О ПРОЕКТИВНОМ МОРФИЗМЕ ГЕЛЬФАНДА

Верёвкин А.Б., Кондратьев А.В.

Некоммутативная геометрия по Серру и Манину

Пусть $A = \oplus_{i\geq 0}A_i$ — ассоциативная градуированная алгебра конечнопорождённая над полем $k{=}A_0$; $\mathfrak{gr}{-}A$ — категория $\mathbb{Z}$-градуированных правых A-модулей, $\mathfrak{tors}$ — её плотная подкатегория локально конечномерных модулей.

Зафиксируем следующие обозначения:

- $\hom_A(X,Y){:=}\hom_{\mathfrak{gr}-A}(X,Y)$ — морфизмы категории $\mathfrak{gr}{-}A$, сохраняющие
  градуированные степени однородных элементов, то есть морфизмы нулевой степени однородности;

- $\mathrm{HOM}_A(X,Y)_n{:=}\hom_{\mathfrak{gr}-A}(X,Y[n])$ — морфизмы n-ной степени, повышающие степень однородного элемента на n;

- $\mathrm{HOM}_A(X,Y){:=}\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{HOM}_A(X,Y)_n$ — полная группа морфизмов, в том смысле, что относительно них модуль A_A является образующим категории $\mathfrak{gr}{-}A$. Если X является градуированным A-бимодулем, тогда группа $\mathrm{HOM}_A(X,Y) \in \mathcal{O}\boldsymbol{b}(\mathfrak{gr}{-}A)$. В частности, $\mathrm{HOM}_A(A,Y) \cong Y$.

В работе [1] по существу доказано, что над коммутативной алгеброй A фактор-категория $\mathfrak{gr}{-}A/\mathfrak{tors}$ эквивалентна категории $\mathfrak{Qco}(X)$ — квазикогерентных пучков над схемой $X{=}\operatorname{Proj} A$ (обозначение $\mathfrak{Qco}$ заимствовано из [2, стр. 263]). Фактически Серр доказывал утверждения для когерентных пучков, но имея в виду ненётеровое обобщение его результатов, будем опускать условия конечной порождённости и представленности модулей. Теоремы [1, стр. 426, 432] переформулируются следующим образом:

$$\mathfrak{Qco}(X) \overset{\underline{\mathrm{H}}^0}{\rightsquigarrow} \mathfrak{gr}{-}A \rightsquigarrow \mathfrak{Qco}(A)$$

— эквивалентность категорий, где полные глобальные сечения определяются на объектах правилом $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathcal{F}) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}^0(X,\mathcal{F}(n))$.

Далее в [1] доказываются результаты о когомологиях пучков:

- $\underline{\mathrm{H}}^i{:=}R^i\underline{\mathrm{H}}^0(\mathcal{F}) \cong R^i\,\mathrm{HOM}_{\mathfrak{Qco}(A)}(A,\underline{\mathrm{H}}^0(\mathcal{F})){=:}\,\mathrm{EXT}^i_{\mathfrak{Qco}(A)}(A,\mathrm{H}^0(\mathcal{F}))$;
- если $\mathcal{F}$ когерентен, модули $\underline{\mathrm{H}}^{>0}(\mathcal{F})$ — конечномерны;
- если F_A — конечнопорождённый модуль, морфизм $F \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^0(\mathcal{F})$ в $\mathfrak{gr}{-}A$ имеет конечномерное ядро и коядро из $\mathfrak{tors}$. В частности, этим свойством "почти изоморфности"обладает морфизм $A \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^0(\mathcal{O}_X)$.

Эти результаты были доказаны в коммутативной ситуации, когда строится схема $X{=}\,\mathrm{Proj}\,A$, но, как заметил Ю.И. Манин, категория $\mathfrak{Qco}(A)$ хорошо определяется даже над некоммутативной алгеброй A (конечнопорождённости её хватает для того, чтобы $\mathfrak{Qco}(A)$ была абелевой и инъективно богатой). Таким образом, можно построить теорию когомологий Серра над некоммутативной алгеброй, если определить

$$\underline{\mathrm{H}}^i_A(F) := \mathrm{EXT}^i_{\mathfrak{Qco}(A)}(A,F)$$

где модуль $F \in \mathcal{O}\boldsymbol{b}(\mathfrak{gr}{-}A)$ рассматривается как “квазикогерентный пучок Серра” над гипотетическим “$\mathrm{Proj}\,A$”, не имеющим пока правильного определения, несмотря на обилие соображений по этому поводу. Обрисованная версия некоммутативной проективной геометрии получила развитие в работах ([3, 4, 5, 6]) и других. Заметим для определённости, что данный подход отличен от “некоммутативной квантовой геометрии” ([7, 8]), которая является аффинной и выросла из изучения алгебраических групп. В то время как аффинный вариант изучаемой теории совпадает с теорией модулей. Так же он отличен от версий некоммутативной геометрии [9, 10], пытающихся перенести локальные методы в некоммутативную область. В ситуации, когда имеется достаточное количество локализаций ([11]), например в суперслучае, версии П.М. Кона и Серра–Манина, по-видимому, тождественны.

Морфизм Гельфанда

Цель данной заметки — приблизиться к пониманию морфизма градуированных модулей $\daleth : A{\cong}\,\mathrm{HOM}_A(A,A) \longrightarrow \underline{\mathrm{H}}^0_A{=}\,\mathrm{HOM}_{\mathfrak{Qco}(A)}(A,A)$. В аффинной ситуации соответствующий морфизм $\gamma : R \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X)$, над некоммутативным спектром $X{=}\,\mathrm{Spec}\,R$ был назван морфизмом Гельфанда ([10, с.202]). По аналогии, будем называть $\gimel$ — *проективным морфизмом Гельфанда.* Стандартными методами, элементы которых представлены ниже, показывается, что $\gimel$ — $\mathfrak{tors}$–изоморфизм. Даже в простейшем коммутативном случае он может не быть изоморфизмом, например, если $A{=}k[t]$, $\underline{\mathrm{H}}^0_A{\cong}k[t^{-1},t]$ — в некотором смысле это картина самого некоммутативного случая [12, 13]. (Проблема, наверное, заключается в наличии у "Proj A" гомологически нульмерных компонент).

Далее обозначим $A_+{=}\oplus_{n>0} A_n$, $k{:=}k_A{\cong}A/A_+$, $t(F){\in}\mathfrak{tors}$ — наибольший подмодуль F с этим свойством, то есть

$$t(F){\cong}\varinjlim \mathrm{HOM}_A(A/A_{\geq n},F){\cong}\,\mathrm{Ker}(F{\longrightarrow}\underline{\mathrm{H}}^0_A(F))$$

так же можно показать, что $\underline{\mathrm{H}}^0_A(F)){\cong}\varinjlim \mathrm{HOM}_A(A_{\geq n},F/t(F))$ (см. [12]). Теперь мы способны вывести следующий факт:

Предложение 1 *Эквивалентны следующие условия:*

1. *Морфизм Гельфанда* $\gimel : A \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{H}}^0_A(A)$ *— изоморфизм в* $\mathfrak{gr}{-}A$*;*

2. A_A *–* $\mathfrak{tors}$*-замкнутый модуль в смысле [14, стр. 619];*

3. $\mathrm{HOM}_A(k,A){\cong}\,\mathrm{EXT}^1_A(k,A){\cong}0$*;*

4. *каноническое ограничение* $A{\cong}\,\mathrm{HOM}_A(A,A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{HOM}_A(A_+,A)$ *— изоморфизм в* $\mathfrak{gr}{-}A$*.*

Доказательство: (несложно получить методами [14, гл. 15] или [12]). Действительно, $\underline{\mathrm{H}}^0_A(A)$ — максимальное расширение $A/t(A)$ в классе существенных $\mathfrak{tors}$-изоморфизмов, что доказывает 1$\Longleftrightarrow$2.

В предположении 2) имеем $\mathrm{HOM}_A(k,A){\cong}\,\mathrm{HOM}_A(k,t(A)){\cong}0$ и любое расширение A_A посредством k — расщепляемо: $\mathrm{EXT}^1_A(k,A){\cong}0$, что даёт 2$\Longrightarrow$3.

Применив $\mathrm{HOM}_A(\cdot,A)$ к $0 \longrightarrow A_+ \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$ и рассмотрев первые пять модулей длинной точной последовательности получим 3$\Longleftrightarrow$4.

Продемонстрируем 3$\Longrightarrow$1:

Заметим, что всякий объект $C \neq 0$ из $\mathfrak{tors}$ допускает вложение модуля k_A, например, образа ненулевого однородного гомоморфизма из $\mathrm{HOM}_A(k,C)$: взяв однородный $0{\neq}c{\in}C$, получим циклический $\cdot A{\in}\mathfrak{tors}$, который в силу определения $\mathfrak{tors}$ обязан быть конечномерным. То есть, найдутся целое n

и $0 \neq w \in (c{\cdot}A)_n{:}(k{\cdot}A)_{>n}{=}0$; тогда образ морфизма $\varphi : k \longrightarrow C : \varphi(\lambda) = w{\cdot}\lambda$ совпадает с $w{\cdot}A{\cong}k_A$.

Поскольку $0{\cong}\,\mathrm{HOM}_A(k,A){\cong}\,\mathrm{HOM}_A(k,t(A))$, то $t(A){\cong}\,\mathrm{Ker}(\beth){\cong}0$. Из изоморфизма $\mathrm{EXT}^1_A(k,A){\cong}0$ следует $\mathrm{EXT}^1_A(,A){\cong}0$ для конечномерного C: действительно, пусть $A_A{\longrightarrow}I^{\bullet}$ — инъективная резольвента в $\mathfrak{gr}{-}A$;

$C{=}C_0{\twoheadrightarrow}C_1{\twoheadrightarrow}\dots{\twoheadrightarrow}C_d{\twoheadrightarrow}C_{d+1}{\cong}0$ – кофильтрация C с одномерными ядрами:

$$0{\longrightarrow}k[-d_i]{\longrightarrow}C_i \longrightarrow C_{i+1}{\longrightarrow}0$$

Комплексы $K^{\bullet}_n{=}\,\mathrm{HOM}_A(C_n,I^{\bullet})$ осуществляют убывающую конечную фильтрацию $K^{\bullet}_0{\supseteq}K^{\bullet}_1{\supseteq}\dots{\supseteq}K^{\bullet}_d{\supseteq}K^{\bullet}_{d+1}{\cong}0$, комплекса $K^{\bullet} \cong K^{\bullet}_0 \cong \mathrm{HOM}_A(C,I^{\bullet})$. Вычислим соответствующую этой фильтрации спектральную последовательность:

$$E_0^{p,q}{\cong}K_p^{p+q}/K_{p+1}^{p+q}{\cong}\,\mathrm{HOM}_A(\mathrm{Ker}(C_p \longrightarrow C_{p+1}),I^{p+q}){\cong}\,\mathrm{HOM}_A(k,I^{p+q})[d_p]$$

$$E_1^{p,q}{\cong}H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p\,K^{\bullet}){\cong}H^{p+q}(\mathrm{HOM}_A(k,I^{\bullet})[d_p]){\cong}\,\mathrm{EXT}_A^{p+q}(k,A)[d_p]$$

Заметим, что $E_1^{0,0}{\cong}E_1^{1,0}{\cong}E_1^{0,1}{\cong}0$, тем самым, аналогичное выполнено и для E_∞: $E_\infty^{0,0}{\cong}E_\infty^{1,0}{\cong}E_\infty^{0,1}{\cong}0$, но $E_r{\Longrightarrow}H^{\bullet}(K^{\bullet})$: Следовательно

$$E_\infty^{p,q}{\cong}\,\mathrm{Gr}^p(H^{p+q}(K^{\bullet})){\cong}\,\mathrm{Gr}^p(\mathrm{EXT}_A^{p+q}(C,A))$$

Поэтому $\mathrm{EXT}^0_A(C,A){:=}\,\mathrm{HOM}_A(C,A){\cong}\,\mathrm{EXT}^1_A(C,A){\cong}0$.

Поскольку $t(A){\cong}0$; $\underline{\mathrm{H}}^0_A(A){\cong}\varinjlim\mathrm{HOM}_A(A_{\geq n},A)$, то имеется длинная точная последовательность:

$$\mathrm{HOM}_A(A/A_{\geq n},A){\longrightarrow}\,\mathrm{HOM}_A(A,A){\longrightarrow}\,\mathrm{HOM}_A(A_{\geq n},A){\longrightarrow}\,\mathrm{EXT}^1_A(A/A_{\geq n},A)$$

По предыдущему, крайние модули — нулевые: $A \xrightarrow{\cong} \mathrm{HOM}_A(A_{\geq n},A)$. Переходя к пределу $n \longrightarrow \infty$, доказываем изоморфность $\beth$.

Замечание 1 *Обозначив* $(F_A)^*{:=}\,\mathrm{HOM}_{k-\mathfrak{gr}}(F_A,k) \in \mathcal{O}\boldsymbol{b}(A{-}\mathfrak{gr})$, *получим, что градуированный* A*-модуль с конечномерными компонентами рефлексивен:* $(F)^{**}{\cong}F$. *Взяв* $P^{\bullet}_A \longrightarrow G_A$ *— проективную резольвенту в* $\mathfrak{gr}{-}A$ *получим* *изоморфизмы:*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EXT}^i_A(G_A, F_A) &\cong H^i(\mathrm{HOM}_A(P^\bullet_A, F_A)) \cong \\
\cong H^i(\mathrm{HOM}_A(P^\bullet_A, \mathrm{HOM}_{\mathfrak{gr}-k}((F_A)^*, k))) &\cong H^i(\mathrm{HOM}_{\mathfrak{gr}-k}(P^\bullet_A \otimes_A (F_A)^*, k)) \cong \\
\cong \mathrm{HOM}_{\mathfrak{gr}-k}(H^i(P^\bullet_A \otimes_A (F_A)^*), k) &\cong \mathrm{Tor}^A_i(G_A, (F_A)^*)^*
\end{aligned}
$$

Это позволяет нам переформулировать 3) *и* 4) *предыдущего предложения:*

3′) $k \otimes_A A^* \cong \mathrm{Tor}^A_1(k_A, A^*) \cong 0$;

4′) $A_+ \otimes_A A^* \xrightarrow{\cong} A \otimes_A A^* \cong A^*$.

Замечание 2 *Пусть $A=T/I$, где T — свободная алгебра, I — её однородный идеал, тогда*

$$\mathrm{HOM}_A(A_+, A) \cong \mathrm{HOM}_A(A_+ \otimes_T A, A) \cong \mathrm{HOM}_T(A_+, \mathrm{HOM}_A(A, A)) \cong \mathrm{HOM}_T(A_+, A)$$

(Лемма о притяжении [14, 11.12, стр. 523]), что даёт нам возможность проверять условие 4) *Предложения 1 в простейших случаях.*

Примеры

1. Если A — мономиальная k-алгебра, тогда $\gimel$ — не изоморфизм.

   Действительно: пусть $A=k\langle x_1, \dots x_n \mid W \rangle$, где соотношения A порождаются набором мономов $W = \{w_i\}$ (возможно пустым). Случай $n=1$ либо уже разобран (с пустым набором соотношений, см. стр. 26), либо легко разбирается ($\underline{\mathrm{H}}^0_A \cong 0$, если $W \neq \emptyset$).

   Пусть $n \geq 2$ и среди W нет букв $x_1, \dots, x_n$. Определим на всех мономах функцию $\varphi : \varphi(w) = \begin{cases} w, & \text{если } w=x_1w' \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. По линейности φ продолжается до гомоморфизма из $\mathrm{HOM}_T(T_+, T)$, причём $\varphi(I) \subseteq I=(W)$, и φ продолжается до морфизма из $\mathrm{HOM}_T(A_+, A)_0$, тем не менее он не является умножением на скаляр (например, в компоненте A_1). Следовательно, $k \cong A_0 \not\cong \mathrm{HOM}_A(A_+, A)_0$ и $A \not\cong \mathrm{HOM}_A(A_+, A)$.

2. В работе [11] изучались алгебры, обладающие хорошими локализаторами. В частности, показано: если S однородное подмножество A_+ без делителей нуля, являющееся правым множеством Оре в A, тогда

$$\underline{\mathrm{H}}^0_A(A) \cong \{q \in AS^{-1} \mid \exists n = n(q)(q \cdot A_{\geq n} \subseteq A)\} =: \hat{A}$$

поскольку $t(A) \cong t(AS^{-1}) \cong 0$; $\underline{\mathrm{H}}^0_A(AS^{-1}) \cong \varinjlim \mathrm{HOM}_A(A_{\geq n}, AS^{-1}) \cong AS^{-1}$ и

$$\underline{\mathrm{H}}^0_A(A) \cong \mathrm{Ker}(AS^{-1} \cong \mathrm{HOM}_A(A, AS^{-1}) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{HOM}_A(A_{\geq n}, AS^{-1}/A)) \cong \hat{A}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае морфизм Гельфанда есть стандартное вложение $A \xrightarrow{\daleth} \hat{A} \subset AS^{-1}$. Изоморфность $A \cong \hat{A}$ легко получается для целого класса алгебр рассмотренных Т. Гатевой-Ивановой в [15]. Утверждение [2, III, 5.1a, стр. 291] отсюда следует в один ход ([11] есть перенос доказательства этой теоремы в некоммутативный случай).

Выражаем свою благодарность С.Н. Тронину за уточнение библиографии.

Список литературы

[1] Серр Ж.П. *Когерентные алгебраические пучки*// сб. Расслоенные пространства и их приложения – М.: ИЛ., 1958

[2] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия* – М.: Мир, 1981

[3] Artin M., Van den Bergh M. *Twisted Homogeneous Coordinate Rings*// J. of Algebra, **133**, pp. 249-271 (1990)

[4] Stafford J.T., Zhang J.J. *Examples in non-commutative projective geometry*// Math. Proc. Camb. Phil. Soc, **116**, pp. 415-433 (1994)

[5] Yekutieli A. *Dualizing Complexes over Noncommutative Graded Algebras* – preprint, 1991

[6] Верёвкин А.Б. *Обобщение двойственности Серра*// Деп. ВИНИТИ, N^o 6308-В89

[7] Дринфельд В.Г. *Квантовые группы*// Зап. научн. сем. ЛОМИ, т. 155, 1986, с. 19-49

[8] Демидов Е.Е. *О некоторых аспектах теории квантовых групп*// УМН, 1993, т. 48, в. 6, с. 39-74

[9] Oystaeyen F.M. van, Verschoren A.H.M. *Non-commutative Algebraic Geometry. An Introduction* – Lect. Notes in Math., v. **887** (1981)

[10] Cohn P.M. *The affine Scheme of a General Ring*// Lect. Notes in Math., v. **753**, pp. 197-211 (1979)

[11] Верёвкин А.Б. *Когомологии Серра и локализации по множествам Оре*// Функциональный анализ и его приложения, т. 24, в. 1, 1990, с. 67-68

[12] Верёвкин А.Б. *Инъективные пучки Серра*// Мат. заметки, 1992, т. 52, в. 4, с. 35-41

[13] Верёвкин А.Б. *Точное вложение категории Серра в категорию модулей*// Изв. ВУЗ'ов (математика), 1993, N^o 11, с. 3–5

[14] Фейс К. *Алгебра: модули, кольца и категории*, т. 1 – М.: Мир, 1977

[15] Gateva-Ivanova T. *On the noetherianity of some associative finitely presented algebras*//J. of Algebra, **138**, No. 1, pp. 13-35 (1991)

verevkin@mmf.univ.simbirsk.su
akondra@mmf.univ.simbirsk.su