_1 t)$ . т. е. недопустимо переставлять переходы  $t \rightarrow \infty$  и  $v_m \rightarrow 0$ .

б)  $c_1 > c_2 > 0, 0 > c_3$  (с ж а т и е в б л и н). В этом случае конус строится из волновых векторов, близких к плоскости  $(k_{01}, k_{02})$ , см. рис. 4, б. Конус определяется условием

$$v_m \int_0^t k^2 ds \sim v_m |c_3|^{-1} k_{03} \exp(|c_3|t) = O(1).$$

Поэтому его раствор уменьшается как  $\exp(-|c_3|t)$ . Гармоника с максимальной скоростью роста направлена вдоль первой оси ( $\sim \exp(c_1 t)$ ), а ее волновой вектор близок к третьей оси. Следовательно, поле убывает как

$$H(t, x) \sim \exp(c_1 t) \exp(-|c_3|t) = \exp(-c_2 t). \quad (3.5)$$

Его распределение сплющивается в блин с толщиной  $\sim v_m^{1/2}$ . Для оценки полной магнитной энергии следует  $H^2(t, x)$  умножить на объем, занятый полем. Поскольку растяжение теперь происходит в плоскости  $(k_{01}, k_{02})$ , объем растет как  $\exp[(c_1 + c_2)t]$ , а полная энергия — как  $\exp[(|c_3| - 2c_2)t] = \exp[(c_1 - c_2)t]$ .

Отметим вырожденный случай  $c_2 = 0$ , соответствующий плоскому течению  $(v_x, v_z), v_y = 0$ . В этом случае происходит стабилизация магнитного

поля с экспоненциальным ростом его полной энергии. Этот результат не противоречит теореме запрета для плоского течения<sup>3,17,23</sup>, поскольку в этой теореме подразумевается, что поле скорости не возрастает на бесконечности. В рассматриваемом нами случае компонента  $H_y$  благодаря условию  $v_y = 0$  экспоненциально затухает независимо от остальных компонент. Однако это затухающее поле служит незатухающим источником для двумерного поля  $(H_x, H_z)$  из-за экспоненциального роста области, занятой  $H_y$ .

Для простоты мы рассматривали диагональную матрицу  $c_{ih}$ . Обсудим роль недиагональных членов. Обычно рассуждают следующим образом. Матрицу общего вида можно разложить на антисимметричную и симметричную части. Первая часть исключается путем перехода к системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $e_{ihl}c_{hl}/2$  ( $e_{ihl}$  — единичный псевдотензор). Оставшаяся симметричная матрица приводится к диагональному виду с не зависящими от времени собственными значениями. Однако главные оси этой матрицы будут сложны, хотя и периодически, зависеть от времени. Поэтому возникающая задача кажется очень трудной.

В действительности, недиагональные члены не столь опасны. Поясним это на простом примере плоского течения Куэтта, где отлична от нуля лишь  $c_{12}$ . Диагонализация этой матрицы путем перехода к вращающейся системе отсчета приводит к матрице с двумя равными и противоположными по знаку собственными значениями. Однако благодаря периодическому переходу осей друг в друга экспоненциальные растяжения поля будут периодически сопровождаться экспоненциальными сжатиями. В отсутствие магнитной диффузии поле будет расти линейно со временем. Поэтому учет конечной  $\nu_m$  приведет к экспоненциальному затуханию поля. Строгое рассмотрение см. <sup>54</sup>.

#### 4. ПРОБЛЕМА КИНЕМАТИЧЕСКОГО ДИНАМО

а) **Ф о р м у л и р о в к а п р о б л е м ы.** Попытаемся дать определение кинематического динамо и классифицировать возможные динамо-решения. Не стремясь к формализованным утверждениям, мы выявим принципиальные моменты и некоторые тонкости этой задачи.

В покоящейся жидкости с коэффициентом магнитной диффузии  $\nu_m$  начальное магнитное поле  $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$  характерного масштаба  $L$  диссипирует за время порядка  $L^2/\nu_m$ . Движение жидкости приводит к индуктивному эффекту  $[\mathbf{v}\mathbf{H}]$ , способному усиливать магнитное поле за счет перекачки кинетической энергии в магнитную. Грубо, проблема кинематического динамо заключается в ответе на вопрос: при каких заданных полях скорости индуктивное действие преобладает над диссипацией или по крайней мере компенсирует ее действие? Формально речь идет о незатухающих при  $t \rightarrow \infty$  решениях уравнения индукции (2.8) с начальным условием  $\mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ . В целях упрощения мы будем рассматривать течения несжимаемой жидкости и считать магнитную диффузию  $\nu_m$  постоянным скаляром. Следствия, возникающие при отказе от этих допущений, обсуждаются в п. в).

Такая постановка задачи, однако, не полна. Прежде всего необходимо сформулировать граничные условия. Когда течение задано в ограниченной области, скажем звезде, окруженной средой с другим коэффициентом диффузии (в частности, вакуумом), то, естественно, в отсутствие скачков проницаемости требуется непрерывность магнитного поля на границе области. Для течений в неограниченной области граничное условие накладывается на функцию  $\mathbf{H}_0(\mathbf{x})$ . Обычно это поле задается распределением токов, сосредоточенных в ограниченной области. Тогда

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-3}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Более того, распределение токов, создающих начальное поле, долж-

но иметь конечный магнитный момент, пропорциональный интегралу  $\int H_0 d^3x$ , который понимается в смысле главного значения.

В предыдущем разделе на примере линейного поля скорости мы отмечали важность этого граничного условия: более медленный по сравнению с (4.1) закон спада поля даже при условии конечности магнитной энергии может привести к качественно иным выводам. Рассмотрение линейного поля скорости научило нас еще и тому, что проблему динамо недостаточно сформулировать как вопрос о возможности неограниченного роста магнитной энергии (ср. <sup>23</sup>, § 6.1). При растущей магнитной энергии магнитное поле может и убывать, если растет область, занятая полем.

Поскольку в покоящейся жидкости магнитная диффузия действует на поле «экспоненциальным образом», то для задачи динамо интересны экспоненциально \*) (или более быстро) растущие со временем решения.

В стационарном поле скорости  $v(x)$  естественно говорить о задаче на собственные значения. Когда поле скорости сосредоточено в конечной области, окруженной вакуумом, спектр будет дискретным. Для неограниченной области спектр затухающего поля при  $v = 0$ , очевидно, непрерывен. Однако наличие течения может сделать спектр дискретным (подобно действию потенциала в уравнении Шрёдингера).

В нестационарном поле скорости, разумеется, нельзя говорить о задаче на собственные значения. Однако если поле периодически по времени, то можно пользоваться понятием квазиэнергии <sup>56</sup>, т. е. рассматривать решения, форма которых воспроизводится через период скорости, и спектр дискретен. В другом практически важном случае стохастического потока со стационарными характеристиками можно ставить задачу на собственные значения для среднего магнитного поля и его более высоких моментов.

Можно рассматривать также случайные потоки, статистические характеристики которых не стационарны, а воспроизводятся через конечное время. Для средних характеристик поля и здесь естественно ставить задачи о квази-собственных значениях. Но можно ставить вопрос о росте не усредненного, а истинного поля, рассматривая задачу Коши с начальным полем. Такая постановка задачи оказывается содержательной, поскольку с вероятностью единица при больших временах магнитное поле изменяется со скоростью, определяемой старшим показателем Ляпунова.

Итак, для широкого набора течений можно говорить об асимптотическом изменении магнитного поля по закону  $\exp(\gamma t)$ , где скорость роста  $\gamma$  может быть в зависимости от вида течения собственным значением, квази-собственным значением, или показателем Ляпунова. Вообще говоря, скорость роста является комплексным числом. Наглядным примером периодического магнитного поля, соответствующего мнимому  $\gamma$ , служит солнечный цикл <sup>22-24, 33, 20</sup>.

б) К а с с и ф и к а ц и я д и н а м о. Скорость роста является функцией магнитной диффузии, точнее, выраженная в единицах  $v/l$ , она зависит от безразмерного магнитного числа Рейнольдса  $Re_m = lv/v_m$ , где  $l$  и  $v$  — характерные масштаб и амплитуда поля скорости. В дальнейшем в целях упрощения мы будем использовать безразмерное значение  $v_m$  как обратное магнитное число Рейнольдса. Очевидно, при больших  $v_m$ , когда магнитная диффузия преобладает над действием поля скорости,  $Re \gamma < 0$ . Если динамо возможно, то при некотором  $(v_m)_{crit}$   $Re \gamma$  обращается в нуль и при дальнейшем уменьшении магнитной диффузии становится положительным. Поведение скорости роста магнитного поля в окрестности  $(v_m)_{crit}$  существенно зависит от конкретного вида поля скорости <sup>23</sup>. Однако при  $v_m \rightarrow 0$  можно

\*) Разумеется, возможны решения типа  $t^\mu \exp(\gamma t)$ , в частности степенные при  $\gamma = 0$ . Однако последний случай является вырожденным, так как обычно  $\gamma$  может обращаться в нуль лишь при некотором «критическом» значении  $v_m$ .

говорить о некоторых общих закономерностях<sup>17,20</sup>. К тому же случай малых  $v_m$  свойствен большинству приложений теории гидромагнитного динамо (например,  $v_m \sim 10^{-8}$  в конвективных оболочках Солнца и подобных ему звезд,  $\sim 6 \cdot 10^{-3}$  в жидком ядре Земли и  $1,2 \cdot 10^{-2}$  для течения жидкого натрия в энергетической установке «Суперфеникс», строящейся рядом европейских стран).

В зависимости от вида поля скорости  $Re \gamma$  может при  $v_m \rightarrow 0$  стремиться к положительному значению, не зависящему от  $v_m$  (быстрое динамо); пройдя положительный максимум, снова стать отрицательным (промежуточное динамо) и, наконец, стремиться к нулю, оставаясь положительным (медленное динамо). Для наглядности эти три типа решений качественно показаны на рис. 5.

Такая классификация вытекает из представлений о возможном характере течений проводящей жидкости. Быстрое динамо возможно в общем нестационарном трехмерном поле скорости. Наглядным примером является восьмерка Зельдовича, приведенная во введении (см. рис. 2). К этому типу принадлежат известные турбулентные течения со средней спиральностью и в ее

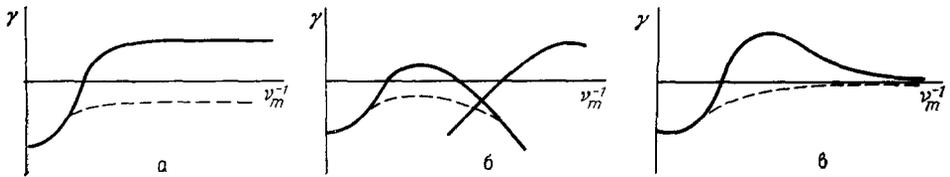


Рис. 5. Характерные зависимости скорости роста поля от магнитного числа Рейнольдса для случаев: а) быстрого, б) промежуточного и в) медленного динамо.

Штриховыми кривыми отмечены ситуации, когда движущаяся жидкость занимает слишком малый объем, так что самовозбуждения поля не происходит

отсутствие<sup>23-28,20,36</sup>. В гл. 6 будет показано, что быстрое динамо всегда реализуется при достаточно малой магнитной диффузии в однородном случайном потоке, обновляющемся за конечное время. Разумеется, в пространственно-ограниченном потоке, занимающем слишком малый объем,  $Re \gamma$  может не стать положительным. Мы отметили этот случай (быстрая диссипация) штрихами на рис. 5. Течения, дающие быстрое динамо, сочетают топологическую сложность (стохастичность мгновенных траекторий, т. е. отсутствие интегральных поверхностей поля скорости) и его нестационарность (например, в случае динамо со средней спиральностью  $Re \gamma \sim \alpha^2$ , где  $\alpha \sim \tau \langle \nabla \text{rot } v \rangle$ , а  $\tau$  — корреляционное время поля скорости). Изучению быстрого динамо и посвящен в основном наш обзор.

Промежуточное динамо возможно в стационарном трехмерном потоке, в котором существуют экспоненциально разбегающиеся траектории. Пример такого динамо см. в<sup>38</sup>. В работе<sup>57</sup> построено решение с декрементом, показанным штрихами на рис. 5, б (сверхбыстрая диссипация); см. гл. 7. В действительности поведение  $\gamma(v_m)$  для промежуточного динамо, по-видимому, более сложно. С увеличением магнитного числа Рейнольдса первая мода быстро затухает, зато становится главной другая мода, меньшего характерного масштаба, но с большим по амплитуде и ширине участком  $Re \gamma > 0$ . Можно высказать гипотезу о появлении сменяющих друг друга мод с  $(Re \gamma)_{\max}$ , асимптотически при  $v_m \rightarrow 0$  приближающимся к скорости роста, характерной для быстрого динамо.

Медленное динамо может создаваться двумерными течениями. Наглядный пример Альвена показан во введении (см. рис. 1), хотя он не столь прост в силу нестационарности (выключения течений в одной плоскости и включения — в другой). Большой класс ламинарных течений по стационарным поверхностям, относящихся к типу медленного динамо, упомянут во введении. Траектории таких течений, исключая особые случаи типа хаббловского

с  $v$ , растущим к бесконечности, могут разбегаться лишь степенным образом, поскольку совпадают с линиями уровня функции тока. Возможность экспоненциального роста магнитного поля связана с тем, что магнитная диффузия векторного поля способна зацеплять различные компоненты поля. Последний эффект отсутствует для поверхностей с изотропной нормальной кривизной, т. е. для плоскости и сферы<sup>17</sup>. Поэтому для плоских и сферических течений динамо невозможно (теоремы запрета); соответствующая  $Re \gamma$  показана штрихом на рис. 5, *в*.

Остается неисследованным вопрос о характере динамо в нестационарных течениях на двумерных поверхностях, отличных от плоскости и сферы. Конкретным примером такого динамо может служить нестационарное (скажем, «турбулентное») течение проводящей жидкости по цилиндрическим поверхностям.

До сих пор мы говорили о решениях, растущих экспоненциально. Существуют ли более быстро растущие решения, в частности такие, в которых магнитное поле или энергия становятся бесконечными за конечное время? Решения взрывного типа  $H \sim (t - t_0)^{-p}$ ,  $p > 0$ , обычно связывают с нелинейными эффектами, поскольку они удовлетворяют уравнению типа  $\partial H / \partial t \sim \sim H^{(1+p)/r}$ . Однако при некоторых условиях такие решения возможны и у линейного по магнитному полю уравнения индукции. Их появление связано с особенностями поля скорости, например с неограниченным уменьшением его пространственного масштаба. При устранении этих особенностей исчезают и взрывные решения. В самом деле, умножив уравнение индукции на  $H_i$  и проинтегрировав его по всему объему, получим неравенство

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \leq \mathcal{E} \max_x \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right),$$

где  $\mathcal{E}$  — магнитная энергия, а максимум берется по всем точкам пространства и всем компонентам тензора деформации скорости. Отсюда ясно, что более чем экспоненциальный рост магнитной энергии возможен только в случае неограниченного тензора  $\partial v_k / \partial x_i$ , т. е. когда при конечной величине скорости неограниченно уменьшается ее характерный масштаб. Последняя ситуация, в принципе, выглядит возможной при стремлении к нулю кинематической вязкости. При этом в поле скорости возникает последовательность скин-слоев с неограниченно уменьшающейся толщиной. Построение такого решения уравнения индукции представляет методический интерес, но, по-видимому, сложно технически. В работе<sup>58</sup> решение взрывного типа построено для уравнений среднего поля в локально однородной и изотропной, но зеркально-несимметричной турбулентности. Такое решение получается, когда средняя спиральность турбулентности растет на бесконечности, а начальное магнитное поле имеется во всем пространстве и убывает на бесконечности как  $\exp(-|x|^2)$ . Аналогичные решения известны в квантовой механике при некоторых потенциалах, скажем приводящих к падению на центр.

в) З а м е ч а н и я о н е о д н о р о д н о й и а н и з о т р о п н о й м а г н и т н о й д и ф ф у з и и. Т е ч е н и я с ж и м а е м о й ж и д к о с т и. В средах с неоднородной и (или) анизотропной магнитной диффузией условия генерации магнитного поля могут измениться в сторону увеличения возможности самовозбуждения поля. В частности, могут быть сняты некоторые теоремы запрета. Это ясно уже из того, что неоднородная и анизотропная электропроводности могут моделировать проволочные контуры динамо-машин.

Характерный и часто встречающийся пример неоднородной магнитной диффузии — это ограниченный объем проводящей жидкости (например, ядро планеты или звезда), окруженный вакуумом или средой с другой проводимостью. Учет неоднородности  $\nu_m$  сводится в этом случае, как известно, к постановке граничных условий на поверхности раздела сред. Вопрос о том, в какой мере учет неоднородностей магнитной диффузии ослабляет теоремы запре-

та для плоских и сферических течений или разрешает генерацию полей, не зависящих от одной из координат, для движения по поверхностям в общем виде не выяснен. Известно, что недостаточна зависимость  $v_m$  только от одной координаты, но предлагаются примеры динамо для  $v_m$ , зависящей от двух координат<sup>59</sup>. В работе<sup>60</sup> доказана теорема запрета для стационарного поля скорости, подчиняющегося условию  $\text{rot}(v_m^{-1}v(x)) = 0$ , т. е. для специального течения типа Бельтрами  $\text{rot } v = v \nabla v_m / v_m$ .

Существенно изменяет условия генерации предположение об анизотропии магнитной диффузии<sup>61</sup>. Закон Ома в анизотропной покоящейся среде имеет вид<sup>62</sup>

$$E_j = v_{jl} \text{rot}_l H, \quad (4.2)$$

где  $v_{jl}$  — тензор магнитной диффузии (обратный тензору проводимости), который мы будем считать постоянным и не зависящим от магнитного поля. Если анизотропия среды определяется одним полярным вектором  $q_j$ , то этот тензор симметричен и его можно представить в виде

$$v_{jl} = v_0 \delta_{jl} + v_1 q_j q_l. \quad (4.3)$$

Учет регулярного движения сводится к добавлению в правую часть закона Ома члена  $-[v, H]/c$ . В уравнении для среднего поля в случайном потоке появляются еще вклады, пропорциональные симметричной части тензора первых производных<sup>23,24</sup> типа

$$e_{jkm} q_m q_l (\partial H_l / \partial x_k + \partial H_k / \partial x_l).$$

В случае молекулярной диффузии такой член исключается на том основании, что он не гарантирует положительной скорости роста энтропии. В гидродинамической ситуации (кинематическое динамо) эти соображения теряют силу из-за наличия э. д. с., обусловленных взаимодействием скорости и магнитного поля и осуществляющих преобразование кинетической энергии в магнитную.

В работе<sup>61</sup> показано, что уравнение индукции с анизотропным тензором магнитной диффузии (4.2) для  $v_1 \ll v_0$  имеет растущие решения, зависящие от одной и двух координат, в простейшем плоском течении Куэтта  $v_y = \Omega z$ . Например, магнитное поле, первоначально локализованное как  $\exp(-x^2)$  при  $t \rightarrow \infty$ , расплываясь по диффузионному закону с коэффициентом диффузии  $v_0$ , растет со скоростью  $\gamma = (v_1/4v_0) \Omega q_y q_z$ . Условие положительности  $\gamma$  сводится к тому, чтобы вектор  $q_j$  не был параллелен или перпендикулярен направлению течения, совпадающему с осью симметрии  $y$ , а также к согласованию знаков  $v_1$  и  $\Omega$ . Такое решение можно сравнить<sup>61</sup> с известным униполярным динамо<sup>23</sup>, хотя, разумеется, наличие проволоки и края диска говорит о неоднородности последнего.

Большая часть настоящего обзора посвящена динамо, создаваемому течениями несжимаемой проводящей жидкости. Для стационарных течений в отсутствие внешних силовых полей условие несжимаемости формулируется как малость гидродинамических скоростей  $v$  по сравнению со скоростью звука  $c_s$ . В нестационарном течении для несжимаемости жидкости достаточно, чтобы время прохождения звуковым сигналом расстояния, на котором заметно изменяется скорость,  $l/c_s$ , было мало по сравнению со временем характерного изменения скорости  $\tau$ . В астрономических условиях существенно влияние гравитационных полей. В стационарной ситуации для несжимаемости достаточно, чтобы характерный масштаб изменения скорости был много меньше масштаба изменения плотности  $\rho/\nabla\rho$  (шкалы высот). Это условие обычно не выполнено в конвективных оболочках звезд. Сжимаемость необходимо учитывать также при рассмотрении нестационарных астрофизических процессов типа сжатия межзвездных облаков в процессе звездообразования.

Уравнение индукции в сжимаемом течении

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v}_m \Delta \mathbf{H} \quad (4.4)$$

содержит дополнительный член  $-\mathbf{H} \nabla \mathbf{v}$ . Ясно, что этот член существенно влияет на динамо, когда он знакопостоянен, т. е. для нестационарных процессов сжатия и взрыва, или при наличии источников и стоков. Динамо в таких условиях плохо изучены. Заметим, что в практически интересном случае звездообразования процесс сжатия длится конечное время и приводит к усилению магнитного поля (в тривиальном сферически-симметричном случае по закону  $H \sim \rho^{2/3}$ ; более подробное рассмотрение и ссылки на работы в этой области можно получить в гл. 14 монографии<sup>20</sup>), которое можно рассматривать как независимый и дополнительный к динамо процесс.

Уравнение (4.4) также можно изучать с помощью развиваемых в настоящей работе методов. С точки зрения приложений интересна задача о магнитном поле в так называемой акустической турбулентности<sup>63,64,73</sup>, когда нельзя пренебрегать членами порядка  $(v/c_s)^2$ .

### 5. КОРОТКОКОРРЕЛИРОВАННОЕ СЛУЧАЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Построение быстрого динамо в нестационарном трехмерном ламинарном течении — задача невероятно трудная даже для численного исследования. К счастью, рассмотрение практически более интересных нестационарных случайных течений резко упрощает задачу, поскольку уже поля скорости с простыми статистическими характеристиками могут работать как быстрые динамо. В этом разделе мы рассмотрим простейшее случайное течение с короткими ( $\delta$ -образными) временными корреляциями, впервые примененное к задаче динамо А. П. Казанцевым<sup>25</sup>. Такое поле скорости удобно представлять себе как предел скоростей  $v^\Delta(t, \mathbf{x})$ , которые постоянны по  $t$  на интервалах длины  $\Delta t$ :  $(0, \Delta t)$ ,  $(\Delta t, 2\Delta t)$ , . . . и независимы на разных таких интервалах. В пределе  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{y}) \rangle = 2 \frac{l}{v} \delta(t - t') V_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где  $l, v$  — характерные масштаб и скорость, угловые скобки означают усреднение по распределению поля скорости. Таким образом, при малых  $\Delta t$  скорость  $v^\Delta$  порядка  $v(l/v\Delta t)^{1/2} \sim (\Delta t)^{-1/2}$ . В целях упрощения мы будем предполагать везде в этом разделе, кроме п. б), что средняя скорость отсутствует,  $\langle v_i(t, \mathbf{x}) \rangle = 0$  и опускать размерный множитель  $2l/v$ .

Изучим поведение средних характеристик магнитного поля.

а) Уравнение для среднего магнитного поля. Уравнение для среднего магнитного поля в турбулизованном потоке было впервые предложено Штеенбеком, Краузе и Рэдлером и затем обосновывалось рядом авторов, которые в интересующем нас случае больших магнитных чисел Рейнольдса использовали ряд ограничительных предположений, например гауссовость или двухмасштабность поля скорости (см., например,<sup>23, 24, 65</sup> и содержащиеся там ссылки). Существование растущих решений этого уравнения связано с наличием средней спиральности течения.

В работе авторов<sup>66</sup> предложен простой и строгий вывод уравнений для среднего поля и других моментов в единственном предположении о короткокоррелированности поля скорости. Особенно важен отказ от предположения о двухмасштабности поля скорости. Хотя в короткокоррелированном течении для  $\langle \mathbf{H} \rangle$  получается дифференциальное уравнение, учет конечности времени корреляции при отсутствии двухмасштабности поля скорости приводит к интегральному уравнению; см. п. г).

Идея вывода уравнения для среднего поля заключается в следующем. Задавшись магнитным полем в момент  $t$ , найдем поле в близкий момент

$t + \Delta t$  по формуле (2.11)

$$H_i(t + \Delta t, \mathbf{x}) = M_{\mathbf{x}} [G_{ij}(\Delta t, \xi_{\Delta t}, \mathbf{x}) H_j(t, \xi_{\Delta t})]. \quad (5.1)$$

Усредним его по полю скорости, причем в правой части (5.1) переставим порядок усреднения  $\langle M_{\mathbf{x}} \rangle \rightarrow M_{\mathbf{x}} \langle \rangle$ . Корреляцию  $\langle G_{ij} H_j \rangle$  можно вычислить, разбив операцию усреднения по полю скорости на два этапа. Сначала усредняем в интервале от 0 до  $t$ , когда усредняется только поле  $H_j$ , которое зависит от предыдущей истории. Усредненное поле является гладким и его можно, подобно (2.14), разложить в ряд Тейлора, удерживая члены порядка не выше  $\Delta t$ , тем самым сохраняя и член

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle H_j \rangle}{\partial x_k \partial x_l} (\xi_{\Delta t} - x)_k (\xi_{\Delta t} - x)_l.$$

С той же точностью из (2.9) и (2.5), учитывая, что  $v^{\Delta} \sim (\Delta t)^{-1/2}$ , имеем

$$\begin{aligned} (\xi_{\Delta t} - x)_k &= \sqrt{2\nu_m} w_k + v_k(t, \mathbf{x}) \Delta t - \sqrt{2\nu_m} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \int_0^{\Delta t} w_l dt + \frac{1}{2} v_l \frac{\partial v_k}{\partial x_l} (\Delta t)^2, \\ G_{ij}(\Delta t, \xi_{\Delta t}) &= \delta_{ij} - \frac{\partial v_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} \Delta t - \sqrt{2\nu_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_l} \int_0^{\Delta t} w_l dt + \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (5.2) \end{aligned}$$

Теперь выполним усреднение величины  $G_{ij} \langle H_j \rangle$  по полю скорости в интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$ . При этом, благодаря короткому времени памяти, расщепляются корреляции типа

$$\left\langle v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \langle H_j \rangle}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial \langle H_j \rangle}{\partial x_k}.$$

Усредняя, наконец, по винеровским траекториям с учетом равенств (2.10), обозначая полное среднее поле через  $B_i(t, \mathbf{x})$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем искомое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= - \left\langle v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial B_j}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle B_j + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu_m \delta_{kj} + \frac{1}{2} \langle v_k v_j \rangle \right) \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right], \quad (5.3) \end{aligned}$$

где знак  $\langle \rangle$  означает пространственную часть коррелятора поля скорости в совпадающих точках пространства. При переходе к размерным единицам его следует умножить на  $2l/v$ .

Интересно, что в рассматриваемом приближении в последнем диффузионном члене (5.3) не происходит зацепление различных компонент поля. Такое зацепление появляется, однако, при учете конечности корреляционного времени.

Уравнение (5.3) справедливо в общем неоднородном анизотропном случае, существенно лишь предположение о мгновенности корреляций поля скорости. В однородной турбулентности  $\partial \langle v_i v_k \rangle / \partial x_l = 0$  и уравнение упрощается:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \left\langle v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right\rangle \frac{\partial B_l}{\partial x_k} + \left( \nu_m \delta_{kl} + \frac{1}{2} \langle v_k v_l \rangle \right) \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Постоянный трехиндексный тензор, стоящий перед первой производной, антисимметричен по индексам  $i, k$ . Поэтому его можно представить в виде

$$\left\langle v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right\rangle = e_{ikm} \alpha_{lm} - \delta_{il} q_k + \delta_{kl} q_i. \quad (5.4)$$

Умножая это равенство на  $e_{ikh}$ , пользуясь несжимаемостью и однородностью течения, можно убедиться, что  $q_i = 0$ , а  $\alpha_{lm}$  является симметричным тензором

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} \langle v_i \omega_k + v_k \omega_i - \delta_{ik} v_l \omega_l \rangle, \quad \omega = \text{rot } \mathbf{v},$$

след которого равен  $\alpha_{ii} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ . В силу симметрии  $\alpha_{ik}$  всегда можно привести к диагональному виду. Видно также, что генерация среднего поля возможна и при равной нулю средней спиральности, когда  $\langle v_i \omega_k \rangle \neq 0$ <sup>24, 66</sup>.

Полярный вектор  $q_j$  не обращается в нуль в слабонеоднородном случае, когда еще можно говорить о представлении (5.4). Тогда он входит в уравнение среднего поля в виде  $\text{rot } [\mathbf{qB}]$ , т. е. описывает перенос поля с эффективной скоростью  $q_j$  (диамагнитный эффект<sup>3, 16, 24</sup>).

В приложениях к астрофизике чаще всего используют изотропное слабо неоднородное приближение, когда с учетом средней скорости  $\mathbf{V}$  уравнение для среднего поля принимает вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } [\mathbf{VB}] + \text{rot } \alpha \mathbf{B} - \text{rot } \left( \beta \text{ rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right), \quad (5.5)$$

где  $\alpha$  в размерном виде равна  $-\left(\frac{\tau}{3}\right) \langle \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v} \rangle$ ,  $\beta$  включает в себя молекулярную и турбулентную магнитную диффузию, а  $\mu$  — турбулентная магнитная проницаемость (градиент которой равен  $q_j$ ). Разумеется, предположение о короткокоррелированности случайной составляющей поля скорости (или приводящее к тому же уравнению предположение о двухмасштабности поля скорости) в реальных условиях не выполняется. Однако, как будет показано в п. г), решения уравнения (5.5) близки к решениям более строгого интегрального уравнения, учитывающего конечность времени корреляции течения.

б) А с и м п т о т и ч е с к и е р е ш е н и я. Полагая для упрощения, что  $\mu = 1$  и  $\beta = \text{const}$ , мы можем записать уравнение (5.5) в виде

$$\frac{\partial B}{\partial t} = R_\omega \text{ rot } [\mathbf{VB}] + R_\alpha \text{ rot } \alpha \mathbf{B} + \Delta B, \quad (5.6)$$

где

$$R_\omega = \frac{\Omega_0 L^2}{\beta}, \quad R_\alpha = \frac{\alpha_0 L}{\beta}$$

— безразмерные числа, характеризующие источники генерации поля. Уравнение (5.6) оказывается значительно проще исходного уравнения индукции, потому что оно допускает растущие решения с высокой симметрией. В простейшем случае  $R_\omega = 0$ ,  $\alpha = \text{const}$  решение имеет вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(\bar{\gamma} t + i \mathbf{kx}), \quad \bar{\gamma} = \pm R_\alpha k - k^2. \quad (5.7)$$

Пространственная часть растущего решения представляется в декартовой системе координат некоторой комбинацией из шести линейно независимых спиральных векторов типа  $(\sin kz, \cos kz, 0)$ ,  $(\cos kz, -\sin kz, 0)$  и т.д. с круговой перестановкой  $x, y, z$ . Таким образом, генерируемое поле имеет вид правой ( $R_\alpha > 0$ ) или левой ( $R_\alpha < 0$ ) стоячей спиральной волны. Генерация в безграничном пространстве имеет беспороговый характер, т. е. происходит при любых  $v_m$ , с ростом  $v_m$  растет лишь масштаб генерируемого поля\*). Быстрее всего растет мода с волновым вектором  $k_0 = R_\alpha/2$ , у которой  $\bar{\gamma}_{\text{max}} = R_\alpha^2/4$ .

\*) Для генерации течением, ссередоточенным в ограниченной области, требуется достаточный размер области и достаточно малое  $v_m$ , тем самым появляются ограничения на два числа  $Re_m$  и  $R_\alpha$ .

Следует отметить, что в приближении  $\alpha = \text{const}$  величина  $R_\alpha$  имеет пиквикский смысл, поскольку в задаче нет характерного масштаба  $L$  (лучше говорить просто об  $\alpha$  и  $\beta$ ). Физический смысл имеет задача со слабо неоднородной функцией  $\alpha(\mathbf{x})$ , где  $L$  — характерный масштаб изменения средней спиральности. Тогда по порядку величины  $R_\alpha \sim \varepsilon L/l$ , поскольку  $\alpha \sim \varepsilon v$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ;  $\beta \sim lv$  ( $l$  — характерный энергонесущий масштаб поля скорости). Масштаб среднего магнитного поля  $Lk_0^{-1} = 2L/R_\alpha \sim l\varepsilon^{-1}$  заключен между  $l$  и  $L$ . Случай максимальной спиральности  $\varepsilon \sim 1$  не опасен, см. п. а) (ср. Моф-фат<sup>23</sup>, § 9.2).

При больших  $R_\alpha$  можно построить, пользуясь развитием метода ВКБ в работах В. П. Маслова, асимптотическое решение, подобное решению с постоянной средней спиральностью<sup>67</sup> и имеющее вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = [\varphi_0(\mathbf{x}) + R_\alpha^{-1}\varphi_1(\mathbf{x}) + \dots] \exp\{\bar{\gamma}t + iR_\alpha S(\mathbf{x})\}, \quad (5.8)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma_2 R_\alpha^2 + \gamma_1 R_\alpha + \gamma_0 + \dots$$

Конфигурация поля в главном порядке определяется функциями  $\varphi_0$  и  $S$ . Максимальная скорость роста — величиной  $\gamma_2$ . Для оценки порога возбуждения  $(R_\alpha)_{\text{crit}}$ , при котором  $\text{Re } \gamma = 0$ , необходимо знать также  $\gamma_1$ . Для определения этих величин надо подставить (5.8) в уравнение (5.6).

Максимум скорости роста для функции  $\alpha(\mathbf{x})$  с максимумом в изолированной точке равен

$$\bar{\gamma}_{\text{max}} = \frac{1}{4} R_\alpha^2 - \frac{5}{2} R_\alpha + O(1), \quad (5.9)$$

откуда  $(R_\alpha)_{\text{crit}} = 10$ . При изменении характера экстремума (концентрация  $\alpha$  на линиях и плоскостях) порог возбуждения снижается<sup>67</sup>. Порог возбуждения такого же порядка величины был получен ранее в ряде численных расчетов с различными  $\alpha(\mathbf{x})$ <sup>68,24</sup>.

При  $R_\omega \neq 0$  оператор правой части исходного уравнения (6.6) является несамосопряженным (в случае  $R_\omega = 0$  он был самосопряженным в главных порядках  $R_\alpha^2$  и  $R_\alpha$ ). Поэтому собственные значения будут комплексными. В обычно рассматриваемом приближении  $|R_\omega| \gg R_\alpha^2$  ( $\alpha$ -динамо) задачу принято характеризовать безразмерным динамо-числом  $D \equiv R_\alpha \cdot R_\omega$ .

Такое приближение обычно применимо в конвективных оболочках звезд, в частности в солнечной конвективной зоне. В тонкой оболочке решение имеет вид динамо-волны:

$$\mathbf{V} \sim \exp\left(\bar{\gamma}t + i\omega t - ikx - iqz - \frac{pz^2}{2}\right)$$

(ось  $z$  перпендикулярна оболочке). Порог самовозбуждения среднего поля можно оценить из условия  $k_0 R \gtrsim 1$ , где  $k_0^{-1} \sim D^{-1/3}$  — характерный масштаб генерируемого поля,  $R$  — радиус звезды (так, чтобы поле укладывалось в звезде). Получим<sup>69</sup>

$$D \gtrsim \left(\frac{4\pi}{R}\right)^3 \sqrt{\left|\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right|_{\text{max}}},$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения звезды. Период динамо-волны равен  $\approx 10D^{-2/3}$  ( $\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial z}$ )<sup>-2/3</sup>. Эти асимптотики справедливы для достаточно однородных распределений источников  $\alpha$  и  $\partial \Omega / \partial z$  по толщине конвективной оболочки. Для концентрированных и неперекрывающихся источников период пропорционален  $\ln^{-1} D$ <sup>70</sup>.

Приведенные оценки демонстрируют возможности асимптотических методов. Подробное модельное и численное исследование динамо-волн и их приложений к объяснению солнечной и звездной активности можно найти в ряде работ и монографий<sup>71,72,23,24,33</sup>.

в) Изучение второго момента. Уравнение для одновременного корреляционного тензора  $\mathcal{H}_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle H_i(t, \mathbf{x}) H_j(t, \mathbf{y}) \rangle$  в общем неоднородном анизотропном случае выводится столь же просто, как и уравнение для среднего магнитного поля<sup>66</sup>. Неодновременную корреляцию в данном случае можно найти, зная  $\mathcal{H}_{ij}$  и функцию Грина задачи о среднем поле.

Анализ этого тензорного уравнения выполнен пока только в однородном изотропном отражательно инвариантном поле скорости, тензор корреляции которого имеет вид<sup>50</sup>

$$\langle v_i(\mathbf{x}) v_j(\mathbf{y}) \rangle = \frac{lv}{3} \left[ F(r) \delta_{ij} + \frac{r}{2} \frac{dF}{dr} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right], \quad r_i = x_i - y_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

где выделен размерный множитель

$$l = \int_0^{\infty} F(r) dr$$

— корреляционная длина. Продольная корреляционная функция  $F(r)$  безразмерна, равна единице в нуле, имеет положительный фурье-образ и убывает на бесконечности.

Естественно предположить, что максимально растущее решение имеет ту же симметрию:

$$\mathcal{H}_{ij}(r, t) = \frac{1}{3} \left[ W(r, t) \delta_{ij} + \frac{r}{2} \frac{dW}{dr} \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \right], \quad (5.11)$$

хотя вопрос о существовании растущих решений с меньшей симметрией остается неисследованным.

Нахождение продольной корреляционной функции  $W(r, t)$  сводится, как показал А. П. Казанцев еще в 1967 г.<sup>25</sup>, к решению уравнения, похожего на уравнение Шредингера с переменной массой, но без мнимой единицы перед временной производной

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m(r)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - U(r) \psi, \quad (5.12)$$

где

$$\psi = \frac{r^2}{3 \sqrt{2m}} W, \quad \frac{1}{2m} = v_m + \frac{1-F(r)}{3},$$

$$U(r) = \frac{1}{6r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr^3 F}{dr} \right) + \frac{1}{mr^2} - \frac{1}{8m^3} \left( \frac{dm}{dr} \right)^2.$$

Решение ищется в виде  $\psi(r, t) = \psi(r) \exp(2\gamma^{(2)}t)$ , после чего задача сводится к нахождению собственных чисел и собственных функций  $\psi(r)$  в потенциале  $U(r)$  с нулевыми граничными условиями в нуле и на бесконечности. На существование растущих решений указано в<sup>25,27,28</sup>. Подробно задача исследована в работе<sup>36</sup> для ряда характерных форм  $F(r)$ .

Для продольной корреляции скорости, зависящей экспоненциально от  $r^2$ , потенциал имеет вид, представленный на рис. 6, а. При больших  $v_m$ ,  $U(r) \rightarrow 2v_m/r^2$  нет и растущих решений (связанные состояния). С уменьшением  $v_m$  появляется

яма, а далее при некотором критическом  $(v_m)_{crit} \sim 1/50$  — уровень, т. е. имеет место самовозбуждение поля. При дальнейшем уменьшении  $v_m$  потен-

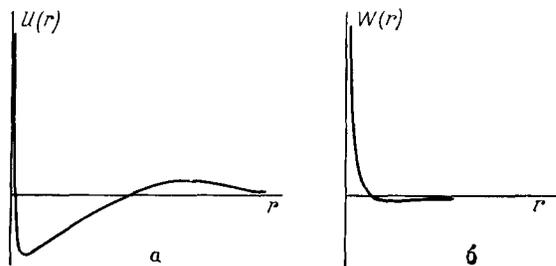


Рис. 6. Характерный вид потенциала и корреляционной функции в задаче об эволюции второго момента поля

циал стремится к предельной форме ямы, отделенной барьерами от нуля и бесконечности. Первый барьер становится молекулярной, а второй — турбулентной диффузией.

В отличие от задачи о среднем поле в зеркально-несимметричном неограниченном в пространстве потоке здесь появляется порог, связанный с требованием существования потенциальной ямы. С качественной точки зрения это можно понять следующим образом. Генерация поля требует экспоненциального разбегания близких частиц, происходящего в турбулентном потоке до некоторого масштаба, за которым оно сменяется турбулентной диффузией отдельных частиц. Очевидно, этот масштаб должен превышать масштаб, в котором существенна диффузия магнитного поля, вызванная молекулярным  $v_m$ . Для пространственно ограниченного течения естественно появится дополнительное требование, чтобы размеры области были много больше характерного масштаба поля скорости. Однако пока задачи такого рода, насколько нам известно, не рассматривались.

Скорость роста  $\gamma^{(2)}$  в силу самосопряженности уравнения Казанцева (5.12)<sup>27</sup> действительна и в пределе  $v_m \rightarrow 0$  не зависит<sup>36</sup> от  $v_m$ , т. е. рассматриваемый поток является быстрым динамо. Стремлению к пределу оказывается очень медленным  $\gamma^{(2)} - \gamma_0^{(2)} \sim (\ln v_m)^{-2}$  (формула получена О. В. Артамоновой). Пространственная зависимость корреляционной функции  $\langle H_i H_i \rangle = (2r^2)^{-1} \partial r^3 W / \partial r$  представлена на рис. 6, б. С уменьшением  $v_m$  она «прижимается» к оси координат, причем всегда имеется хвост с отрицательным значением  $\langle H_i H_i \rangle$ , начинающимся при  $r \sim v_m^{1/2}$  и проходящим через минимум при  $r \sim v_m^{1/4}$ . Последний характерный масштаб отвечает положению дна потенциальной ямы.

До сих пор мы предполагали, что распределение магнитного поля однородно. Обсудим, как будет эволюционировать первоначально неоднородное распределение поля<sup>36</sup>. Ясно, что такое поле будет расти за счет описанного выше динамо-процесса и переноситься турбулентной (и молекулярной) диффузией. Я. Б. Зельдович обратил внимание на сходство этой задачи с известной задачей о распространении фронта, впервые изученной в биологии Колмогоровым, Петровским и Пискуновым и широко используемой в теории горения<sup>74</sup>.

Для локализованного в начальный момент распределения магнитной энергии решение, очевидно, имеет вид

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(2\gamma^{(2)}t - \frac{x^2}{4Dt}\right),$$

где  $D = 1/2m(\infty) = v_m + v_T$  — полный коэффициент диффузии,  $\gamma^{(2)}$  — найденная выше скорость роста. Показатель экспоненты можно представить в виде

$$2\gamma^{(2)}t - \frac{x^2}{4Dt} = -\frac{1}{4Dt} (|x| - 2\sqrt{2\gamma^{(2)}D}t) (|x| + 2\sqrt{2\gamma^{(2)}D}t),$$

откуда видно, что поверхность  $\mathcal{E} = \text{const}$  распространяется со скоростью  $2\sqrt{2\gamma^{(2)}D}$ . Заметим, что этот результат сохранится и при учете нелинейности, которая приведет к ограничению роста энергии.

г) Учет конечности корреляционного времени. В реальных турбулентных потоках корреляционное время, как известно, порядка  $l/v$ . Тем не менее рассмотренное в предыдущем разделе короткокоррелированное случайное течение в некотором смысле оказывается неплохим приближением, поскольку характерное время роста поля превышает  $l/v$ . Действительно, обратные скорости роста  $\bar{\gamma}^{-1}$  среднего поля обычно намного больше  $l/v$  (см. 5.9), так как  $\alpha \ll v$ ; а  $(\gamma^{(2)})^{-1}$ , в отражательно-симметричной ситуации даже в пределе  $v_m \rightarrow 0$  несколько больше  $l/v$ <sup>36</sup>.

С другой стороны, учет конечности корреляционного времени несомненно важен. Во-первых, это приводит к количественным изменениям скорости роста

и формы генерируемого поля. Во-вторых, появляются новые физические эффекты. А. П. Казанцев обратил внимание на то, что  $\delta$ -образное приближение явно не годится для описания, например, акустической турбулентности, частотный спектр которой имеет сильный максимум на звуковой частоте и слабый хвост при  $\omega = 0$  (см. п. д)).

Для обобщения уравнения среднего поля (5.3) можно воспользоваться тем же случайным полем скорости, которым мы аппроксимировали  $\delta$ -коррелированное течение (см. начало раздела), но характерное время обновления поля скорости  $\Delta t$  не будем устремлять к нулю, а будем считать конечным независимым параметром, который обозначим буквой  $\tau$ .

Итак, предположим, что  $v(\mathbf{x}, t)$  — случайное соленоидальное поле скорости, распределенное и независимое на временных интервалах  $(0, \tau)$ ,  $(\tau, 2\tau)$ , . . . Для упрощения мы потребуем также однородности поля скорости, т. е. потребуем, чтобы его статистические характеристики на каждом интервале обновления были инвариантны относительно сдвига пространственных координат.

Такое поле скорости нестационарно во времени. В частности, его временная корреляционная функция зависит от двух времен, а не от их разности. Поэтому можно совместить обращение в нуль корреляций через конечное время с положительностью энергии течения, что было бы невозможно для потока с постоянными во времени статистическими характеристиками в силу известной теоремы Бохнера — Хинчина о положительности фурье-образа корреляционной функции. Рассматриваемый нами поток стационарен лишь в дискретном времени  $n\tau$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Поэтому если интересоваться процессами, происходящими за времена, значительно превышающие  $\tau$ , то такое течение можно считать стационарным. Время обновления имеет смысл времени памяти и в этом смысле подобно корреляционному времени. С физической точки зрения обновление можно представить себе как периодические встряхивания жидкости, скажем при подводе энергии. При этом все точки встряхиваются одновременно, так что не возникает пространственных разрывов  $v(\mathbf{x})$ . Временные разрывы, по-видимому, не существенны, поскольку в уравнение индукции не входит  $\partial v/\partial t$ , хотя, разумеется, эти разрывы можно сгладить, не изменяя результатов. Заметим, что это сглаживание не делает поток стационарным. Для этого требуется встряхивать в случайные моменты времени или обеспечивать непрерывную подачу энергии. Тогда появляется временная корреляционная функция, зависящая от разности времен  $i$ , скажем, экспоненциально убывающая, как функция этой разности.

Уравнение для среднего магнитного поля в модели с обновлением получено в работе <sup>75</sup> путем усреднения по случайным траекториям. Это уравнение связывает значение поля в момент  $(n + 1)\tau$  с полем в момент  $n\tau$ . В общем случае оно оказывается интегральным, поскольку за конечное время  $\tau$  пучок случайных траекторий расходится на конечное расстояние. В фурье-пространстве это уравнение имеет вид

$$B_i((n + 1)\tau, \mathbf{k}) = \Pi_{ij}(\tau, \mathbf{k}) B_j(n\tau, \mathbf{k}). \quad (5.13)$$

Передаточная функция  $\Pi_{ij}$  выражается через лагранжеву координату следующим образом:

$$\Pi_{ij}(\tau, \mathbf{k}) = M_{\mathbf{x}} \{ \langle G_{ij}(\tau, \xi) \exp(i\xi\tau\mathbf{k}) \rangle \}. \quad (5.14)$$

Можно показать <sup>75</sup>, что для малых  $\mathbf{k}$  (двухмасштабный подход) или малых  $\tau$  (короткокоррелированное приближение) интегральное уравнение (5.13) эквивалентно дифференциальному уравнению (5.6) в том смысле, что при переходе от  $t = n\tau$  к  $t = (n + 1)\tau$  последнее имеет ту же передаточную функцию.

Вычислим скорость роста среднего магнитного поля, подчиняющегося интегральному уравнению (5.13), на конкретном примере.

Пусть координата  $\xi_\tau$  и матрица  $G_{ij}(\tau, \xi)$  имеют совместное гауссовское распределение с параметрами  $\sigma$  и  $\alpha > 0$ , так что

$$M \langle \xi_\tau \rangle = 0, \quad M \langle G_{ij} \rangle = \delta_{ij}, \\ M \langle \xi_{\tau i} \xi_{\tau j} \rangle = 2\tau\sigma^2\delta_{ij}, \quad M \langle \xi_{\tau i} G_{jl} \rangle = e_{ijl}\alpha\tau.$$

Это эквивалентно заданию на отрезке времени длиной  $\tau$  всех корреляторов некоторого (вообще говоря, не гауссовского) поля скорости.

В этом примере оператор  $M \langle \rangle$  в (5.14) означает простое усреднение по гауссовскому распределению, так что

$$\Pi_{ij}(\tau, \mathbf{k}) = (\delta_{ij} + ie_{ijl}k_l\alpha\tau) \exp(-\tau\sigma^2k^2).$$

Скорость роста среднего поля, как ясно из (5.13), определяется старшим собственным значением матрицы  $\tau^{-1} \ln \Pi_{ij}$ :

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\tau} \ln(1 + \alpha\tau k) - \sigma^2k^2. \quad (5.15)$$

Сравним ее со скоростью роста  $\bar{\gamma}_j = \alpha k - \beta k^2$ , получающегося из дифференциального уравнения (5.6). Мы видим, что  $\bar{\gamma}_d$  с  $\beta = \sigma^2 + (\alpha^2\tau/2)$  является хорошим приближением в области малых  $k < (\alpha\tau)^{-1}$  (напомним, что  $k_{\max} \sim \alpha/\beta$ , т. е. приближение улучшается с уменьшением  $\alpha$ ). В области больших  $k$ , но меньших диссипационного масштаба,  $\bar{\gamma} > \bar{\gamma}_d$ . Интересно, что средняя спиральность вносит вклад в турбулентную диффузию. Поэтому обычно используемое представление о турбулентной диффузии как о параметре, не зависящем от спиральности, приводит при малых  $k$  к несколько заниженному значению  $\beta (= \sigma^2)$  и, следовательно, завышенной скорости роста  $\bar{\gamma}_d = \alpha k - \beta k^2$ . Заметим, что здесь речь идет о вкладе однородной спиральности. Если считать  $\alpha = \alpha(x, t)$  случайной функцией, то, как считает Крейкнан (см. <sup>23, 33</sup>), флуктуации  $\alpha$  вносят отрицательный вклад в коэффициент турбулентной диффузии.

Таким образом, использование дифференциального уравнения типа (5.6) вполне оправдано для описания эволюции крупномасштабных магнитных полей. При этом требуется, чтобы масштаб магнитного поля  $k^{-1}$  превышал характерный масштаб поля скорости  $l$ . В случае максимальной спиральности  $\alpha \sim v$ ,  $kl < 1$ , при  $\alpha \sim \epsilon v$ ,  $kl < \epsilon^{-1}$ . Поэтому выход за рамки двухмасштабного подхода в случае малой средней спиральности дает лишь небольшие поправки к скорости роста. Это оправдывает применение уравнения (5.6) теории динамо среднего поля к солнечному циклу, несмотря на то, что двухмасштабный подход в этом случае принято считать неудовлетворительным (см., например, <sup>71, 76</sup>).

Обобщаются на случай конечного  $\tau$  и уравнение для второго и более высоких моментов магнитного поля (см. гл. 6). Для явного вычисления ядра этого уравнения необходимо задать вид коррелятора  $\langle \xi_i \eta_i' \rangle$ , где  $\xi_i$  и  $\eta_i'$  — две винеровские траектории. Отметим, что уравнения второго момента выводились ранее в приближении прямых взаимодействий <sup>77</sup> и в схеме замыкания цепочки моментных уравнений, использовавшейся группой У. Фриша (см., например, <sup>35</sup>). Исследования этих уравнений в указанных работах приводят к результатам, близким к полученным в п. в).

д) Роль в временном спектре поля скорости. Основным недостатком короткокоррелированного приближения является не малость корреляционного времени, а то, что оно отвечает сплошному спектру и, следовательно, никак не отражает особенности временного спектра течения. На этот факт впервые обратил внимание А. П. Казанцев. Например, в так называемой акустической турбулентности <sup>63, 64</sup> имеется мощный пик на звуковой частоте и слабый хвост на нулевой частоте (акустическое течение;

рис. 7), который только и можно описать в короткокоррелированном приближении. В простейшем квадратичном приближении на примере акустической турбулентности можно показать<sup>86</sup>, что учет характера временного спектра течения приводит к новым физическим эффектам, хотя и не влияет на коэффициент турбулентной диффузии (который по-прежнему определяется нулевой точкой спектра) и не изменяет вывода о возможности самовозбуждения магнитного поля.

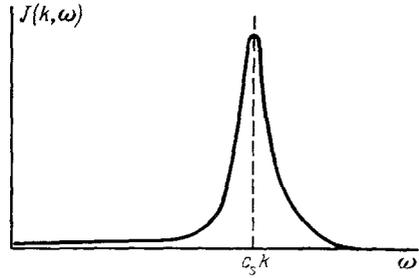


Рис. 7. Временной спектр акустической турбулентности.

Спектр имеет пик на звуковой частоте и отличен от нуля при  $\omega = 0$

е) О т р а н с ф о р м а ц и о н н ы х свойствах коэффициентов диффузии. Можно поставить вопрос о нахождении начального среднего магнитного поля по известному в настоящий момент полю. При знакоопределенных коэффициентах  $\alpha$  и  $\beta$  такая задача является некорректной, потому что эволюция поля сопровождается диссипацией и изменением гладкости решения. Аналогичная ситуация, как хорошо известно, имеет место уже для простейшего скалярного уравнения диффузии или теплопроводности

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n,$$

рассматриваемого в обратном ходе времени.

Я. Б. Зельдович<sup>85</sup> обращает внимание, что  $D$  является скаляром по отношению к преобразованиям трехмерного пространства, но изменяет знак при замене  $t$  на  $-t$ . В этой связи он развивает новый подход к нахождению коэффициента турбулентной диффузии. Для простого поля скорости, имеющего только одну фурье-компоненту, находится точное решение скалярной задачи диффузии. Выражение для коэффициента турбулентной диффузии содержит в качестве множителя коэффициент молекулярной диффузии  $D$ , что обеспечивает правильное поведение результата по отношению к изменению знака времени. В указанной работе в духе каскадно-ренормализационных идей рассматривается диффузия скаляра в поле скорости с широким спектром, предположительно описывающим турбулентность. Для изотропной турбулентности построено дифференциальное уравнение для коэффициента турбулентной диффузии. Решение его находится в виде

$$D_T = D \sqrt{\text{const} \cdot \frac{v^2 l^2}{D^2} + O(1)},$$

а не сразу в форме  $D_T = \tau \sqrt{v^2}$ , в которой потеряны необходимые трансформационные свойства по отношению к изменению знака времени.

В подобной же форме может быть записано и выражение для тензора средней спиральности:

$$\alpha_{ij} = i v_m e_{ijnl} \int \frac{k^2 k_j \Phi_{nl}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + v_m^2 k^4} d^3 k d\omega,$$

см. § 7.8 монографии<sup>23</sup>, где  $\Phi_{nl}$  — спектральный тензор поля скорости. Отметим, что когда  $\Phi_{nl}$  не обращается в нуль на нулевой частоте, в пределе малых  $v_m$  тензор  $\alpha_{ij}$  не зависит от  $v_m$ , поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + v_m^2 k^4} = \frac{\pi}{v_m k^2}.$$

Таким образом,  $\alpha$  является псевдоскаляром при преобразовании координат и изменяет знак при замене  $t \rightarrow -t$ .

## 6. ДИНАМО-ТЕОРЕМА

Среднее магнитное поле и его второй момент недостаточны для полного описания поведения и распределения поля в случайном потоке. В частности, с их помощью нельзя охарактеризовать такое важное явление, как перемежаемость.

В действительности, прямой путь изучения истинного (случайного) магнитного поля в случайном потоке с обновлением оказывается более простым. Причина заключается в том, что на больших временах эволюция случайного магнитного поля под действием уравнения индукции подчиняется центральной предельной теореме. Как известно, эта теорема гарантирует существование двух детерминированных величин — среднего и дисперсии. Первая величина в рассматриваемом случае оказывается скоростью роста, положительной в пределе малой магнитной диффузии, а вторая — ответственна за перемежаемость. Утверждение об экспоненциальном росте магнитного поля в трехмерном случайном потоке с обновлением и о перемежающейся структуре поля составляет содержание представляемой в настоящем разделе динамо-теоремы<sup>82</sup>.

а) Функция переноса магнитного поля в потоке с обновлением. Рассмотрим описанное в гл. 5 и 6 неограниченное случайное поле скорости, обновляющееся через конечное время  $\tau$ . При полной вмороженности ( $v_m = 0$ ) перенос магнитного поля вдоль лагранжевой траектории любой жидкой частицы на отрезке  $[(l-1)\tau, l\tau]$  полностью описывается матричной функцией  $G_l(t, \xi, \mathbf{x})$  (см. гл. 2), где  $\xi$  определяет данную траекторию. В силу несжимаемости каждая из матриц  $G_l$  является унимодулярной, т. е. имеет единичный определитель. Полная функция переноса в момент  $t = n\tau$  равна произведению

$$G_t = \prod_{l=1}^n G_l. \quad (6.1)$$

Таким образом, на больших временах ( $n \rightarrow \infty$ ) задача сводится к вычислению произведения большого числа независимых случайных матриц. Впервые такая алгебраическая задача решена Ферстенбергом<sup>83</sup>. К сожалению, математический аппарат, использованный в оригинальной работе, вряд ли доступен физике и даже математике — неалгебраисту. Поэтому мы попытались в контексте задачи о поведении вмороженного поля найти более наглядную и простую форму решения, воспользовавшись также развитием теории Ферстенберга, предпринятым в работе В. Н. Тутбалина<sup>84</sup>. При учете магнитной диффузии задача уже не сводится к алгебраической, надо вычислять произведения случайных операторов. Однако при малых  $v_m$  эту задачу можно решить, используя технику усреднения по случайным траекториям. Важно, что скорость роста поля и его моментов в пределе  $v_m \rightarrow 0$  совпадают со скоростями роста для случая полной вмороженности<sup>82</sup>.

Чтобы понять качественно результат действия большого числа независимых случайных матриц на данный вектор  $\mathbf{H}_0$ , представим себе двумерную сферу с радиусом, равным длине этого вектора. Под действием одной матрицы  $G_1$  с единичным определителем сфера превратится в эллипсоид того же объема. Пусть коэффициент растяжения вдоль оси  $x$  равен  $\lambda > 1$ . Тогда в силу сохранения площади вдоль оси  $y$  происходит сжатие с коэффициентом  $\lambda^{-1}$ . Длина вектора после преобразования становится равной  $(\lambda^2 H_{0x}^2 + \lambda^{-2} H_{0y}^2)^{1/2} = H_0 (\lambda^2 \cos^2 \varphi + \lambda^{-2} \sin^2 \varphi)^{1/2}$ , где  $\varphi$  — полярный угол. Она превышает длину  $H_0 = (H_{0x}^2 + H_{0y}^2)^{1/2}$  исходного вектора, когда  $\cos \varphi > (1 + \lambda^2)^{-1/2}$ . Откуда видно, что множество направлений  $\varphi$ , для которых  $\mathbf{H}_0$  растягивается, будет больше половины. Иными словами, произвольно направленный вектор будет растягиваться с вероятностью больше половины. Поэтому действие большого числа матриц  $G$  с независимыми направлениями растяжения и коэффициентами растяжения приведет к результирующему росту длины вектора.

Перейдем к строгому рассмотрению, из которого следует, что в случае общего положения рост будет экспоненциальным.

б) Показатели Ляпунова и случайный базис. Результат действия большого числа независимых случайных матриц  $G_i$  на данный ненулевой начальный вектор  $\mathbf{H}_0$  таков, что, если исключить некоторые вырожденные случаи, при больших по сравнению со временем обновления временах для каждой реализации поля скорости существует базис  $(e_1, e_2, e_3)$ , в котором магнитное поле изменяется экспоненциально с определенными показателями  $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$ , не зависящими, в отличие от базиса, от реализации поля скорости и связанными в силу несжимаемости соотношением

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0. \quad (6.2)$$

Уже из (6.2) ясно, что если  $\gamma_i$  не равны тождественно нулю, то по крайней мере старший показатель  $\gamma_1$  всегда положителен.

Определим величины  $\gamma_i$ , называемые в математике показателями Ляпунова, базис  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  и докажем их существование и положительность  $\gamma_1$  <sup>54</sup>.

Действие последовательных матриц  $G_1, G_2, \dots, G_n$  на вектор  $\mathbf{H}_0$  приводит на каждом шагу к изменению его величины и к его поворотам. Естественно выделить амплитуду и фазовый множитель получающихся векторов,  $R_n \equiv |\mathbf{H}_n|$ ,  $\kappa_n = \mathbf{H}_n / |\mathbf{H}_n|$ .

Последовательность случайных точек на сфере, образуемых единичными фазовыми векторами

$$\kappa_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{|\mathbf{H}_0|}, \quad \kappa_1 = \frac{G_1 \mathbf{H}_0}{|G_1 \mathbf{H}_0|} = \frac{G_1 \kappa_0}{|G_1 \kappa_0|}, \quad \dots, \quad \kappa_n = \frac{\mathbf{H}_n}{|\mathbf{H}_n|} = \frac{G_n \kappa_{n-1} \dots G_1 \mathbf{H}_0}{|G_n \kappa_{n-1}| \dots |G_1 \mathbf{H}_0|} \quad (6.3)$$

представляет собой цепь Маркова, поскольку очередной шаг  $\kappa_{n-1} \rightarrow \kappa_n$  связан лишь со значением  $\kappa_{n-1}$  и матрицей  $G_n$ , которая не зависит от предыдущих.

Взяв норму последнего вектора (6.3) и учитывая, что  $|\kappa_n| = 1$ , находим для амплитуды поля

$$R_n = |G_n G_{n-1} \dots G_1 \mathbf{H}_0| = |G_n \kappa_{n-1}| |G_{n-1} \kappa_{n-2}| \dots |G_1 \kappa_0| |\mathbf{H}_0|.$$

Таким образом, логарифм амплитуды при больших  $n$  является суммой большого числа независимых величин. Следовательно, в силу закона больших чисел существует предел

$$\frac{1}{n\tau} \ln \frac{R_n}{|\mathbf{H}_0|} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n\tau} \sum_{l=1}^n \ln |G_l \kappa_{l-1}| \equiv \gamma_1 \quad (6.4)$$

(старший показатель Ляпунова). Этот показатель определяет скорость роста замороженного магнитного поля, поэтому имеет принципиальное значение вопрос о его знаке. Из равенства (6.2), как уже отмечалось, очевидно, что если все показатели Ляпунова не равны тождественно нулю, то старший  $\gamma_1 > 0$ . Поскольку показатели  $\gamma_i$  определяются собственными числами  $\lambda_i$  матрицы  $G_i$ , то ясно, что необходимо хотя бы в отдельных точках пространства иметь  $|\lambda_1| > 1$  и потребовать, чтобы жидкая частица попадала в эти точки достаточно часто, т. е. нужна хорошая перемешиваемость течения. Формально требуется, чтобы распределение поля скорости не было сосредоточено на подмножестве матриц с  $|\lambda_i| = 1$  \*, т. е. имело бы хорошую (не дробную) плотность распределения вероятности на множестве унимодуляр-

\* Примером таких матриц являются матрицы поворота  $U$  или матрицы вида  $G_n^r = A U_n A^{-1}$ , где  $A$  — постоянная матрица. Для них

$$G_n G_{n-1} \dots G_1 = A U_n \dots U_2 U_1 A^{-1} = A \tilde{U} A^{-1}.$$

ных матриц. Обновление гарантирует далее, что частицы не будут «засиживаться» в точках с  $|\lambda_i| = 1$ . Важно подчеркнуть, что для доказательства положительности  $\gamma_1$  и, следовательно, экспоненциального роста функции переноса  $G_t$ , вообще говоря, не требуется трехмерности поля скорости. Однако условие бездивергентности магнитного поля исключает рост поля в двумерных течениях<sup>82</sup>. Ниже мы докажем положительность  $\gamma_1$  для простого случая постоянной плотности распределения матриц  $G_i$  на группе унимодулярных матриц (изотропное распределение). Доказательство положительности  $\gamma_1$  в общих предположениях о виде распределения поля скорости на интервале обновления см. в<sup>54, 82</sup>.

Предел (6.4) следует понимать как соотношение, выполняющееся с вероятностью единица, т. е. оно справедливо для подавляющего большинства но не для всех  $H$ . В самом деле, подействуем на  $\mathbf{H}$  обратным во времени преобразованием  $G_1^{-1}G_2^{-1} \dots G_n^{-1}$ , где  $G_n$  — матрица, обратная  $G_n$ . Получающийся вектор, по тем же соображениям, что и выше, изменяется как  $\exp(-|\gamma_3|t)$ , где  $\gamma_3$  — «старший показатель при обратном ходе времени», т. е. младший показатель,  $\gamma_3 < 0$ . Таким образом, существует направление

$$\mathbf{e}_3^{(n)} = \frac{G_1^{-1}G_2^{-1} \dots G_n^{-1}\mathbf{H}_0}{|G_1^{-1}G_2^{-1} \dots G_n^{-1}\mathbf{H}_0|} \quad (6.5)$$

вдоль которого поле убывает, как  $\exp(-|\gamma_3|t)$ . Из соотношения  $|G_{n+1}G_n \dots G_1 \mathbf{e}_3^{(n+1)}| \sim \exp(-|\gamma_3|t)$  вытекает, что вектор  $\mathbf{e}_3^{(n+1)}$ , так же как и  $\mathbf{e}_3^{(n)}$ , является убывающим, т. е. при переходе от  $n$  к  $n+1$  вектор  $\mathbf{e}_3^{(n)}$  изменяется слабо. Это означает, что существует предел  $\mathbf{e}_3^{(n)} \rightarrow \mathbf{e}_3$ ,  $n \rightarrow \infty$ , т. е. базисный вектор, соответствующий  $\gamma_3$ :  $G_t \mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}_3 \exp(\gamma_3 t)$ .

Для введения второго показателя Ляпунова и соответствующего вектора \*) рассмотрим действие произведения матриц  $G_n \dots G_1$  на плоскость, образованную парой единичных ортогональных векторов  $\boldsymbol{\kappa}_n$  и  $\boldsymbol{\theta}_n$ . Такое действие порождает марковскую цепь на трехмерном многообразии бивекторов, выделяемом соотношениями  $|\boldsymbol{\kappa}_n| = |\boldsymbol{\theta}_n| = 1$ ,  $(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\theta}_n) = 0$  (так называемое штифелево многообразие). Действительно, образуем векторы  $G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n$  и  $G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n$ , затем ортогонализуем и нормализуем их. В результате имеем

$$(\boldsymbol{\kappa}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_{n+1}) = \left( \frac{G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n}{|G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n|}, \frac{G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n - G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n \frac{(G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n, G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n)}{(G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n)^2}}{|G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n - G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n \frac{(G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n, G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n)}{(G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n)^2}|} \right).$$

Пусть теперь имеются два произвольных вектора  $\mathbf{H}_0$  и  $\tilde{\mathbf{H}}_0$ , растягиваемых произведением независимых случайных матриц  $G_t$ . Перейдем от  $\tilde{\mathbf{H}}_n$  к вектору

$$\mathbf{H}'_n = \tilde{\mathbf{H}}_n - \mathbf{H}_n \frac{(\mathbf{H}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n)}{(\mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n)},$$

ортогональному  $\mathbf{H}_n$ , и введем амплитудные и фазовые множители векторов  $\mathbf{H}_n$  и  $\mathbf{H}'_n$ :  $\boldsymbol{\kappa}_n = \mathbf{H}_n/|\mathbf{H}_n|$ ,  $R_n = |\mathbf{H}_n|$  и  $\boldsymbol{\theta}_n = \mathbf{H}'_n/|\mathbf{H}'_n|$ ,  $\rho_n = |\mathbf{H}'_n|$ . Площадь параллелограмма, натянутого на рассмотренную пару векторов, равна  $S_n = |\mathbf{H}_n \times \mathbf{H}'_n| = |\mathbf{H}_n \times \tilde{\mathbf{H}}_n|$ . Эта величина, как и  $R_n$ , мультипликативно зависит от марковской цепи  $(\boldsymbol{\kappa}_n, \boldsymbol{\theta}_n)$ . Действительно,

$$S_{n+1} = \rho_{n+1}R_{n+1} = |G_{n+1}\mathbf{H}_n \times G_{n+1}\tilde{\mathbf{H}}_n| = \rho_n R_n |G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n \times G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n| = S_n |G_{n+1}\boldsymbol{\kappa}_n \times G_{n+1}\boldsymbol{\theta}_n|.$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  существует предел  $n^{-1} \ln(\rho_n R_n)$  и предел

$$\frac{1}{n} \ln \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \tilde{\mathbf{H}}_n - \mathbf{H}_n \frac{(\mathbf{H}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n)}{(\mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n)} \right| \equiv \gamma_2, \quad (6.6)$$

\*) Если интересоваться только показателем  $\gamma_2$ , то для его определения достаточно равенства (6.2).

который мы и назовем вторым показателем Ляпунова. Покажем, что для изотропного распределения матриц  $G_n$  показатель  $\gamma_2$  строго меньше  $\gamma_1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \gamma_2 + \gamma_1 &= \frac{\ln S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \ln |G_{l+1} \mathbf{x}_l \times G_{l+1} \theta_l| = \\ &= \frac{1}{n} \sum \ln |G_{l+1} \mathbf{x}_l| + \frac{1}{n} \sum \ln |G_{l+1} \theta_l| + \frac{1}{n} \sum \ln \sin (\widehat{G \mathbf{x}_l G \theta_l}). \end{aligned}$$

В силу изотропии первые суммы одинаковы и дают  $2\gamma_1$ , а третья — равна среднему по распределению матриц  $G$ :  $\langle \ln \sin (\widehat{G \mathbf{x} G \theta}) \rangle$ . Хотя векторы  $\mathbf{x}$  и  $\theta$  ортогональны,  $G \mathbf{x}$  и  $G \theta$  с вероятностью единица ортогональными не являются, поскольку распределение матриц не вырождено. Поэтому  $\langle \ln \sin (\widehat{G \mathbf{x} G \theta}) \rangle < 0$  и, следовательно,  $\gamma_2 < \gamma_1$ . А отсюда в силу (6.2) вытекает строгая положительность старшего показателя  $\gamma_1$  и строгая отрицательность младшего показателя  $\gamma_3$ .

Знак  $\gamma_2$  может быть любым. Когда распределение матриц  $G_n$  обладает симметрией относительно замены  $G_t \rightarrow G_t^{-1}$ , т. е. течение симметрично относительно обращения времени,  $\gamma_1 = -\gamma_3$  и  $\gamma_2 = 0$ .

Для построения второго базисного вектора  $e_2$  следует рассмотреть действие обратных матриц  $G_n^{-1}$  на плоскость, содержащую вектор  $e_3$ . Таким образом находится плоскость максимального сжатия. В качестве  $e_2$  можно взять вектор, принадлежащий этой плоскости и ортогональный  $e_3$ .

Аналогично, путем рассмотрения действия произведения матриц на параллелепипед, образованный тремя векторами  $\mathbf{H}_0, \tilde{\mathbf{H}}_0$  и  $\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_0$ , можно ввести и третий показатель Ляпунова

$$\gamma_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_n| \quad (6.7)$$

— проекция  $\tilde{\tilde{\mathbf{H}}}_n$  на плоскость  $(\mathbf{H}_n, \tilde{\mathbf{H}}_n)$ , который мы ввели из рассмотрения действия обратных матриц на вектор.

Третий базисный вектор  $e_1$  строится как вектор, ортогональный  $e_2$  и  $e_3$ .  
в) Эволюция матрицы переноса вдоль случайной траектории. Существование показателей Ляпунова и базиса означает, что при эволюции вдоль случайной винеровской траектории матрица  $G_t$  асимптотически при  $t \rightarrow \infty$  принимает определенную форму, содержащую множители  $\exp(\gamma_i t)$ . Знание ее позволяет выразить показатели Ляпунова через элементы матрицы  $G_t$ , т. е. через характеристики поля скорости.

Для нахождения асимптотического поведения матрицы переноса воспользуемся разложением ее на более простые компоненты, а именно представим  $G_t$  в виде произведения ортогональной матрицы (матрицы поворота)  $U$  на верхнетреугольную  $K$ :

$$G_{ij}(t, \xi_t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = U_{il}(t, \xi_t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) K_{lj}(t, \xi_t, \mathbf{x}, \mathbf{w}). \quad (6.8)$$

Технически разложение строится следующим образом (см., например, <sup>84</sup>). Ортонормируем строки  $g_1, g_2, g_3$  матрицы  $G$ , начиная с верхней, и образуем из них новый базис  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3$ . Матрица  $U$  осуществляет переход от исходного базиса  $E_1, E_2, E_3$  к этому новому. Диагональные элементы матрицы  $K$  будут иметь следующий смысл:  $K_{33}$  — длина нижней строки  $g_3$ ,  $K_{22}$  — длина ортогональной к нижней строке компоненты средней строки  $g_2$  и  $K_{11}$  — длина ортогональной к  $g_1, g_2$  компоненты первой строки.

Выведем эволюционные уравнения вдоль винеровской траектории для матриц  $U$  и  $K$ . В момент  $t + \Delta t$  имеем

$$G_{ij}(t + \Delta t, \xi_{t+\Delta t}, x, w) = \left( \delta_{ie} - \Delta t \frac{\partial v_e(\Delta t, \xi_t)}{\partial x_i} \right) G_{ej}(t, \xi_t, x, w).$$

Подставляя сюда разложение (6.8), пользуясь тем, что произвольную матрицу можно представить в виде суммы антисимметричной и верхнетреугольной матриц

$$-U_{ik}^{-1} \frac{\partial v_e}{\partial x_k} U_{ej} = A_{ij} + B_{ij}$$

и устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , находим дифференциальные уравнения

$$\frac{dU}{dt} = UA, \quad \frac{dK}{dt} = BK. \quad (6.9)$$

Первое из них представляет собой замкнутое нелинейное уравнение относительно ортогональной матрицы, определяющей ориентацию матрицы  $G_t$ . После решения этого уравнения из второго уравнения (6.9) сразу находятся диагональные элементы верхнетреугольной матрицы:

$$K_{ii}(t) = K_{ii}(0) \exp \left( \int_0^t B_{ii}(s) ds \right) = K_{ii}(0) \exp \{ n\tau \gamma_i + \sqrt{n\tau} \zeta_i(n\tau) \}, \quad (6.10)$$

где

$$\gamma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} B_{ii}(s) ds = \langle B_{ii} \rangle, \quad i = 1, 2, 3;$$

по  $i$  нет суммирования, а

$$\zeta_i = (n\tau)^{-1/2} \int_0^{n\tau} (B_{ii} - \gamma_i) ds,$$

согласно центральной предельной теореме, имеет при  $n \rightarrow \infty$  нормальное распределение.

До сих пор мы рассматривали поведение замороженного поля. Для учета конечной магнитной диффузии надо (в силу независимости начального распределения магнитного поля и скорости) усреднить функцию  $G_t = G_n \dots G_1$  по всем случайным траекториям, приходящим к моменту  $t$  в рассматриваемую точку  $x$ . При выполнении естественного условия  $v^2\tau \gg v_m$  (см. (2.9)), эквивалентного  $R_m \gg 1$ , каждая функция  $G_l$  слабо отклоняется от соответствующей лагранжевой матрицы, описывающей эволюцию на одном такте обновления. Однако из-за необходимости соблюдения правильного порядка предельных переходов ( $n \rightarrow \infty$  и затем  $v_m \rightarrow 0$ ) необходимо доказать, что подмножество случайных траекторий, на которых скорость роста заметно отклоняется от  $\gamma_i$ , имеет малый статистический вес. Соответствующее доказательство дано в статье авторов<sup>82</sup>, откуда следует, что при  $v_m \rightarrow 0$   $\gamma_i(v_m) \rightarrow \gamma_i$ , т. е. обоснование лагранжева подхода для потоков с обновлением в пределе малой магнитной диффузии.

г) П е р е м е ж а е м о с т ь. При отсутствии магнитной диффузии показатели Ляпунова не случайны и в силу однородности одинаковы во всех пространственных точках. Однако поправки к ним  $t^{-1/2} \zeta_i(t)$  случайны, зависят от времени и траектории (хотя дисперсии  $\zeta_i$  не растут со временем). Это означает, что поле в жидкой частице растет неравномерно, отклонения скорости роста  $\sim t^{-1/2}$ . Рассматривая поле в данной точке, мы также обнаружим эту перемежаемость, поскольку в разные моменты в ней приходят разные траектории.

Переменяемость генерируемого магнитного поля следует также из поведения моментов поля. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \langle | \mathbf{H}_n |^p \rangle, \quad (6.11)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению матриц  $G_n$ . Очевидно,  $\gamma$  ( $= \gamma_1$ ) совпадает с производной  $df/dp$  в нуле, а  $f(p)/p \equiv \gamma^{(p)}$  определяет скорость роста  $p$ -го момента модуля поля. Функция (6.11) для случайных потоков с обновлением имеет вид, представленный на рис. 8<sup>54, 82</sup>:

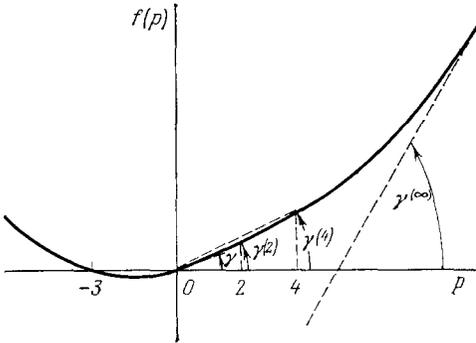


Рис. 8. Выпуклая вниз функция, производная которой в нуле равна скорости роста поля, а  $f(p)/p$  определяет скорость роста  $p$ -го момента модуля поля

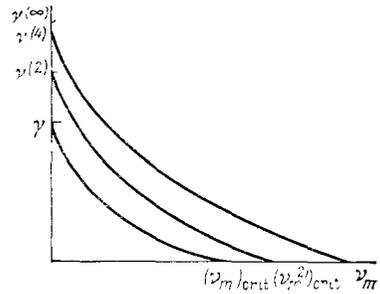


Рис. 9. Ожидаемая зависимость скоростей роста поля и его моментов при уменьшении магнитной диффузии

откуда видно, что скорости роста тем больше, чем выше номер момента

$$\gamma < \gamma^{(2)} < \gamma^{(4)} < \dots \quad (6.12)$$

Докажем, что эти неравенства сохраняются и при учете магнитной диффузии в пределе  $\nu_m \rightarrow 0$ .

Уравнения, описывающие эволюцию тензора одновременного  $p$ -момента поля  $m_p(t, x_1, \dots, x_p) \equiv \langle H_{i_1}(t, \mathbf{x}_1) H_{i_2}(t, \mathbf{x}_2) \dots H_{i_p}(t, \mathbf{x}_p) \rangle$ , получаются путем выражения поля в момент  $t = (n + 1) \tau$  через поле в момент  $n\tau$  по формуле (2.11):

$$m_p[(n + 1) \tau, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p] = \langle M_{\mathbf{x}} m_p[n\tau, \mathbf{x}_1 + \xi_{\tau}(\mathbf{x}_1, \nu_m), \dots, \mathbf{x}_p + \xi_{\tau}(\mathbf{x}_p, \nu_m)] \times G_n[\mathbf{x}_1 + \xi_{\tau}(\mathbf{x}_1, \nu_m)] \dots G_n[\mathbf{x}_p + \xi_{\tau}(\mathbf{x}_p, \nu_m)] \rangle, \quad (6.1)$$

где  $\xi_{\tau}(\mathbf{x}_i, \nu_m) \approx \xi_{\tau}(\mathbf{x}_i, 0) + (2\nu_m)^{1/2} w_{\tau}^{(i)}$  в силу условия  $v^2\tau \gg \nu_m$ , а  $w_{\tau}^{(i)}$  —  $p$  независимых экземпляров винеровского процесса. Для четных  $p$  это интегральное уравнение имеет симметрическое ядро, которое выражается через совместную плотность вероятности лагранжевых координат  $\xi_{\tau}(\mathbf{x}_i, 0)$

и матриц  $G_n(\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i)$ , а также через гауссовскую плотность  $\exp(-\sum_{i=1}^p y_i^2/4\nu_m) \times (2\text{лт}\nu_m)^{3p/2}$ . Благодаря трансляционной инвариантности течения ядро зависит только от разностей  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_1$ . При  $\nu_m \rightarrow 0$  за счет вырождения совместных плотностей в нем появляются  $\delta$ -образные особенности на плоскостях вида  $\mathbf{x}_{i_1} = \mathbf{x}_{i_2} = \dots = \mathbf{x}_{i_l}, i_l \leq p$  (из-за совпадения  $l$  конечных точек случайных траекторий). Наиболее сильная особенность получается при совпадении всех точек  $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_p$ . Ей отвечает «собственная функция»  $\prod_{i=2}^p \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1)$  и «собственное значение»  $\gamma^{(p)}$  (так называемая особая точка резольвенты).

Из сходимости ядер интегральных операторов при  $\nu_m \rightarrow 0$  следует сходимость и собственных значений  $\gamma_{\nu_m}^{(p)} \rightarrow \gamma^{(p)}$ .

Показатели  $\gamma^{(p)}$  растут (см. (6.12)), накапливаясь вблизи  $\gamma^{(\infty)}$ , конечного в силу ограниченности скорости. По-видимому, неравенства  $\gamma^{(l)}(v_m) < \gamma^{(p)}(v_m)$ ,  $l < p$ , справедливы при всех  $v_m < (v_m^{(p)})_{\text{crit}}$ . Отметим, что пороги возбуждения последовательных моментов  $(v_m)_{\text{crit}}$  уменьшаются с ростом номера момента (рис. 9).

Поясним, почему неравенства (6.12) означают перемежаемость в распределении  $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$ . Для плотности магнитной энергии при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $\ln \langle \mathbf{H}^2(t, 0) \rangle / t \rightarrow 2\gamma^{(2)}$ . Вероятность найти в точке  $\mathbf{x}$  сильное отклонение от этого фона, согласно неравенству Чебышева, равна

$$P \{ |\mathbf{H}|(t, \mathbf{x}) | > \exp \eta t \} \leq \exp [-2(\eta - \gamma^{(2)})t],$$

откуда видно, что доля точек в пространстве, где  $\eta > \gamma^{(2)}$  («пики»), экспоненциально мала и экспоненциально уменьшается с ростом  $t$ . Пусть при этом  $v_m$  таково, что  $\gamma^{(4)} > \gamma^{(2)}$  и  $\eta < \gamma^{(4)}$ . Тогда, очевидно, рост четвертого момента определяется именно этими редко расположенными «пиками». Энергия, заключенная в них, очень велика, однако из-за редкости пиков они не вносят заметного вклада в среднюю плотность энергии. При еще меньших  $v_m$  появляется целая иерархия пиков, причем более редкие и более высокие ответственные за рост более высоких моментов.

Мы ожидаем (см. рис. 9), что при каждом  $v_m \neq 0$  эта иерархия бесконечна.

д) З а м е ч а н и я о с л у ч а е п л о с к о г о д в и ж е н и я. Выше явно предполагалось, что движение трехмерно. Однако утверждение о положительности старшего показателя Ляпунова при  $v_m = 0$ , т. е. о росте магнитного поля в условиях замороженности, не зависит от размерности. В частности, оно справедливо и для плоского течения. На первый взгляд, это противоречит известной антидинамо-теореме Зельдовича<sup>3</sup>, которая допускает обобщение на случай, когда скорость зависит от трех координат<sup>17</sup> и верна даже при отказе от начального требования бездивергентности магнитного поля (замечание У. Фриша).

Парадокс разрешается тем, что теорема Зельдовича требует  $v_m \neq 0$ , а предельный переход  $\gamma(v_m) \rightarrow \gamma(0)$  при  $v_m \rightarrow 0$  возможен только в трехмерном случае. Качественно причина связана с хорошо известной из теории вероятностей возвратностью двумерных и невозвратностью трехмерных траекторий. Это приводит к тому, что при  $v_m = 0$  две близкие траектории на плоскости сливаются, а в трехмерии расходятся. Рассмотрим ситуацию подробнее.

Пусть  $\eta_t = \xi_t^{(x)} - \xi_t^{(y)}$  — разность двух траекторий (2.9), выходящих из точек  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  и построенных по независимым броуновским процессам  $w_t^{(1)}$  и  $w_t^{(2)}$ . Ограничимся для простоты  $\delta$ -коррелированным во времени полем скорости (5.10). Тогда для среднего  $u(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle M g(\eta_t) \rangle$  методом, указанным в гл. 5, получаем уравнение диффузионного типа с переменным коэффициентом диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [v_m + F(0) - F(r)] \Delta u, \quad u_{t=0} = g(r), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Поведение этого процесса в двумерном случае качественно различно при  $v_m = 0$  и  $v_m \neq 0$ . В трехмерии такого различия не возникает. Быстрее всего это различие можно заметить по виду инвариантной меры процесса  $\eta_t$ . Она находится из уравнения  $A^* \pi = 0$ , где  $A = [v_m + F(0) - F(r)] \Delta -$  производящий оператор диффузии  $\eta_t$ . Имеем  $\pi(r) = (v_m + F(0) - F(r))^{-1}$ . Инвариантная мера ограничена сверху и снизу при  $v_m > 0$ . Когда  $v_m = 0$ , то функция  $\pi(r) \sim r^{-2}$  при  $r \rightarrow 0$  интегрируема в трехмерном и неинтегрируема в двумерном случае. Неинтегрируемость  $\pi(r)$  по окрестности нуля в двумерии означает, что процесс  $\eta_t$  аномально долго находится в окрестности нуля, т. е. при  $v_m = 0$  две двумерные траектории  $\xi_t^{(x)}$  и  $\xi_t^{(y)}$  неограниченно сближаются при  $t \rightarrow \infty$ . С другой стороны, при  $v_m > 0$  эти траектории как в дву-

мерии, так и в трехмерии при  $t \rightarrow \infty$  с подавляющей вероятностью находятся друг от друга на расстоянии порядка  $t^{-1/2}$ .

Можно пояснить отличие двумерного случая от трехмерного иным, более простым образом. Найдем время выхода диффузионного процесса  $\eta_t$  из конечной области, сферического слоя  $\delta \leq r < 1$ . Величина  $T(\mathbf{x}) = M\tau(\mathbf{x})$ , где  $\tau(\mathbf{x})$  — время выхода из этой области, подчиняется уравнению  $AT(\mathbf{x}) = -1$  с условием  $T = 0$  на границе <sup>46</sup>. Поскольку  $F(0) - F(r) \approx c^{-1}r^2$ ,  $c = \text{const}$ , то мы имеем в двумерном случае

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{c}{r^2},$$

а в трехмерном

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{c}{r^2}$$

с одинаковым граничным условием  $T(\delta) = T(1) = 0$ . Решение этих уравнений элементарно:

в двумерном случае

$$\frac{1}{c} T_\delta(r) = \frac{1}{2} (\ln \delta - \ln r) \ln r \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty,$$

т. е. процесс бесконечно долго находится в окрестности нуля;

в трехмерном случае

$$\frac{1}{c} T_\delta(r) = \ln \delta \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)^{-1} - \ln r \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \ln \frac{1}{r} < \infty.$$

Наличие качественного скачка  $v_m = 0$ ,  $v_m \neq 0$  для двумерного движения приводит к тому, что ни инкременты моментных уравнений, ни показатель Ляпунова  $\gamma$  не являются непрерывными функциями в точке  $v_m = 0$ . Для второго момента это нетрудно установить непосредственно.

Для трехмерного движения все вероятностные характеристики одной, пары и т. д. лагранжевых траекторий непрерывно меняются при  $v_m \rightarrow 0$ .

## 7. СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Доказательство динамо-теоремы существенно основывалось на нестационарности (обновлении) случайного потока. Случай стационарного случайного трехмерного течения в применении к задаче динамо практически не исследован. Особенностью таких течений является наличие стационарных областей-ловушек, из которых жидкая частица может выбраться обычно лишь благодаря молекулярной диффузии <sup>78,79</sup>. С одной стороны, в трехмерных стохастических течениях имеется экспоненциальное разбегание близких частиц, т. е. эффект, дающий экспоненциальный рост магнитного поля. С другой стороны, наличие областей-ловушек, которые всюду плотно заполняются отдельными линиями тока, приводит к резкому уменьшению масштаба генерируемого поля и возрастанию роли магнитной диффузии. Конкуренция этих двух эффектов может при некоторых условиях, как уже отмечалось в гл. 4, дать динамо промежуточного типа.

В действительности, отмеченные особенности стохастических течений свойственны траекториям полей скорости, описываемых неслучайными гладкими функциями. Простой пример такого течения указан В. И. Арнольдом и численно исследован в <sup>80</sup>:

$$\mathbf{v} = (A \cos y + B \sin z, B \cos z + C \sin x, C \cos x + A \sin y). \quad (7.1)$$

Когда ни одна из постоянных  $A, B, C$  не обращается в нуль, например при  $A = B = C = 1$ , уравнения линий тока поля (7.1) не имеют интегралов

(т. е. поле скорости существенно трехмерно) и существуют конечные области, каждая из которых всюду плотно заполняется отдельной линией тока. Отметим, что  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{v}$ , т. е. это поле имеет максимальную спиральность. Однако это еще не достаточно для быстрого динамо.

Прежде чем обсуждать прямое решение задачи динамо в поле скорости (7.1), мы рассмотрим более упрощенную модификацию этого течения<sup>57</sup>, которая несмотря на формальную экзотичность, позволяет четко выявить основные особенности эволюции магнитного поля.

а) Роль сдвига и экспоненциального растяжения и жидких частиц. Пусть областью течения является трехмерное компактное многообразие, которое в декартовых координатах строится как произведение двумерного тора  $(x, y, z) \rightarrow (x+1, y, z), (x, y+1, z)$  на отрезок  $0 \leq z \leq 1$ , торцевые торы которого отождествляются по закону

$$(x, y, z) \rightarrow (2x + y, x + y, z + 1), \quad (7.2)$$

т. е. с некоторой подкруткой. Таким образом, рассматривается течение, периодичное по  $x, y$ , а при сдвиге по  $z$  в нем происходит преобразование (7.2) сохраняющее площадь и имеющее собственные числа

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,11, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,34, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Если вместо  $x, y$  ввести координаты  $p, q$ , направленные соответственно по собственным векторам, соответствующим  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$ , то в рассматриваемом многообразии можно определить риманову метрику, инвариантную относительно выписанных выше преобразований  $x, y, z$ :

$$ds^2 = e^{-2\mu z} dp^2 + e^{2\mu z} dq^2 + dz^2, \quad \mu = \ln \lambda_1 \approx 0,75. \quad (7.3)$$

В этом римановом пространстве течение имеет очень простой вид  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ , где  $v = \text{const}$ , т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ . Существенно, однако, что при движении по  $z$  в этом простом поле скорости каждая жидкая частица из-за неевклидовости метрики экспоненциально растягивается в  $q$ - и сжимается в  $p$ -направлении. Таким образом, сдвиг  $\mathbf{v}$  задан явно, а растяжения осуществляются метрическими свойствами пространства.

Растяжения, очевидно, не действуют на  $z$ -компоненту магнитного поля, поэтому она затухает. Уравнение для  $p$ -компоненты поля получается из уравнения для  $q$ -компоненты заменой  $\mu \rightarrow -\mu$ . Поэтому достаточно рассмотреть эволюцию  $H_q(p, q, z, t) \equiv H$  в римановой метрике (7.3):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) H = \mu v H + \mathbf{v}_m (\Delta - \mu^2) H. \quad (7.4)$$

Решение, естественно, периодично по  $x, y$ , или по  $p, q$ , причем каждая из гармоник, кроме нулевой, должна убывать с ростом  $|z|$ . Последнее требование вытекает из условия аналитичности  $H$  и свойства (7.2), согласно которому сдвиг по  $z$  эквивалентен повышению номеров гармоник.

Уравнение (7.4) имеет растущие периодические по  $z$  решения только для начального поля, не зависящего от  $x, y$ , т. е. соответствующего нулевой гармонике, неограниченной по  $z$ .

Однако с точки зрения задачи динамо более интересны решения, убывающие по  $|z|$ . На первый взгляд кажется, что всегда можно подобрать такое  $\mathbf{v}_m$  или такой номер гармоник, чтобы получить экспоненциальный рост благодаря члену  $\mu v H$ , описывающему воздействие на поле экспоненциального растяжения частиц. Однако сдвиг по  $z$  (член  $v \partial/\partial z$ ) эквивалентен увеличению номеров гармоник разложения по  $x, y$  при фиксированном  $z$ . Поэтому любая (кроме нулевой) гармоника с течением времени перемещается в область все больших волновых чисел, где становится существенной диссипация  $\mathbf{v}_m (\Delta - \mu^2) H$ .

Для наглядной иллюстрации (более строгое рассмотрение см. <sup>57</sup>) губительного действия постоянного сдвига перейдем от  $H$  к переменной  $T = H \exp(-\mu vt + \mu^2 v_m t)$  и заменим диссипационный член в (7.4) одномерным, т. е. рассмотрим уравнение типа теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right) T = v_m \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

причем потребуем, чтобы  $T(0) = T(1) = 1$ , что эквивалентно условию убывания по  $|z|$ . Решение этой задачи, скажем, путем разделения переменных тривиально. В результате

$$T(z, t) = \exp\left(-\frac{v^2}{4v_m} t - \pi^2 n^2 v_m t + \frac{v}{2v_m} z\right) \sin \pi n z, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, для переменной  $H \sim \exp(\gamma t)$  имеем

$$\gamma = \mu v - \frac{v^2}{4v_m} - \pi^2 n^2 v_m - \mu^2 v_m.$$

Функция  $\gamma(v_m)$  имеет характерную форму, представленную на рис. 5, б гл. 4. При  $v_m \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow -v^2/4v_m$ , максимальное значение достигается в точке  $v_m = v/2 \sqrt{\pi^2 + \mu^2}$  и равно  $\gamma_{\max} = [\mu - (\pi^2 + \mu^2)^{1/2}] v$ , т. е. динамо здесь невозможно. Более детальный анализ задачи (7.4) показывает, что в силу экспоненциального уменьшения волновых чисел,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \exp(\mu vt)$ , наибольший гармоник магнитного поля затухает очень резко, как  $\exp(-v_m k^2(t)t)$ , т. е. как экспонента в экспоненте. Результирующее экспоненциальное затухание возникает из-за гармоник, имеющих близкие к нулю волновые числа. Это похоже на ситуацию в задаче о линейном поле скорости (см. гл. 3), только там ( $v_i = c_{ih} x_h$ ) сдвиг был не постоянным, а стремился к нулю при  $x \rightarrow 0$  и к бесконечности при  $x \rightarrow \infty$ .

б) Промежуточное динамо в периодическом потоке. Численное интегрирование уравнения индукции в поле скорости (9.1) с  $A = B = C = 1$  было выполнено в работе <sup>37</sup>. Вычислялось собственное число оператора  $(v\nabla) \mathbf{H} - (\mathbf{H}\nabla) \mathbf{v} + v_m \Delta \mathbf{H}$  с наибольшей вещественной частью. Если отвлечься пока от нулевого собственного значения <sup>81</sup>, то критическое значение магнитного числа Рейнольдса, при котором  $\text{Re } \gamma$  становится положительным, составляет приблизительно  $(\text{Re}_m)_{\text{crit}} \approx 27$ . Мы рассматриваем в данном случае именно  $\text{Re}_m = lv/v_m$ , а не  $v_m^{-1}$  из-за того, что поле скорости (7.1) обладает специальной симметрией, делающей характерный масштаб равным не периоду решетки  $2\pi$ , а в три раза меньшим. Кроме того, заметим, что  $v = (3)^{1/2}$ . Максимум скорости роста достигается при  $\text{Re}_m$  порядка 40, а при  $\text{Re}_m \sim 60$   $\text{Re } \gamma$  вновь становится отрицательной. Отметим, что  $(\text{Re } \gamma)_{\max}$  получилось очень малым, порядка  $10^{-2}$ . Кроме того,  $\text{Im } \gamma$  примерно на два порядка превышает  $\text{Re } \gamma$ , т. е. решение совершает очень быстрые временные осцилляции.

Поучительно сравнить этот результат с поведением скорости роста в модельном примере предыдущего параграфа, где  $\gamma$  (см. (7.5)) оказалось всегда отрицательным. Это связано с действительностью показателя  $\mu$ , характеризующего растяжение потока. Для поля скорости (7.1) соответствующая величина комплексна. Из (7.5) нетрудно убедиться, взяв комплексное  $\mu$ , что  $\text{Re } \gamma$  может иметь положительный максимум и при этом обязательно будет велика  $\text{Im } \gamma$ .

Простые размерностные оценки показывают, что и для поля (7.1) нужно ожидать того же поведения  $\gamma(v_m)$  при  $v_m \rightarrow 0$ , что и в (7.5). Действительно, на первом этапе эволюции гладкого начального поля оно усиливается из-за экспоненциального разбегания жидких частиц и одновременно измельчается его масштаб. Это измельчение масштаба при наличии магнитной диффузии не может продолжаться бесконечно и должно быть ей остановлено. Поэтому для собственной функции с наибольшим собственным значением, которая

описывает поведение поля на больших временах, вклад члена  $v_m \Delta H$  должен быть одним из основных. Однако легко видеть, что он может конкурировать со сносным членом  $(v \nabla) \mathbf{H}$  только если характерный масштаб поля порядка  $v_m$  (а не  $v_m^{1/2}$ , как обычно) и если  $\gamma \sim v_m^{-1}$ . Так как в этом случае генераторный член оказывается малым  $((\mathbf{H} \nabla) v / v_m \Delta H \sim v_m)$ , то он выпадает из уравнения индукции и  $\gamma$  оказывается отрицательным.

В гл. 4 (рис. 6, б) была высказана гипотеза о том, что такое поведение инкремента для отдельной моды может сочетаться с режимом смены мод, так что, несмотря на убывание  $\gamma$  для отдельной моды асимптотически по  $v_m \rightarrow 0$ , величины  $(\text{Re } \gamma)_{\text{max}}$  для разных типов мод приближаются к скорости роста, не зависящей от  $v_m$  и характерной для быстрого динамо. Приведем некоторые соображения в оправдание этой гипотезы.

Как показано в модельном примере п. а),  $\text{Re } \gamma$  становится отрицательным  $(-v^2/4v_m)$  из-за наличия сдвигового члена. В реальном течении (7.4) этот член не может обратиться в нуль при  $A, B, C \neq 0$  из-за отсутствия интегралов поля скорости. Однако естественно полагать, что каждая следующая мода с меньшим характерным масштабом уменьшает вклад этого члена, так что  $|(v \nabla) \mathbf{H}| \sim \delta_n v k H$ , где  $\delta_n$  — последовательно уменьшающиеся числа. В приведенном выше модельном примере  $\delta_n \equiv 1$ . Тогда вместо (7.5) имеем

$$\gamma_n = \mu v - \delta_n \frac{v^2}{4v_m} - (\pi^2 n^2 + \mu^2) v_m.$$

Учитывая также комплексность показателя растяжения поля скорости  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ , находим, что максимум скорости роста  $n$ -й моды достигается при  $\text{Re } \mu = 2a\delta_n^{-1}$ ,  $a \equiv \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \pi^2 n^2}$ . При этом  $(\text{Re } \gamma)_{\text{max}} = \mu_1 v - \delta_n v a \rightarrow \mu_1 v$ , а  $(\text{Im } \gamma)_{\text{max}} = -\mu_2 v (\delta_n \mu_1 a^{-1} - 1)$  велико при малых  $n$  и стремится к  $\mu_2 v$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем еще раз основные результаты, представленные в настоящей работе.

Магнитное поле, вложенное в случайный статистически однородный поток с конечным временем корреляции, экспоненциально растет со временем в пределе больших магнитных чисел Рейнольдса. Распределение генерируемого поля перемежаемо, т. е. неоднородно во времени и пространстве. Это проявляется в том, что более высокие моменты поля имеют более высокие скорости роста. В частности, доля объема, в котором заключена почти вся (скажем, 90 %) генерируемая энергия, экспоненциально убывает во времени.

Результаты получены не путем прямого решения уравнения индукции в заданном поле скорости, а применением современных методов эргодической теории исследования асимптотического поведения произведения случайных операторов. Отметим, что аналогичные методы были успешно использованы в квантовой теории неупорядоченных структур (теория Андерсона и Мотта). Подобные эффекты можно ожидать в широком классе задач, в которых используются уравнения со случайными операторами (задачи теплопроводности, гравитационной дифференциации вещества и др.).

Благодарим Я. Б. Зельдовича за обсуждение работы и полезные критические замечания.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша  
АН СССР

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Larmor J.— Rept. Brit. Assoc. Sci., 1919, p. 159.
2. Bullard E. C., Gellman H.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1955, v. 51, p. 744.
3. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 154.
4. Cowling T. G.— Mon. Not. RAS, 1934, v. 94, p. 39.
5. Herzenberg A.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1958, v. 250, p. 543.
6. Lortz D.— Plasma Phys., 1968, v. 110, p. 967.
7. Пономаренко Ю. Б.— ПМТФ, 1973, т. 6, с. 47.
8. Roberts P. H.— In: Mathematical Problems in the Geophysical Sciences/Ed. W. H. Reid.— Providence, Rhode Island, 1971, v. 14, p. 129.
9. Кропачев Э. П. Роторные механизмы динамо и геомагнитное поле.— М.: ИЗМИРАН, 1983.
10. Тверской Б. А.— Геомагн. и аэроном., 1965, т. 5, с. 11.
11. Гайлитис А. К., Фрайберг Я. Г.— Магн. гидродин., 1976, с. 3.
12. Брагинский С. И.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1084, 2178.
13. Soward A. M.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1972, v. 272, p. 431.
14. Бродский Ю. А.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn., 1983, v. 22, p. 281.
15. Alfvén H.— Tellus, 1950, v. 2, p. 74.
16. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б.— УФН, 1972, т. 106, с. 431.
17. Зельдович Я. Б., Рuzмайкин А. А.— ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 980.
18. Арнольд В. И., Коркина Е. И.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., механ., 1983, № 3, с. 43.
19. Roberts G. O.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1970, v. 266, p. 535.
20. Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic Fields in Astrophysics.— Gordon and Breach, 1984.
21. Васкус Г. Е.— Ann. Phys., 1958, v. 4, p. 372.
22. Purker E. N.— Astrophys. J., 1955, v. 121, p. 491.
23. Моффат К. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.— М.: Мир, 1980.
24. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитогидродинамика средних полей и теория динамо.— М.: Мир, 1984.
25. Казанцев А. П.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 1806.
26. Kraichnan R. H.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1677.
27. Вайнштейн С. И.— ЖЭТФ, 1980, т. 79, с. 2175.
28. Вайнштейн С. И. Магнитные поля в космосе.— М.: Наука, 1983.
29. Batchelor G. K.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, v. 201, p. 405.
30. Pouquet A.— J. Fluid Mech., 1978, v. 88, p. 1.
31. Orszag S. A., Tang C. M.— Ibidem, 1979, v. 90, p. 129.
32. Meneguzzi M., Frisch U., Pouquet A.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 1060.
33. Паркер Е. Космические магнитные поля.— М.: Мир, 1982.
34. Иванова Т. С., Рuzмайкин А. А. Трехмерная модель генерации средних магнитных полей Солнца: Препринт ИПМ АН СССР.— Москва, 1983.
35. Leorat J., Frisch U., Pouquet A.— J. Fluid Mech., 1981, v. 104, p. 419.
36. Новиков В. Г., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 909.
37. Galloway D. J., Proctor M. R. E.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dynam., 1984, v. 104, p. 419.
38. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965.
39. Dolginov A. Z.— Astron. and Astrophys., 1977, v. 54, p. 17.
40. Mestel L., Moss D. L.— Mon. Not., RAS, 1983, v. 204, p. 557.
41. Урпин В. А., Яковлев Д. Г.— Астрон. ж., 1980, т. 57, с. 738.
42. Blanford R. D., Arppegate J. H., Hernquist L.— Mon. Not. RAS, 1983, v. 204, p. 1025.
43. Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Лебо И. Г., Розанов В. Б.— ЖЭТФ, 1978, т. 54, с. 516.
44. Drobyshevski E. M., Kolesnikova E. N., Yuferev V. S.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn., 1983, v. 23, p. 103.
45. Гантмахер Ф. Теория матриц.— М.: Наука, 1967, гл. 15, § 6.
46. Маккин Х. П. Стохастические интегралы.— М.: Мир, 1972.
47. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика.— М.: Наука, 1967, гл. 15.
48. Townsend A. A.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1951, v. 208, p. 534.
49. Batchelor G. K.— J. Fluid Mech., 1959, v. 5, p. 113.
50. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1967.
51. Clarke A. Jr.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1299.
52. Moffatt H. K., Saffman P. G.— Ibidem, p. 155.
53. Knobloch E.— Astrophys. J., 1978, v. 225, p. 1050.
54. Zeldovich Ya. B., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.— J. Fluid Mech., 1984.

55. Pearson E. A.— Ibidem, 1959, v. 5, p. 274.
56. Зельдович Я. Б.— УФН, 1973, т. 110, с. 139.
57. Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 2050.
58. Шукуров А. М., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— Магн. гидродин., 1983, № 3, с. 53.
59. Вайнштейн С. И.— Ibidem, 1981, № 3, с. 3.
60. Бродский Ю. А.— Геомагн. и аэроном., 1981, т. 3, с. 531.
61. Ruderman M. S., Ruzmaikin A. A.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn., 1984, v. 28, p. 77.
62. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1957, с. 131.
63. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.— ДАН СССР, 1970, т. 192, с. 297.
64. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— Ibidem, т. 208, с. 794.
65. Rädler K. H.— Astron. Nachr., 1980, Bd. 301, S. 101.
66. Молчанов С. А., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— Магн. гидродин., 1983, № 4, с. 67.
67. Sokoloff D. D., Shukurov A. M., Ruzmaikin A. A.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn., 1983, v. 25, p. 293.
68. Roberts P. H.— Phys. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1972, v. 272, p. 663.
69. Kleegorin N. I., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.— Astrophys. and Space Sci., 1983, v. 95, p. 131.
70. Kleegorin N. I., Ruzmaikin A. A.— Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn., 1981, v. 17, p. 281.
71. Stix M.— In: Basic Mechanisms on Solar Activity. Proc. of IAU Symposium No. 71/Ed. V. Bumba, J. Kleczek.— Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1976.
72. Иванова Т. С., Рuzмайкин А. А.— Астрон. ж., 1977, т. 54, с. 846.
73. Вайнштейн С. И.— ДАН СССР, 1970, т. 195, с. 793.
74. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
75. Dittrich P., Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.— Astron. Nachr., 1984, Bd. 305, Hf. 2.
76. Schüssler M.— In: Solar and Stellar Magnetic Field. The Origin and Coronal Effects: Proc. of IAU Symposium No. 102/Ed. J. O. Stenflo.— Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1983.
77. Kraichnan R., Nagarajan S.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, p. 859.
78. Дыхне А. М.— В кн.: Труды 2-й международной рабочей группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике.— Киев: Наукова думка, 1984.
79. Козлов С. М., Молчанов С. А.— ДАН СССР, 1984, т. 274.
80. Непом М.— С. R. Ac. Sci., 1966, t. 262, p. 312.
81. Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— ДАН СССР, 1983, т. 266, с. 1357.
82. Molchanov S. A., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.— Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1984, v. 30, p. 241.
83. Furstenberg H.— Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 198, p. 377.
84. Тутубалин В. Н. Теория вероят. и ее прил., 1972, т. 17, с. 266.
85. Зельдович Я. Б.— ДАН СССР, 1982, т. 266, с. 821.
86. Казанцев А. П., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.— ЖЭТФ, 1985, т. 88, с. 487.