

ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Зобовой Александры Александровны
на тему: «Динамика систем твердых тел с контактным
взаимодействием»
по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика»

Диссертация А.А. Зобовой посвящена фундаментальным проблемам механики систем твердых тел при наличии фрикционного контакта с внешними поверхностями. Такие системы моделируют очень широкий класс механизмов, используемых в технике. Прежде всего, это локомоционные системы, включая транспортные средства и мобильные роботы. Высокие требования к точности реализации программных движений локомоционных систем требуют уточнения математических моделей, на основе которых проводится теоретическое исследование и компьютерное моделирование таких систем. Для этого нужно с большей тщательностью, чем это делалось до сих пор, изучить влияние на динамику всей системы условий ее взаимодействия с контактной поверхностью. Такие условия характеризуются, прежде всего, физической природой трения в точках контакта, а также геометрическими и инерционными параметрами контактирующих тел. Одним из ключевых вопросов здесь представляется создание адекватных моделей контактного взаимодействия, которые позволяют исследовать динамику систем твердых тел средствами теоретической механики, не прибегая к уравнениям в частных производных. Сложность этой проблемы состоит, в частности, в том, что детальное исследование контактного взаимодействия тел требует учета их деформируемости и является предметом механики деформируемых тел, которая использует аппарат уравнений в частных производных. Поэтому нужно строить приближенные (асимптотические) модели исходя из моделей контакта тел с учетом их деформации, устремляя затем площадь пятна контакта к нулю. В диссертации

А.А. Зобовой предложен ряд новых моделей взаимодействия твердых тел с внешней поверхностью. Данные модели позволяют повысить точность описания динамики систем твердых тел как в количественном, так и в качественном аспектах. С использованием этих моделей исследован ряд классических проблем динамики абсолютно твердого тела, а также новых проблем для механических систем, широко использующихся в технике, в частности для колесных экипажей с роликонесущими колесами. Проблемы, поставленные и решенные А.А. Зобовой, являются актуальными проблемами теоретической механики как фундаментальной физико-математической науки. Полученные ей результаты представляют, кроме того, интерес для специалистов по прикладной механике, в частности по механике колесных мобильных роботов, и инженеров.

Диссертация включает введение и четыре главы, в которых изложены выносимые на защиту результаты.

Во введении дается общая характеристика диссертации и, кроме того, приводится обзор моделей контактного взаимодействия, предложенных в предшествующих исследованиях и имеющих близкое отношение к проблемам, рассматриваемым в диссертации, а также подходов к построению таких моделей. Указаны соответствующие литературные источники. Обзор написан тщательно и подробно. Он значительно облегчает чтение диссертации, практически избавляя от необходимости пользоваться внешними источниками.

Первая глава диссертации посвящена динамике колесных экипажей (роботов) с роликонесущими колесами. В предшествующих работах других авторов при моделировании роликонесущих колес не учитывались геометрические и инерционные параметры роликов на том основании, что размер и масса ролика много меньше диаметра и массы колеса соответственно. В таких моделях предполагается, что ролики бесконечно малых размеров распределены непрерывно на ободе колеса, и условие

качения роликонесущего колеса без проскальзывания сводится к равенству нулю проекции скорости точки контакта колеса на ось вращения ролика. Угол между плоскостью диска колеса и осью вращения ролика является единственным дополнительным параметром, отличающим модель роликонесущего колеса от модели обычного колеса. В диссертации А.А. Зобовой наряду с описанной моделью колеса с бесконечным числом «безынерционных» роликов бесконечно малого размера рассматривается модель с конечным числом роликов, в которой учитываются их размеры, массы и моменты инерции. Научный и практический интерес здесь представляет изучение влияния геометрических и инерционных параметров роликов на динамические характеристики экипажа с роликонесущими колесами.

Диссертантом выведены уравнения движения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости экипажа с произвольным числом одинаковых роликонесущих колес. Предполагается, что оси вращения всех колес неподвижны относительно платформы, плоскости их дисков вертикальны, контакт каждого колеса с плоскостью опоры происходит в одной точке, колеса катятся без проскальзывания и не отрываются от плоскости опоры. В этом случае платформа движется плоско-параллельно. Движение системы управляется моментами сил, приложенными к осям вращения колес; эти моменты создаются силами взаимодействия колес с платформой и являются внутренними по отношению к экипажу.

Сначала рассмотрена «безынерционная» модель, не учитывающая размеров роликов и их инерционности. Найдена полная система первых интегралов для этой модели в отсутствие управляющих моментов. Детально исследовано движение системы с тремя омни-колесами (омни-колеса – это роликонесущие колеса с осями вращения роликов, ориентированными по касательной к ободу колеса). Оси вращения двух колес лежат на одной прямой, и эти колеса образуют колесную пару, а ось вращения третьего колеса перпендикулярна оси колесной пары и проходит через ее середину.

Центр масс системы лежит на оси вращения третьего колеса; в этом случае данную ось естественно назвать продольной осью экипажа. Построен фазовый портрет такой системы при нулевых управляющих моментах в пространстве псевдоскоростей, которые (с точностью до постоянных множителей) суть проекции скорости центра масс системы на оси системы координат, связанной с платформой экипажа, и угловая скорость вращения платформы вокруг вертикальной оси. Исследована устойчивость по псевдоскоростям прямолинейных движений экипажа вдоль его продольной оси. Кроме того, исследованы стационарные движения экипажа при постоянных управляющих напряжениях в двигателях электроприводов, допускающих прямолинейное движение экипажа вдоль продольной оси.

Затем рассматриваются модели с конечным числом роликов, обладающих конечными размерами и конечными инерционными параметрами. Сначала исследуется модель с тремя колесами, в которой «переднее» омни-колесо имеет конечное число роликов, обладающих конечными размерами и конечными инерционными параметрами, а ролики «задних» омни-колес, образующих колесную пару, безынерционны. Более того, считается, что движение близко к прямолинейному движению вдоль продольной оси, так что контактный ролик не меняется во время движения. Сделанные предположения значительно упрощают уравнения движения и их анализ, и, тем не менее, позволяют исследовать влияние массивности ролика на поведение системы. Найдены все стационарные движения в отсутствие управления, при которых центр масс движется прямолинейно, а платформа не вращается. Исследована устойчивость этих движений по псевдоскоростям. Показано, что учет инерционности роликов приводит к качественному отличию поведения системы по сравнению с моделью с безынерционными роликами.

Наконец, рассматривается «симметричный» экипаж с тремя одинаковыми омни-колесами, имеющими одинаковое количество массивных роликов. Оси вращения колес проходят через центр масс экипажа и

расположены под углом в 120 градусов. Предложена модель «тангенциального удара», предполагающая мгновенное прекращение скольжения ролика, вступающего в контакт с поверхностью перемещения. Динамика «симметричного» экипажа с тремя омни-колесами исследована путем численного моделирования.

Методической особенностью главы 1 является вывод уравнений движения изучаемых неголономных механических систем на основе общей методики, предложенной Я.В. Татариновым. Эта методика оказалась удобной для исследования динамики экипажей с роликонесущими колесами.

Результаты главы 1 вносят значительный вклад в теорию экипажей с роликонесущими колесами и представляют несомненную ценность как для исследователей в области теоретической механики, так и для специалистов в области мобильной робототехники.

В главе 2 строится новая феноменологическая модель динамического взаимодействия однородного абсолютно жесткого шара с вязкоупругим плоским основанием. Основание моделируется равномерно распределенными по его недеформированной поверхности безынерционными вязкоупругими элементами Фойгта, оси которых перпендикулярны поверхности. При деформации основания деформируются элементы Фойгта, в результате чего на шар действует сила со стороны поверхности. Предполагается, что в точке контакта шара с соответствующим элементом Фойгта, кроме вертикально направленной силы, обусловленной деформацией этого элемента, действует сила кулонова сухого трения. Получены аналитические выражения для главного вектора и главного момента сил, действующих на шар со стороны поверхности опоры. Исследовано два типа движения шара: прямой удар шара о вязкоупругую поверхность и качение шара по этой поверхности с проскальзыванием. Для случая прямого удара исследована зависимость коэффициента восстановления скорости шара после удара от параметров среды и скорости шара в момент, непосредственно предшествующий удару.

Из-за наличия диссипативных свойств среды удар оказывается неупругим, и коэффициент восстановления скорости зависит от скорости соударения шара с поверхностью. Для качения шара по вязкоупругой поверхности выделены и исследованы качественно различные этапы взаимодействия шара со средой, имеющие существенно разные продолжительности. Получены характеристики движения, реализующегося после затухания быстрых переходных процессов. Вычислены главный вектор и главный момент сил трения при таком движении. Полученные выражения могут использоваться для решения классической задачи о качении шара по плоскости. Подбором параметров модели взаимодействия шара с вязкоупругой средой можно добиться хорошего согласия с экспериментальными данными.

В третьей главе решен ряд задач о движении абсолютно твердых тел по плоскости при наличии сухого фрикционного контакта. Исследование проводится для различных моделей взаимодействия тел с поверхностью опоры.

Сначала рассматривается известная задача о динамике волчка тип-топ в рамках двусферической модели. Показано, что для описания переворота волчка, закрученного вокруг оси симметрии, из устойчивого статического положения равновесия в неустойчивое статическое положение с последующим возвращением в исходное положение (что наблюдается в действительности) необходимо учитывать трение. Более того, необходимо допускать и учитывать как трение скольжения волчка относительно плоскости в точке контакта, так и трение верчения, приводящее к ненулевому моменту сил трения относительно вертикальной оси, проходящей через точку контакта, при ненулевой проекции угловой скорости волчка на эту ось. Исследование проведено для трех моделей взаимодействия тела с поверхностью: модели Контенсу-Эрисмана, двухпараметрической модели трения, предложенной А.В. Карапетяном, и «вязкоупругой с сухим трением» модели взаимодействия волчка с поверхностью опоры, описанной в главе 2 рецензируемой диссертации. Все три модели позволяют качественно верно

описать переход волчка из статически устойчивого положения равновесия в статически неустойчивое и обратно. Исследование проведено методом численного моделирования. Дается сравнение количественных различий в расчетных данных при различных моделях взаимодействия волчка с поверхностью опоры.

Далее в главе 3 «вязкоупругая с сухим трением» модель взаимодействия твердого тела с поверхностью контакта, разработанная в главе 2 для шара, обобщается на произвольные выпуклые тела. Адекватность модели иллюстрируется расчетом динамического поведения движущейся по плоской (в недеформированном состоянии) поверхности колесной пары, каждое колесо которой управляется независимым электроприводом. Предполагается, что колеса имеют форму эллипсоида вращения (ось вращения направлена вдоль оси колесной пары).

В заключение исследуется движение абсолютно твердого колеса, закрепленного ввилке, ось которой остается вертикальной. К оси вилки на заданной высоте относительно плоскости опоры приложена постоянная сила, направленная горизонтально. Исследована курсовая устойчивость движения колеса, при котором вилка не вращается вокруг своей оси, для различных моделей взаимодействия колеса с плоскостью опоры.

В главе 4 решается задача о «свободном» движении цилиндрического тела из вязкоупругого материала по граничной поверхности вязкоупругой среды. В недеформированном состоянии эта поверхность представляет собой горизонтальную плоскость, а цилиндр (в общем случае сделанный из вязкоупругого материала) является круговым. Предполагается, что цилиндр движется плоско-параллельно. На цилиндр действуют только сила тяжести и силы реакции со стороны поверхности перемещения, включая силу кулонова сухого трения. В главах 2 и 3 описывалась модель взаимодействия движущегося выпуклого тела (в частности шара) по граничной поверхности вязкоупругой среды, но там делалось существенное упрощающее

предположение об «одномерности» этой среды: сила, обусловленная вязко-упругими свойствами, в любой точке направлена вдоль прямой, параллельной осям элементов Фойгта, формирующих эту среду. В главе 4 рассматривается классическая линейная вязко-упругая среда с тензором напряжений общего вида. Выведены уравнения движения цилиндра по границе вязкоупругой среды. Силы, действующие на цилиндр и моменты этих сил, рассчитываются на основе решения квазистатической задачи теории упругости, то есть в предположении, что в каждый момент времени в материале реализуются равновесные значения напряжений и деформаций, отвечающие текущим значениям сил, приложенных к соответствующим телам. Такой подход оправдан, если величина скорости центра масс цилиндра мала по сравнению со скоростью распространения упругих волн материала, а угловая скорость вращения цилиндра мала по сравнению с частотой упругих колебаний среды. В этом случае, учет взаимодействия движущегося тела со сплошной средой не увеличивает числа степеней свободы динамической модели системы. Рассчитана и проанализирована эволюция движения цилиндра для ряда частных случаев, важных для технических приложений: движение упругого цилиндра по граничной поверхности упругой среды с сухим трением; движение жесткого цилиндра по поверхности вязко-упругой среды; движение цилиндра из вязкоупругого материала по поверхности вязко-упругой среды с сухим трением.

Диссертация А.А. Зобовой представляет **завершенную научно-квалификационную работу**, в которой получены **новые фундаментальные научные результаты** по решению **актуальных проблем теоретической механики, связанных с динамикой твердых тел при наличии фрикционного взаимодействия с поверхностью, по которой они движутся.**

Научная актуальность обуславливается недостатком знаний о фрикционном взаимодействии тел, на основе которых можно построить адекватную модель, позволяющую средствами теоретической механики

описывать динамику взаимодействующих тел с точностью, удовлетворяющей современным экспериментальным данным. Такие модели нужны инженерам, имеющим дело с системами точного позиционирования, в частности с манипуляционными роботами. Поэтому тематика диссертации А.А. Зобовой актуальна как в фундаментально-научном, так и в прикладном аспектах.

Новизна результатов диссертации подтверждается анализом публикаций российских и зарубежных авторов по проблемам, близким к рассматриваемым в диссертации, и сравнением публикаций диссертанта с предшествующими публикациями других авторов. Косвенно новизна подтверждается также обнародованием результатов диссертации в ведущих российских и международных журналах по механике, публикуемые статьи в которых проходят тщательное рецензирование экспертами.

Результаты диссертации **достоверны и полностью обоснованы**. Достоверность гарантируется адекватностью математического аппарата, используемого диссертантом для анализа рассматриваемых им моделей механических систем, и строгой доказательностью утверждений, составляющих основные положения диссертации.

Результаты, выносимые на защиту, получены **лично диссертантом**. Значительная часть статей по теме диссертации опубликована А.А. Зобовой с соавторами. В тексте диссертации четко написано, что именно в совместных работах получено лично диссертантом, и только эти результаты выносятся на защиту.

В целом диссертацию можно квалифицировать как **крупный вклад в теоретическую механику, точнее в динамику систем твердых тел с фрикционным контактным взаимодействием**. Автор диссертации решены важные проблемы механики систем с трением на основе различных моделей контактного взаимодействия (как классических, так и уточненных современных). Модели контактного взаимодействия модифицированы и

адаптированы автором с учетом математического аппарата теоретической механики и специфики решаемых задач.

Как квалификационная работа диссертация А.А. Зобовой свидетельствует о высокой профессиональной квалификации ее автора в области теоретической и прикладной механики А.А. Зобова профессионально владеет современными математическими методами теоретической механики и использует их по существу решаемой задачи. Она обладает широкими знаниями и эрудицией в области механики, умеет ставить и решать задачи, находящиеся на стыке классической теоретической механики и механики контактного взаимодействия тел, относящейся к области деформируемого твердого тела.

Все результаты диссертации опубликованы в ведущих отечественных и международных журналах по механике, доложены на российских и международных конференциях, съездах и семинарах. Они получили известность и признание специалистов.

С материалами диссертации А.А. Зобовой целесообразно ознакомить специалистов (исследователям и преподавателям) в области теоретической механики, а также специалистам в области прикладной механики и инженерам, занимающимся системами точного позиционирования и мобильными роботами. Полученные в диссертации результаты целесообразно включить (полностью или частично) в учебные пособия и программы спецкурсов по теоретической механике для студентов и аспирантов, готовящих себя в научной работе в области теоретической механики, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной механики.

Автореферат правильно и полно отражает материал диссертации.

По научному содержанию диссертации, полноте и стилю изложения материала существенных замечаний нет.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертация оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Зобова Александра Александровна заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – «Теоретическая механика».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
«Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского»
Российской академии наук
БОЛОТНИК Николай Николаевич

18 августа 2020 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (495) 4343501, e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защита диссертация:

01.02.01 – Теоретическая механика

Адрес места работы:

119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корпус 1
ИПМех РАН, лаборатория робототехники и мехатроники
Тел.: +7 (495) 4343501; e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Подпись сотрудника ИПМех РАН
Н.Н. Болотника удостоверяю:
Ученый секретарь ИПМех РАН

М.А. Котов
18 августа 2020 г.