Отзыв научного руководителя на диссертационную работу Екатерины Ивановны Степановой «Бифуркации минимальных сетей и минимальных заполнений конечных подмножеств евклидовой плоскости» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

В диссертации Екатерины Ивановны Степановой изучается ряд тесно связанных друг с другом задач. В исходной постановке требовалось вычислить суботношение евклидовой плоскости. Эта геометрическая характеристика была введена А.О.Ивановым и А.А.Тужилиным для произвольного метрического пространства и представляет собой аналог хорошо известного отношения Штейнера.

Более подробно, рассматривается три основных типа экстремалей одномерных вариационных задач: *минимальное остовное дерево*, *минимальное дерево Штейнера* и *минимальное заполнение*. Первый тип экстремалей представляет собой кратчайшие деревья, множество вершин которых – фиксированное конечное метрическое пространство M. Для определения экстремалей второго типа рассматривается конечное подмножество M метрического пространства X и минимизируется длина минимальных остовных деревьев, множества вершин которых лежат в X и содержат M. Полученная величина называется *длиной минимального дерева Штейнера*, а минимальное остовное дерево, на котором реализуется эта длина (если такое дерево существует), – минимальным деревом Штейнера. Наконец, если фиксировать конечное метрическое пространство M, изометрично вкладывать его во всевозможные метрические пространства X, и минимизировать длины соответствующих минимальных деревьев Штейнера, то получим *длину минимального заполнения* и соответствующее *минимальное заполнение*.

Построение описанных выше экстремалей эффективно лишь в случае минимальных остовных деревьев. Это привело к тому, что минимальные остовные деревья стали использовать в качестве приближения для минимальных деревьев Штейнера, а в качестве характеристики, оценивающей, насколько хорошо в данном метрическом пространстве можно такое приближение осуществить, ввели *отношение Штейнера*, равное точной нижней грани отношений длин минимальных деревьев Штейнера и минимальных остовных деревьев по всем не менее чем двухточечным подмножествам объемлющего метрического пространства X.

Чтобы оценить точность приближения минимальных заполнений первыми двумя типами экстремалей, А.О.Иванов и А.А.Тужилин предложили рассматривать соответствующие отношения. Отметим, что отношение Штейнера является нетривиальной характеристикой метрического пространства. Многочисленные усилия вычислить его даже для евклидовой плоскости до сих пор не привели к успеху. Тем не менее, если при вычислении точной нижней грани ограничиться подмножествами, состоящими не более чем из n точек, то к настоящему времени получены значения *n-точечного отношения Штейнера* для n < 9.

В диссертации Степановой показывается, что задача вычисления n-точечного суботношения Штейнера евклидовой плоскости даже для n = 4 – задача существенно более трудная. Тем не менее, Степановой удалось добиться успеха и получить точный ответ.

В качестве «сопутствующих результатов»

– были построены бифуркационные диаграммы минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для четырехточечных границ евклидовой плоскости;

– была доказана дифференцируемость по направлению и найдены производные длины минимального заполнения и соответствующих отношений в случае, когда граничное множество лежит в произвольном связном полном римановом многообразии;

– была получена оценка суботношения Штейнера для произвольных связных римановых многообразий.

Отмечу, что построение бифуркационных диаграмм, даже в случае небольшого числа точек – крайне сложная и трудоемкая задача. Уже в случае четырех точек, даже с учетом возможной факторизации по подобию, такая диаграмма должна располагаться в четырехмерном пространстве. Чтобы сделать результат наглядным, фиксируются положения двух точек, положение третьей точки выбирается в качестве параметра, а диаграмма строится по переменной четвертой точке: плоскость разбивается на максимальные области, в которых изучаемый объект относится к одному и тому же типу. Тем самым, мы получаем некоторую «карту», вид которой зависит от конкретного значения параметра (положения третьей вершины). После этого, необходимо построить «атлас», разбив конфигурационное пространство третьей вершины на области, соответствующие «однотипным» картам. В диссертации Степановой бифуркационные диаграммы изучены во всей полноте, вплоть до уравнений кривых, разделяющих области: как выяснилось, эти границы могут быть крайне нетривиальными.

Диссертация Е.И. Степановой представляет собой законченное научное исследование, в котором решены актуальные задачи теории оптимальных сетей. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, опубликованы в ведущих научных журналах и неоднократно представлялись автором на научных семинарах и конференциях всероссийского и международного уровней

Диссертация Е.И. Степановой соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки).

Профессор,

доктор физико-математических наук А.А. Тужилин

Подпись А. А. Тужилина заверяю,

и. о. декана механико-математического факультета

МГУ имени М.В. Ломоносова,

д.ф.-м.н., профессор В.Н. Чубариков