

## КУРСОВАЯ РАБОТА

**ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ.**

Студент:	Аллахвердиев Рамин
Научный руководитель: старший научный сотрудник физического факультета МГУ	Юшков Егор
Учебная группа:	№ 618

# 1 Теория магнитогидродинамического динамо

## 1.1 Что такое динамо?

Формирование устойчивого магнитного поля звезд и планет долгое время вызывало вопросы и до прошлого века не было теории, описывающей этот процесс. Ввиду наличия естественной диффузии, на первый взгляд казалось, что магнитное поле вместе с магнитной энергией в любой системе должны диссипировать со временем, однако магнитные поля у звезд и планет не затухают, из чего следует вывод о том, что должен существовать некий механизм, поддерживающий наличие этого поля. Такой эффект самогенерации магнитного поля, активно исследуемый в настоящее время, принято называть магнитным или магнитогидродинамическим динамо.

Процесс динамо основан на свойстве вмороженности магнитного поля в проводящую движущуюся среду, в плазму или жидкость. За счет вмороженности для ряда специфических турбулентных течений оказывается возможной перекачка кинетической энергии движения среды в энергию поля. Как проходит этот процесс перекачки, и какими свойствами для этого должны обладать течения – главный вопрос теории. Одно мы знаем точно, что такие течения существуют. Так наиболее известным проявлением магнитного динамо является одиннадцатилетний цикл солнечной активности. При этом магнитная активность, похожая на солнечную, наблюдается и у других небесных тел: в звездах, в планетах и в спиральных галактиках.

Из простых рассуждений следует, что согласно правилу Ленца, производимое электромагнитной индукцией магнитное поле не складывается с первоначальным магнитным полем, а вычитается из него. Поэтому в процессе динамо должны участвовать, как минимум, два *обстранных контура*, чтобы индуктивные эффекты в первом контуре поддерживали магнитное поле во втором, а индуктивные эффекты во втором контуре создавали магнитное поле в первом, причем знаки этих полей должны быть подобраны так, чтобы совместное действие индуктивных эффектов приводило к самоподдержке и самовозбуждению. Другими словами, динамо-система по определению является достаточно сложной.

Так например, в наиболее изученном солнечном динамо магнитное поле в первом контуре представлено в виде магнитного поля обычного диполя, а магнитное поля второго контура, лежащее внутри конвективной зоны Солнца, направлено азимутально. Первое из полей принято называть полоидальным, а второе – тороидальным. Полоидальное магнитное поле преобразуется в тороидальное посредством дифференциального вращения среды, в которую магнитное поле вморожено. Движение, восстанавливающее полоидальное поле из тороидального было вопросом нескольких десятилетий, пока американский астроном Ю.Паркер [1] не вывел для случая тонкой конвективной оболочки уравнения, связывающие обе компоненты поля. Конвективные потоки во вращающихся телах оказываются зеркально-асимметричными, поскольку действие силы Кориолиса на вихри, всплывающие и опускающиеся в стратифицированной среде, приводит к различию лево- и правовращающихся вихрей в данном полушарии небесного тела, а следовательно, к усилению магнитного поля.

Но это лишь один возможных из примеров работы динамо-механизма, называемый  $\alpha\omega$ -динамо. Существуют и другие механизмы, такие как  $\alpha^2$ -динамо и турбулентная мелкомасштабная генерация, о которых подробнее можно прочитать в обзоре [2] и указанных там ссылках.

Основная сегодняшняя проблема динамо-теории связана с отсутствием лабораторной экспериментальной базы. Единственная возможная проверка на сегодняшний момент это сравнение с астрофизическими наблюдениями, которые очень ограничены по своему аппарату. Причина этого в том, что динамо сильно отличается от привычных процессов теории электричества и сильно зависит от непривычного параметра – магнитного числа Рейнольдса  $Rm$ . В самом деле, так как в явлении динамо индуктивные эффекты должны превосходить диссипационные, то порядковая оценка отношения соответствующих членов в законе Ома в движущейся среде приводит к условию:

$$Rm = \frac{VL}{v_m} \gg 1,$$

где  $V$  - характерная скорость,  $L$  - характерный размер задачи,  $v_m$  - коэффициент магнитной диффузии. Поэтому явление динамо – сильно пороговое явление, то есть наблюдается только при достаточно больших значениях  $Rm$ . Так например для турбулентного динамо предсказан порог  $Rm = 65$ , в то время как максимальные лабораторные значения  $Rm = 40 - 50$  (для сравнения на Солнце  $Rm = 10^4 - 10^6$ , а в галактиках  $Rm = 10^8 - 10^{12}$ ). В силу такой пограничной ситуации для сравнения с предстоящими реальными экспериментами требуется изучить в теории не только простейшие случаи генерации, но и более реалистичные примеры эволюции магнитного поля в неоднородных и неизотропных средах. Исследованию вопроса о генерации поля в неидеальных средах и посвящена настоящая работа.

## 1.2 Основное уравнение динамо-теории

Из общего курса электромагнетизма нам известна система уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = [\nabla, \mathbf{E}] = -c^{-1}\partial_t \mathbf{B}; \\ \text{rot } \mathbf{H} = [\nabla, \mathbf{H}] = c^{-1}\partial_t \mathbf{D} + 4\pi c^{-1}\mathbf{j}; \\ \text{div } \mathbf{B} = (\nabla, \mathbf{B}) = 0; \\ \text{div } \mathbf{D} = (\nabla, \mathbf{D}) = 4\pi\rho_e; \end{cases} \quad (1)$$

определяющая эволюцию электромагнитного поля в среде. Здесь  $E$  и  $H$  - электрическое и магнитное поле, а  $D$  и  $B$  - соответственно, электрическая и магнитная индукция,  $\rho_e$  и  $j$  - плотность заряда и тока. В дальнейшем, считая электрическое поле квазистационарным, сохраним токи проводимости, а токами смещения пренебрежем:

$$\partial_t \mathbf{D} \ll 4\pi\mathbf{j}; \quad (2)$$

Перепишем второе уравнение Максвелла как

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi c^{-1}\mathbf{j}. \quad (3)$$

и свяжем плотность тока проводимости с электрическим полем в системе отсчета движущейся вместе с проводящей средой:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}_0; \quad (4)$$

здесь  $\lambda$  - электрическая проводимость плазмы/жидкости,  $\mathbf{E}_0$  - электрическое поле, измеренное в движущейся среде. Его можно связать с электрическим полем в неподвижной системе отсчета и со скоростью движения среды:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (5)$$

Тогда выражая через коэффициент магнитной проницаемости  $\mu$  поле через индукцию, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} [\nabla, \mathbf{E}] = -\mu c^{-1}\partial_t \mathbf{H}; \\ [\nabla, \mathbf{H}] = 4\pi\lambda c^{-1}(\mathbf{E} + \mu c^{-1}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]); \\ (\nabla, \mathbf{H}) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Возьмем теперь ротор от левой и правой части второго уравнения:

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{H}]] = 4\pi\lambda c^{-1}([\nabla, \mathbf{E}] + \mu c^{-1}[\nabla, [\mathbf{v}, \mathbf{H}]]) \quad (7)$$

Поскольку

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{H}]] = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}; \quad (8)$$

а  $\text{rot } \mathbf{E}$  можно подставить из первого уравнения Максвелла, то мы получаем

$$-\Delta \mathbf{H} = 4\pi\lambda\mu c^{-2}(\partial_t \mathbf{H} + [\nabla, [\mathbf{v}, \mathbf{H}]]); \quad (9)$$

Вводя магнитную вязкость

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu}; \quad (10)$$

перепишем уравнение (9) в виде

$$\partial_t \mathbf{H} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \eta \Delta \mathbf{H}. \quad (11)$$

Мы получили так называемое уравнение магнитной индукции, которое является основным уравнением теории динамо, так как определяет эволюцию магнитного поля в среде со известным полем скорости.

### 1.3 Вмороженность в идеальную плазму

Полученное уравнение индукции позволяет проследить поведение среднего магнитного поля в турбулентном течении, через усреднение по полю скорости, но перед тем как приступить к этой задаче, нельзя не сказать пару слов о так называемом свойстве вмороженности, напрямую следующим из уравнения (11). Это свойство означает, что линии магнитного поля в некотором смысле "приклеены" к среде и если объем жидкости поворачивается/перемещается, то вектор магнитного поля поворачивается/перемещается вместе с ним.

Установим, каким свойствам должен удовлетворять произвольный вектор  $\mathbf{a}(t)$ , чтобы обладать свойством вмороженности. Рассмотрим две частицы жидкости, соединенные  $\mathbf{a}(t)$ . Спустя некоторое время  $\Delta t$  начало вектора переместится на расстояние  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\Delta t$ , а его конец - расстояние  $\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, t)\Delta t$ . Вектор, соответствующий моменту времени  $t + \Delta t$ , выражается как

$$\mathbf{a}(t + \Delta t) = \mathbf{a}(t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\Delta t, \quad (12)$$

или:

$$\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) = (\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\Delta t. \quad (13)$$

Применяя формулу конечных приращений, перепишем (13) в виде

$$d_t \mathbf{a} \Delta t \cong (\partial_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_x + \partial_y \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_y + \partial_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_z) \Delta t. \quad (14)$$

Разделим обе части на  $\Delta t$ , устремим  $\Delta t$  к нулю и получим равенство

$$d_t \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{v}. \quad (15)$$

Таким образом, если мы хотим, чтобы векторное поле  $\mathbf{a}$  обладало свойством вмороженности и перемещалось вместе со средой, необходимо, чтобы оно удовлетворяло уравнению (15). Покажем, что в среде с бесконечной проводимостью таким свойством обладает поле  $\mathbf{a} = \mathbf{H}/\rho$ .

Рассмотрим основное уравнение магнитной гидродинамики – уравнение магнитной индукции – при условии бесконечной проводимости:

$$\partial_t \mathbf{H} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]. \quad (16)$$

Его можно переписать так:

$$\partial_t \mathbf{H} = (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{v}. \quad (17)$$

В силу уравнений Максвелла  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ . Кроме того, мы имеем условие неразрывности:

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (18)$$

в силу которого:

$$\partial_t \rho + \rho \cdot \text{div}(\mathbf{v}) + (\nabla \rho, \mathbf{v}) = 0. \quad (19)$$

Тогда, так как  $(\nabla\rho, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \nabla)\rho$ , то мы получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\rho \right). \quad (20)$$

и из уравнения магнитной индукции выходит:

$$\partial_t \mathbf{H} = (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{H} + \mathbf{H}\rho^{-1} (\partial_t\rho + (\mathbf{v}, \nabla)\rho). \quad (21)$$

или, выделяя в левой части полные производные, получаем

$$d_t \mathbf{H} - \mathbf{H}\rho^{-1} d_t \rho = (\mathbf{H}, \nabla)\mathbf{v}. \quad (22)$$

Теперь если разделить обе части уравнения на  $\rho$ , то можно получить условие вмороженности:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho}, \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (23)$$

Таким образом векторное поле  $\mathbf{H}/\rho$  (а в несжимаемой среде и просто магнитное поле  $\mathbf{H}$ ) является вмороженным в проводящую среду. А следовательно, оказывается возможной перекачка энергии из движения среды в среднюю магнитную. Однако техническое получение закона для такой перекачки сопряжено с рядом трудностей, о которых пойдет речь в следующем разделе.

## 2 Простейшая модель динамо среднего поля

В рамках настоящей работы мы ограничимся простейшей моделью среднего поля, полученной Штеенбеком, Краузе и Рэдлером в 60х года прошлого века. Для усреднения однородного уравнения индукции по случайному полю скорости

$$\mathbf{H}_t = \operatorname{rot}([\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \eta \operatorname{rot}(\mathbf{H})) = \operatorname{rot}([\mathbf{v}, \mathbf{H}]) + \eta \Delta \mathbf{H} \quad (24)$$

в оригинальном методе предлагалось использовать условия двухмасштабности случайного поля, другими словами предположить что основные процессы происходят на масштабах больших чем энергетический масштаб поля скорости (масштаб максимума плотности энергии), а турбулентностью на меньших масштабах пренебречь. Однако этот оригинальный метод весьма ограничен, как спорным предположением о двухмасштабности, так и применимостью только к однородным и изотропным задачам. Поэтому мы воспользуемся методом Рузмайкина, Молчанова и Соколова и получим аналог так называемого уравнения среднего поля

$$\mathbf{H}_t = \alpha \operatorname{rot}(\mathbf{H}) + \beta \Delta \mathbf{H}$$

но для неоднородного и неизотропного плазменного потока с малыми временными корреляциями (идея короткокоррелированного течения обычно приписывается Казанцеву и подробнее о ней можно прочитать в работе [3]). В рамках курсовой работы мы не будем вдаваться в детали метода, отсылая читателя к монографии [4].

### 2.1 Мультипликативное решение уравнения индукции

Для решения вывода модели рассмотрим уравнение индукции (24), записанное не для магнитного поля, а для его векторного потенциала  $\mathbf{A}(x, t)$  в форме

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{v}, \operatorname{rot}(\mathbf{A})] + \eta \Delta \mathbf{A}, \quad \text{где} \quad \mu_0 \mathbf{H} = \operatorname{rot}(\mathbf{A}) \quad (25)$$

Конечно, такая постановка, сама по себе подразумевающая соленоидальность поля, определяет уравнение (25) неоднозначным образом из-за произвольного градиента функции, который

может быть добавлен к правой части уравнения. Основное достоинство такой записи состоит в том, что скорость потока плазмы вынесена из под знака ротора, что в дальнейшем сильно сокращает выкладки, а правая часть по сути представляет из себя электродвижущую силу в терминах Краузе-Редлера, см., например, [5].

Мы знаем, что в случае с идеальной индуктивностью  $\eta = 0$  магнитное поле оказывается полностью вмороженным в плазму, следовательно его эволюция однозначно определяется начальным распределением и знанием скоростей жидких частиц среды. Давайте найдем изменение векторного потенциала в этом идеальном случае. Перепишем уравнение (25) в форме полной производной по времени:

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{v}, \text{rot}(\mathbf{A})] \quad \text{или} \quad (A_i)_t = v_j \nabla_i A_j - v_j \nabla_j A_i \Rightarrow (A_i)_t + v_j \nabla_j A_i = -A_j \nabla_i v_j + \nabla_i (v_j A_j), \quad (26)$$

где в левой части стоит полная производная Эйлера, а последний член в правой части может быть убран в силу градиентной неопределенности уравнения (25). Полученное выражение  $d_t(A_i) = -A_j \nabla_i v_j$  позволяет нам записать изменение векторного потенциала в жидкой частице среды, переместившейся из начальной точки  $\xi(t)$  в точку  $x(t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ :

$$A_i(x, t + \Delta t) = A_i(\xi, t) + d_t A_i(\xi, t) \Delta t = (A_i - A_j \nabla_i v_j \Delta t)(\xi, t) = (\delta_{ij} - \nabla_i v_j \Delta t) A_j(\xi, t). \quad (27)$$

Этот результат означает, что эволюция магнитного потенциала в соседние моменты времени определяется множителем  $(\delta_{ij} - \nabla_i v_j \Delta t)$ . Таким образом для произвольного времени  $\Delta = n \Delta t$  изменение потенциала может быть записано как последовательное произведение таких множителей, или другими словами, как функциональный (мультипликативный) интеграл

$$A_i(x, t + \Delta) = \prod_1^n (\delta_{ij} - \nabla_i v_j(x(s), s) \Delta t) A_j(\xi, t), \quad (28)$$

где скорость в подинтегральном выражении берется в последовательные моменты времени  $s$ , а вектор  $A_j(\xi, t)$  в начальный момент времени  $t$ . Конечно, нам стоило бы перейти к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , однако, для удобства, мы сохраним запись без знака предела, предположив, что  $\Delta t$  достаточно мало. Для малого временного сдвига мы можем переписать это решение в форме асимптотического приближения

$$A_i(x, t + \Delta) = \left( \delta_{ij} + \sum_1^n (-\nabla_i v_j \Delta t) + \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \nabla_i v_k \nabla_k v_j \Delta t^2 + \dots \right) A_j(\xi, t) \quad (29)$$

Конечно, полученное решение удовлетворяет уравнению (25) только в предположении идеального потока, между тем диффузия может быть включена в него заменой однозначно определенной траектории на усредненный путь по набору случайных венеровских трассеров (это широко распространенная аналогия Фейнмановскому усреднению в квантовой физике). Покажем это, заменяя траекторию жидкой частицы:

$$x_k = \xi_k + \int_t^{t+\Delta} v_k(x(s), s) ds \quad \text{на} \quad \xi_k = x_k - \int_t^{t+\Delta} v_k(x(s), s) ds + \sqrt{2\eta} w_k, \quad (30)$$

где  $w_k$  – винеровское случайное отклонение с  $\langle w_k \rangle = 0$  и  $\langle w_l w_k \rangle = \delta_{lk} \Delta$  (см., например, [6]). Если временной сдвиг  $\Delta$  маленький, то соответствующий ему пространственный сдвиг  $(\xi_k - x_k)$  также оказывается малым, что позволяет записать векторного потенциала в начальный момент через асимптотическое представление

$$A_j(\xi, t) = A_j(x, t) + \nabla_k A_j(\xi_k - x_k) + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_l A_j(\xi_k - x_k)(\xi_l - x_l) + \dots \quad (31)$$

Используя представление (30), выразим сдвиг  $(\xi_k - x_k)$  через значение поля скорости в начальный момент времени  $v(x, t)$  (причина, по которой мы сохраняем именно такие члены разложения, будет ясна чуть позже):

$$\begin{aligned} (\xi_k - x_k) &= \sqrt{2\eta}w_k - \int_t^{t+\Delta} v_i(x(s), s)ds = \sqrt{2\eta}w_k - \int_t^{t+\Delta} (v_i(\xi, t) + d_t v_k(\xi, t)(s-t) + \dots) ds = \\ &= \sqrt{2\eta}w_k - v_k(\xi, t)\Delta - ((v_k)_t + v_l \nabla_l v_k)(\xi, t) \frac{\Delta^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что скорости здесь определены в точке  $\xi$ , переопределим их в точке  $x$

$$v_k(\xi, t) = v_k(x, t) + \nabla_l v_k(\xi_l - x_l) + \dots = v_k(x, t) + \nabla_l v_k(\sqrt{2\eta}w_l - v_l(x, t)\Delta + \dots) + \dots \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32), получаем

$$(\xi_k - x_k) = \sqrt{2\eta}w_k - v_k(x, t)\Delta - \nabla_l v_k(x, t)\sqrt{2\eta}w_l\Delta + v_l \nabla_l v_k(x, t) \frac{\Delta^2}{2} + \dots \quad (34)$$

и асимптотическое разложение магнитного потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} A_j(\xi, t) &= A_j(x, t) + \nabla_k A_j(\sqrt{2\eta}w_k - v_k\Delta) + \nabla_k A_j \left( -\sqrt{2\eta} \nabla_l v_k w_l \Delta + v_l \nabla_l v_k \frac{\Delta^2}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_l A_j \left( 2\eta w_k w_l - \sqrt{2\eta} w_k v_l \Delta - \sqrt{2\eta} w_l v_k \Delta + v_k v_l \Delta^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Чтобы показать, что этот функциональный интеграл и в самом деле является решением, подставим (35) в (29), оставив члены до первого порядка  $\Delta$  и получим

$$\begin{aligned} A_i(x, t + \Delta) &= \left( \delta_{ij} + \sum_1^n (-\nabla_i v_j \Delta t) + \dots \right) A_j(\xi, t) = \\ &= (\delta_{ij} - \nabla_i v_j \Delta + \dots) \left( A_j(x, t) + \nabla_k A_j(\sqrt{2\eta}w_k - v_k\Delta) + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_l A_j 2\eta w_k w_l + \dots \right) = \\ &= A_i(x, t) + \nabla_k A_i(\sqrt{2\eta}w_k - v_k\Delta) + \nabla_k \nabla_l A_i \eta w_k w_l - \nabla_i v_j A_j \Delta + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

После винеровского усреднения уравнения (36) (с нулевым средним и ненулевой дисперсией), переносим первое слагаемое из правой част в левую, получая

$$A_i(x, t + \Delta) - A_i(x, t) = (-v_j \nabla_j A_i - \nabla_i v_j A_j + \eta \nabla_k \nabla_l \delta_{lk} A_i) \Delta \quad (37)$$

Наконец, поделив (37) на  $\Delta$ , устремляем  $\Delta$  к нулю. Формула конечных приращений позволяет записать получившееся выражение в виде уравнения индукции (25):

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{v}, \text{rot}(\mathbf{A})] + \eta \Delta \mathbf{A}.$$

Таким образом, полученное мультипликативное решение (28) действительно является решением классического уравнения индукции!

## 2.2 Усреднение мультипликативного решения по полю скорости

Воспользуемся полученным решением в виде функционального интеграла (28), предположив что поле скорости  $\mathbf{v}(x, t)$  случайно. В процессе усреднения ограничимся предположением, что среднее корреляционное время поля скорости  $\Delta$  много меньше корреляционного времени

магнитного поля (в дальнейшем это позволит развязать усреднение по  $\mathbf{v}(x, t)$  и  $\mathbf{A}(x, t)$ ). Проведем усреднение мультипликативного решение в три шага:

- (1) сначала усредним векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{A}(x, t)$  на основном интервале времени  $(0, t)$ , где он не зависит от короткокоррелированного поля  $\mathbf{v}(x, t)$ ;
- (2) потом усредним поле скорости  $\mathbf{v}(x, t)$  на интервале  $(t, t + \Delta)$ ;
- (3) и, наконец, усредним винеровский шум, независимый от первых двух процессов, но позволяющий учесть эффекты диссипации.

Усреднив магнитный потенциал и оставив для него старое обозначение  $\mathbf{A}(x, t)$ , перепишем мультипликативное решение (28) в виде разложения для близких моментов времени:

$$\begin{aligned}
A_i(x, t + \Delta) = & \left( \delta_{ij} + \sum_1^n (-\nabla_i v_j \Delta t) + \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \nabla_i v_k \nabla_k v_j \Delta t^2 + \dots \right) \times \\
& \times \left( A_j(x, t) + \nabla_k A_j (\sqrt{2\eta} w_k - v_k \Delta) + \nabla_k A_j \left( -\sqrt{2\eta} \nabla_l v_k w_l \Delta + v_l \nabla_l v_k \frac{\Delta^2}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_l A_j \left( 2\eta w_k w_l - \sqrt{2\eta} w_k v_l \Delta - \sqrt{2\eta} w_l v_k \Delta + v_k v_l \Delta^2 \right) + \dots \right) \quad (38)
\end{aligned}$$

Здесь следует объяснить, почему в выражении (38) мы ограничились выписанным набором членов. Сделав разумное предположение о том, что средние характеристики скорости должны убывать со временем (в силу конечности корреляционного времени), мы выберем скорость убывания средней скорости пропорциональную  $\Delta^{-1/2}$ . Конечно, можно было бы постараться построить цепочку рассуждений, связывающую такую скорость убывания со средним квадратичным винеровским отклонением от траектории пропорциональным  $\Delta^{1/2}$ . Однако более правильным будет сказать, что при меньшей скорости убывания усреднение приведет к исходному уравнению индукции, при большей – к уравнению с сингулярностью при малых  $\Delta$ , и лишь при убывании пропорциональном  $\langle \mathbf{v} \rangle \sim \Delta^{-1/2}$  мы придем к классическому уравнению среднего поля.

Сделанное предположение  $\langle \mathbf{v} \rangle \sim \Delta^{-1/2}$  позволяет утверждать, что в разложении (38) мы сохранили только слагаемые, обеспечивающие точность вплоть до малости  $\sim \Delta$  (при малых  $\Delta$ ). И в отличие от прошлого параграфа в разложении мультипликативного интеграла мы оставляем не только одинарную, но и двойную сумму, каждую из которых записываем в виде интеграла и асимптотически разлагаем в ряд:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n (-\nabla_i v_j \Delta t) &= - \int_t^{t+\Delta} \nabla_i v_j(x(s), s) ds = - \int_t^{t+\Delta} (\nabla_i v_j(\xi, t) + d_t(\nabla_i v_j)(\xi, t)(s-t)) ds = \\
&= -\nabla_i v_j(\xi, t) \Delta - \nabla_k \nabla_i v_j v_k(\xi, t) \frac{\Delta^2}{2} = \left( -\nabla_i v_j \Delta - \nabla_k \nabla_i v_j \sqrt{2\eta} w_k \Delta + \nabla_k \nabla_i v_j v_k \frac{\Delta^2}{2} \right) (x, t) \\
\frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n (\nabla_i v_k \Delta t) (\nabla_k v_j \Delta t) &= \left( \nabla_k v_j \nabla_i v_k \frac{\Delta^2}{2} \right) (x, t) + o(\Delta).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в (38), получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
A_i(x, t + \Delta) = & A_i(x, t) - v_j \nabla_j A_i \Delta - \nabla_i v_j A_j \Delta + \left( \eta \delta_{kl} \Delta + v_k v_l \frac{\Delta^2}{2} \right) \nabla_k \nabla_l A_i + \\
& + v_l \nabla_l v_k \nabla_k A_i \frac{\Delta^2}{2} + v_k \nabla_i v_j \nabla_k A_j \Delta^2 + v_k \nabla_k \nabla_i v_j \frac{\Delta^2}{2} + \nabla_k v_j \nabla_i v_k A_j \frac{\Delta^2}{2}, \quad (39)
\end{aligned}$$

в котором уже проведено усреднение по винеровским траекториям. Из первых трех слагаемых правой части, соответствующих уравнению индукции (37), после усреднения пропадают два в



случае нулевой средней скорости. Перепишем уравнение (39), поделив его на  $\Delta$  и перегруппировав члены с учетом формулы конечных приращений для производной по времени:

$$(A_t)_i = \beta_{kl} \nabla_k \nabla_l A_i + \frac{1}{2} \langle v_l \nabla_l v_k \rangle \nabla_k A_i + \langle v_k \nabla_i v_j \rangle \nabla_k A_j + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \langle v_j v_k \rangle A_j, \quad (40)$$

При этом мы ввели обозначение для магнитной турбулентной диффузии  $\beta_{kl} = \eta \delta_{kl} + \langle v_k v_l \rangle / 2$ , включающей в себя энергию движения среды. Здесь и далее мы предполагаем существование пределов

$$\langle v_k v_l \rangle = \lim (\Delta \cdot v_k v_l) \quad \text{и} \quad \langle v_k \nabla_i v_j \rangle = \lim (\Delta \cdot v_k \nabla_i v_j) \quad \text{при} \quad \Delta \rightarrow 0.$$

В случае некоррелируемости ортогональных компонент скорости, то есть  $\langle v_k v_l \rangle \sim \delta_{kl}$  (это справедливо для изотропно случая, для неизотропного см. ниже), а также ряда арифметических преобразований, мы приходим к уравнению

$$(A_t)_i = \frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle \nabla_k A_j - \text{rot}(\beta \text{rot}(\mathbf{A}))_i. \quad (41)$$

При такой записи трех-индексный тензор в треугольных скобках является антисимметричен по индексам  $k$  и  $j$  и в однородном изотропном случае (детали тензорного представления подробно описаны в [5]) может быть представлен через так называемый альфа-параметр, характеризующий спиральность турбулентного потока:

$$\frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle = -\alpha \varepsilon_{ijk}, \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{1}{6} \langle \text{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (42)$$

Переписывая с учетом однородного представления уравнение (41) в векторном виде

$$\mathbf{A}_t = \alpha \cdot \text{rot}(\mathbf{A}) - \text{rot}(\beta \cdot \text{rot}(\mathbf{A})) \quad (43)$$

мы получаем уравнение среднего поля для однородной среды с нулевой средней скоростью. Учет ненулевой скорости  $\mathbf{V}$ , а также взятие ротора от уравнения (43) приводит к классической хорошо изученной динамо-модели Штеенбека-Крауза-Рэдлера вида

$$\mathbf{V}_t = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \text{rot}(\alpha \cdot \mathbf{B}) - \text{rot}(\text{rot}(\beta \cdot \mathbf{B})). \quad (44)$$

### 3 Фурье-анализ однородной и изотропной модели

Начнем с аналитического анализа динамо-уравнения среднего поля (43) для простейшего случая однородного и изотропного потока.

$$\alpha = \text{const} \quad \text{и} \quad \beta = \text{const}.$$

В этом случае в предположении гладкости и локализованности начальных распределений возможным оказывается использование метода Фурье.

#### 3.1 Преобразование Фурье

Хорошо известно, что непрерывные интегрируемые функции, определенные на числовой прямой с конечным носителем, допускают прямое и обратное преобразование Фурье, см., например, [7]:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (45)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (46)$$

При этом традиционно функция  $\hat{f}(k)$ , называется образом Фурье и выражается через функцию  $f(x)$ , называемой оригиналом. Преобразование Фурье часто используется при решении задач математической физики по следующей схеме:

- (1) уравнение для искомой функции  $f(x)$ , обычно содержащее производные, подвергают преобразованию Фурье и получают уравнение для образа  $\hat{f}(k)$ ;
- (2) затем решают уравнение для образа  $\hat{f}(k)$ , которое часто оказывается проще исходного, в силу того что производные функции заменяются умножением на волновые числа;
- (3) по найденному образу  $\hat{f}(k)$  с помощью обратного преобразования Фурье находят искомую функцию  $f(x)$ .

В интересующем нас приложении к однородному уравнению Штеенбека-Краузе-Редлера с постоянным потоком  $\mathbf{V}$  и постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\mathbf{V}_t = \text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \alpha \text{rot}(\mathbf{B}) + \beta \Delta \mathbf{B} \quad (47)$$

трехмерное преобразование Фурье (одномерное по каждой из координат) приводит задачу в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению по изложенной выше схеме. Действительно, рассмотрим ротор, стоящий в правой части уравнения среднего поля:

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (\partial_y B_z - \partial_z B_y, \partial_z B_x - \partial_x B_z, \partial_x B_y - \partial_y B_x) \text{ и состоящий из}$$

$$\text{производных вида } \partial_y B_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \iiint \hat{B}_z \cdot ik_y \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (48)$$

Таким образом,  $\widehat{\partial_y B_z} = ik_y \hat{B}_z$ , а образ ротора можно записать как

$$\widehat{\text{rot}(\mathbf{B})} = (B_z \cdot ik_y - B_y \cdot ik_z, B_x \cdot ik_z - B_z \cdot ik_x, B_y \cdot ik_x - B_x \cdot ik_y) = i[\mathbf{k}, \mathbf{B}] \quad (49)$$

Теперь рассмотрим лапласиан:

$$\Delta \mathbf{B} = (\partial_x^2 B_x + \partial_y^2 B_x + \partial_z^2 B_x, \partial_x^2 B_y + \partial_y^2 B_y + \partial_z^2 B_y, \partial_x^2 B_z + \partial_y^2 B_z + \partial_z^2 B_z) \quad (50)$$

$$\partial_x^2 B_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \iiint \hat{B}_x \cdot i^2 k_x^2 \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad \text{или} \quad \widehat{\partial_x^2 B_x} = -k_x^2 \cdot \hat{B}_x \quad (51)$$

Таким образом, образ лапласиана можно переписать в виде

$$\widehat{\Delta \mathbf{B}} = -k^2 \hat{\mathbf{B}} = -(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \hat{\mathbf{B}} \quad (52)$$

Рассмотрим, наконец, последнее слагаемое в правой части уравнения:

$$\text{rot}[\mathbf{V}\mathbf{B}] = [\nabla, [\mathbf{V}, \mathbf{B}]] = (V_x \partial_y B_y - V_y \partial_y B_x - V_z \partial_z B_x + V_x \partial_z B_z, \\ V_y \partial_z B_z - V_z \partial_z B_y - V_x \partial_x B_y + V_y \partial_x B_x, V_z \partial_x B_x - V_x \partial_x B_z - V_y \partial_y B_z + V_z \partial_y B_y) \quad (53)$$

причем первую компоненту вектора можно переписать как

$$V_x \partial_y B_y - V_y \partial_y B_x - V_z \partial_z B_x + V_x \partial_z B_z = V_x (\partial_y B_y + \partial_z B_z) - V_y \partial_y B_x - V_z \partial_z B_x \quad (54)$$

а поскольку магнитное поле соленоидальное и его дивергенция равна нулю, то можно заменить

$$\partial_y B_y + \partial_z B_z = -\partial_x B_x \quad (55)$$

Подставляем это в выражение (31) и получаем равенство

$$\text{rot}[\mathbf{V}, \mathbf{B}] = (-V_x \partial_x B_x - V_y \partial_y B_x - V_z \partial_z B_x, -V_x \partial_x B_y - V_y \partial_y B_y - V_z \partial_z B_y, -V_x \partial_x B_z - V_y \partial_y B_z - V_z \partial_z B_z) \quad (56)$$

Найдем сначала образ для координаты  $x$ :

$$(-V_x \partial_x B_x - V_y \partial_y B_x - V_z \partial_z B_x) \quad \text{соответствует} \quad (-V_x \cdot i k_x - V_y \cdot i k_y - V_z \cdot i k_z) \hat{B}_x = -i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{B}_x \quad (57)$$

Таким образом весь ротор можно переписать в компактном виде

$$\widehat{\text{rot}[\mathbf{V}\mathbf{B}]} = -i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{\mathbf{B}} \quad (58)$$

Объединяя вместе все выкладки, получаем, что образ однородного уравнения Штеенбек-Краузе-Рэдлера с постоянным потоком принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\partial_t \hat{\mathbf{B}} = -i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{\mathbf{B}} + \alpha \cdot i[\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}] - \beta \cdot (\mathbf{k}, \mathbf{k}) \hat{\mathbf{B}} \quad (59)$$

### 3.2 Решение и его образ в однородном случае

Попробуем решить полученное уравнение (59), переписав его в виде системы ОДУ

$$\begin{cases} \partial_t \hat{B}_x = \alpha i(k_y \hat{B}_z - k_z \hat{B}_y) - \beta k^2 \hat{B}_x - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{B}_x \\ \partial_t \hat{B}_y = \alpha i(k_z \hat{B}_x - k_x \hat{B}_z) - \beta k^2 \hat{B}_y - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{B}_y \\ \partial_t \hat{B}_z = \alpha i(k_x \hat{B}_y - k_y \hat{B}_x) - \beta k^2 \hat{B}_z - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \hat{B}_z \end{cases} \quad (60)$$

и подставив в нее экспоненциальную зависимость для магнитного поля

$$\hat{B}_x = \hat{B}_{x0} e^{\lambda t}, \quad \hat{B}_y = \hat{B}_{y0} e^{\lambda t}, \quad \hat{B}_z = \hat{B}_{z0} e^{\lambda t} \quad (61)$$

После ряда арифметических операций перепишем получившуюся систему в однородном виде

$$\begin{cases} \hat{B}_{x0} e^{\lambda t} (\lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V})) + \hat{B}_{y0} e^{\lambda t} (\alpha i k_z) + \hat{B}_{z0} e^{\lambda t} (-\alpha i k_y) = 0 \\ \hat{B}_{x0} e^{\lambda t} (-\alpha i k_z) + \hat{B}_{y0} e^{\lambda t} (\lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V})) + \hat{B}_{z0} e^{\lambda t} (\alpha i k_x) = 0 \\ \hat{B}_{x0} e^{\lambda t} (\alpha i k_y) + \hat{B}_{y0} e^{\lambda t} (-\alpha i k_x) + \hat{B}_{z0} e^{\lambda t} (\lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V})) = 0 \end{cases} \quad (62)$$

или, вынося экспоненту, в более привычном матричном виде

$$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) & \alpha i k_z & -\alpha i k_y \\ -\alpha i k_z & \lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) & \alpha i k_x \\ \alpha i k_y & -\alpha i k_x & \lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B}_{x0} \\ \hat{B}_{y0} \\ \hat{B}_{z0} \end{pmatrix} = 0 \quad (63)$$

Очевидно, что для того чтобы такая система имела нетривиальное решение, определить матрицы, содержащей в себе коэффициенты перед  $x, y$  и  $z$  компонентами  $\hat{B}_0$ , должен быть равен нулю. Вычисляя его получаем кубическое характеристическое уравнение относительно  $\lambda$

$$(\lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))^3 - (\lambda + \beta k^2 + i(\mathbf{k}, \mathbf{V})) \alpha^2 k^2 = 0 \quad (64)$$

три корня которого имеют вид

$$\lambda_1 = -\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}), \quad \lambda_2 = -\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) + \alpha k, \quad \lambda_3 = -\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) - \alpha k \quad (65)$$

Поставляя найденные корни в систему, находим собственные вектора, соответствующие каждому собственному значению (ФСР). Полученное решение системы принимает вид

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = C_1 \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))t} + C_2 \begin{pmatrix} k k_y + i k_z k_x \\ -k k_x + i k_z k_y \\ -i(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) + \alpha k)t} + C_3 \begin{pmatrix} -k k_y + i k_z k_x \\ k k_x + i k_z k_y \\ -i(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}) - \alpha k)t} \quad (66)$$

Причем в силу соленоидальности магнитного поля,  $(\nabla, \mathbf{B}) = 0$ , константа  $C_1$  равна нулю, так как первое слагаемое коллинеарно  $k$ . Поэтому можно переписать общее решение более в компактной форме

$$\hat{\mathbf{B}} = e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))t} \left[ \mathbf{k}, C_2 e^{\alpha k t} \begin{pmatrix} i k_y \\ -i k_x \\ k \end{pmatrix} + C_3 e^{-\alpha k t} \begin{pmatrix} i k_y \\ -i k_x \\ -k \end{pmatrix} \right] \quad (67)$$

Константы  $C_2$  и  $C_3$  находятся из начальных условий

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \left[ \mathbf{k}, C_2 \begin{pmatrix} i k_y \\ -i k_x \\ k \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} i k_y \\ -i k_x \\ -k \end{pmatrix} \right] \quad (68)$$

и после подстановки их

$$C_2 = \frac{i B_{0z} + B_{0x} k_y - B_{0y} k_x}{2k(k_x^2 + k_y^2)}, \quad C_3 = \frac{i B_{0z} - B_{0x} k_y + B_{0y} k_x}{2k(k_x^2 + k_y^2)} \quad (69)$$

в общее решение, мы получаем решение однородного уравнения Штеенбека-Краузе-Рэдлера в виде

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))t}}{2k(k_x^2 + k_y^2)} \left( (i \hat{B}_{0z} k + \hat{B}_{0x} k_y - \hat{B}_{0y} k_x) \begin{pmatrix} k k_y + i k_z k_x \\ -k k_x + i k_z k_y \\ -i(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} e^{k \alpha t} + (i \hat{B}_{0z} k - \hat{B}_{0x} k_y + \hat{B}_{0y} k_x) \begin{pmatrix} -k k_y + i k_z k_x \\ k k_x + i k_z k_y \\ -i(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} e^{-k \alpha t} \right) \quad (70)$$

Сгруппировав экспоненты в гиперболические функции и проделав ряд алгебраических преобразований, получаем конечное компактное выражение для магнитного поля в спектральном пространстве:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))t} \left( \text{ch}(k \alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \frac{\text{sh}(k \alpha t)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] \right) \quad (71)$$

а также после обратного преобразования Фурье и в  $\mathbf{r}$ -пространстве в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-\beta k^2 t} \left( \text{ch}(k \alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) + i \frac{\text{sh}(k \alpha t)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k})] \right) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{V}t)} d\mathbf{k} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \text{ch}(k \alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) e^{-\beta k^2 t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{V}t)} d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \nabla \times \iiint \frac{\text{sh}(k \alpha t)}{k} \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) e^{-\beta k^2 t + i(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{V}t)} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (72)$$

Полученные решения позволяют сделать ряд общих утверждений о поведении магнитного поля в однородной и изотропной среде:

(1) Постоянная средняя скорость движения турбулентного потока приводит к аналогичному движению структуры среднего магнитного поля, что характеризует показатель экспоненты  $i(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \mathbf{V}t)$  в равенстве (72). Поэтому для сокращения выкладок в дальнейшем разумно рассматривать уравнение среднего поля с нулевой средней скоростью  $\mathbf{V} = 0$ .

(2) В решении (71) гиперболические функции на больших временах ведут себя как экспоненты, соответственно наличие показателей экспонент  $-\beta k^2 t$  и  $k\alpha t$  характеризует то, что при ненулевых  $\alpha$  всегда есть такие волновые числа, на которых магнитное поле растет. Причем максимальная скорость роста (что проверяется взятием производной по  $k$ ) – равная  $\gamma = \alpha^2/4\beta$  – наблюдается вблизи волновых чисел  $k = \alpha/2\beta$ .

(3) Наличие вещественной и мнимой части магнитного поля из общих соображений приведет к наличию осцилляций по пространству-времени, хотя как будет ясно из примеров ниже с течением времени остаются только пространственные осцилляции, которые вероятно можно ассоциировать с эффектом перемежаемости для генерируемых магнитных полей. При этом остается открытым вопрос, каким образом будет расти энергия магнитного поля. Ответ на этот вопрос вытекает из формулы для плотности магнитной энергии:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{k}) &= \frac{B B^*}{\mu_0 2} = \frac{1}{2} e^{-2\beta k^2 t} \left( \text{ch}(k\alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \frac{\text{sh}(k\alpha t)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] \right) \left( \text{ch}(k\alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0^* - i \frac{\text{sh}(k\alpha t)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0^*] \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\beta k^2 t} \left( \text{ch}^2(k\alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{B}}_0^* + \frac{\text{sh}^2(k\alpha t)}{k^2} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0^*] - \frac{i \text{ch}(k\alpha t) \text{sh}(k\alpha t)}{k} \hat{\mathbf{B}}_0 [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0^*] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i \text{ch}(k\alpha t) \text{sh}(k\alpha t)}{k} \hat{\mathbf{B}}_0^* [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] \right) = e^{-2\beta k^2 t} \left( \text{ch}(2k\alpha t) E_0(\mathbf{k}) + \frac{\text{sh}(2k\alpha t)}{k} \frac{i(\mathbf{k}, [\hat{\mathbf{B}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0^*])}{2\mu_0} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Таким образом магнитная энергия, ожидаемо будет нарастать с максимальной скоростью в два раза большей скорости роста магнитного поля  $2\gamma = \alpha^2/2\beta$ . При этом в случае изначально зеркально симметричного  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(-\mathbf{r})$  или зеркально антисимметричного поля  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -\mathbf{B}_0(-\mathbf{r})$  (впрочем как и в случае чисто вещественного или чисто мнимого образа) формула совсем упростится, так как исчезнет последнее слагаемое из-за того что

$$\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{r}, \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{B}}_0^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint -\mathbf{B}_0(-\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (74)$$

а так как образы оказываются сонаправленными/противонаправленными их векторное произведение просто обращается в ноль. Заметим, при этом, что так как первое слагаемое в скобках всегда больше чем второе, то плотность энергии ожидаемо всегда будет неотрицательной, хотя может быть и весьма малой в случае значений близких к

$$\mathbf{k} \perp \text{Im}(\mathbf{B}_0) \perp \text{Re}(\mathbf{B}_0) \quad \text{и} \quad \text{Im}(\mathbf{B}_0) = \text{Re}(\mathbf{B}_0).$$

Пример роста плотности магнитной энергии представлен на рисунке (1). При начальном гауссовом распределении энергии по спектру с максимумом на 1 масштабе хорошо видно, что сначала энергия убывает, перераспределяясь на к энергонесущему масштабу, а потом экспоненциально нарастает вследствие работы динамо среднего поля. На правом рисунке при этом показано поведение со временем максимума плотности энергии, а на левом три спектра для выбранных моментов времени, нормированные на свое максимальное значение.

(4) Наконец, даже простейший анализ выражения для эволюции магнитного поля (72) на малых временах показывает, что наравне с компонентой параллельной начальному магнитному полю начинает нарастать поле параллельное начальной плотности тока. Действительно, раскладывая (72) по малым  $t$ , получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint (1 - \beta k^2 t + \dots) \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \nabla \times \iiint (\alpha t + \dots) \hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{k} = \quad (75)$$

$$= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + (\beta \cdot \Delta \mathbf{B}_0 + \alpha \cdot \text{rot}(\mathbf{B}_0))t + o(t),$$

где, соответственно, диффузия отвечает за затухание, а гидродинамическая спиральность – за рост магнитного поля вдоль ротора  $\text{rot}(\mathbf{B}_0)$  или, что то же самое, вдоль плотности тока. Таким образом, при наличии сильного тока поле начинает генерироваться вдоль него, что приводит к эффективному расширению среды, однако эффективных плазменных сил Лоренца при этом не появляется, то есть бессиловая плазма остается бессиловой!

### 3.3 Эволюция частных решений

Не стремясь рассмотреть общий случай, визуально продемонстрируем работу мГД-динамо в однородной и изотропной среде на примере двух начальных распределений магнитного поля.

**Пример 1.** Для неподвижной среды  $\mathbf{V} = 0$  рассмотрим случай однородного нелокализованного в спектральном пространстве поля  $\hat{\mathbf{B}}_0 = \text{const}$ . Строго говоря, такой пример не является математически и физически корректным, так как однородное поле не допускает Фурье-преобразование и обладает бесконечной энергией. Однако в рамках работы с конечными спектральными областями, благодаря диффузионной экспоненте в решении (72), мы можем использовать такое решение для оценки характерного масштаба пространственных осцилляций.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-\beta k^2 t} \left( \text{ch}(k\alpha t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \frac{\text{sh}(k\alpha t)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-\beta k^2 t} \text{ch}(k\alpha t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} + \text{rot} \left( \frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-\beta k^2 t} \frac{\text{sh}(k\alpha t)}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{-\beta k^2 t} \text{ch}(k\alpha t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} k^2 \sin(\theta) dk d\theta d\phi &= \frac{2\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\beta k^2 t} \text{ch}(k\alpha t) \frac{\sin(kr)}{r} k dk = \\ &= -\frac{\sqrt{2}\hat{\mathbf{B}}_0}{\sqrt{\pi r}} \frac{\partial}{\partial r} \int e^{-\beta k^2 t} \text{ch}(k\alpha t) \cos(kr) dk = -\frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{r(2\beta t)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t}\right) \cos\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) \right) = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\beta t)^{3/2}} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t}\right) \left( \cos\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) + \frac{\alpha t}{r} \sin\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) \right) \end{aligned} \quad (77)$$

Мы воспользовались формулой (40) для косинус преобразования Фурье из справочника [8]. Второе слагаемое преобразуется аналогично, что в итоге нам дает следующий вид магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\hat{\mathbf{B}}_0}{(2\beta t)^{3/2}} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t}\right) \left( \cos\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) + \frac{\alpha t}{r} \sin\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) \right) + \\ &+ \frac{[\hat{\mathbf{B}}_0, \mathbf{r}/r]}{(2\beta t)^{3/2}} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t}\right) \left( \frac{2\beta t + r^2}{r^2} \sin\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) - \frac{\alpha t}{r} \cos\left(\frac{\alpha r}{2\beta}\right) \right) \end{aligned} \quad (78)$$

Несмотря на громоздкость выражения и на то, что при малых  $t$  оно сингулярным образом обращается в бесконечность (в силу того что показатель диффузионной экспоненты обращается в ноль и пропадает интегрируемость), из этого решения можно сделать ряд интересных выводов. Во-первых, как было показано выше в общем случае, хорошо видно что магнитное поле растет со временем, при этом скорость экспоненциального роста пропорциональна  $\alpha^2/4\beta$ , а характерный масштаб осцилляций равен  $2\beta/\alpha$ . А во-вторых, из полученной формулы видно, что область, в которой растущее поле оказывается локализованно, увеличивается со временем, в частности, в  $e$  раз оно убывает примерно на масштабе  $r = \alpha t + 2\beta/\alpha$ , другими словами

чем больше гидродинамическая спиральность, тем быстрее расширяется область локализации сильного поля.

**Пример 2.** Для того чтобы убрать множественные сомнения в корректности постановки предыдущего примера рассмотрим реалистичное магнитное поле локализованное в начальный момент в сфере радиуса  $r_0$ . При этом соленоидальность поля мы учтем, задавая его через векторный потенциал вида

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \sim (0, 0, e^{-r^2/r_0^2}) = \mathbf{e}_z e^{-r^2/r_0^2} \Rightarrow \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{2}{r_0^2}(-y, x, 0)e^{-r^2/r_0^2}.$$

Так как начальное поле направлено в  $xy$ -плоскости, то понятно что при этом ток направлен вдоль оси  $Oz$ . образ начального магнитного поля, получаем после взятия Фурье преобразования:

$$\hat{\mathbf{B}}_0(\mathbf{k}) = -\frac{r_0^3}{2^{3/2}} \begin{pmatrix} -ik_y \\ ik_x \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(kr_0)^2/4} = -\frac{ir_0^3}{2^{3/2}} [\mathbf{e}_z, \mathbf{k}] e^{-(kr_0)^2/4},$$

а подставляя его в решение (72), приходим к интегралу

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{ir_0^3}{8\pi^{3/2}} \iiint e^{-k^2(\beta t + r_0^2/4)} \left( \text{ch}(kat) [\mathbf{e}_z, \mathbf{k}] + i \frac{\text{sh}(kat)}{k} [\mathbf{k}, [\mathbf{e}_z, \mathbf{k}]] \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \quad (79)$$

$$= \text{rot}(\phi \mathbf{e}_z) + \text{rot rot}(\psi \mathbf{e}_z), \quad \text{где}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{r_0^3}{8\pi^{3/2}} \iiint e^{-k^2(\beta t + r_0^2/4)} \text{ch}(kat) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = -\frac{r_0^3}{\sqrt{r_0^2 + 4\beta t}} \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{r_0^2 + 4\beta t}\right) \cos\left(\frac{2\alpha tr}{r_0^2 + 4\beta t}\right) \right)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{r_0^3}{8\pi^{3/2}} \iiint e^{-k^2(\beta t + r_0^2/4)} \frac{\text{sh}(kat)}{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} = \frac{r_0^3}{\sqrt{r_0^2 + 4\beta t}} \frac{1}{2r} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{r_0^2 + 4\beta t}\right) \sin\left(\frac{2\alpha tr}{r_0^2 + 4\beta t}\right)$$

Приведенные табличные интегралы можно также найти также в справочнике citeIntFurie. Упростив немного выражение (79) мы получаем следующую формулу для магнитного поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\phi' \left[ \mathbf{e}_z, \frac{\mathbf{r}}{r} \right] - \frac{(r\psi)'}{r} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\psi'}{r} \right) \mathbf{r}, \quad (80)$$

где верхние штрихи обозначают производные по  $r$ . Из этой формы хорошо видно, что первое азимутальное слагаемое направлено вдоль начального поля. Второе и третье слагаемые перпендикулярны начальному полю и направлены вдоль начального тока. При этом на плоскости  $xy$ , где  $z = 0$ , последнее слагаемое зануляется и остается только второе слагаемое характеризующее рост магнитного поля вдоль оси  $Oz$ . И азимутальная и аксиальная составляющие поля растут с той же скоростью и так же локализованы в пространстве, как и для формального случая, представленного в примере 1. **Забавным моментом является тот факт, что вблизи оси симметрии на  $r = 0$  в случае широкой начальной пространственной локализации решения  $r_0 \gg \sqrt{4\beta t}$  магнитное поле начинает осциллировать с частотой  $2\alpha r/r_0^2$  и расти не экспоненциально, а сверх экспоненциально, как**

$$\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{r_0^2}\right)$$

Поведение магнитных полей для разобранных примеров представлены на рисунке (2). На правой панели представлены зависимости азимутальной и аксиальной компоненты магнитного поля от времени, а на левой панели – пространственное распределение этих компонент в зависимости от радиус-вектора в плоскости  $Oxy$ . Для их построения были подсчитаны функции

$$-\phi' = \frac{r_0^3}{(r_0^2 + 4\beta t)^{5/2}} e^{\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t + r_0^2}} \left( \frac{2}{r} (r^2 - \alpha^2 t^2) \cos\left(\frac{2\alpha tr}{4\beta t + r_0^2}\right) + \frac{\alpha t}{r^2} (4r^2 + 4\beta t + r_0^2) \sin\left(\frac{2\alpha tr}{4\beta t + r_0^2}\right) \right)$$

$$-\frac{(r\psi)'}{r} = \frac{r_0^3}{(r_0^2 + 4\beta t)^{5/2}} e^{\frac{\alpha^2 t^2 - r^2}{4\beta t + r_0^2}} \left( \frac{\alpha t}{r} (4r^2 + 4\beta t + r_0^2) \cos\left(\frac{2\alpha t r}{4\beta t + r_0^2}\right) + \frac{1}{2r^2} (4r^2(\alpha^2 t^2 - r^2) - (4\beta t + r_0^2)^2) \sin\left(\frac{2\alpha t r}{4\beta t + r_0^2}\right) \right)$$

для значения параметров  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 0.1$  и  $r_0 = 100$ . При этом для графиков на правой панели выбрана зафиксированная координата  $r = 0.1$ , а для графиков на левой панели выбран зафиксированный момент времени  $t = 10^4$ . На представленных рисунках, как и ранее в решениях (71) и (72), четко видна и пространственная периодическая структура азимутального поля, появление компоненты поля сонаправленной начальному току, текущему вдоль оси  $Oz$ , экспоненциальный рост обоих компонент, в точности соответствующий скорости динамо-процесса среднего поля, а также сверхэкспоненциальный рост для аксиальной компоненты, наблюдаемый на самом начальном этапе эволюции. Таким образом, можно предположить, что эти черты обнаруженные для простейшего изотропного и однородного случая, в некотором виде будут свойственными и для более сложных неоднородных и неизотропных потоков.

## 4 Анализ неизотропного и неоднородного потока

В этом разделе мы постараемся ответить на вопрос о том, насколько сильно генерация среднего магнитного поля в неидеальных средах может отличаться от изотропного и однородного случая, разобранных выше. В рамках курсовой работы мы ограничимся лишь неизотропией и неоднородностью, оставив в силе предположения о несжимаемости среды, стохастической стационарности течения, о нулевой средней скорости и о малых временных корреляциях. Другими словами, мы будем использовать выведенную нами модель (40)

$$(A_t)_i = \left( \eta \delta_{ik} + \frac{1}{2} \langle v_l v_k \rangle \right) \nabla_k \nabla_l A_i + \frac{1}{2} \langle v_l \nabla_l v_k \rangle \nabla_k A_i + \langle v_k \nabla_i v_j \rangle \nabla_k A_j + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \langle v_j v_k \rangle A_j,$$

подходя к средним характеристикам с большей аккуратностью. Вводя обозначение

$$\eta \delta_{ik} + \frac{1}{2} \langle v_l v_k \rangle = \beta_{ik} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle = -\alpha_{il} \varepsilon_{ljk}$$

перекомбинируем слагаемые в (40) в виде

$$\begin{aligned} (A_t)_i &= \frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle \nabla_k A_j + \beta_{kl} \nabla_k \nabla_l A_i + \nabla_l \beta_{kl} \nabla_k A_i + \nabla_i \beta_{kl} \nabla_k A_l + \nabla_k \nabla_i \beta_{kl} A_l = \\ &= \frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle \nabla_k A_j + \nabla_l (\beta_{kl} (\nabla_k A_i - \nabla_i A_k)) = -\alpha_{il} \varepsilon_{ljk} \nabla_k A_j - \varepsilon_{ikj} \nabla_l (\beta_{kl} \varepsilon_{jrq} \nabla_r A_q) \end{aligned} \quad (81)$$

При этом изотропный случай напрямую следует из формулы (81) в предположении о том что двухиндексные тензоры  $\alpha_{il}$  и  $\beta_{kl}$  должны быть инвариантны к поворотам системы координат. Действительно, пользуясь тем, что единственная двухиндексная инвариантная комбинация должна быть пропорциональной символу Кронекера (см., например, [5]) и заменяя  $\alpha_{il} = \alpha \delta_{il}$  и  $\beta_{kl} = \beta \delta_{kl}$  мы сразу приходим к классической модели, рассмотренной выше. Основная проблема классического подхода в том, что в большинстве реальных физических динамо-систем в силу наличия выделенных осей вращения, дифференциального вращения, градиента плотности и многих других причин, течения не являются ни изотропными, ни однородными!

### 4.1 Тензор спиральности и тензор турбулентной диффузии

Рассмотрим еще раз введенные нами тензорные характеристики среды:

$$\beta_{kl} = \eta \delta_{kl} + \frac{1}{2} \langle v_l v_k \rangle \quad \text{и} \quad \alpha_{il} = -\frac{1}{4} \varepsilon_{ljk} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle = \frac{1}{2} [\mathbf{v}, \nabla_i \mathbf{v}]_l \quad (82)$$



Очевидно, что первый тензор является симметричным по индексам  $l$  и  $k$ , в то время как про второй этого сказать нельзя. Однако тензор спиральности может быть разделен на сумму симметричной и антисимметричной части как

$$\alpha_{il} = \frac{\alpha_{il} + \alpha_{li}}{2} + \frac{\alpha_{il} - \alpha_{li}}{2}.$$

Хорошо известно, что для симметричного тензора всегда можно найти такую систему отсчета, в которой он будет диагональным, однако для двух тензоров одновременно, это можно сделать не всегда, так как у них должна быть общая пространственная структура. Между тем физически реалистично, что такая система может существовать, например, связанная с осью вращения системы. Переходя в эту систему отсчета, оба 9ти индексных тензора можно записать через  $6 + 9$  компонент в виде

$$\beta_{kl} = \begin{pmatrix} \beta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha_{il} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{pmatrix} + \mathbf{g}_m \varepsilon_{mil}, \quad (83)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{g}_m = -\frac{1}{4} \langle (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}_m \rangle, \quad \alpha_{ii} = [\mathbf{v}, \nabla_i \mathbf{v}]_i / 2, \quad \beta_{ii} = \eta + \langle v_i^2 \rangle / 2$$

без суммирования по  $i$ . Другими словами при проведении аналогии с изотропным случаем можно сказать с функцией спиральности будет связан след такой диагональной матрицы. Примечательным является то, что в однородном случае вектор  $\mathbf{g}$  просто напросто обращается в ноль в силу условия несжимаемости и равенства нулю средней полной производной по пространству. И в этом случае уравнение принимает вид

$$\mathbf{V}_t = \text{rot} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} B_x \\ \alpha_{yy} B_y \\ \alpha_{zz} B_z \end{pmatrix} - \text{rot} \begin{pmatrix} \beta_{yy} \nabla_y B_z - \beta_{zz} \nabla_z B_y \\ \beta_{zz} \nabla_z B_x - \beta_{xx} \nabla_x B_z \\ \beta_{xx} \nabla_x B_y - \beta_{yy} \nabla_y B_x \end{pmatrix} = \text{rot} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} B_x \\ \alpha_{yy} B_y \\ \alpha_{zz} B_z \end{pmatrix} + (\beta_{xx} \nabla_x^2 + \beta_{yy} \nabla_y^2 + \beta_{zz} \nabla_z^2) \mathbf{V} \quad (84)$$

которое точно также как и для изотропного случая допускает решение с помощью преобразования Фурье, сводящего УРЧП к ОДУ.

## 4.2 Фурье-анализ однородного неизотропного случая

По аналогии с изотропным случаем проведем преобразование Фурье для уравнения (84) аналогично тому, как мы делали для однородного изотропного случая и получим:

$$\partial_t \hat{\mathbf{B}} = i[\mathbf{k}, \alpha_{kk} \hat{B}_k] - (\beta_{xx} k_x^2 + \beta_{yy} k_y^2 + \beta_{zz} k_z^2) \hat{\mathbf{B}} \quad (85)$$

Перепишем это уравнение в виде системы из трех уравнений

$$\begin{cases} \partial_t \hat{B}_x = i(k_y \alpha_{zz} \hat{B}_z - k_z \alpha_{yy} \hat{B}_y) - \delta \hat{B}_x \\ \partial_t \hat{B}_y = i(k_z \alpha_{xx} \hat{B}_x - k_x \alpha_{zz} \hat{B}_z) - \delta \hat{B}_y \\ \partial_t \hat{B}_z = i(k_x \alpha_{yy} \hat{B}_y - k_y \alpha_{xx} \hat{B}_x) - \delta \hat{B}_z \end{cases} \quad (86)$$

в которых для схожести с однородным случаем мы сделали замену

$$\delta = \beta_{xx} k_x^2 + \beta_{yy} k_y^2 + \beta_{zz} k_z^2.$$

и проделаем действия, аналогичные тем, которыми мы решали изотропный случай. Соответствующие собственные значения для этой системы будут иметь вид

$$\lambda_1 = -\delta, \quad \lambda_2 = -\delta + \gamma, \quad \lambda_3 = -\delta - \gamma, \quad (87)$$

$$\gamma = \sqrt{k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{xx} k_y^2 \alpha_{zz} + \alpha_{xx} \alpha_{yy} k_z^2}.$$

Далее, находя собственные векторы, один из которых исчезнет в силу нулевой дивергенции, записываем решение в виде

$$\hat{\mathbf{B}} = C_2 \begin{pmatrix} \gamma i k_y \alpha_{zz} - k_z k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ -\gamma i k_x \alpha_{zz} - k_z k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{xx} k_y^2 \alpha_{zz} \end{pmatrix} e^{-\delta t + \gamma t} + C_3 \begin{pmatrix} -\gamma i k_y \alpha_{zz} - k_z k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ \gamma i k_x \alpha_{zz} - k_z k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{xx} k_y^2 \alpha_{zz} \end{pmatrix} e^{-\delta t - \gamma t} = \quad (88)$$

$$= e^{-\delta t} \left[ \mathbf{k}, C_2 e^{\gamma t} \begin{pmatrix} -k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ i \gamma \alpha_{zz} \end{pmatrix} + C_3 e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ -i \gamma \alpha_{zz} \end{pmatrix} \right] \quad (89)$$

Как и для изотропного случая константы  $C_2$  и  $C_3$  могут быть посчитаны из начальных условий, что нам дает следующее выражение

$$\hat{\mathbf{B}} = e^{-\delta t} \left[ \mathbf{k}, \frac{i \gamma \alpha_{zz} \hat{B}_{0z} + \hat{B}_{0x} k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} - \hat{B}_{0y} k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz}}{2i \gamma \alpha_{zz} (k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + k_y^2 \alpha_{xx} \alpha_{zz})} e^{\gamma t} \begin{pmatrix} -k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ i \gamma \alpha_{zz} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{i \gamma \alpha_{zz} \hat{B}_{0z} - \hat{B}_{0x} k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} + \hat{B}_{0y} k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz}}{2i \gamma \alpha_{zz} (k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + k_y^2 \alpha_{xx} \alpha_{zz})} e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} -k_y \alpha_{xx} \alpha_{zz} \\ k_x \alpha_{yy} \alpha_{zz} \\ -i \gamma \alpha_{zz} \end{pmatrix} \right] \quad (90)$$

Проделав ряд простейших арифметических преобразований, получаем конечный ответ для образа магнитного поля:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = e^{-\delta t} \left( \text{ch}(\gamma t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \cdot \frac{\text{sh}(\gamma t)}{\gamma} [\mathbf{k}, \{\alpha_{xx} \hat{B}_{0x}, \alpha_{yy} \hat{B}_{0y}, \alpha_{zz} \hat{B}_{0z}\}] \right) \quad (91)$$

$$\text{где } \delta = \beta_{xx} k_x^2 + \beta_{yy} k_y^2 + \beta_{zz} k_z^2 \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{xx} k_y^2 \alpha_{zz} + \alpha_{xx} \alpha_{yy} k_z^2}$$

Обратное преобразование Фурье определит магнитное поле в  $r$ -пространстве, однако даже беглого взгляда достаточно, чтобы понять что получившийся интеграл для анизотропного случая взять аналитически уже так просто не получится. **Поэтому, не вычисляя обратного преобразования, попробуем сообразить, чем будет отличаться полученное решение (91) от решения (71) с пространственной изотропией:**

(1) так же как и в изотропном случае, формула (91) описывает экспоненциальное нарастание среднего поля (впрочем как и энергии), но в неизотропном случае в трех различных точках  $k$ -пространства, которые можно найти как локальный максимум функции  $(-\delta + \gamma)$ . Направления волнового вектора при этом совпадают с осями системы координат, (в которых тензор диагонален). Так гармоника с волновым вектором  $\mathbf{k} = (0, 0, \sqrt{\alpha_{xx} \alpha_{yy} / 2 \beta_{zz}})$  растет со скоростью  $\alpha_{xx} \alpha_{yy} / 4 \beta_{zz}$ . В связи с этим, одним из интересных свойств анизотропии является следующее: рассмотрим случай с выделенной осью  $Oz$ , так что

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha, \quad \alpha_{zz} = \bar{\alpha} \quad \text{и} \quad \beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta, \quad \beta_{zz} = \bar{\beta}.$$

Тогда вычисляя максимум функции  $(-\delta + \gamma)$  мы получаем два возможных экстремума:

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z = \frac{\alpha}{2\bar{\beta}} \quad \text{для} \quad \sim \exp\left(\frac{\alpha^2 t}{4\bar{\beta}}\right) \quad \text{и} \quad k_z = 0, \quad \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\sqrt{\alpha \bar{\alpha}}}{2\bar{\beta}} \quad \text{для} \quad \sim \exp\left(\frac{\alpha \bar{\alpha} t}{4\bar{\beta}}\right)$$

откуда, например, следует, что скорость генерации не поменяется при сколь угодно малом  $\alpha_{zz}$ , если компоненты спиральности  $\alpha_{xx}$  и  $\alpha_{yy}$  будут оставаться неизменными!

(2) так же как и в изотропном случае, на малых временах выражение (91) несложно проанализировать, получив информацию о том, насколько генерируемое поле будет отличаться от исходного. Соответствующий образ поля и оригинал будут иметь вид

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{V}}_0 + t \left( i[\mathbf{k}, \{\alpha_{xx}\hat{B}_{0x}, \alpha_{yy}\hat{B}_{0y}, \alpha_{zz}\hat{B}_{0z}\}] - \delta\hat{\mathbf{V}}_0 \right) + o(t) \quad (92)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0 + t \left( \text{rot} \begin{pmatrix} \alpha_{xx}B_{x0} \\ \alpha_{yy}B_{y0} \\ \alpha_{zz}B_{z0} \end{pmatrix} + (\beta_{xx}\nabla_x^2 + \beta_{yy}\nabla_y^2 + \beta_{zz}\nabla_z^2)\mathbf{V}_0 \right) + o(t) \quad (93)$$

Таким образом с начала генерации наблюдается как диффузия, уменьшающая магнитное поле, так и рост поля вдоль ротора вектора  $(\alpha_{xx}B_{x0}, \alpha_{yy}B_{y0}, \alpha_{zz}B_{z0})$ . **Это может быть интересным моментом, дело в том, что для изотропного случая поле росло вдоль начального поля и плотности тока и, если в начальный момент времени турбулентное течение было бессилковым, то и дальше оно должно оставаться таким. В анизотропном же случае, поле начинает генерироваться под углом к плотности тока – течение перестает быть бессилковым и начинает эффективно работать сила Лоренца.** Другими словами, если предположить азимутальную симметрию системы, в которой начальный ток направлен в плоскости  $xy$ , то в такой системе будет генерироваться среднее поле, тоже лежащее в плоскости  $xy$ , но не сонаправленное с током, в итоге в такой системе появится сила Лоренца, направленная в перпендикулярной к системе плоскости в аксиальном направлении.

(3) Вид фурье-образа анизотропной задачи не позволяет так же просто аналитически восстановить оригинал магнитного поля, поэтому мы восстанавливаем его численно для начального поля из примера 2 (см. разбор примеров для изотропного потока):

$$\hat{\mathbf{V}}_0(\mathbf{k}) = -\frac{i r_0^3}{2^{3/2}} [\mathbf{e}_z, \mathbf{k}] e^{-(kr_0)^2/4}$$

Для этого считаем обратное преобразование Фурье в  $\mathbf{k}$ -кубе  $[-0.1; 0.1] \times [-0.1; 0.1] \times [-0.1; 0.1]$  с  $10^6$  ячеек, восстанавливая  $r$ -зависимости (левые панели) и временные зависимости (правые панели) для значений параметров  $\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = 1$  и различных значений спиральности, описанных на рисунках 3 и 4. При этом можно утверждать, что в полном соответствии с пунктом (1):

- увеличение  $\alpha_{zz}$  в  $\sqrt{2}$  раз приводит к такому же увеличению показателя роста поля и уменьшению масштаба осцилляций в  $2^{1/4}$  раза (рис.3, красные кривые);
- увеличение  $\alpha_{xx}$  и  $\alpha_{yy}$  в  $\sqrt{2}$  раз приводит к двойному увеличению показателя роста поля и уменьшению масштаба осцилляций в  $\sqrt{2}$  раз (рис.3, синие кривые, нарушение периодической структуры вблизи  $r = 0$  связано с перераспределением начального поля);
- уменьшение  $\alpha_{zz}$  практически никоим образом на показатель роста поля не влияет (см. рис.4, зеленые кривые соответствуют уменьшению  $\alpha_{zz}$  в 100 раз, при этом видно что скорость роста всех трех компонент магнитного поля не изменилась по сравнению с изотропным случаем). Левый рисунок при таком уменьшении показывает сильное увеличение масштаба осцилляций, хотя нами было предсказано что  $k_z = \alpha_{xx}/4\beta_{zz}$  не поменяется. Между тем, это происходит из-за того, что максимальная скорость генерации – это скорость генерации гармоник в  $(0, 0, k_z)$  направлении, на рисунке же представлена радиальная зависимость в  $xy$ -плоскости, масштаб которой должен существенно увеличиться, так как он пропорционален корню из  $\alpha_{zz}$ .

### 4.3 Неоднородная турбулентность

Самое нереалистичное, но самое упрощающее предположение, которое было сделано нами выше – это предположение об однородности. В различных физических задачах, конечно, можно представить как однородную изотропную, так и однородную неизотропную плазму, но только

при рассмотрении некоторой локализованной области. При рассмотрении же реальных астрофизических объектов, в любом случае придется рассматривать неоднородность, хотя бы из-за конечности размеров планет, звезд и галактик. А тот факт, что динамо среднего поля в первую очередь описывает магнитные поля сопоставимые с размером астрофизических объектов, еще больше обостряет эту проблему.

Даже отставив в сторону поиск аналитических решений – с которыми явно возникнут большие сложности при анализе неоднородной турбулентности – мы не можем поступить топорно, взяв просто в полученном уравнении среднего поля (44) зависящие от  $\mathbf{r}$  параметры спиральности  $\alpha(\mathbf{r})$  и магнитной диффузии  $\beta(\mathbf{r})$ . Действительно, для изотропного случая, классическое определение гидродинамической спиральности задается через уравнение (42):

$$\langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle / 2 = -\alpha \varepsilon_{ijk}$$

Но проводя суммирование по индексам  $i$  и  $j$ , в правой части мы получаем ноль, в то время как в левой части остается конвективная производная Лагранжа  $-\langle v_i \nabla_i v_k \rangle / 2$  (первая часть исчезает в силу бездивергентности потока  $\nabla_i v_i = 0$ ). Очевидно, что чтобы конструкция  $-\langle (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \rangle / 2$  равнялась нулю, необходимо чтобы  $\nabla_i \langle v_i v_k \rangle / 2 = 0$ , что всегда выполняется для однородного потока, а для неоднородного наоборот требует большой специфики?

Ситуация становится более понятной в анизотропном случае, который был разобран выше. Действительно, вводя тензор спиральности и тензор диффузии

$$\eta \delta_{lk} + \frac{1}{2} \langle v_l v_k \rangle = \beta_{lk} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle = -\alpha_{il} \varepsilon_{ljk}$$

перепишем спиральность через сумму симметричной и антисимметричной части (см. выше), и получим

$$\alpha_{il} = -\frac{1}{4} \varepsilon_{ljk} \langle v_k \nabla_i v_j - v_j \nabla_i v_k \rangle = \bar{\alpha}_{il} + \mathbf{g}_m \varepsilon_{mil} \quad (94)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{g}_m = -\frac{1}{4} \langle (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}_m \rangle, \quad \bar{\alpha}_{il} = \frac{1}{4} ([\mathbf{v}, \nabla_i \mathbf{v}]_l + [\mathbf{v}, \nabla_l \mathbf{v}]_i)$$

Здесь мы не совсем честно предполагаем, что существует такая система отсчета в которой антисимметричная часть выражается через символ Леви-Чивиты. Мы не знаем насколько правильно так делать, однако это не протеворечит антисимметричности по индексам  $i$  и  $l$ , поэтому мы остановимся на таком предположении в рамках этой курсовой работы. Запишем уравнение среднего поля при такой замене как

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \text{rot} (\bar{\alpha}_{il} B_l + g_m \varepsilon_{mil} B_l - \varepsilon_{ikj} \nabla_l \beta_{kl} B_j) = \\ &= \text{rot} \left( \bar{\alpha}_{il} B_l - \beta_{kl} \varepsilon_{ikj} \nabla_l B_j - \frac{1}{4} \varepsilon_{mil} \langle v_l \nabla_l v_m \rangle B_l - \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} \langle v_l \nabla_l v_k \rangle B_j \right) = \\ &= \text{rot} \left( \bar{\alpha}_{il} B_l - \beta_{kl} \varepsilon_{ikj} \nabla_l B_j - \frac{1}{4} [(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}], \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (95)$$

В случае выбора системы координат, в которых симметричные тензоры спиральности и диффузии имеют диагональный вид, мы получаем почти классическое уравнение среднего поля со сносом  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{B}_t = \text{rot} (\bar{\alpha}_{ii} \mathbf{B} - \beta_{ii} \text{rot}(\mathbf{B}) + [\mathbf{V}, \mathbf{B}]) \quad (96)$$

поведение которого определяют вектор-функции

$$\bar{\alpha}_{ii} = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{v}, \nabla_i \mathbf{v}]_i \rangle, \quad \beta_{ii}(\mathbf{r}) = \eta \delta_{ii} + \frac{1}{2} \langle v_i^2 \rangle \quad \text{и} \quad V_i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4} \langle v_l \nabla_l v_i \rangle = -\frac{1}{2} \nabla_i \langle v_i^2 \rangle. \quad (97)$$

И если в каждой локализованной подобласти, в которой функции постоянны, мы вправе ожидать эффекты характерные для однородного неанизотропного случая, описанного выше, плюс квазистационарный перенос с пропорциональной конвективной производной скоростью, то в глобальной неоднородной постановке динамо-задача, конечно, требует численного решения уравнения (96) с заданными потоковыми условиями (97).

## 5 Обсуждение и основные выводы

Теория среднего поля описывает генерацию магнитных полей в проводящих турбулентных средах. Такая генерация лежит в основе формирования магнитных оболочек и планет, и звезд, и галактик. Однако экспериментальное исследование подобного формирования сильно затруднено жесткими требованиями к масштабам установок, к скоростям турбулентных потоков, к высокой проводимости сред с одной стороны и ограничениями астрофизических наблюдений с другой. Поэтому на данном этапе построения теории любые аналитические результаты являются не только интересными, но и весьма полезными. В настоящей курсовой работе мы пытаемся рассмотреть один из вопросов теории среднего поля, связанный с потоковой анизотропией.

Для этого мы повторяем вывод основного уравнения среднего поля с помощью мультипликативного подхода, предложенного в работах Молчанова, Рузмайкина и Соколова, стараясь сохранить возможность неизотропной и неоднородной постановки. Особенность вывода заключается в том, что он строится не вокруг среднего магнитного поля, а вокруг среднего векторного потенциала, для которого получается уравнение (40):

$$(A_t)_i = \beta_{kl} \nabla_k \nabla_l A_i + \frac{1}{2} \langle v_l \nabla_l v_k \rangle \nabla_k A_i + \langle v_k \nabla_i v_j \rangle \nabla_k A_j + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_i \langle v_j v_k \rangle A_j.$$

Соответствующие уравнения для магнитного поля, после извлечения ротора, принимают классический вид (47) для однородного и изотропного случая, вид (84) для однородного неизотропного случая, и самый общий вид (96) для случая неоднородного:

$$\mathbf{B}_t = \text{rot} (\bar{\alpha}_{il} B_l - \beta_{kl} \varepsilon_{ikj} \nabla_l B_j + [\mathbf{V}, \mathbf{B}]_i)$$

$$\bar{\alpha}_{il} = \frac{1}{4} ([\mathbf{v}, \nabla_i \mathbf{v}]_l + [\mathbf{v}, \nabla_l \mathbf{v}]_i), \quad \beta_{kl}(\mathbf{r}) = \eta \delta_{kl} + \frac{1}{2} \langle v_k v_l \rangle \quad \text{и} \quad V_i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4} \langle v_l \nabla_l v_i \rangle.$$

Для последнего было обнаружено два примечательных факта: во-первых, предположение неоднородности, автоматически приводит к необходимости рассмотрения неизотропной задачи и введения тензора спиральности, а, во-вторых, неизотропия обеспечивает перенос генерируемого среднего магнитного поля со скоростью пропорциональной ее конвективной производной.

Для однородной постановки задачи о генерации поля были исследованы с помощью трехмерного фурье-преобразования. Сводя уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, были получены решения в  $k$ -пространстве и для изотропного (71) и для неизотропного случая (91). Для изотропной турбулентности анализ решения (71):

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = e^{(-\beta k^2 - i(\mathbf{k}, \mathbf{V}))t} \left( \text{ch}(kat) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \frac{\text{sh}(kat)}{k} [\mathbf{k}, \hat{\mathbf{B}}_0] \right)$$

а также его фурье-оригинала, разбор численных и аналитических примеров показали, что

(1) Постоянная средняя скорость движения турбулентного потока  $\mathbf{V}$  приводит к однородному переносу среднего магнитного поля с той же скоростью.

(2) На больших временах максимальный рост магнитного поля  $\gamma = \alpha^2/4\beta$  наблюдается для гармоник с длиной волны  $k = \alpha/2\beta$ . Однако, на начальных временах для поля, локализованного на масштабе  $r_0$ , может наблюдаться сверхэкспоненциальный рост (см. разбор примеров для изотропного потока и рис.2)

$$\sim \exp(\alpha^2 t^2 / r_0^2)$$

(3) Кроме того, разложение Тейлора вблизи малых  $t$  показывает, что наравне с компонентой параллельной начальному магнитному полю начинает нарастать поле параллельное начальной плотности тока, тем быстрее, чем больше гидродинамическая спиральность

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + (\beta \cdot \Delta \mathbf{B}_0 + \alpha \cdot \text{rot}(\mathbf{B}_0))t + o(t) \quad (98)$$

Таким образом, при наличии сильного тока поле начинает генерироваться вдоль него, что приводит к постепенному расширению среды, однако эффективных плазменных сил Лоренца в турбулентных потоках при этом не появляется, то есть бессиловая плазма остается бессиловой.

(4) Наконец, плотность генерируемой магнитной энергии (73):

$$E(\mathbf{k}, t) = e^{-2\beta k^2 t} \left( \text{ch}(2k\alpha t) E_0(\mathbf{k}) + \frac{\text{sh}(2k\alpha t)}{k} \frac{i(\mathbf{k}, [\hat{\mathbf{B}}_0, \hat{\mathbf{B}}_0^*])}{2\mu_0} \right)$$

перераспределяется так, что формируется пик вблизи  $k = \alpha/2\beta$  который растет затем со скоростью в два раза большей скорости роста магнитного поля до тех пор пока не начинают работать нелинейные эффекты.

Для анизотропного случая, описываемого формулой (91):

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) = e^{-\delta t} \left( \text{ch}(\gamma t) \hat{\mathbf{B}}_0 + i \frac{\text{sh}(\gamma t)}{\gamma} [\mathbf{k}, \{\alpha_{xx} \hat{B}_{0x}, \alpha_{yy} \hat{B}_{0y}, \alpha_{zz} \hat{B}_{0z}\}] \right)$$

$$\text{где } \delta = \beta_{xx} k_x^2 + \beta_{yy} k_y^2 + \beta_{zz} k_z^2 \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{k_x^2 \alpha_{yy} \alpha_{zz} + \alpha_{xx} k_y^2 \alpha_{zz} + \alpha_{xx} \alpha_{yy} k_z^2}$$

мы получаем аналогичные эффекты, хотя и немного отличающиеся от изотропного .

(5) во-первых, для неизотропного случая скорость роста определяется экстремумом функции  $f(k_x, k_y, k_z) = (-\delta + \gamma)$ . Направления волнового вектора при этом совпадают с осями системы координат, (в которых тензор диагонален), так гармоника с волновым вектором  $\mathbf{k} = (0, 0, \sqrt{\alpha_{xx} \alpha_{yy} / 2\beta_{zz}})$  растет со скоростью  $\alpha_{xx} \alpha_{yy} / 4\beta_{zz}$ . Интересным следствием здесь является то что, если компоненты спиральности  $\alpha_{xx}$  и  $\alpha_{yy}$  остаются неизменными, уменьшение  $\alpha_{zz}$  может вообще не повлиять на скорость работы динамо среднего поля (см. рис. 3 и 4).

(6) во-вторых, для неизотропного случая разложение в ряд Тейлора показывает, что на малых временах наравне с диффузией наблюдается рост магнитного поля вдоль ротора вектора  $(\alpha_{xx} B_{x0}, \alpha_{yy} B_{y0}, \alpha_{zz} B_{z0})$ :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + t \left( \text{rot} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} B_{x0} \\ \alpha_{yy} B_{y0} \\ \alpha_{zz} B_{z0} \end{pmatrix} + (\beta_{xx} \nabla_x^2 + \beta_{yy} \nabla_y^2 + \beta_{zz} \nabla_z^2) \mathbf{B}_0 \right) + o(t)$$

Другими словами, в отличие от изотропного течения поле уже начинает генерироваться под углом к плотности тока – течение перестает быть бессиловым, даже если изначально оно было таким, и начинает эффективно работать сила Лоренца.

Без сомнения обнаруженные свойства крупномасштабной генерации получены для идеализированных несжимаемых сред с малыми временными корреляциями потока и в применении к каждому отдельному астрофизическому объекту они должны перепроверяться наблюдениями и численными расчетами, что в свою очередь, значительно превосходит масштабы курсовой работы. Исследование проводилось при научном руководстве с.н.с. физического факультета МГУ Егора Владиславовича Юшков (yushkov.msu@mail.ru), возникающие вопросы можно присылать по адресу (ramin.a.verdi@gmail.com).

20.05.2020

## Список литературы

- [1] E. Parker, Hydromagnetic dynamo models, *Astrophys. J.*, 122 (293), 1955
- [2] Д.Д. Соколов, Проблемы магнитного динамо, *УФН*, 185(6), 2015
- [3] А.П. Казанцев, Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью, *ЖЭТФ*, 53, 1967
- [4] С.А. Молчанов, А.А.Рузмайкин, Д.Д. Соколов, Кинематическое динамо в случайном потоке, *Успехи физических наук*, 1985
- [5] Ф. Краузе, К.Х. Рэдлер, *Магнитная гидродинамика средних полей*, 1984
- [6] Ю.П. Пытьев, И.А.Шишмарев, *Теория вероятностей и математическая статистика*, 2010
- [7] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Основы математического анализа*. Физматлит, 2005
- [8] Г. Бэйтман, А. Эрдейн, *Таблицы интегральных преобразований*, Изд. Наука, стр.344, 1968.

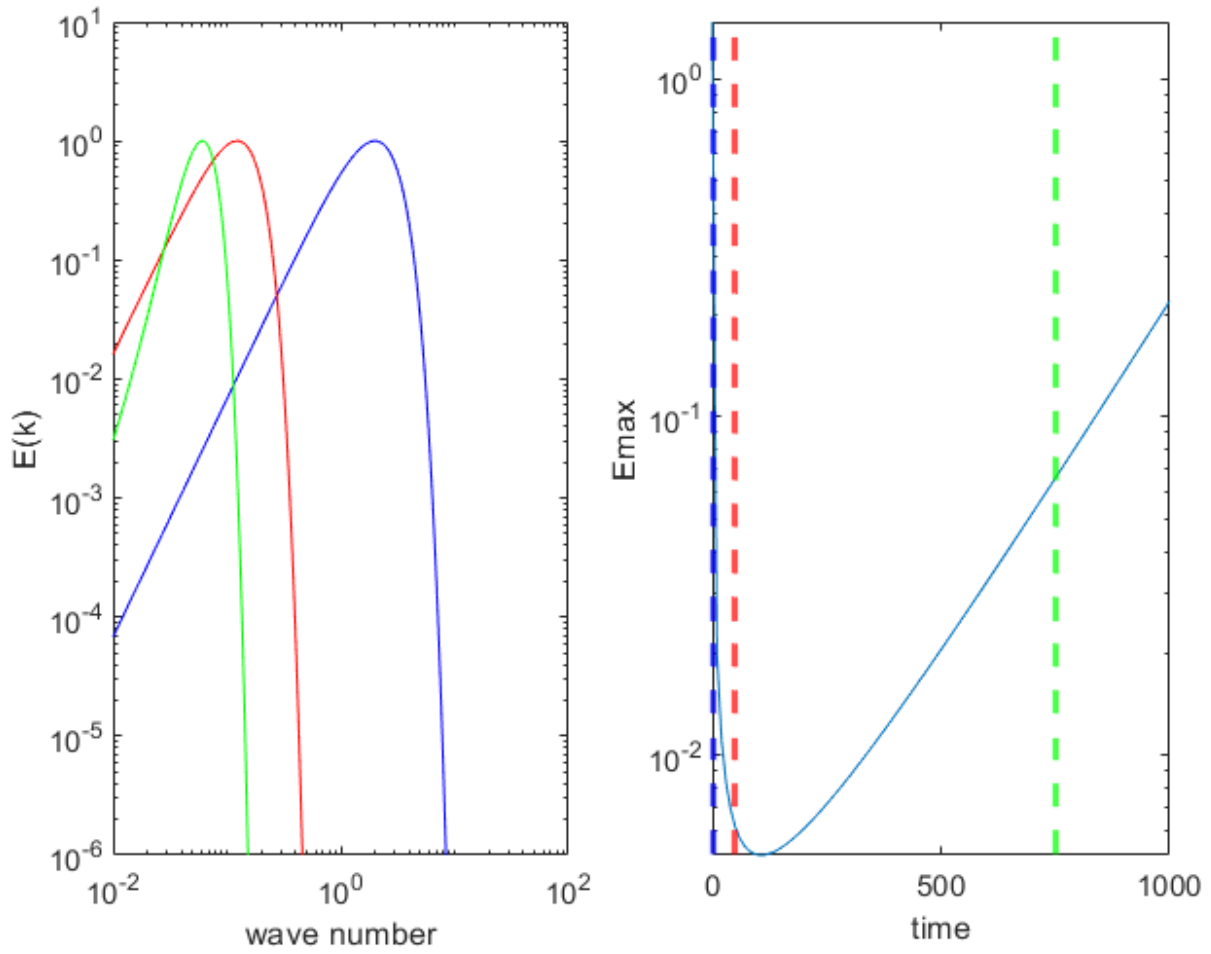


Рис. 1: На левой панели представлены спектры плотности энергии в изотропном потоке для трех моментов времени, нормированные на свои максимальные значения. На правой панели изображена временная эволюция максимума плотности и три момента времени, выбранные для левого рисунка.



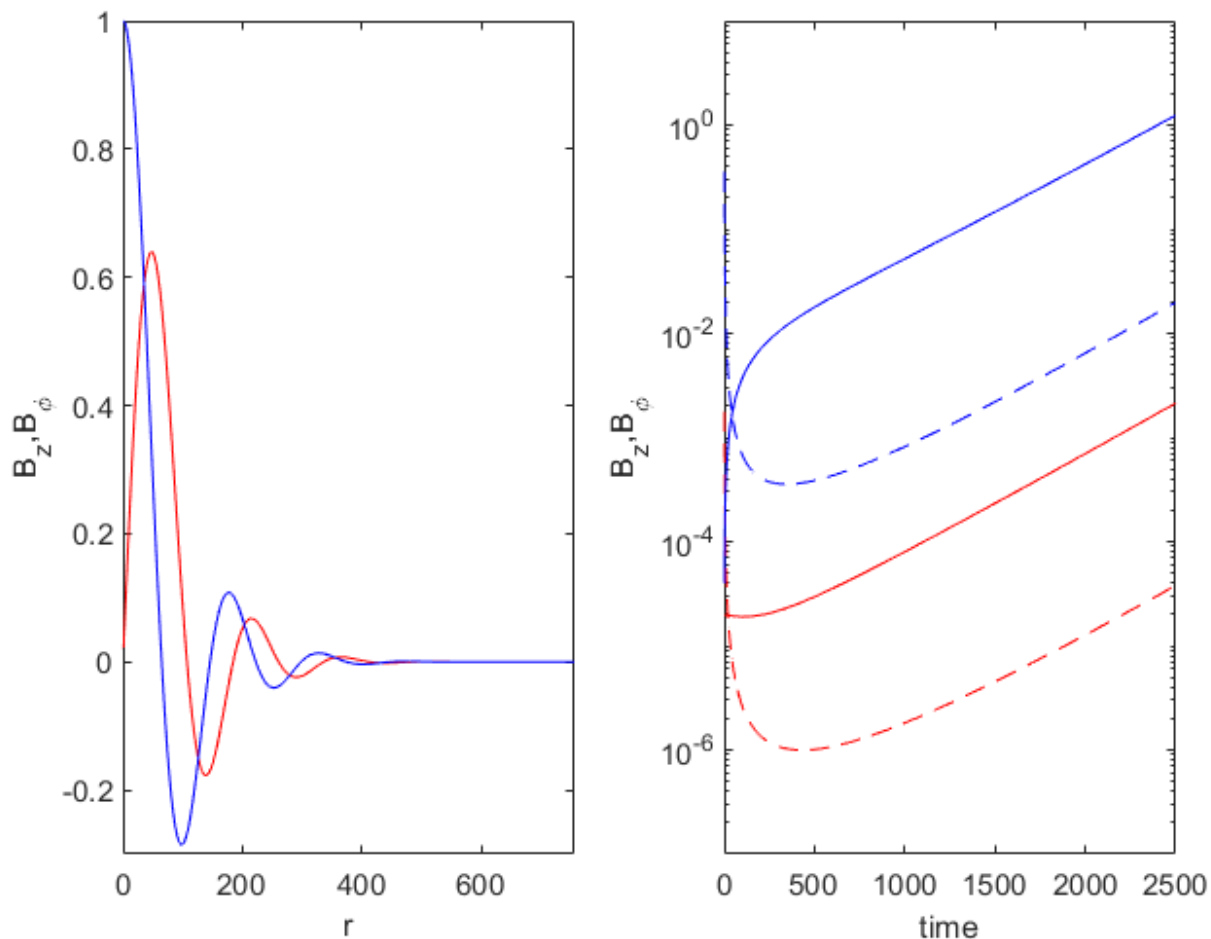


Рис. 2: На левой панели представлены зависимости аксиальной и азимутальной компоненты магнитной индукции от радиус-вектора при фиксированном времени, на правой панели – зависимости от времени при фиксированной координате. Сплошные линии на обоих рисунках характеризуют изотропный случай, разобранный в примере 2 (красная линия азимутальная компонента, синяя линия аксиальная компонента), а штриховые линии для временной зависимости соответствуют изотропному случаю, разобранным в примере 1. Соответствующие значения параметров  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 1$ ,  $r_0 = 100$ , а также  $t = 10^4$  для левой панели и  $r = 0.1$  для правой панели.

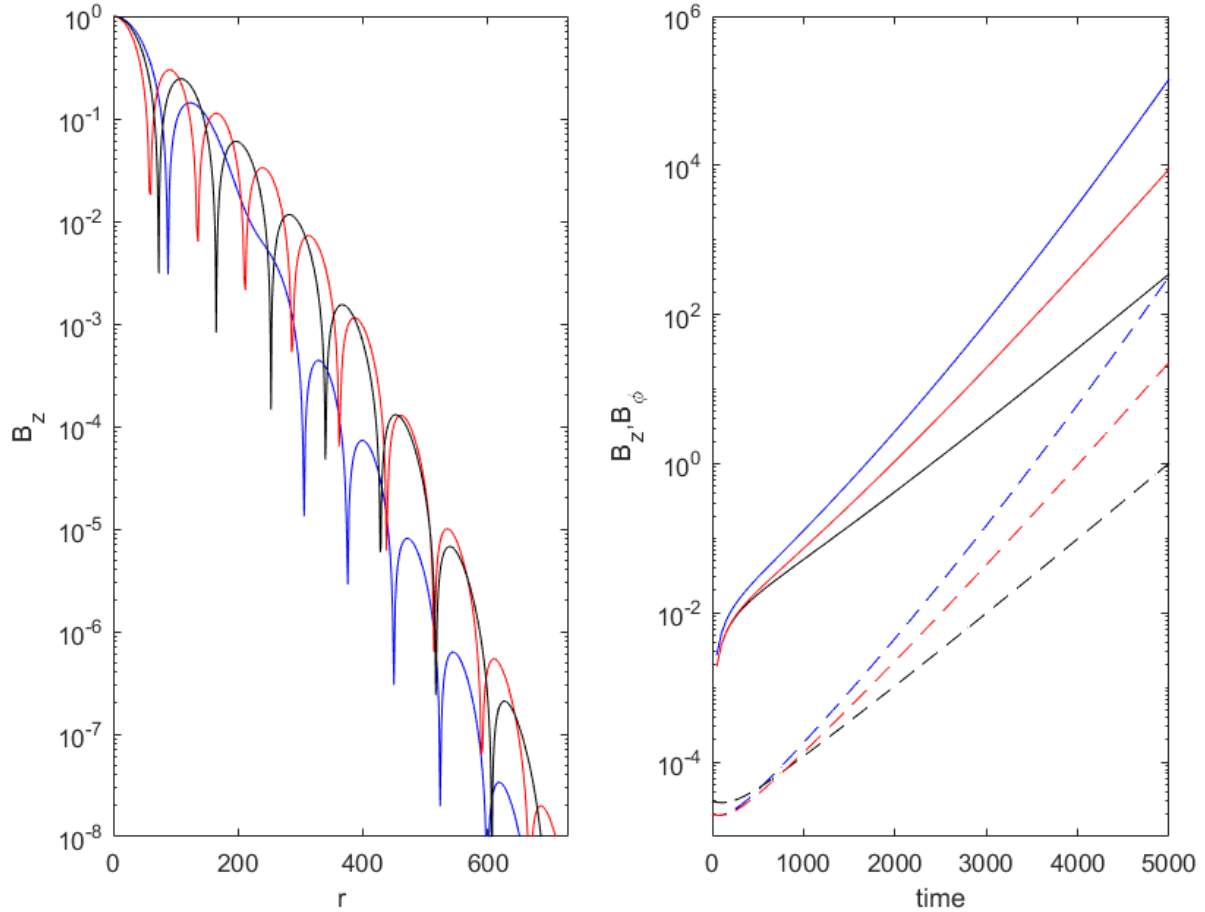


Рис. 3: На левой панели представлены зависимости аксиальной компоненты магнитной индукции от радиус-вектора при фиксированном времени, на правой панели – зависимости от времени аксиальной (штриховые линии) и азимутальной компоненты (слошные линии) при фиксированной координате. Синий цвет на обоих рисунках соответствует случаю  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \sqrt{2}/10, \alpha_{zz} = 0.1$ , красный -  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0.1, \alpha_{zz} = \sqrt{2}/10$ , а черный – изотропному случаю при  $\alpha = 0.1$ , разобранному в примере 2. Во всех случаях  $\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = \beta = 1, r_0 = 100$ , а также  $t = 5 * 10^3$  для левой панели и  $r = 0.1$  для правой.

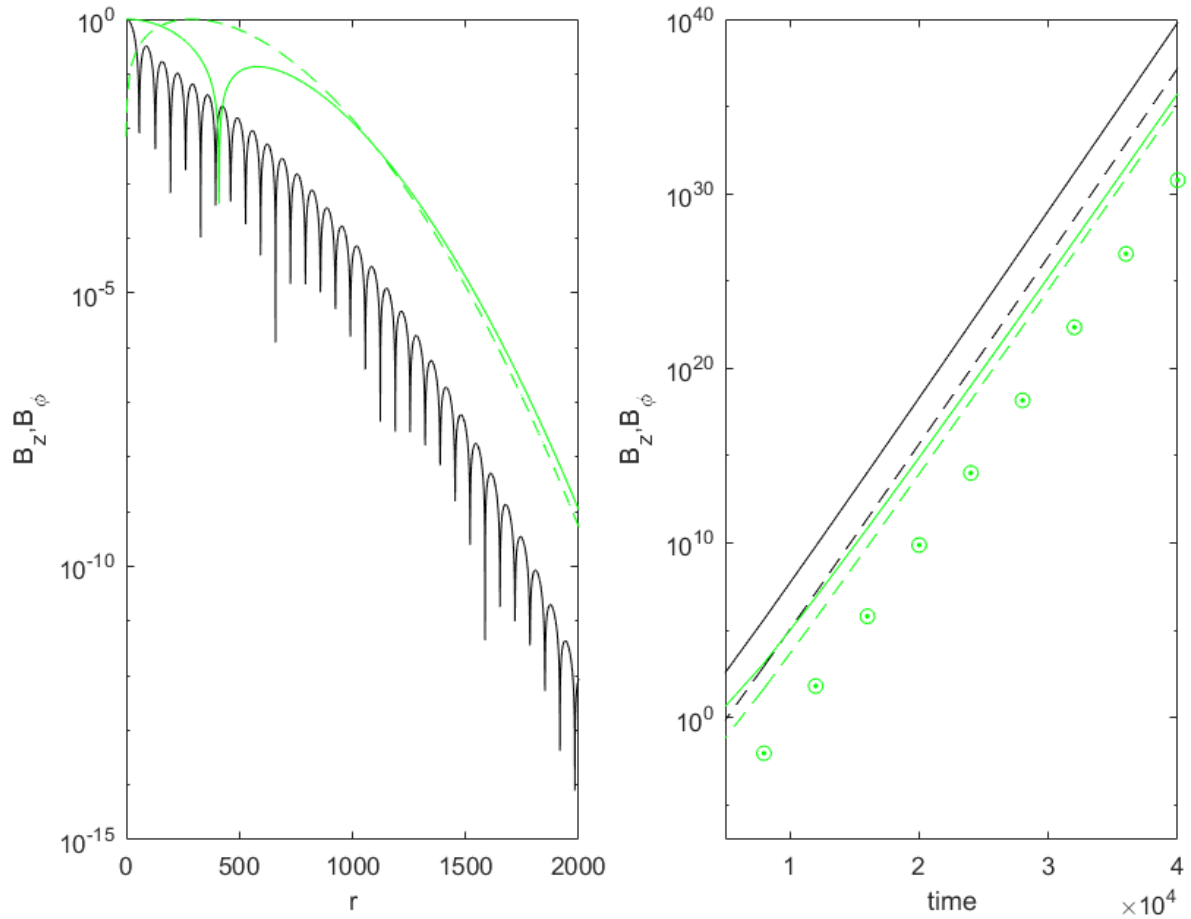


Рис. 4: На левой панели представлены зависимости аксиальной компоненты (сплошная линия) и азимутальной компоненты (штриховая линия) магнитного поля от радиус-вектора при фиксированном времени, на правой – аналогичные зависимости от времени при фиксированной координате (точками представлена радиальная компонента). Зеленые линии на обоих рисунках характеризуют случай  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0.1, \alpha_{zz} = 0.1/100$ , черные описывают изотропный случай  $\alpha = 0.1$  из примера 2. Во всех случаях  $\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = \beta = 1, r_0 = 100$ , а также  $t = 4 * 10^4$  для левой панели и  $x = y = z = 0.1/\sqrt{3}$  для правой.