УДК 519.766

КРИТЕРИЙ ПОДСТАНОВОЧНОСТИ ПАЛИНДРОМОВ ШТУРМА И ОДНОМЕРНАЯ ФАКТОР-ДИНАМИКА

И. А. Решетников,[1]
А. Я. Канель-Белов[2]

В статье приводятся критерий подстановочности симметричных, бесконечных в обе стороны слов Штурма и его доказательство, а также теорема о подстановочности фактор-динамики поворотов окружности.
Данная работа была поддержана Российским научным фондом, грант № 17-11-01377.

Ключевые слова: слова Штурма, подстановочные слова, механические слова, динамические системы, поворот окружности, индукция Рози, символическая динамика, фактор-динамика.

The article provides a criterion for the substitution of symmetric Sturm words infinite on both sides and its proof, and a theorem on the substitution of the factor dynamics of circle rotations. This work was carried out with the help of the Russian Science Foundation Grant N 17-11-01377.

Key words: Sturm's words, substitutive words, mechanical words, dynamical systems, circle rotation, Rausy induction, symbolic dynamics, factor dynamics.

1. Введение.

Двусторонне-бесконечное слово w — это отображение $\mathbb{Z} \to A$, где A — алфавит слова w. Будем обозначать $w(n)$ через w_n.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U), где M — окружность, U — дуга угловой меры α, (α иррациональное), R_α — функция эволюции, поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей), x_0 — начальная точка, начало дуги α. Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0. Такие слова называются механическими.

Двусторонне-бесконечное слово w называется *палиндромом*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $w_n = w_{-n}$ (палиндром, симметричный относительно буквы) или $\forall n \in \mathbb{Z}: \ w_n = w_{1-n}$ (палиндром, симметричный относительно середины слова).

Правосторонне-бесконечное слово w над алфавитом A называется *чисто подстановочным*, если оно представляется в виде $w = \varphi^\infty(a)$, где $a \in A$ — буква, а φ — подстановка, такая, что $\varphi(a) = aU$, где $U \in A^*$ непустое.

Слово w называется подстановочным, если получается из чисто подстановочного слова w' подстановкой h, примененной к слову w': $w = h(w')$. Тогда $\varphi(\varphi(a)) = aU\varphi(U)$, $\varphi(\varphi(\varphi(a))) = aU\varphi((U\varphi(U))$ и т.д. Предельным переходом получаем $w = \varphi^\infty(a)$.

Понятия *подстановочности и чистой подстановочности слов, бесконечных в обе стороны*, вводятся аналогично с той лишь разницей, что для двусторонне-бесконечного подстановочного слова подстановка должна обладать свойством $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$. Тогда двусторонне-бесконечное слово w является

[1] *Решетников Иван Андреевич* — асп. каф. дискретной математики Физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ(ГУ),
Reshetnikov Ivan Andreevich — Postgraduate, chair of Discrete Mathematics, Phystech School of Applied Mathematics and Informatics, Moscow Institute of Physics and Technology, e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu.

[2] *Канель-Белов Алексей Яковлевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. логики МГУ, проф. МФТИ (ГУ),
Kanel-Belov Aleksei Yakovlevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, e-mail: kanelster@gmail.com.

конкатенацией левосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции от $-\infty$ до 0 включительно)и правосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции большие нуля) и представимо в виде $w = \varphi^\infty(a|b)$.

Интерес предствляет вопрос, будет ли фактор-динамика подстановочной системы подстановочна. Мы решаем этот вопрос для размерности 1.

Мотивировки задач и подробности — см. [1-3].

2. Индукция Рози.

Метод индукции Рози [4] позволяет перейти от изучения некоторых механических слов к изучению цепных дробей. Его можно сформулировать следующим образом.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U), где M — окружность, U — дуга угловой меры α (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей), или функция эволюции, x_0 — начальная точка — начало дуги α. Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0.

Требование иррациональности числа α продиктовано периодичностью сдвигов на рациональный угол, тривиальный случай мы не разбираем.

Метод индукции Рози состоит в следующем. Мы преобразуем символическую динамику (M, R_α, x_0, U) в символическую динамику $(\tilde{M}, \tilde{R_\alpha}, \tilde{x_0}, \tilde{U})$ по следующим правилам.

1. Если $\alpha < \dfrac{1}{2}$, то в слове w после a всегда следует b. Поэтому слово w получается из слова $\tilde{w}$ заменой $a \to ab; b \to b$. Возьмем $\tilde{M}$ — окружность длины $1-\alpha$. Более наглядно, мы вырезаем из окружности M дугу длины α (следующую за выделенной дугой U). Тогда слово $\tilde{w}$ будет порождаться символической динамикой $(\tilde{M}, \tilde{R_\alpha} = R_\alpha, \tilde{x_0} = x_0, U = \tilde{U})$.

2. Если же $\alpha > \dfrac{1}{2}$, то заменим a на b и наоборот. Для этого следует положить $\tilde{U} = M \backslash U$.

Можно заметить, что описанный алгоритм аналогичен алгоритму разложения α в цепную дробь. Таким образом, если α — квадратичная иррациональность (ее цепная дробь периодична), то в какой-то момент мы получим символическую динамику, эквивалентную уже встречавшейся, а значит, можем записать подстановку, с помощью которой можно получить слово w. Обозначим через φ композицию подстановок, образующих период, а через ψ комозицию подстановок, образующих предпериод. Слово w представимо в виде $w = \psi \circ \varphi^\infty(a)$, т. е. подстановочно. Если же предпериод отсутствует, то слово w чисто подстановочное.

Если же α — не квадратичная иррациональность, то процесс не зациклится, но в любом случае можно будет изучать свойства цепной дроби α и соотносить их со свойствами слова w.

3. Критерий подстановочности палиндромных слов Штурма.

Есть всего три двусторонне-бесконечных палиндрома, являющиеся механическими словами параметра α. Это слова, отвечающие серединам дуг, и слово, получающееся из точки, которая при первом повороте переходит в точку, симметричную ей относительно оси симметрии динамической системы. Палиндромы, получающиеся из середин дуг, симметричны относительно своей буквы, а третий палиндром симметричен относительно междубуквия.

3.1. Аналог индукции Рози для палиндромов.

Докажем следующий критерий подстановочности палиндромов Штурма. Полагаем алфавит $A = \{0, 1\}$.

Критерий подстановочности палиндромов Штурма. *Символическая динамика (M, R_α, x_m, U), где x_m — середина дуги U длиной α на окружности M длиной 1 порождает подстановочный двусторонне-бесконечный палиндром p тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность.*

Так как наше преобразование окружности обратимо, то можно говорить и о двусторонне-бесконечных словах, порождаемых символической динамикой, в частности о словах-палиндромах. Доказательство будет основано на сходстве некоторого алгоритма с индукцией Рози.

Доказательство. Необходимость: если слово p является подстановочным, то α — квадратичная иррациональность. Пусть подстановка φ порождает слово p. Пусть при действии порождающей подстановки φ 0 переходит в слово с a нулями и b единицами, а 1 переходит в слово с c нулями и d единицами. Тогда, так как p — неподвижная точка подстановки φ, а α — доля числа единиц, получаем квадратичное относительно α уравнение

$$\alpha = \frac{b(1-\alpha)+d\alpha}{(a+b)(1-\alpha)+(c+d)\alpha},$$

значит, α — квадратичная иррациональность.

Достаточность: если α — квадратичная иррациональность, то — p подстановочно. Пусть есть бесконечное слово Штурма p — палиндром над алфавитом $\{0,1\}$. Пусть в нем доля единиц равна α. Если нулей меньше, чем единиц, то сделаем подстановку $E: 0 \leftrightarrow 1$. Остается расписать действия алгоритма при $\alpha < \frac{1}{2}$. Так как p является словом Штурма и $\alpha < \frac{1}{2}$, то в нем не могут встретиться две единицы подряд. Возможно несколько случаев.

1. Слово p симметрично относительно 1. Будем относить это 1 к левой половине слова p. Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то перед каждой единицей идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $G: 1 \to 01; 0 \to 0$ из некоторого слова p', причем подстановка подобрана так, что левая и правая части слова p получаются из левой и правой частей слова p'. Так как количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, а больше ничего не произошло, то слово p' также является палиндромом, симметричным относительно 1.

2. Слово p симметрично относительно 0. Будем относить 0 к левой половине слова p. Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то после каждой единицы идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $\tilde{G}: 1 \to 10; 0 \to 0$ из некоторого слова p'. Левая и правая части слова p получаются соответственно из левой и правой частей слова p'. Количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, поэтому слово p' также является палиндромом, но на этот раз симметричным относительно междубуквия.

3. Слово p симметрично относительно междубуквия. Тогда буквы w_0 и w_1 должны быть нулями; слово p получается подстановкой G из некоторого слова p', при этом слово p' симметрично относительно нуля.

В нашем случае α — квадратичная иррациональность. При действии приведенного алгоритма α претерпевает такие же изменения, как и в индукции Рози, а значит, так как α — квадратичная иррациональность, то доля единиц α начиная с некоторого момента будет изменяться периодически. Для каждого α возможны лишь три варианта симметричности, три различных палиндрома. Поэтому возможно лишь конечное число пар (α, j), где j — номер варианта симметричности. Для каждой пары однозначно определен переход согласно алгоритму к некоторой другой паре. Поэтому процесс и в общем случае также цикличен. Из цикличности процесса следует, что палиндром p подстановочен, как и в случае с обычной индукцией Рози. Критерий доказан.

4. Чистая подстановочность двусторонне-бесконечного палиндрома Фибоначчи–Штурма.

Если мы предъявим подстановку φ, оставляющую на месте слово w, такую, что $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$ для каких-то непустых слов U и W, то двусторонне-бесконечное слово w будет являться чисто подстановочным.

Утверждение 1. *Если подстановка $\varphi:\ 0 \to 00101, 1 \to 001$ оставляет на месте палиндром w и обладает свойствами $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$, то двусторонне-бесконечный палиндром w, симметричный относительно 1 для $\alpha = \phi$ (здесь ϕ — золотое сечение) получается при при помощи этой подстановкой, т.е. $w = \varphi^\infty(1|0)$.*

Доказательство. Данная подстановка φ получается композицией двух подстановок: $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$, где $\psi_1:\ 0 \to 01, 1 \to 1$ и $\psi_2:\ 0 \to 001, 1 \to 01$, каждая из которых сохраняет отношение количества нулей и единиц в слове, при этом отношение нулей и единиц такое же, как в слове Фибоначчи. Обе эти подстановки сохраняют свойство палиндромности. Первая подстановка увеличивает количество нулей в каждой группе нулей на 1, а значит, сохраняет палиндромность. Вторая порождает группы нулей, симметричные относительно точки симметрии слова. Слово ψ_1, симметричное относительно 1, переводит в слово, симметричное относительно междубуквия, а слово ψ_2, симметричное относительно междубуквия, переводит в слово, симметричное относительно 1. Так как такое сбалансированное слово только одно для данного отношения количеств нулей и единиц, то φ, переводящая слово, симметричное относительно 1, в слово, симметричное относительно 1 оставляет слово w без изменений, при этом оставляя неизменным отношение количеств 0 и 1. Утверждение доказано.

4.1. Фактор-динамика прыжков по окружности.

Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U). Фактор-динамика получается отождествлением точек, различающихся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, а $m \in \mathbb{N}$. Такая обобщенная точка будет правильным n-угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо

$$k = \left[\frac{\alpha}{1/n}\right] = [n\alpha],$$

либо на 1 больше для каждой обобщенной точки. Будем писать a, если их $k+1$, и b иначе. Обозначим эту фактор-динамику через $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$.

Теорема. *Если слово w, порожденное символической динамикой (M, R_α, x_0, U), подстановочное, то и слово w', порожденное символической фактор-динамикой $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$, тоже подстановочное.*

Доказательство. Заметим, что множество, получающееся факторизацией окружности по данному отношению эквивалентности, изоморфно окружности ω длины $\frac{1}{n}$. При этом точки, при попадании на которые мы пишем a (множество U'), образуют дугу α' длины

$$\alpha' = \alpha - \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha - \frac{k}{n}.$$

Поворот на угол α на окружности M отвечает повороту на угол $n\alpha$ на окружности ω. Увеличив длину окружности ω и длину дуги α' в n раз (сделав гомотетию), получим соответственно символическую динамику $(M, R_{n\alpha}, x_0, U')$. Угол $n\alpha$ отличается от угла α' несколькими оборотами вокруг окружности, поэтому поворот на угол $n\alpha$ совпадает с поворотом на угол α'. Таким образом, мы получили стандартную символическую динамику поворотов окружности единичной длины на угол α'. Благодаря методу индукции Рози мы знаем, что слово является подстановочным тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность. Если слово w подстановочное, то α — квадратичная иррациональность, а значит, и α' — квадратичная иррациональность, поэтому слово w' также будет подстановочным. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belov A.Ya., Kondakov G.V., Mitrofanov I.* “Inverse problems of symbolic dynamics” // Algebraic methods in dynamical systems, Dedicated to Michael Singer on his 60-th birthday. Bedlewo, Poland, May 16–22, 2010, Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics , Banach Center Publ., 94, 2011, 43–60;
2. *Mitrofanov Ivan* On uniform recurrence of HD0l systems // arXiv:1111.1999
3. *Мучник Ан. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л.* “Последовательности, близкие к периодическим” // Успехи матем. наук, 2009.64, №5 (389) 21–96.
4. *Rauzy G.* Échanges d'intervalles et transformations induites // Acta Arith. 1979.34, 315-328.