МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА
Отдел Теоретической Физики Высоких Энергий

На правах рукописи

Вернов Сергей Юрьевич

КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

01.04.02-теоретическая физика

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель —
д.ф.м.н., профессор
О.А. Хрусталёв

Москва 2000

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Задача квантования существенно нелинейных полевых моделей привлекает внимание в течение уже достаточно длительного времени. При квантовании вблизи нетривиального классического решения одной из трудностей является явный учёт законов сохранения и восстановление симметрий, утрачиваемых при непосредственном выделении классической составляющей. Нарушение нетривиальным классическим решением исходных симметрий полевой модели приводит к появлению в спектре возмущений нулевых мод, что делает некорректной стандартную теорию возмущений.

Рассмотрим, например, $(1+1)$–мерную теорию самодействующего действительного скалярного поля, описываемую лагранжевой плотностью:

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - G^2 V\left(\frac{\varphi}{G}\right). \tag{0.1}$$

Рассматривая поле φ как сумму классической и квантовой составляющих:

$$\varphi(t,x) = G\varphi_{cl}(t,x) + u(t,x), \qquad G \gg 1,$$

разложим уравнение Лагранжа–Эйлера в ряд по G^{-1}. Пренебрегая членами порядка $\mathcal{O}(G^{-1})$, получаем:
1) $\varphi_{cl}(t,x)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_{cl}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{cl}}{\partial t^2} - V'(\varphi_{cl}) = 0, \tag{0.2}$$

2) $u(t,x)$ — решение следующего линейного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - V''(\varphi_{cl}) \cdot u(t,x) = 0. \tag{0.3}$$

Для того, чтобы данное разложение было справедливо во всём пространстве-времени, квантовая составляющая $u(t,x)$ должна быть ограниченной функцией.

Пусть уравнение (0.1) обладает солитоноподобным статическим решением $\varphi_{cl}(t,x) = \sigma(x)$. При квантовании вблизи подобного решения нарушается трансляционная симметрия, вследствие этого возникает нулевая мода, соответствующая пространственным сдвигам солитона. Действительно, разделяя переменные в уравнении (0.3):

$$u(t,x) = T(t)X(x),$$

получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2X(x)}{dx^2} &= (V''(\varphi_{cl}(x)) - \omega^2)X(x), \\ \frac{d^2T(t)}{dt^2} &= -\omega^2 T(t), \end{cases} \tag{0.4}$$

где ω^2 – произвольная константа. Требуя, чтобы функция $X(x)$ была бы нормируемой, находим спектр допустимых значений параметра ω. В этот спектр входит $\omega_0 = 0$, соответствующая ей собственная функция — пространственная производная классического решения $\sigma_{,x}(x)$ — является нормируемой функцией. Таким образом, в квантовом поле появляется слагаемое

$$u_0(t,x) = C\sigma_{,x}(x)t,$$

неограниченно растущее с течением времени (C — константа, определяемая начальным значением импульса квантового поля). Подобные (неограниченные) члены разложения называются вековыми (или секулярными). Таким образом, полученное разложение содержит секулярные члены и, следовательно, не является *равномерным* (*равномерно пригодным*). Рассмотрение данной моды в одном ряду с ненулевыми модами приводит к возникновению расходимостей в высших порядках теории возмущений. С другой стороны, механическое вычёркивание этой моды приводит к изменению исходного числа степеней свободы.

Проблема нахождения равномерно пригодных разложений возникает и при построении асимптотического решения квазилинейного дифференциального уравнения в теории нелинейных колебаний. Для построения подобных разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений были разработаны асимптотические методы, например, метод Пуанкаре [1] и метод Крылова–Боголюбова [2, 3]. Данные методы легко обобщаются и на случай уравнения в частных производных, однако, в этом случае проблему построения равномерных разложений нельзя считать полностью решённой (см. главу 3 диссертации).

Корректный метод квантования трансляционно-инвариантной системы был предложен Н.Н. Боголюбовым в работе "Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем" [4] и, фактически, является квантовой версией классического метода Крылова–Боголюбова. В статье была рассмотрена система с адиабатической связью, т.е. система, в гамильтониан которой кинетическая энергия квантового поля входит с малым параметром. В связи с наличием трансляционного вырождения данной системы стандартные методы теории возмущений оказались неприменимы. Н.Н. Боголюбовым была разработана новая форма теории возмущений, основанная на явном учете трансляционной инвариантности системы, осуществляемом следующим образом. Сначала проводится преобразование переменных, от которых зависит волновая функция, что позволяет выделить переменные, которые под действием трансляций подвергаются простому сдвигу, при этом остальные переменные выбираются трансляционно инвариантными. Волновая функция, выраженная в терминах новых переменных, имеет простые трансформационные свойства относительно преобразований группы трансляций, что позволяет легко строить состояния, являющиеся собственными для оператора полного импульса системы.

Суть метода групповых переменных Боголюбова заключается в преобразованиях, вводящих в качестве динамических переменных параметры группы симметрии взаимодействующей системы. Поясним данные рассуждения на примере статического классического решения, нарушающего трансляционную симметрию. В результате преобразования Боголюбова данное решение $\sigma(x)$ превращается в оператор $\sigma(x-\hat{a})$, где на преобразование трансляций реагирует лишь переменная $\hat{a}$ — функционал операторов поля. Трансляционную инвариантность полной теории обеспечивает то обстоятельство, что $\hat{a}$ является оператором, канонически сопряжённым оператору полного импульса. Классическая составляющая в формализме Боголюбова не является числовой функцией, поскольку содержит в своём аргументе оператор $\hat{a}$.

Развитие метода было предложено С.В. Тябликовым в работе "Адиабатическая форма теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем" [5] и В.А. Москаленко в работе "К теории теплового возбуждения полярона" [6].

В 1972-73 годах Е.П. Солодовникова, А.Н. Тавхелидзе и О.А. Хрусталёв в серии работ развили и обобщили метод групповых переменных Боголюбова. В работе [7] авторы показали, что метод применим к задаче о взаимодействии нерелятивистской частицы с квантовым полем. В работе [8] метод был обобщён на случай, когда преобразования группы симметрии в квантовой теории поля реализуются в виде произвольной группы Ли. В классическом пределе такие преобразования симметрии переходят в точечные канонические преобразования соответствующей классической гамильтоновой системы. В работе [9] проведено преобразование переменных, в результате которого выделены переменные, принимающие определённые значения на соответствующей группе Ли. При преобразованиях симметрии данные переменные подвергаются сдвигу в групповом пространстве. Остальные переменные выбираются инвариантными относительно преобразований группы симметрии системы.

В 1974 году с помощью преобразования Боголюбова рассматривались задачи двух [10] и трёх [11] тел в случаях адиабатического и сильного взаимодействий.

Метод Боголюбова использовался в теории сильной связи: в нерелятивистской модели взаимодействия скалярной частицы с квантованным полем [12, 13]; при анализе взаимодействия нерелятивистского нуклона с $\pi-$мезонным полем [14] и рассеяния в симметричной скалярной теории [15]; при исследовании устойчивости классических решений уравнений Янга-Миллса с источником [16]; в работе [17] на основе метода Боголюбова рассматривалось взаимодействие симметричного источника со скалярным и псевдоскалярным полями; в работе [18] изучалась система, состоящая из двух источников, взаимодействующих со скалярным заряженным полем. В работе [19] рассматривалось взаимодействие нерелятивистской частицы со скалярным квантовым полем в одномерном пространстве, при этом были получены энергетический спектр и амплитуда рассеяния с точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи.

В релятивистской теории гравитации (РТГ) с помощью групповых переменных Боголюбова было проведено квантование в окрестности сферически-симметричного решения (Шварцшильда) [20].

Метод Боголюбова под названием метода коллективных координат был независимо сформулирован в середине семидесятых годов в работах зарубежных авторов [21–26]. При этом возникло три варианта метода. Напомним, что метод Боголюбова заключается в замене переменных специального вида. В одном из вариантов метода коллективных координат такая замена переменных производится в континуальном интеграле [21–23]. Во втором варианте [24, 25] используется операторный формализм. Этот вариант метода коллективных координат полностью эквивалентен методу Боголюбова. И, наконец, в третьем варианте [26] переменные с простыми трансформационными свойствами относительно преобразований симметрии вводятся на классическом уровне как дополнительные переменные. Лагранжиан системы модифицируется, после чего возникает калибровочно–инвариантная квантовомеханическая система. Налагая на эту системы различные калибровочные условия, можно доказать ее эквивалентность исходной системе и ввести переменные с нужными свойствами. Фактически такой подход ведет свое начало от работы [27]. Он развивался также А.В. Шургая [28, 29]. Отметим, что все три варианта метода коллективных координат приводят к совпадающим результатам.

Метод Боголюбова получил свое развитие и новые области применения в работах О.Д. Тимофеевской и В.Г. Борнякова [30–36]. В частности, преобразование Боголюбова применялось для систем, содержащих фермионы [33], и в модели Ли [35, 36]. О.Д. Тимофеевской рассмотрена реализация преобразования Боголюбова непосредственно на операторах рождения и уничтожения [34].

В работах К.А. Свешникова [37, 38] на основе преобразования Боголюбова была развита схема канонического квантования, состоящая в явной реализации группы Пуанкаре непосредственно на квантовых переменных и введении дополнительной алгебры операторов. Соответствующие канонические преобразования классической гамильтоновой системы в этом случае не являются точечными преобразованиями.

Первоначальный метод Боголюбова применим только в том случае, когда преобразования симметрии реализуются в виде группы Ли точечных канонических преобразований. В работах А.В. Разумова, А.Ю. Таранова, О.А. Хрусталёва [39–45] преобразование Боголюбова было обобщено на случай произвольной группы Ли канонических преобразований. Предложенный метод раскрывает геометрический смысл преобразования Боголюбова. В указанных работах рассматривается квантование полей со связями.

Преобразование Боголюбова и аналогичные преобразования теории коллективных координат применялись при квантовании существенно-нелинейных систем в $(1+1)$–мерном пространстве–времени с целью решения проблемы нулевых мод [46–49]. При этом квантование проводилось в окрестности солитоно-подобных решений, например, теории φ^4 [26] или sine–Gordon [50, 51] (см. также [52, 53]). Подобные решения выбором системы координат можно превратить в статические.

Исследование систем с нестационарной классической компонентой является более трудной задачей, так как явная структура гамильтониана как генератора временных трансляций становится ясной только после решения уравнений движения и определения групповых переменных. В этой ситуации представляется естественным определение групповых переменных по некоторой схеме теории возмущений, уточняемой вместе с вычислением интегралов движения.

Метод, позволяющий проводить квантование в окрестности нестационарных классических решений с помощью локального преобразования Боголюбова, был предложен в работе [54]. Классическое решение выбиралось в виде $(1+1)$–мерного действительного скалярного поля $F(t,x)$, удовлетворяющего следующим условиям: существует пространственноподобная прямая C, на которой нормальная производная $F_n(t,x)=0$, а вторая производная пропорциональна самой функции:

$$F_{nn}(t,x) = -\Omega^2 F(t,x).$$

То, что для многих дважды периодических полей (т.е. периодических как по временной, так и по пространственной координате), например, для полей в виде стоячей волны, эти условия оказываются несовместными, является несущественным, так как данную процедуру квантования легко можно переформулировать так, что вышеперечисленные условия заменяются на единственное условие: существует пространственноподобная прямая C, на которой $F(t, x) = 0$. . Совсем недавно данный метод был применён для квантования скалярного поля, имеющего ненулевую классическую компоненту и взаимодействующего с заряженным скалярным полем [55].

Диссертация описывает схему квантования вблизи скалярных классических полей $F(\mathbf{x})$, являющихся решением уравнения Лагранжа-Эйлера для K–мерной Пуанкаре-инвариантной теории:

$$F_{tt}(\mathbf{x}) - \left(\sum_{k=1}^{K-1} F_{x_k x_k}(\mathbf{x}) \right) + V'(F) = 0, \tag{0.5}$$

где $V'(F)$ – дифференцируемая функция, такая что $V'(0) = 0$. При этом функция $F(\mathbf{x})$ должна удовлетворять следующему условию: существует пространственноподобная гиперплоскость C такая, что при $\mathbf{x} \in C$ выполняется: $F(\mathbf{x}) = 0$.

Эффективность применения метода Боголюбова во многом зависит от выбора классического решения. В этой связи актуален вопрос правильного выбора приближения неизвестных классических решений и построения равномерно пригодного, т.е. не содержащего неограниченных членов, разложения. В диссертации исследовалась возможность построения приближённых решений квазилинейных уравнений в виде асимптотического ряда по периодическим функциям и было впервые построено подобное разложение для $(1+1)$–мерной безмассовой теории φ^4. Данное разложение, естественно, является равномерно пригодным. Решив проблему возникновения резонанса, удалось построить разложение по функциям в виде стоячей волны и в первом, и во втором порядке по параметру малости. Особенностью данного разложения является то, что в качестве нулевого порядка разложения (т.е. решения соответствующего линейного уравнения) используется периодическая функция, обладающая бесконечным рядом Фурье.

Диссертация состоит из введения, трёх глав основного текста, заключения и восьми приложений.

В первой главе для системы, инвариантной относительной L параметрической группы Ли, вводятся групповые переменные Боголюбова, которые связываются с исходными полевыми переменными с помощью дополнительных условий.

Во второй главе развита регулярная теория возмущений для $(3+1)$–мерной теории скалярного самодействующего действительного поля. Установлено необходимое условие возможности построения теории возмущений: классическая составляющая должна быть решением волнового уравнения. С точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи[1] найдены выражения для интегралов движения и оператора поля, тем самым дано полностью релятивистски инвариантное описание квантовой системы с ненулевой классической компонентой. Описаны особенности квантования в терминах групповых переменных Боголюбова, проводимого в окрестности периодических решений (3+1)-мерных и $(1+1)$-мерных скалярных теорий. Классические решения выбираются в виде стоячих волн.

В диссертации также рассматривается вопрос о нахождении подобных классических решений. Класс дважды периодических решений является в некотором смысле самым простым классом нестационарных решений полевой модели. Однако отыскание дважды периодических решений даже в случае двумерных теорий, за исключением, пожалуй, только теории sine–Gordon, в которой известны явные аналитические выражения подобных решений [54–57], является не полностью решённой задачей.

В семидесятые и восьмидесятые годы для широкого класса непрерывных функций $g(\varphi)$ были доказаны теоремы существования (или отсутствия) периодических решений нелинейных волновых уравнений. В частности, не существует решений безмассовой теории φ^4, периодических по времени и стремящихся к нулю на пространственной бесконечности. В то же время в данной теории могут существовать дважды периодические решения уравнения Лагранжа–Эйлера:

[1]Напомним, что классическая составляющая полагается пропорциональной первой степени константы связи.

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} - M^2\varphi(t,x) - \varepsilon\varphi^3(t,x) = 0, \qquad (0.6)$$

в виде стоячей волны:

$$\varphi(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{nj}\sin(n(x-x_0))\sin(j\cdot\omega(t-t_0)), \qquad (0.7)$$

где x_0 и t_0 определяются из начальных и граничных условий.

Для теории φ^4 (не обязательно безмассовой) известны решения в виде бегущих волн. Ими являются эллиптические функции Якоби от аргумента $\alpha x + \beta t$, где α и β — некоторые действительные константы. Периодические решения в виде бегущих волн не являются истинно дважды периодическими решениями, поскольку с помощью преобразования Пуанкаре можно перейти в систему координат, в которой период подобного решения либо по времени, либо по пространственной координате будет равен бесконечности.

Другой класс дважды периодических решений образуют решения в виде стоячей волны. Нахождение периодических решений в форме стоячей волны — задача гораздо более сложная, чем отыскание бегущих волновых полей, поскольку в этом случае уравнение в частных производных не сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Аналитическая форма подобных решений пока не найдена.

Подстановкой в уравнение (0.6) функции $\varphi(t,x)$ в форме (0.7), можно свести данное уравнение к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений на коэффициенты $\mathcal{C}_{nj}$ и частоту ω. Данная система может быть решена численно с помощью метода Галёркина, т. е. посредством обрезания ряда Фурье по обоим индексам: $\forall n,j > N$: $\mathcal{C}_{nj} = 0$. Случай $M = 1$ и $\varepsilon = 1$ был исследован при различных значениях N. Как оказалось [60], результаты вычислений практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует о самосогласованности подхода. При этом авторы справедливо отмечают, что в рамках численного решения остаётся открытым вопрос о корректности обрезания и сходимости последовательности полученных решений при N, стремящемся к бесконечности.

В третьей главе диссертации для решения уравнения (0.6) в случае нулевой массы также применяется подстановка функции $\varphi(t, x)$ в форме (0.7). При этом для упрощения системы используется не обрезание, а условие малости ε. В результате получается асимптотическое разложение, содержащее уже в нулевом порядке бесконечное число гармоник. Оказывается, что для решения проблемы главного резонанса и построения равномерно пригодного разложения как в первом, так и во втором порядке по ε, необходимо использовать в качестве нулевого приближения функцию эллиптического косинуса.

В заключении перечислены основные результаты работы.

В приложениях 1–4 даны подробности вычислений, проводимых при квантовании в терминах групповых переменных Боголюбова. В приложении 5 даны примеры точных решений $(1+1)$-мерной теории φ^4 в виде бегущих волн. В приложении 6 анализируется стабильность статического решения теории φ^4, периодического по пространственной координате. Приложения 7 и 8 относятся к третьей главе. Эти приложения демонстрируют численные методы, способствовавшие получению результата в аналитическом виде.

Глава 1

КВАНТОВАНИЕ В ТЕРМИНАХ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА

1.1. Преобразование Боголюбова

Пусть $\mathcal{D}$ — K–мерное псевдоевклидово пространство сигнатуры $(1, K-1)$ [1], а $\mathcal{G}$ — L–параметрическая группа Ли.

Обозначим параметры группы $\mathcal{G}$ через $\tilde{\tau} \equiv (\tau^0, \tau^1, \ldots, \tau^{L-1})$ и предположим, что каждому элементу $g(\tilde{\tau}) \in \mathcal{G}$ соответствует преобразование пространства $\mathcal{D}$.

Исходные координаты на $\mathcal{D}$ обозначим через $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^{K-1})$, а координаты преобразованных точек через $\mathbf{x}'$. Функция $\bar{X}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$, связывающая $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{x}' = \bar{X}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv \mathbf{x}'(\mathbf{x}, \tilde{\tau}), \tag{1.1}$$

является гладкой функцией всех своих аргументов. Существует обратное преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}')$.

Определим *преобразование Боголюбова* следующим образом: пусть f — функция поля, содержащая фиксированную классическую составляющую v и квантовую составляющую u:

$$f(\mathbf{x}') = G \cdot v(\mathbf{x}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})) + u(\mathbf{x}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})) \equiv G \cdot v(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) + u(\mathbf{x}', \tilde{\tau}), \quad G \gg 1, \tag{1.2}$$

[1] Пространство Минковского является четырёхмерным псевдоевклидовым пространством сигнатуры $(1, 3) \equiv (+\,-\,-\,-)$.

и будем рассматривать функции v и u как функции $K+L$ независимых переменных $\{\mathbf{x}',\tilde{\tau}\}$. Отметим, что все функции от $\mathbf{x}'$, $\tilde{\tau}$ являются сложными функциями аргумента $\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$.

Введение L новых переменных τ^a обусловлено требованием учёта инвариантности относительно группы Ли. При этом удаётся разделить координаты на две части. Первую часть составляют обобщённые координаты, имеющие смысл параметров группы $\mathcal{G}$ (в нашем случае это τ^a), вторую часть составляют координаты $\mathbf{x}'$, инвариантные относительно действия группы $\mathcal{G}$.

Признание параметров преобразования τ^b в качестве новых независимых переменных привело к появлению L лишних степеней свободы, поэтому следует наложить L независимых дополнительных условий.

Зададим с помощью уравнения в координатах $\mathbf{x}'$ пространственно-подобную гиперплоскость C размерности $K-1$. Пусть $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к C, определим для произвольных дифференцируемых функций g_1 и g_2 билинейный функционал

$$\omega(g_1,g_2)\equiv\int\limits_C\left(g_{1n}(\mathbf{x}(\lambda',\tilde{\tau}))g_2(\mathbf{x}(\lambda',\tilde{\tau}))-g_1(\mathbf{x}(\lambda',\tilde{\tau}))g_{2n}(\mathbf{x}(\lambda',\tilde{\tau}))\right)dS, \quad (1.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\equiv n'^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}$ — нормальная производная на C, а $dS\equiv d\lambda'^1\ldots d\lambda'^{K-1}$ — элемент площади C. Оператор $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ является инвариантом по отношению к преобразованиям группы $\mathcal{G}$. Функции $g(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tilde{\tau}))$ при $\mathbf{x}'\in C$ $g(\mathbf{x}(\lambda',\tilde{\tau}))$ будем обозначать $g(\lambda')$. Только функция $f(\lambda')$ и её производные не зависят от переменных $\tilde{\tau}$, все остальные функции, рассматриваемые в этой и следующей главах, зависят от групповых переменных $\tilde{\tau}$.

С помощью функционала ω сформулируем дополнительные условия на функцию u. Пусть при всех допустимых значениях переменных τ^a

$$\forall a=0..L-1\ :\ \omega(N^a,u)=0, \quad (1.4)$$

где $N^a(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ — дифференцируемые функции, такие, что выполняются соотношения:

$$\forall a,b=0..L-1\ :\ \omega(N^a,N^b)=0. \quad (1.5)$$

Мы перешли от переменных $\{f, \mathbf{x}'\}$ к переменным $\{u, \mathbf{x}', \tilde{\tau}\}$ и ввели дополнительные условия, сохраняющие общее число независимых переменных, тем самым мы провели **преобразование Боголюбова**.

Вариация $v(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ выражается через бесконечно малые линейно независимые параметры преобразования $\delta\tau^a$ следующей формулой[2]:

$$\delta v(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv \delta v(\mathbf{x}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})) = \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau^c}\delta\tau^c \equiv -M_c(\mathbf{x}', \tilde{\tau})\delta\tau^c, \tag{1.6}$$

следовательно, вариация функции $f(\mathbf{x}')$ будет равна:

$$\delta f(\mathbf{x}') = G\delta v + \delta u = -GM_b(\mathbf{x}', \tilde{\tau})\delta\tau^b + \bar{\delta} u(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) + \frac{\partial u}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial \tau^b} \cdot \delta\tau^b, \tag{1.7}$$

где $\bar{\delta} u(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ — вариация формы функции.

Пусть функции $N^a(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ такие, что

$$det||\omega(N^a, M_b)|| \equiv det||D^a_b|| \neq 0,$$

тогда для функций

$$\tilde{N}^a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv D^{-1a}_b N^b(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$$

будут выполняться соотношения

$$\omega(\tilde{N}^a, M_b) = \delta^a_b, \tag{1.8}$$

$$\omega(\tilde{N}^a, \tilde{N}^b) = 0. \tag{1.9}$$

В силу линейности функционала ω условия (1.4) будут равносильны следующим:

$$\forall a = 0..L-1 \ : \ \omega(\tilde{N}^a, u) = 0, \tag{1.4$'$}$$

Легко показать, что функцию u, удовлетворяющую условиям (1.4$'$), можно построить из произвольной дифференцируемой функции y следующим образом:

$$u(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) = \hat{K}y(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv y(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) - M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \cdot \omega(\tilde{N}^a, y), \tag{1.10}$$

[2]Индекс α пробегает значения от 0 до $K-1$, а индекс c — от 0 до $L-1$.

при этом оператор $\hat{K}$ оказывается проектором: $\hat{K}^2 = \hat{K}$. Следовательно, условия $(1.4')$ выделяют на пространстве дифференцируемых функций подпространство функций u, являющихся решениями уравнения

$$u = \hat{K}u. \tag{1.11}$$

Уравнение (1.11) связывает вариации $\delta u(\lambda')$ и $\delta u_n(\lambda')$. Как показано в *Приложении 1*, функциональные производные $\frac{\delta}{\delta u(\lambda')}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}$ связаны следующими соотношениями:

$$\int\limits_C \left(M_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + M_{an}(\lambda') \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} \right) dS = 0. \tag{1.12}$$

1.2. Переменные Боголюбова как функционалы исходных переменных

Подставляя в соотношения $(1.4')$ выражение

$$u(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau})) = f(\lambda') - Gv(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau})),$$

получаем, что следствием инвариантности дополнительных условий $(1.4')$ относительно изменения параметров τ^a являются уравнения[3]:

$$\int\limits_C \left(\tilde{N}^a(\lambda') \delta f_n(\lambda') - \tilde{N}^a_n(\lambda') \delta f(\lambda') \right) dS - R^a_b \delta \tau^b - G \delta \tau^a = 0, \tag{1.13}$$

где

$$R^a_b \equiv \int\limits_C (\tilde{N}^a_{bn}(\lambda') u(\lambda') - \tilde{N}^a_b(\lambda') u_n(\lambda'))\, dS,$$

$$\delta \tilde{N}^a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv \tilde{N}^a_b(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \delta \tau^b.$$

Из соотношения (1.13) следует, что

$$\frac{\delta \tau^a}{\delta f(\lambda')} = -\frac{1}{G} Q^a_b \tilde{N}^b_n(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau})),$$

[3]Здесь и далее функции $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$ считаются независимыми.

$$\frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')} = \frac{1}{G} Q^a_b \tilde{N}^b(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau})), \tag{1.13'}$$

где величины Q^a_b — решения системы уравнений:

$$Q^a_b = \delta^a_b - \frac{1}{G} R^a_c Q^c_b. \tag{1.14.a}$$

Легко показать, что решения данной системы имеют следующий вид:

$$Q^a_b = \delta^b_a - \frac{1}{G} R^a_b + \frac{1}{G^2} R^a_c R^c_b + \mathcal{O}(G^{-3}). \tag{1.14.b}$$

Используя полученные выражения для $\frac{\delta\tau^a}{\delta f(\mathbf{x})}$ и $\frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\mathbf{x}')}$, а также формулы (1.7) и (1.12), имеем[4]:

$$\frac{\delta}{\delta f(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')}\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \tag{1.15.a}$$

$$\frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} + \frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')}\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \tag{1.15.b}$$

оператор $\hat{S}_a$ определён следующим образом:

$$\hat{S}_a = \int\limits_C \left(u_a(\lambda')\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + u_{an}(\lambda')\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}\right) dS,$$

$$u_a(\lambda') \equiv \frac{\partial u(\lambda')}{\partial\tau^a}, \qquad u_{an}(\lambda') \equiv \frac{\partial u_n(\lambda')}{\partial\tau^a}.$$

1.3. Операторы координаты и импульса

Для учёта законов сохранения проведём квантование вблизи нетривиального классического скалярного поля в терминах операторов Боголюбова.

Операторы

$$\hat{q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')}\right)$$

[4]Подробные вычисления даны в *Приложении 1.*

и

$$\hat{p}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f_n(\lambda') - i \frac{\delta}{\delta f(\lambda')} \right),$$

действующие на пространстве функционалов $\Phi[f, f_n]$ со скалярным произведением

$$< \Phi_1 | \Phi_2 >= \int Df Df_n \Phi_1^*[f, f_n] \Phi_2[f, f_n],$$

самосопряжены и удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\forall \lambda', \mu' \in C \quad : \quad [\hat{q}(\lambda'), \hat{p}(\mu')] = i\delta(\lambda' - \mu'). \tag{1.16}$$

Это соотношение позволяет толковать $\hat{q}(\lambda')$ и $\hat{p}(\lambda')$ как операторы координаты и импульса соответственно и развить схему вторичного квантования. Однако использование переменных $f(\lambda')$ и $f_n(\lambda')$ как независимых приводит к удвоению числа состояний поля. Это связано с существованием самосопряжённых операторов

$$\tilde{q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f_n(\lambda') + i \frac{\delta}{\delta f(\lambda')} \right) \qquad \text{и} \qquad \tilde{p}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f(\lambda') - i \frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')} \right),$$

удовлетворяющих перестановочному соотношению (2.1) и коммутирующих с $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Редукция числа состояний может быть осуществлена с помощью, например, голоморфного представления, эта процедура подробно описана в [34, 54].

Как показано в [34], пространство состояний нужной размерности оказывается подпространством функционалов $\Phi[f, f_n]$. Однако выделение из операторов классических составляющих и удовлетворение дополнительных условий, возникших при переходе к представлению Боголюбова, на данном подпространстве затруднительно. Поэтому, не ограничивая вектор состояния конкретным подпространством, сначала выделим классическую составляющую и построим регулярную теорию возмущения. Только после этого станет возможным проведение редукции числа состояний и фиксация аналитической структуры векторов состояния.

Операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$, выраженные через $v(\lambda')$ и $u(\lambda')$, имеют следующий вид:

$$\hat{q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G\, v(\lambda') + u(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} + \frac{1}{G}\hat{B}(\lambda')\right), \qquad (1.17.a)$$

$$\hat{p}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(G\, v_n(\lambda') + u_n(\lambda') - i\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \frac{1}{G}\hat{B}_n(\lambda')\right), \qquad (1.17.b)$$

где

$$\hat{B}(\lambda') = \tilde{N}^b(\lambda')\left(i\hat{S}_b + i\frac{\partial}{\partial\tau^b}\right).$$

Необходимость включения в данное выражение величин, пропорциональных $\frac{1}{G}$, объясняется тем, что оператор $\frac{\partial}{\partial\tau^a}$ не коммутирует с функцией $v(\lambda')$, так как последняя зависит от τ^a. Поэтому величины $\hat{B}(\lambda')$ дают вклад в коммутатор уже в нулевом порядке.

Чтобы убедиться в этом, проверим правильность коммутационного соотношения (1.16):

$$[\hat{q}(\lambda'), \hat{p}(\lambda'')] =$$

$$= \frac{1}{2}([v(\lambda'), B_n(\lambda'')] + i[\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}, u_n(\lambda'')] + i[\frac{\delta}{\delta u(\lambda'')}, u(\lambda')] + [B(\lambda'), v_n(\lambda'')]).$$

Легко получить соотношения коммутации между этими операторами:

$$[v(\lambda'), B_n(\lambda'')] = i[v(\lambda'), \tilde{N}^b_n(\lambda'')\frac{\partial}{\partial\tau^b}] = i\tilde{N}^b_n(\lambda'')M_b(\lambda'').$$

$$[v_n(\lambda''), B(\lambda')] = i[v_n(\lambda''), \tilde{N}^b(\lambda')\frac{\partial}{\partial\tau^b}] = i\tilde{N}^b(\lambda')M_{bn}(\lambda''),$$

$$[\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}, u_n(\lambda'')] = \frac{\delta u_n(\lambda'')}{\delta u_n(\lambda')} = \delta(\lambda' - \lambda'') + M_{an}(\lambda'')\tilde{N}^a(\lambda').$$

$$[\frac{\delta}{\delta u(\lambda'')}, u(\lambda')] = \frac{\delta u(\lambda')}{\delta u(\lambda'')} = \delta(\lambda' - \lambda'') - M_a(\lambda')\tilde{N}^a_n(\lambda'').$$

Суммируя данные соотношения, получаем формулу (1.16).

Глава 2

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Преобразование векторов состояний

Первым шагом построения регулярной теории возмущений является проведение преобразования векторов состояний для повышения порядка операторов $\frac{\partial}{\partial \tau^a}$:

$$\Phi[u, u_n] \longrightarrow e^{iG^2 J(\tilde{\tau})} \Phi[u, u_n]. \tag{2.1}$$

Соответствующее преобразование операторов выглядит так:

$$i\frac{\partial}{\partial \tau^a} \longrightarrow -G^2 J_a + i\frac{\partial}{\partial \tau^a}, \qquad J_a \equiv \frac{\partial J(\tilde{\tau})}{\partial \tau^a}. \tag{2.2}$$

Теперь операторы $\hat{q}(\lambda')$ и $\hat{p}(\lambda')$ имеют следующий вид:

$$\hat{q}(\lambda') = G\, F(\lambda') + \hat{Q}(\lambda') + \frac{1}{G}\hat{A}(\lambda'), \tag{2.3.a}$$

$$\hat{p}(\lambda') = G\, F_n(\lambda') + \hat{P}(\lambda') + \frac{1}{G}\hat{A}_n(\lambda'), \tag{2.3.b}$$

где

$$F(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}(v(\lambda') - J_a \tilde{N}^a(\lambda')), \tag{2.4}$$

$$\hat{Q}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} + \tilde{N}^a(\lambda') r_a\right),$$

$$\hat{P}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_n(\lambda') - i\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \tilde{N}^a_n(\lambda') r_a \right),$$

$$\hat{A}(\lambda') = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{N}^b(\lambda') \left(i\hat{S}_b + i\frac{\partial}{\partial \tau^b} + R^a_b r_a \right),$$

$$r_a \equiv R^c_a J_c.$$

2.2. Группа Пуанкаре

Рассмотрим в качестве группы $\mathcal{G}$ группу Пуанкаре. Построим теорию возмущений для $(3+1)$–мерной теории скалярного действительного поля, описываемого Лагранжевой плотностью:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} f_{,\alpha}(\mathbf{x}) f_{,\beta}(\mathbf{x}) - G^2 V\left(\frac{f}{G}\right), \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x)\,; \quad f_{,\alpha} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\,; \quad g^{\alpha\beta} = diag(1, -1, -1, -1).$$

Пуанкаре-инвариантность уравнения Лагранжа–Эйлера:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + G \frac{dV(f/G)}{df} = 0 \tag{2.6}$$

приводит, как известно, к двум следствиям. Во-первых, если $\tilde{f}(\mathbf{x})$ есть решение уравнения (2.6), то и функция $\tilde{f}(\mathbf{x}')$, где

$$x'^\alpha = L^\alpha_\beta(\tau^4, \ldots, \tau^9) x^\beta + \tau^\beta, \tag{2.7}$$

L^α_β — матрица преобразования Лоренца, а параметры τ^β определяют смещение начала координат, является решением уравнения (2.6).

Во-вторых, каждое решение уравнения (2.6) порождает линейное пространство решений следующего уравнения:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{d^2 V(f/G)}{df^2} \cdot \psi(\mathbf{x}) = 0. \tag{2.8}$$

Действительно, если функция $\tilde{f}(\mathbf{x})$ — решение уравнения (2.6), то линейные комбинации функций[1]

$$\tilde{f}_{,0}(\mathbf{x}), \qquad \tilde{f}_{,k}(\mathbf{x}), \qquad x^k \tilde{f}_{,0}(\mathbf{x}) + t\tilde{f}_{,k}(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad x^k \tilde{f}_{,j}(\mathbf{x}) - x^j \tilde{f}_{,k}(\mathbf{x})$$

являются решениями уравнения (2.8).

2.3. Теория возмущений и интегралы движения

Следующим шагом построения теории возмущений является нахождение интегралов движения (динамических инвариантов), соответствующих, согласно теореме Нётер, непрерывным преобразованиям симметрии лагранжиана. В качестве 10 линейно независимых интегралов движения можно выбрать следующие ($\alpha < \beta$):

$$\mathcal{P}^\beta = \int \Theta^{0\beta}\, dx_1 dx_2 dx_3, \qquad \mathcal{M}^{\alpha\beta} = \int (\Theta^{0\alpha} x^\beta - \Theta^{0\beta} x^\alpha)\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

где

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{,\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} - g^{\alpha\beta}\mathcal{L}.$$

Следует отметить, что интегралы $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ не являются трансляционно-инвариантными. При смещении начала координат на τ^μ величина $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ меняется на $\tau^\beta \mathcal{P}^\alpha - \tau^\alpha \mathcal{P}^\beta$.

Пусть C — пространственноподобная гиперплоскость, заданная некоторым уравнением в координатах $\mathbf{x}'$. С помощью преобразования Пуанкаре (2.7) можно перейти в систему координат $\mathbf{x}''$, в которой поверхность C будет определяться уравнением $t'' = 0$, поэтому, разумеется, не ограничивая общности, можно выбрать в качестве поверхности C гиперплоскость $t' = 0$, а в качестве координат на C $\lambda'^k = x'^k$, $k = 1, 2, 3$. При таком выборе нормальная производная $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t'}$.

Проведём квантование, заменяя $f(\lambda')$ и $f_{,\alpha}(\lambda')$ на операторы:

$$f(\lambda') \longrightarrow \hat{q}(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau})) \equiv q(\lambda'), \qquad f_{,k}(\lambda') \longrightarrow \hat{q}_{,k}(\lambda'), \qquad f_{,0}(\lambda') \longrightarrow \hat{p}(\lambda').$$

Теперь интегралы движения являются рядами по $\frac{1}{G}$:

[1] Греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, индексы k и j — от 1 до 3.

$$O^a = G^2 O^a_{-2} + G O^a_{-1} + O^a_0 + \dots \qquad a = 1, 2, \dots, 10.$$

Выпишем явно первые слагаемые разложения гамильтониана:

$$\mathcal{P}^0 \equiv \mathcal{H} = G^2 \mathcal{H}_{-2} + G\mathcal{H}_{-1} + \mathcal{H}_0 + \dots,$$

где[2]

$$\mathcal{H}_{-2} = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}(F^2_{,0} + F^2_{,1} + F^2_{,2} + F^2_{,3}) + V(F) \right) d^3S,$$
$$\mathcal{H}_{-1} = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}(F_{,0}\hat{P} + F_{,1}\hat{Q}_{,1} + F_{,2}\hat{Q}_{,2} + F_{,3}\hat{Q}_{,3}) + V'(F)\hat{Q} \right) d^3S,$$
$$\mathcal{H}_0 = \int\limits_C \left(\frac{1}{2}\hat{P}^2 + F_{,0}\hat{A}_{,0} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{2}\hat{Q}^2_{,k} + F_{,k}\hat{A}_{,k} \right) + V'(F)\hat{A} + \frac{1}{2}V''(F)\hat{Q}^2 \right) d^3S.$$

Так как $F(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ является числовой функцией, а не оператором, то интегралы O^a_{-2} сводятся к числам, а интегралы O^a_{-1} оказываются линейными по операторам u, u_n, $\frac{\delta}{\delta u}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n}$. Поскольку не существует нормированных собственных векторов этих операторов, то для построения регулярной теории возмущений необходимо обратить все O^a_{-1} в нуль.

Пусть на поверхности C выполняются соотношения

$$F_{,\alpha}(0, x') = c v_{,\alpha}(0, x'), \qquad F_{,\alpha 0}(0, x') = c v_{,\alpha 0}(0, x'), \tag{2.9}$$

где c — произвольная константа, и граничные условия

$$F_{,\alpha}\hat{Q}|_{\partial C} = 0, \qquad x'^{\alpha} F_{,\beta}\hat{Q}|_{\partial C} = 0.$$

В *Приложении 2* показано, что, если функция $F(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ — решение следующего уравнения:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x}', \tilde{\tau})}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + V'(F) = 0, \tag{2.6$'$}$$

то во всех интегралах O^a_{-1} суммы линейных по $\frac{\delta}{\delta u}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n}$ членов оказываются пропорциональными левым частям формул (1.12) и, следовательно, равными нулю.

[2]Производные берутся по x': $F_{,\alpha} \equiv \frac{\partial F}{\partial x'^{\alpha}}$, $Q_{,\alpha} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x'^{\alpha}}$ и $A_{,\alpha} \equiv \frac{\partial A}{\partial x'^{\alpha}}$.

Теперь все операторы O^a_{-1} могут быть представлены в виде:

$$O^a_{-1} = c\int\limits_C \left(M_a\left(u_n(\lambda') + \tilde{N}^a_n(\lambda')r_a\right) - M_{an}\left(u(\lambda') + \tilde{N}^a(\lambda')r_a\right)\right) d^3S, \quad (2.10)$$

при этом индекс a нумерует интегралы движения в следующем порядке: $a = 0$ соответствует $\mathcal{H}$, далее следуют $\mathcal{P}^k$, $\mathcal{M}^{0j}$ и $\mathcal{M}^{kj}$. В формуле (2.10), в выражениях для $\mathcal{M}^{\alpha\beta}_{-1}$, не выписаны члены $\tau^\alpha\mathcal{P}^\beta_{-1} - \tau^\beta\mathcal{P}^\alpha_{-1}$, так как они обращаются в нуль автоматически, если все $\mathcal{P}^\alpha_{-1} = 0$.

Интегралы $r_a \equiv R^b_a J_b$ являются линейными функционалами от u и u_n. Подставляя явный вид функционалов R^b_a, легко получить, что в формуле (2.10) линейные по u и u_n члены обратятся в нуль при

$$v(0, x') = -\tilde{N}^a(0, x')J_a.$$

Тогда из формулы (2.4) следует, что $c = \sqrt{2}$. Таким образом,

$$v(0, x') = -\tilde{N}^a(0, x')J_a = \frac{1}{\sqrt{2}}F(0, x') \Longrightarrow F(0, x') = -\sqrt{2}\tilde{N}^a(0, x')J_a. \quad (2.11)$$

Данные соотношения определяют значения параметров J_a:

$$J_a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega(F, M_a). \quad (2.12)$$

До сих пор наше рассмотрение касалось только поверхности C. Теперь распространим его на всё пространство. Соотношение

$$v(0, x') = \frac{1}{\sqrt{2}}F(0, x')$$

должно выполняться при всех значениях $\tilde{\tau}$, иными словами,

$$v(\mathbf{x}(0, x', \tilde{\tau})) = \frac{1}{\sqrt{2}}F(\mathbf{x}(0, x', \tilde{\tau})).$$

Таким образом, из пропорциональности функций v и F на поверхности следует их пропорциональность во всём пространстве, так как с помощью преобразования Пуанкаре из точки поверхности C можно получить любую точку пространства. Следовательно, $v(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ — функция, пропорциональная решению уравнения $(2.6')$, а $M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ являются решениями линейного уравнения:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau})}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} + V''(F) \cdot M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \equiv \hat{L} M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) = 0. \tag{2.8'}$$

2.4. Определение функций $\tilde{N}^a$

До настоящего момента значения функций $\tilde{N}^a(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ не определены. Покажем, что если $\tilde{N}^a$ являются решениями уравнения $(2.8')$ и удовлетворяют определённым граничным условиям на бесконечности трёхмерного пространства, например, обращаются в нуль вместе со всеми своими производными первого порядка, то условия, фиксирующие явный вид преобразования Боголюбова, не зависят от выбора поверхности интегрирования.

Действительно, пусть $\tilde{C}$ — пространственноподобная гиперплоскость. Область пространства-времени S, ограниченная гиперплоскостями C и $\tilde{C}$, обладает границей

$$\partial S = C + \tilde{C} + \partial\tilde{S}.$$

при этом поверхность $\partial\tilde{S}$ находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства. Наложим на функции $\tilde{N}^a$ и M_b такие граничные условия, чтобы

$$\int\limits_{\partial\tilde{S}} (\tilde{N}^a M_{bn} - M_b \tilde{N}^a_n)\, dS = 0.$$

Функции M_b — решения $(2.8')$, если $\tilde{N}^a$ также являются решениями данного уравнения, то, используя формулу Грина, получаем, что интеграл по границе области S равен нулю:

$$\oint\limits_{\partial S} (\tilde{N}^a M_{bn} - M_b \tilde{N}^a_n)\, d^3S = \int\limits_S (\tilde{N}^a \hat{L} M_b - M_b \hat{L} \tilde{N}^a)\, d^4S = 0, \tag{2.13}$$

и условия (1.8) не зависят от выбора поверхности интегрирования:

$$\tilde{\omega}(\tilde{N}^a, M_b) \equiv \int\limits_{\tilde{C}} (\tilde{N}^a(\tilde{\lambda}')M_{bn}(\tilde{\lambda}') - \tilde{N}^a_n(\tilde{\lambda}')M_b(\tilde{\lambda}'))\, d^3\tilde{S} = \delta^a_b.$$

Аналогичным образом доказывается независимость от выбора поверхности интегрирования условий (8).

Потребуем, чтобы функция $u(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ являлась решением линейного волнового уравнения $(2.8')$, тогда заданием граничных условий на бесконечности трехмерного пространства можно добиться того, чтобы условия $(1.4')$ также выполнялись независимо от выбора C. Так как пространственноподобную гиперплоскость можно провести в любой точке пространства, то наше квантование справедливо во всём пространстве. Выбор поверхности C влияет лишь на значения параметров J_a.

Изменение значений параметров τ^a в аргументах функций $\tilde{N}^a(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau}))$, $M_a(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau}))$ и $u(\mathbf{x}(\lambda', \tilde{\tau}))$ фактически означает переход от интегрирования по одной пространственноподобной гиперплоскости к интегрированию по другой, возможно, совпадающей с исходной. Следовательно, если условия (7)–(9) выполняются при хотя бы одном значение параметров τ^a, то они выполняются при всех значениях τ^a.

Функция $F(\mathbf{x})$ обращается в нуль на некоторой пространственноподобной гиперплоскости. Выберем групповые переменные τ^a так, чтобы $F(\mathbf{x}(0, x', \tilde{\tau})) = 0$.

Так как $F(0, x') = 0$, то $F_{,k}(0, x') = 0$ и $F_{,kk}(0, x') = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Из уравнения $(2.6')$ и условия $V'(0) = 0$ следует, что $F_{,00}(0, x') = 0$.

Функции $M_a(0,x')$ определяются следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
M_0(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{,0}\,; & M_{0n}(0,x') = 0\,;\\
M_1(0,x') = 0\,; & M_{1n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{,01}\,;\\
M_2(0,x') = 0\,; & M_{2n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{,02}\,;\\
M_3(0,x') = 0\,; & M_{3n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{,03}\,;\\
M_4(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}x'^1F_{,0}\,; & M_{4n}(0,x') = 0\,;\\
M_5(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}x'^2F_{,0}\,; & M_{5n}(0,x') = 0\,;\\
M_6(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}x'^3F_{,0}\,; & M_{6n}(0,x') = 0\,;\\
M_7(0,x') = 0\,; & M_{7n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^1F_{,02} - x'^2F_{,01})\,;\\
M_8(0,x') = 0\,; & M_{8n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^3F_{,01} - x'^1F_{,03})\,;\\
M_9(0,x') = 0\,; & M_{9n}(0,x') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^2F_{,03} - x'^3F_{,02})\,.
\end{array}$$

Пусть функция $F(0,x')$ является либо чётной, либо нечётной, тогда

$$\begin{array}{ll}
\int F_{,0}F_{,0j}\,d^3S = 0; & j = 1,2,3;\\
\int x'^kF_{,0}F_{,0j}\,d^3S = 0; & j = 1,2,3;\ k = 1,2,3;\ k \neq j;\\
\int x'^kx'^iF_{,0}F_{,0j}\,d^3S = 0; & j = 1,2,3;\ k = 1,2,3;\ i = 1,2,3.
\end{array}$$

Подставляя M_a в формулу (2.12), получаем, что $J_k = 0$ при $k \neq 0$, следовательно, согласно формуле (2.11):

$$\tilde{N}^0(0,x') = \frac{\sqrt{2}}{\int\limits_C F_{,0}^2\,d^3S}F(0,x') = 0 \qquad \text{и} \qquad \tilde{N}^0_n(0,x') = \frac{\sqrt{2}}{\int F_{,0}^2\,d^3S}F_{,0}(0,x').$$

Так как $\tilde{N}^a(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ являются решениями уравнения (2.8$'$), то для их определения достаточно задать значения $\tilde{N}^a$ и $\tilde{N}_n^a$ на поверхности C:

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}^0(0,x') = 0\,; && \tilde{N}_n^0(0,x') = B_0 F_{,0}\,;\\
&\tilde{N}^1(0,x') = -B_1 F_{,01}\,; && \tilde{N}_n^1(0,x') = 0\,;\\
&\tilde{N}^2(0,x') = -B_2 F_{,02}\,; && \tilde{N}_n^2(0,x') = 0\,;\\
&\tilde{N}^3(0,x') = -B_3 F_{,03}\,; && \tilde{N}_n^3(0,x') = 0\,;\\
&\tilde{N}^4(0,x') = 0\,; && \tilde{N}_n^4(0,x') = B_4(x'^1 F_{,0} - D_1 F_{,01})\,;\\
&\tilde{N}^5(0,x') = 0\,; && \tilde{N}_n^5(0,x') = B_5(x'^2 F_{,0} - D_2 F_{,02})\,;\\
&\tilde{N}^6(0,x') = 0\,; && \tilde{N}_n^6(0,x') = B_6(x'^3 F_{,0} - D_3 F_{,03})\,;\\
&\tilde{N}^7(0,x') = B_7(x'^2 F_{,01} - x'^1 F_{,02})\,; && \tilde{N}_n^7(0,x') = 0\,;\\
&\tilde{N}^8(0,x') = B_8(x'^1 F_{,03} - x'^3 F_{,01})\,; && \tilde{N}_n^8(0,x') = 0\,;\\
&\tilde{N}^9(0,x') = B_9(x'^3 F_{,02} - x'^2 F_{,03})\,; && \tilde{N}_n^9(0,x') = 0\,;
\end{aligned}$$

где $D_k = \frac{\int x'^k F_{,0} F_{,0k}\, d^3S}{\int F_{,0k}^2\, d^3S}$,

$$\begin{aligned}
&B_0 = \frac{\sqrt{2}}{\int F_{,0}^2\, d^3S} && B_2 = \frac{\sqrt{2}}{\int F_{,02}^2\, d^3S}\\
&B_1 = \frac{\sqrt{2}}{\int F_{,01}^2\, d^3S} && B_3 = \frac{\sqrt{2}}{\int F_{,03}^2\, d^3S}\\
&B_4 = \frac{\sqrt{2}\int F_{,01}^2\, d^3S}{\int (x'^1 F_{,0})^2\, d^3S \int F_{,01}^2\, d^3S - \left(\int x'^1 F_{,0} F_{,01}\, d^3S\right)^2} && B_7 = \frac{\sqrt{2}}{\int (x'^2 F_{,01} - x'^1 F_{,02})^2\, d^3S}\\
&B_5 = \frac{\sqrt{2}\int F_{,02}^2\, d^3S}{\int (x'^2 F_{,0})^2\, d^3S \int F_{,02}^2\, d^3S - \left(\int x'^2 F_{,0} F_{,02}\, d^3S\right)^2} && B_8 = \frac{\sqrt{2}}{\int (x'^1 F_{,03} - x'^3 F_{,01})^2\, d^3S}\\
&B_6 = \frac{\sqrt{2}\int F_{,03}^2\, d^3S}{\int (x'^3 F_{,0})^2\, d^3S \int F_{,03}^2\, d^3S - \left(\int x'^3 F_{,0} F_{,03}\, d^3S\right)^2} && B_9 = \frac{\sqrt{2}}{\int (x'^3 F_{,02} - x'^2 F_{,03})^2\, d^3S}
\end{aligned}$$

Как легко проверить, соотношения (1.8) и (1.9) выполнены.

2.5. Редукция числа состояний

Рассмотрим преобразования пространства амплитуд состояний поля и действующих на нём операторов. Первоначально мы перешли от функции координаты $\mathbf{x}$ $f(\mathbf{x}')$ к сложной функции координат $\mathbf{x}'$ и τ $f(\mathbf{x}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}))$

и выделили из неё классическую $Gv(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tilde{\tau}))$ и квантовую $u(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tilde{\tau}))$ составляющие. Введение дополнительных переменных было компенсировано наложением условий на функции $u(\mathbf{x}(\mathbf{x}',\tilde{\tau}))$. При получении выражения (1.13) для переменных Боголюбова, как функционалов исходных полевых переменных, мы рассматривали функции $f(\mathbf{x}')$ и $f_n(\mathbf{x}')$ как независимые, тем самым удвоив число состояний поля. Удвоение числа состояний поля удвоило и число всех независимых переменных, включая и переменные Боголюбова, поэтому для приведения количества состояний поля к исходному редукцию числа состояний необходимо проводить на функциях, удовлетворяющих не 10, а 20 дополнительным условиям.

Функции $\tilde{N}^a$ выбраны так, что $\forall a$ либо $\tilde{N}^a(0,x')$, либо $\tilde{N}^a_n(0,x')$ тождественно равны нулю. Таким образом, одна часть условий (1.4$'$) ограничивает поведение u, а другая — u_n. Легко видеть, что u и u_n должны удовлетворять различным условиям, что затрудняет редукцию числа состояний. Дополнительные 10 условий удобно выбрать следующим образом: рассмотрим функции $w(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ такие, что

$$\forall a = 0..L-1\ :\ \omega(M_a, w) = 0, \qquad \omega(\tilde{N}^a, w) = 0. \tag{1.4$''$}$$

Функция $w(0,x')$ представима в виде

$$w = y + \tilde{N}^a \cdot \omega(M_a, y) - M_a \cdot \omega(\tilde{N}^a, y) - \tilde{N}^a \cdot \omega(M_a, M_b)\omega(\tilde{N}^b, y). \tag{1.10$'$.a}$$

Отсюда следует, что

$$w_n = y_n + \tilde{N}^a_n \cdot \omega(M_a, y) - M_{an} \cdot \omega(\tilde{N}^a, y) - \tilde{N}^a_n \cdot \omega(M_a, M_b)\omega(\tilde{N}^b, y). \tag{1.10$'$.b}$$

Существуют константы $\mathcal{C}^a$, C^a_b, $\tilde{\mathcal{C}}^a$, $\tilde{C}^a_b$ такие, что при $t' = 0$ выполняются соотношения[3]:

$$\tilde{N}^a = \mathcal{C}^a M_{an} + C^a_b \tilde{N}^b_n, \qquad \tilde{N}^a_n = \tilde{\mathcal{C}}^a M_a + \tilde{C}^a_b \tilde{N}^b, \tag{2.14}$$

следовательно, условия (1.4$''$) можно переписать в следующем виде

[3] Суммирование в формулах (2.14) ведётся только по индексу b.

$$\int \tilde{N}^a(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, \qquad \int \tilde{N}^a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,$$
$$\int \tilde{N}^a_n(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, \qquad \int \tilde{N}^a_n(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,$$
$$\int M_a(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, \qquad \int M_a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,$$
$$\int M_{an}(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, \qquad \int M_{an}(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0.$$

Таким образом, функции $w(0,x')$ и $w_n(0,x')$ могут быть выбраны независимо. Эти функции подчиняются одним и тем же дополнительным условиям, следовательно, они являются результатом действия одного и того же оператора проектирования на функции y и y_n соответственно. Действительно, подставляя значения $M_a(0,x')$ и $\tilde{N}^a(0,x')$ в формулы $(10'.a)$ и $(10'.b)$, имеем:

$$w = y - \frac{1}{\sqrt{2}B_0}\tilde{N}^0_n(0,x')\int_C \tilde{N}^0_n y\,d^3S - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2}B_k}\tilde{N}^k(0,x')\int_C \tilde{N}^k y\,d^3S -$$
$$- \sum_{j=4}^{6}\frac{1}{\sqrt{2}B_j}\tilde{N}^j_n(0,x')\int \tilde{N}^j_n y\,d^3S - \sum_{i=7}^{9}\frac{1}{\sqrt{2}B_i}\tilde{N}^i(0,x')\int_C \tilde{N}^i y\,d^3S,$$

$$w_n = y_n - \frac{1}{\sqrt{2}B_0}\tilde{N}^0_n(0,x')\int_C \tilde{N}^0_n y_n\,d^3S - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2}B_k}\tilde{N}^k(0,x')\int_C \tilde{N}^k y_n\,d^3S -$$
$$- \sum_{j=4}^{6}\frac{1}{\sqrt{2}B_j}\tilde{N}^j_n(0,x')\int \tilde{N}^j_n y_n\,d^3S - \sum_{i=7}^{9}\frac{1}{\sqrt{2}B_i}\tilde{N}^i(0,x')\int_C \tilde{N}^i y_n\,d^3S.$$

Так как
$$r_a \equiv R^b_a J_b = J_b\omega(\tilde{N}^b_a, u) = -\omega(M_a, u),$$
то функции, удовлетворяющие соотношениям $(1.4'')$, можно получить по формулам

$$w(0,x') = u(0,x') - \tilde{N}^a(0,x')r_a, \qquad w_n(0,x') = u_n(0,x') - \tilde{N}^a_n(0,x')r_a,$$

в остальных точках пространства функция w определяется как решение уравнения (2.8).

Чтобы компенсировать появление новых условий, ограничивающих поведение функций $w(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ и $w_n(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$, будем считать r_a независимыми переменными. Переменные r_a не имеют физического смысла. Их происхождение связано с редукцией пространства состояний в терминах переменных Боголюбова. При рассмотрении интегралов движения в нулевом порядке эти избыточные переменные будут удалены соответствующим выбором векторов состояния.

Производные по $w(\lambda')$ и $w_n(\lambda')$ связаны соотношениями:

$$\int\limits_C \left(M_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + M_{an}(\lambda') \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \right) d^3S = 0,$$

$$\int\limits_C \left(\tilde{N}^a(\lambda') \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + \tilde{N}^a_n(\lambda') \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \right) d^3S = 0.$$

В терминах новых переменных вариационные производные по $u(\lambda')$ и $u_n(\lambda')$ имеют вид (см. *Приложение 3*):

$$\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + \frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')} \frac{\partial}{\partial r_a},$$

$$\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} + \frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')} \frac{\partial}{\partial r_a},$$

где

$$\frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')} = -M_{an}(\lambda') + \omega(M_a, M_b) \tilde{N}^b_n(\lambda'),$$

$$\frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')} = M_a(\lambda') - \omega(M_a, M_b) \tilde{N}^b(\lambda').$$

Необходимую редукцию числа состояний осуществим выбором векторов состояния в форме

$$\Phi[w, w_n] = exp(-i \int w_n w \; d^3S) \breve{\Phi}[w],$$

теперь

$$\frac{\delta}{\delta w(\lambda')} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} - i w_n(\lambda'), \qquad \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \longrightarrow -i w(\lambda'), \tag{2.15}$$

и для операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ получаем выражения:

$$\hat{P} = \bar{P} + \bar{p}, \qquad \hat{Q} = \bar{Q} + \bar{q}, \tag{2.16}$$

где

$$\bar{P}(\lambda') = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}, \qquad \bar{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')}\frac{\partial}{\partial r_a},$$

$$\bar{Q} = \sqrt{2}w(\lambda'), \qquad \bar{q} = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')}\frac{\partial}{\partial r_a}.$$

2.6. Нулевой порядок по G

2.6.1. Интегралы движения

Рассмотрим интегралы движения в нулевом порядке. В предыдущем изложении мы рассматривали квантовую поправку u как величину нулевого порядка по G, на самом деле u представима в виде ряда по обратным степеням G:

$$u = u_0 + \frac{1}{G}u_1 + \mathcal{O}(G^{-2}). \tag{2.17}$$

В интегралы движения, пропорциональные G и G^2, вносят вклад только классическая составляющая поля F и u_0. Выясним, чему равен вклад u_1 в интегралы движения в нулевом порядке.

Во-первых отметим, что, так как

$$\omega(\tilde{N}^a, u) = \omega(\tilde{N}^a, u_0) + \frac{1}{G}\omega(\tilde{N}^a, u_1) + \mathcal{O}(G^{-2}),$$

то дополнительные условия (1.4′) одинаковы для функций u_0 и u_1:

$$\omega(\tilde{N}^a, u_0) = 0,$$

$$\omega(\tilde{N}^a, u_1) = 0.$$

Слагаемые в интегралах движения нулевого порядка, пропорциональные u_1, u_{1n} и производным по этим функциям, можно получить заменой в соответствующих интегралах O^a_{-1} u на u_1. Очевидно, что все эти интегралы равны нулю, поэтому и при анализе интегралов движения в нулевом порядке можно не использовать формулу (2.17) и обозначать квантовую поправку, пропорциональную G^0 через u.

Как показано в *Приложении 4*, интегралы движения в нулевом порядке можно представить в виде:

$$\mathcal{H}_0 = i\frac{\partial}{\partial\tau^0} + \mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}_{02} + \mathcal{H}_{03},$$

$$\mathcal{P}_0^k = -i\frac{\partial}{\partial\tau^k} + \mathcal{P}_{01}^k + \mathcal{P}_{02}^k + \mathcal{P}_{03}^k,$$

$$\mathcal{M}_0^{0k} = i\frac{\partial}{\partial\tau^{3+k}} + \tau^0\mathcal{P}_0^k - \tau^k\mathcal{H}_0 + \mathcal{M}_{01}^{0k} + \mathcal{M}_{02}^{0k} + \mathcal{M}_{03}^{0k},$$

$$\mathcal{M}_0^{kj} = i\frac{\partial}{\partial\tau^{4+k+j}} - \tau^k\mathcal{P}_0^j + \tau^j\mathcal{P}_0^k + \mathcal{M}_{01}^{kj} + \mathcal{M}_{02}^{kj} + \mathcal{M}_{03}^{kj}.$$

Операторы O_{01}^a, O_{02}^a и O_{03}^a действуют в пространстве функционалов вида $\Phi[w, w_n]\tilde{\Phi}[r]$, причём O_{01}^a и O_{02}^a действуют в пространстве $\Phi[w, w_n]$, тогда как O_{03}^a — в ортогональном ему пространстве $\tilde{\Phi}[r]$.

Выпишем в явном виде интегралы $\mathcal{H}_{0k}$:

$$\mathcal{H}_{01} = \frac{1}{2}\int(\bar{P}^2 + \sum_{k=1}^{3}\bar{Q}_{\lambda_k}^2 + V''(F)\bar{Q}^2)\, d^3S,$$

$$\mathcal{H}_{02} = i\int\left(w_n\frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + w_{nn}\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}\right)\, d^3S,$$

$$\mathcal{H}_{03} = \frac{1}{2}\int(\bar{p}^2 + \sum_{k=1}^{3}\bar{q}_{\lambda_k}^2 + V''(F)\bar{q}^2)\, d^3S +$$

$$+ir_a\frac{\partial}{\partial r_b}\int\left(\tilde{N}_n^a\frac{\delta r_b}{\delta u(\lambda')} - \tilde{N}_{nn}^a\frac{\delta r_b}{\delta u_n(\lambda')}\right)\, d^3S + r_a r_b\int(\tilde{N}_n^a\tilde{N}_n^b - \tilde{N}_{nn}^a\tilde{N}^b)\, d^3S.$$

Операторы $\mathcal{H}_{01}$ и $\mathcal{H}_{02}$ являются операторами смещения вдоль нормали к C. Из того факта, что функцию $w(t', x')$ можно представить в следующем виде:

$$w(t', x') = \sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x')\theta_s(t') + \mathcal{O}(t'^2)$$

следует (см. *Приложении 4*), что оператор

$$\bar{P} = \sqrt{2}w_{t'}|_{t'=0}.$$

Сравнивая это равенство с формулой (2.16), получаем:

$$w_{t'}(\mathbf{x}',\tilde{\tau})|_{t'=0} = -\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta w(\mathbf{x}',\tilde{\tau})}. \tag{2.18}$$

Подставляя данное соотношение в $\mathcal{H}_0$, легко получить, что сумма интегралов $\mathcal{H}_{01}$ и $\mathcal{H}_{02}$ обращается в нуль. Аналогичные вычисления, проведённые для других интегралов движения, показывают, что сумма O^a_{01} и O^a_{02} равняется нулю. Операторы O^a_{03}, содержащие только избыточные переменные r_a и $\frac{\partial}{\partial r_a}$, могут быть удалены соответствующим выбором векторов состояний [54].

После удаления избыточных переменных интегралы движения в нулевом порядке имеют следующий вид:

$$\mathcal{H}_0 = i\frac{\partial}{\partial\tau^0},$$

$$\mathcal{P}_0^k = -i\frac{\partial}{\partial\tau^k},$$

$$\mathcal{M}_0^{0k} = i\left(\frac{\partial}{\partial\tau^{3+k}} - \tau^0\frac{\partial}{\partial\tau^k} - \tau^k\frac{\partial}{\partial\tau^0}\right),$$

$$\mathcal{M}_0^{kj} = i\left(\frac{\partial}{\partial\tau^{4+k+j}} + \tau^k\frac{\partial}{\partial\tau^j} - \tau^j\frac{\partial}{\partial\tau^k}\right),$$

следовательно, они удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов группы Пуанкаре и порождают алгебру Ли данной группы.

2.6.2. Оператор поля

Решениями уравнений Гейзенберга

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{x}')}{\partial x'^\alpha} = i[P^\alpha,\psi(\mathbf{x}')]$$

$$(x'^0\frac{\partial}{\partial x'^k} + x'^k\frac{\partial}{\partial x'^0})\psi(\mathbf{x}') = i[M^{0k},\psi(\mathbf{x}')]$$

$$(x'^j\frac{\partial}{\partial x'^k} - x'^k\frac{\partial}{\partial x'^0})\psi(\mathbf{x}') = i[M^{jk},\psi(\mathbf{x}')]$$

являются функции вида $\psi(L^{\alpha}_{\beta}[\tau^4, \dots, \tau^9](x'^{\beta} - \tau^{\beta}))$, т.е. функции аргумента $\mathbf{x}$.

Оператор поля $\varphi(\mathbf{x}')$ имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{x}') = GF(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) + \hat{\psi}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) + \frac{\delta r_a}{\delta u_n}\frac{\partial}{\partial r_a} + \frac{1}{G}\hat{A}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}), \tag{2.19}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ связаны соотношением (2.7), а $\hat{\psi}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ — решение следующей задачи Коши:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\hat{\psi}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}} + V''(F)\hat{\psi}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) = 0,$$
$$\hat{\psi}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})|_C = \bar{Q}(\lambda') = \sqrt{2}w(\lambda'),$$
$$\hat{\psi}_{t'}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})|_C = \bar{P}(\lambda') = \sqrt{2}w_{t'}(\lambda').$$

Применение преобразования Боголюбова позволило нам использовать в качестве независимых переменных параметры группы Пуанкаре. С помощью данных переменных (групповых переменных Боголюбова) удалось построить теорию возмущений, не нарушая при этом законов сохранения. Появившиеся в процессе построения теории возмущений избыточные состояния поля были сокращены. Построенное пространство состояний обладает нужным числом степеней свободы. С точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи найдены значения для интегралов движения и оператора поля.

Таким образом, дано полностью релятивистски инвариантное описание $(3+1)$–мерной квантовой системы с ненулевой классической компонентой. Данная схема может быть применена при квантовании около классических решений, периодических по времени, например, двойных (пульсирующих) солитонов или стоячих волн.

Глава 3

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ФОРМЕ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ

3.1. Теоремы существования периодических решений

В семидесятые и восьмидесятые годы для широкого класса непрерывных функций $g(\varphi)$ были доказаны теоремы существования (или отсутствия) периодических решений нелинейных волновых уравнений:

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0, \tag{3.1}$$

с определёнными граничными условиями по x.

Ж. М. Корон [61] доказал, что следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} - g(\varphi) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \;\; g(0) = 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} \varphi(t,x) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(x, t+T) = \varphi(t,x), & x, t, T \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

имеет решение с периодом T, только если

$$g'(0) > \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Прямым следствием этой теоремы является отсутствие нетривиальных решений задачи (3.2) в случае безмассовой теории φ^4, т. е. при $g(\varphi)=\varphi^3$. Данный результат не означает, разумеется, полного отсутствия периодических решений в этой теории.

Изменяя граничные условия по x, получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2}-g(\varphi)=0, & x,t\in\mathbb{R},\quad g(0)=0,\\ \varphi(0,t)=\varphi(\pi,t)=0, & t\in\mathbb{R},\\ \varphi(x,t+T)=\varphi(t,x), & x,t,T\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2$'$}$$

Для непрерывных неубывающих функций $g(\varphi)$ таких, что

$$\lim_{|\varphi|\to\infty}\frac{g(\varphi)}{\varphi}=\infty,$$

существование слабых T-периодических решений задачи (3.2$'$) было доказано при условии, что

$$\exists\ \alpha,\ \beta>0\quad \text{такие, что}\quad \forall\varphi\in\mathbb{R}\ \ :\ \ \frac{1}{2}\varphi\cdot g(\varphi)-\int\limits_0^{\varphi}g(t)\,dt\geqslant\beta|g(\varphi)|-\alpha.$$

Под слабым решением задачи (3.2$'$) подразумевается функция φ такая, что

$$\int\limits_0^T\!\!\int\limits_0^{\pi}(\varphi(v_{tt}-v_{xx})+g(\varphi)v)\,dt\,dx\ =\ 0 \tag{3.3}$$

для всех T-периодических функций $v\in C^2([0,\pi]\times\mathbb{R})$, удовлетворяющих граничным условиям.

Х. Брезис, Ж. М. Корон и Л. Ниренберг [62] доказали данное утверждение, обобщив доказательство П. Рабиновича [63], сделанное для более узкого класса функций $g(\varphi)$. Упрощённое доказательство для случая $g(\varphi)=|\varphi|^n\cdot\varphi$, где $n>0$ дано в [64].

3.2. Два типа дважды периодических решений

3.2.1. Бегущие волны

Наше исследование посвящено изучению $(1+1)$-мерной модели скалярной теории φ^4, описываемой лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{,t}^2(t,x) - \varphi_{,x}^2(t,x) - M^2\varphi^2(t,x) - \frac{\varepsilon}{2}\varphi^4(t,x)\right). \tag{3.4}$$

Рассмотрим уравнение Лагранжа–Эйлера этой модели:

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} - M^2\varphi(t,x) - \varepsilon\varphi^3(t,x) = 0 \tag{3.5}$$

с целью найти его решения, периодические как по пространственной координате x, так и по временной t. При этом период по x выберем равным 2π и будем искать период по t.

Существуют два класса дважды периодических решений. Если искать решения в виде бегущих волн:

$$\varphi(t,x) = \varphi(x - vt), \tag{3.6}$$

где v — скорость волны, то уравнение (3.5) легко сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Дюффинга [65]:

$$\frac{d^2 f(z,k)}{dz^2} = a_1(k)f^3(z,k) + a_2(k)f(z,k), \tag{3.7}$$

где явный вид коэффициентов a_1 и a_2 зависит от вида функции $f(z)$. Периодическими решениями данного уравнения являются эллиптические функции Якоби [66].

Например, функция $\mathrm{cn}(z,k)$ — периодическое решение следующего уравнения:

$$\frac{d^2\,\mathrm{cn}(z,k)}{dz^2} = (2k^2-1)\,\mathrm{cn}(z,k) - 2k^2\,\mathrm{cn}^3(z,k). \tag{3.8}$$

Подставляя $\varphi \equiv A\,\mathrm{cn}(z,k)$ с $z \equiv \alpha x + \beta t$ в уравнение (2), получаем:

$$A(\alpha^2-\beta^2)\frac{d^2\,\mathrm{cn}(z,k)}{dz^2} - m^2\,\mathrm{cn}(z,k) - \lambda\,\mathrm{cn}^3(z,k) = 0. \tag{3.9}$$

Сравнивая два последних уравнения, получаем систему:

$$\begin{cases} 2k^2(\alpha^2-\beta^2)+A^2\lambda &= 0, \\ (2k^2-1)(\alpha^2-\beta^2) &= m^2. \end{cases}$$

Значения k^2 и A^2 определяются для всех значений $m^2 \geqslant 0$ и $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} k^2 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{m^2}{\alpha^2-\beta^2}\right), \\ \\ A^2 &= \frac{\beta^2-\alpha^2-m^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Если $\beta^2 > \alpha^2+m^2$, то $0 < A^2$, $0 < k^2 < \frac{1}{2}$ и мы получаем действительное решение (для $x, t \in \mathbb{R}$). Другие решения в виде бегущей волны представлены в *Приложении 5*, пример квантования вблизи подобного решения дан в *Приложении 6.* Подобные поля хорошо изучены как для двумерной [67, 68], так и для четырёхмерной [69] скалярной теории φ^4.

Периодические решения в виде бегущих волн не являются истинно дважды периодическими решениями, поскольку с помощью преобразования Пуанкаре можно перейти в систему координат, в которой период подобного решения либо по времени, либо по пространственной координате будет равен бесконечности.

3.2.2. Стоячие волны

Другой класс дважды периодических решений образуют решения в виде стоячей волны:

$$\varphi(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_{nj}\sin(n(x-x_0))\sin(j\cdot\omega(t-t_0)), \tag{3.10}$$

где x_0 и t_0 определяются из начальных и граничных условий. В силу трансляционной инвариантности уравнения (3.5) можно, не ограничивая общности, положить $x_0 = 0$ и $t_0 = 0$. Выбор $x_0 = 0$ соответствует граничным условиям задачи (3.2′).

Нахождение периодических решений в форме стоячей волны — задача гораздо более сложная, чем отыскание бегущих волновых полей, поскольку в этом случае уравнение в частных производных не сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Аналитическая форма подобных решений пока не найдена, более того, существование периодических решений в форме стоячей волны при произвольных значениях параметров ещё не доказано.

3.3. Равномерные асимптотические разложения

Будем считать, что ε — малый положительный параметр и попробуем найти решение уравнения (3.5) в виде формального степенного ряда. Прямые, непосредственные разложения по степеням ε имеют конечные области применимости из-за наличия вековых, т. е. неограниченных, членов. Разложения, содержащие только ограниченные функции и, следовательно, одинаково пригодные в любой точке пространства, называются *равномерными* (*равномерно пригодными*). Для приведения разложений к равномерно пригодному виду были разработаны асимптотические методы. Обзор таких методов (Пуанкаре [1], Крылова–Боголюбова [3] и других) содержится в книге [70].

Простота алгоритма построения равномерного асимптотического ряда сильно зависит от значения массового члена. Даже в случае однородной массы отсутствие резонанса важно не только для доказательства сходимости равномерного асимптотического ряда, но и для самого его построения. Различают два случая.

Обозначим через Ω_j частоты периодических решений уравнения (3.5) при $\varepsilon = 0$: $\Omega_j = \sqrt{j^2 + M^2}$, где $j \in \mathbb{N}$.

Если

$$\forall i,j \in \mathbb{N} \qquad \nexists\, k,n \in \mathbb{N} \quad \text{такие, что } \frac{\Omega_i}{\Omega_j} = \frac{k}{n},$$

то это нерезонансный случай.

В нерезонансном случае с помощью стандартных асимптотических методов, например, метода Пуанкаре, можно построить асимптотический ряд с любой степенью точности. При этом все вековые члены уничтожаются правильным выбором частоты.

Противоположный случай, когда существуют две частоты Ω_j, отношение которых является рациональным числом, называется резонансным.

В резонансном случае, напротив, удаётся построить равномерное разложение только в конечном числе первых порядков по ε. При этом чем меньше номера i и j резонирующих частот, тем меньше периодических членов асимптотического ряда удаётся построить. В случае нулевой массы, когда $\Omega_j = j$ и все частоты резонируют, возникает главный резонанс, т. е. резонанс уже в первом порядке по ε.

Мы рассматриваем безмассовую теорию φ^4 и ищем асимптотическое решение в виде стоячей волны. Целью данной работы является построение первых членов равномерного, более того, состоящего исключительно из периодических функций, асимптотического разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона в случае главного резонанса. Мы показываем, как с помощью нетривиального выбора нулевого приближения можно получить и первое, и второе приближения в форме стоячей волны.

3.4. Построение асимптотического ряда в случае безмассовой теории φ^4

3.4.1. Метод Пуанкаре

Рассмотрим уравнение (3.5) с $M = 0$:

$$\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial t^2} - \varepsilon\varphi^3(t,x) = 0. \tag{3.5$'$}$$

Будем считать $\varepsilon \ll 1$. Для построения асимптотического решения воспользуемся методом Пуанкаре. Введём новое время $\tilde{t} \equiv \omega t$ и будем искать дважды периодическое решение данного уравнения $\varphi(x,\tilde{t})$ и частоту ω в форме разложений по ε:

$$\varphi(x,\tilde{t},\varepsilon) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,\tilde{t})\varepsilon^n,$$

$$\omega(\varepsilon) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\varepsilon^n.$$

Разлагая теперь уравнение (3.5$'$) в ряд по степеням ε, получаем последовательность уравнений. Выпишем первые два:

1) В нулевом порядке по ε уравнение для определения φ_0:

$$\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t})}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t})}{\partial\tilde{t}^2}=0, \tag{3.11}$$

2) В первом порядке по ε уравнение для определения φ_0, φ_1 и ω_1:

$$\frac{\partial^2\varphi_1(x,\tilde{t})}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_1(x,\tilde{t})}{\partial\tilde{t}^2}=2\omega_1\frac{\partial^2\varphi_0(x,\tilde{t})}{\partial\tilde{t}^2}+\varphi_0^3(x,\tilde{t}). \tag{3.12}$$

Уравнение (3.11) не позволяет, разумеется, однозначно определить функцию $\varphi_0(x,\tilde{t})$. Если выбрать в качестве решения этого уравнения $\varphi_0(x,\tilde{t})=\sin(x)\sin(\tilde{t})$, то уравнение (3.12) не будет иметь периодических решений, так как частота внешней силы $\sin(3x)\sin(3\tilde{t})$ совпадает с частотой собственных колебаний, что приводит к резонансу. Ясно, что, в отличие от случая ненулевой массы, никаким выбором частотной поправки ω_1 нельзя получить равномерно пригодное разложение. Для получения такого разложения необходимо отыскать другое периодическое решение уравнения (3.11), т. е. другое нулевое приближение функции $\varphi(x,\tilde{t})$. Легко показать, что требуемое нулевое приближение должно содержать бесконечное число гармоник.

3.4.2. Условие существования периодического решения

Рассмотрим уравнения (3.11) и (3.12) не по отдельности, а как систему, и попытаемся выделить из множества периодических решений уравнения (3.11) такую функцию $\varphi_0(x,\tilde{t})$, что уравнение (3.12) имеет периодическое решение. Таким образом, для нахождения $\varphi_0(x,\tilde{t})$ используется не только уравнение нулевого порядка по ε, т. е. (3.11), но и уравнение первого порядка по ε, т. е. (3.12).

Общее решение уравнения (3.11) в форме стоячей волны (3.10) есть

$$\varphi_0(x,\tilde{t})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\sin(n\tilde{t}),$$

где a_n — произвольные постоянные.

Мы ищем решение уравнения (3.12) $\varphi_1(t,x)$ в форме стоячей волны:

$$\varphi_1(x,\tilde{t})\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{nj}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}).$$

Для определения коэффициентов Фурье функций $\varphi_0(t,x)$ и $\varphi_1(t,x)$ разложим уравнение (3.12) в ряд Фурье:

$$R(x,\tilde{t}) \equiv \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial \tilde{t}^2} - 2\omega_1 \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \tilde{t}^2} - \varphi_0^3 \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} R_{nj}(\mathbf{a},\mathbf{b})\sin(nx)\sin(j\tilde{t}) = 0.$$

Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\forall n,j \in \mathbb{N} : R_{nj}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0. \qquad (3.12')$$

Полученная система содержит подсистему, определяющую коэффициенты Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$:

$$\forall j \in \mathbb{N} : R_{jj}(\mathbf{a}) = 0, \qquad (3.13)$$

где

$$R_{jj} \equiv 9a_j^3 + 3a_j^2 a_{3j} + a_j\left(6\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}(2a_s^2 + a_s a_{2j+s}) + 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{2j-1} a_s a_{2j-s} - 32j^2\omega_1\right) +$$

$$+ 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{\infty} a_s a_p a_{j+s+p} + 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j\\ p\neq 2j-s}}^{\infty} a_s a_p a_{s+p-j} + \sum_{s=1}^{j-2}\sum_{p=1}^{j-2} a_s a_p a_{j-s-p}$$

Мы получили необходимое и достаточное условие существования периодического решения уравнения (3.12): периодическая функция $\varphi_1(x,\tilde{t})$, удовлетворяющая уравнению (3.12), существует тогда и только тогда, когда последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$ является решением системы (3.13).

Коэффициент a_1 является параметром, задающим амплитуду колебаний. Действительно, если $a_j = c_j a_1$ и $\omega_1 = c_\omega a_1^2$, то все полиномы R_{jj} пропорциональны a_1^3: $R_{jj}(\mathbf{a}) = a_1^3 R_{jj}(\mathbf{c})$ и, следовательно, коэффициент a_1 может быть выбран произвольно. Поскольку нашей целью является нахождение действительной функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$, то мы ищем $c_j \in \mathbb{R}$.

3.5. Нулевое приближение

Не существует общих методов точного решения систем, подобных (3.13), поскольку, во-первых, система бесконечна и все $R_{jj}(\mathbf{c})$ суть бесконечные суммы, а во-вторых, все уравнения нелинейны. Мы ограничимся поиском частного решения этой системы. Мы ищем функцию $\varphi_0(x, \tilde{t})$ такую, что коэффициенты её ряда Фурье удовлетворяют данной системе. Такая функция должна обладать бесконечным рядом Фурье, в то же время все её чётные гармоники могут быть равны нулю. Для упрощения вычислений предположим, что ряд Фурье функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$ содержит только нечётные гармоники.

Задачу можно приближенно решить методом Галёркина, то есть обрезанием высших диагональных гармоник $\varphi_0(x, \tilde{t})$ и поиском решения в виде:

$$\varphi_0(x, \tilde{t}) = a_1 \left\{ \sum_{j=1}^{N} c_{2j-1} \sin((2j-1)x) \sin((2j-1)\tilde{t}) \right\}.$$

Мы получаем конечную систему нелинейных уравнений. Решения этой нелинейной системы могут быть найдены только с помощью ЭВМ и с конечной точностью (Программу, написанную на языке компьютерной алгебры **REDUCE**, см. в *Приложении 7*).

Полученные для $N = 10$ значения c_{2j-1} практически совпали с элементами следующей конечной последовательности:

$$\mathbf{d} = \{d_{2j-1} = \frac{f_{2j-1}}{f_1},\ \text{где}\ f_{2j-1} \equiv \frac{q^{j-1/2}}{1+q^{2j-1}},\ d_{2j} = 0, 0 < j < 11\}$$

при $q = 0.0142142623201$. Легко проверить (см. *Приложение 8*), что подстановка $\mathbf{d}$ в систему (3.13) даёт

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad : \quad R_{jj}(\mathbf{d}) < 10^{-12}.$$

Иными словами, данная конечная последовательность является приближенным решением системы (3.13).

Для произвольного q определим последовательность $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \forall n \in \mathbb{N} : f_{2n-1} = \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}, f_{2n} = 0\ \}.$$

Легко заметить, что числам q и $q' \equiv \dfrac{1}{q}$ соответствуют одинаковые значения f_j. Чтобы получить однозначно зависящую от q последовательность $\mathbf{f}$, стремящуюся к нулю, но не равную ему тождественно, ограничим область изменения q интервалом $(0, 1)$.

Члены последовательности $\mathbf{f}$ пропорциональны коэффициентам Фурье функции эллиптического косинуса $\mathrm{cn}(z,k)$ [66]:

$$\mathrm{cn}(z,k) = \frac{\gamma}{k}\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1}\cos\left((2n-1)\frac{\gamma z}{4}\right), \text{ где } \gamma \equiv \frac{2\pi}{K}. \tag{3.14}$$

Поясним введённые обозначения и отметим некоторые свойства эллиптического косинуса:

1) Основными периодами двоякопериодической функции $\mathrm{cn}(z,k)$ являются $4K(k)$ и $2K(k)+2iK'(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $K'(k) \equiv K(k')$, а $k' = \sqrt{1-k^2}$.

2) Параметр q в разложении Фурье (формула (3.14)) выражается через эллиптические интегралы следующим образом: $q \equiv e^{-\pi\frac{K'}{K}}$.

3) Разложение в ряд Фурье функции $\mathrm{cn}(z,k)$ не содержит чётных гармоник. Это разложение справедливо в полосе комплексной плоскости, $-K' < \Im m\, z < K'$, в частности, для $z \in \mathbb{R}$.

4) Если $k \in (0,1)$ и $z \in \mathbb{R}$, то $\mathrm{cn}(z,k) \in \mathbb{R}$.

5) Функция $\mathrm{cn}(z,k)$ является периодическим решением дифференциального уравнения (3.9)

Последнее свойство означает, что последовательность коэффициентов Фурье функции $\mathrm{cn}(z,k)$ является решением некоторой бесконечной системы кубических уравнений. Найдём эту систему.

С одной стороны, из формулы (3.14) легко получить разложение в ряд Фурье для функции $\mathrm{cn}^3(z,k)$:

$$\mathrm{cn}^3(z,k) = \frac{\gamma^3}{4k^3}\sum_{j=1}^{\infty} F_j^{(3)}(\mathbf{f})\cos\left(j\frac{\gamma z}{4}\right),$$

где $j = 1, 3, 5, \ldots, +\infty$.

$$\begin{aligned} F_j^{(3)}(\mathbf{f}) \;=\; & 3f_j^3 + 3f_j^2 f_{3j} + f_j\left(6\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\left(f_s^2 + f_s f_{2j+s}\right) + 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{2j-1} f_s f_{2j-s}\right) + \\ & + \; 3\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j}}^{\infty} f_s f_p f_{j+s+p} + 3\sum_{s\neq j}^{\infty}\sum_{\substack{p=1\\ p\neq j\\ p\neq 2j-s}}^{\infty} f_s f_p f_{s+p-j} + \sum_{s=1}^{j-2}\sum_{p=1}^{j-2} f_s f_p f_{j-s-p} \end{aligned}$$

(во всех суммах суммирование идёт только по нечётным числам).

С другой стороны, из дифференциального уравнения (3.9) следует, что $F_j^{(3)}(\mathbf{f})$ пропорционально f_j, причём коэффициент пропорциональности зависит от j:

$$\forall j \quad : \quad F_j^{(3)}(\mathbf{f}) = \left(\frac{2(2k^2-1)}{\gamma^2} + \frac{j^2}{8} \right) f_j. \tag{3.15}$$

Последовательность $\mathbf{f}$ — ненулевое решение системы (3.15) при всех значениях $q \in (0,1)$. Следующее **утверждение** доказывает существование выделенного значения q.

Утверждение

Существует такое значение параметра $q \in (0,1)$, что последовательность $\mathbf{f}$ является действительным решением системы (3.13), *при этом значение ω_1 тоже действительно.*

Доказательство

Подставляя в систему (3.13) последовательность $\mathbf{f}$: $a_j = f_j$ и используя систему (3.15), получаем:

$$R_{jj}(\mathbf{f}) = \left\{ F_j^{(3)}(\mathbf{f}) + f_j \left(6 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 - 32 j^2 \omega_1 \right) \right\} =$$

$$= f_j \left\{ 6 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + \frac{2(2k^2-1)}{\gamma^2} + j^2 \left(\frac{1}{8} - 32\omega_1 \right) \right\} = 0.$$

Система (3.13) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{256}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \dfrac{(1-2k^2)}{3\gamma^2}. \end{cases}$$

Мы получили значение ω_1. Все величины во втором уравнении системы выражаются через параметр q, при этом получается следующее уравнение:

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \right)^2 + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \right)^2 = 0. \tag{3.16}$$

Это уравнение на интервале $(0,1)$ имеет следующее решение:

$$q = 1.42142623201 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-13}. \tag{3.17}$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Теперь несложно сконструировать требуемое нулевое приближение функции $\varphi(x,\tilde{t})$:

$$\varphi_0(x,\tilde{t}) = A\{\mathrm{cn}(\alpha(x-\tilde{t}),k) - \mathrm{cn}(\alpha(x+\tilde{t}),k)\}. \tag{3.18}$$

Функция $\varphi_0(x,\tilde{t})$ при всех $k \in (0,1)$ является действительным решением уравнения (3.11). Если положить $\alpha = \frac{2K}{\pi}$, то периоды $\varphi_0(x,\tilde{t})$ по x и по $\tilde{t}$ будут равны 2π. Используя теперь разложение Фурье для функции $\mathrm{cn}(z,k)$ (формула (3.14)), получаем следующее разложение для функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$:

$$\varphi_0(x,\tilde{t}) = 2A\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n-1}\sin((2n-1)x)\sin((2n-1)\tilde{t}).$$

Как было доказано, последовательность $\mathbf{f}$ является действительным решением системы (3.13) при

$$q = 1.42142623201 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-13}.$$

Среднему значению q соответствуют

$$k = 0.45107559881 \qquad \text{и} \qquad \alpha = 1.0576653982.$$

Ввиду однородности всех уравнений системы (3.13) последовательность коэффициентов Фурье функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$ при данном значении параметров также будет решением системы (3.13), при этом

$$\omega_1 = \frac{\gamma^2}{64k^2}A^2 = 1.0983600974A^2. \tag{3.19}$$

Таким образом доказано, что функция

$$\varphi_0(x,\tilde{t}) = A\{\mathrm{cn}(\alpha(x-\tilde{t}),k) - \mathrm{cn}(\alpha(x+\tilde{t}),k)\},$$

при $k = 0.45107559881$ и $\alpha = 1.0576653982$ является искомой функцией.

3.6. Первое приближение

Теперь осталось решить только линейные уравнения для получения всех недиагональных коэффициентов $\varphi_1(x,\tilde{t})$. Обозначим через D_{nj} коэффициенты Фурье функции $\varphi_0^3(x,\tilde{t})$:

$$\varphi_0^3(x,\tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} D_{nj}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}).$$

Из уравнения (3.12) следует, что

$$\varphi_1(x,\tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty} \frac{D_{nj}}{j^2-n^2}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nn}\sin(nx)\sin(n\tilde{t}).$$

Отметим, что функция $\varphi_1(x,\tilde{t})$ с произвольными диагональными коэффициентами b_{nn} является решением уравнения (3.12), при этом все недиагональные коэффициенты $\varphi_1(x,\tilde{t})$ пропорциональны A^3.

3.7. Второе приближение

Рассмотрим уравнение второго порядка по ε:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2}\right]\varphi_2 = 2\omega_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tilde{t}^2} + (2\omega_2+\omega_1^2)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\tilde{t}^2} + 3\varphi_1\varphi_0^2. \tag{3.20}$$

Пусть все диагональные коэффициенты Фурье функции $\varphi_1(t,x)$ равны нулю: $\forall n:\;\; b_{nn}=0$, тогда

$$\forall n,j\;:\; b_{nj} = -b_{jn},$$

вследствие чего функция $\varphi_1(x,\tilde{t})\varphi_0^2(x,\tilde{t})$ не имеет диагональных гармоник. Положив

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}\omega_1^2, \tag{3.21}$$

мы получаем периодическое решение уравнения во втором порядке по ε:

$$\varphi_2(x,\tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{\infty} \frac{H_{nj}}{j^2-n^2}\sin(nx)\sin(j\tilde{t}) + \sum_{n=1}^{\infty} h_{nn}\sin(nx)\sin(n\tilde{t}), \tag{3.22}$$

где H_{nj} — коэффициенты Фурье функции

$$H(x,\tilde{t}) \equiv 2\omega_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x,\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} - 3\varphi_1(x,\tilde{t})\varphi_0^2(x,\tilde{t}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} H_{nj} \sin(nx) \sin(j\tilde{t}).$$

Таким образом, построено равномерное разложение во втором порядке по ε. Диагональные коэффициенты $\varphi_2(x,\tilde{t})$ h_{nn} могут быть найдены только из уравнения следующего порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено квантование вблизи классического поля, нетривиально зависящего от времени. С помощью групповых переменных Боголюбова удалось построить теорию возмущений, не нарушая при этом законов сохранения. Перечислим основные результаты работы:

1. Проведено квантование $(3+1)$–мерной Пуанкаре-инвариантной системы в терминах переменных Боголюбова.

2. Показано, что тот факт, что классическая составляющая является решением волнового уравнения, есть необходимое условие применимости регулярной теории возмущений

3. С точностью до нулевого порядка по обратным степеням константы связи найдены значения для интегралов движения и оператора поля. Тем самым было дано полностью релятивистски инвариантное описание $(3+1)$–мерной квантовой системы с ненулевой классической компонентой.

4. Для безмассовой теории φ^4 рассмотрено построение равномерно пригодного разложения решения квазилинейного уравнения Клейна–Гордона по периодическим функциям в виде стоячей волны. Показано, что задача решается методом Пуанкаре, при этом необходимо надлежащим образом выбрать нулевое приближение: коэффициенты Фурье данной функции должны быть решением нелинейной бесконечной системы алгебраических уравнений.

5. На языке компьютерной алгебры REDUCE построена программа нахождения приближённого решения данной системы.

6. Доказано, что возникающая в случае нулевой массы проблема главного резонанса решается использованием в качестве нулевого приближения эллиптической функции Якоби с значением модуля

$k = 0.45107559881$. Равномерно пригодное разложение по функциям в виде стоячей волны было построенно с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

Автор очень признателен научному руководителю профессору О.А.Хрусталёву за постоянное внимание к работе автора и чрезвычайно полезные обсуждения, которые значительно расширили представления автора по вопросам квантования вблизи нетривиальных классических решений и целому ряду других принципиальных вопросов, а также за неоценимую помощь при написании этой работы. Автор приносит искреннюю благодарность старшему научному сотруднику М.В. Чичикиной за обсуждения многочисленных вопросов применения групповых переменных Боголюбова в пространствах с симплектической структурой. Автор также хочет поблагодарить старшего научного сотрудника В.Ф. Еднерала и доцента П.К. Силаева за помощь в овладении методами компьютерной алгебры и за терпение, проявленное к автору.

Приложение 1

Функциональные производные по u и u_n. Условие связи, выражения для производных по f и f_n.

Условия $(1.4')$ выделяют на пространстве дифференцируемых функций y подпространство функций u, таких что

$$u(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) = y(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) - M_a(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \cdot \omega(\tilde{N}^a, y). \qquad (\textit{П}\ 1.1)$$

Следствием данного соотношения является равенство:

$$u_n(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) = y_n(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) - M_{an}(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) \cdot \omega(\tilde{N}^a, y), \qquad (\textit{П}\ 1.2).$$

В дальнейшем нас будут интересовать значения u и u_n только на поверхности C, т.е. функции $u(\lambda')$ и $u_n(\lambda')$. Пусть функции $y(\lambda')$ и $y_n(\lambda')$ — произвольные, заданные на C, функции, такие, что интегралы $\omega(\tilde{N}^a, y)$ существуют. Независимые функции $y(\lambda')$ и $y_n(\lambda')$ удобно рассматривать в виде столбца $\binom{y}{y_n}$.

Определим оператор $\hat{K}$, действующий на пространстве столбцов:

$$\begin{pmatrix} u(\lambda') \\ u_n(\lambda') \end{pmatrix} = \hat{K} \begin{pmatrix} y(\lambda') \\ y_n(\lambda') \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(\lambda') - M_a(\lambda')\omega(\tilde{N}^a, y) \\ y_n(\lambda') - M_{an}(\lambda')\omega(\tilde{N}^a, y) \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, данное соотношение полностью согласуется в формулами ($\textit{П}$ 1.1) и ($\textit{П}$ 1.2), а выполнение наложенных на функцию u условий $(1.4')$, проверяется прямой подстановкой.

Вариация $u(\lambda')$ есть

$$\delta u(\lambda') = \delta y(\lambda') - M_a(\lambda') \int\limits_C \tilde{N}^a_n(\lambda')\delta y(\lambda') - \tilde{N}^a(\lambda')\delta y_n(\lambda'), \qquad (\textit{П}\ 1.1')$$

так как функции $y(\lambda')$ и $y_n(\lambda')$ являются независимыми, то легко показать, что действие оператора

$$\int\limits_C dS \left(M_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta y_n(\lambda')} + M_{an}(\lambda') \frac{\delta}{\delta y(\lambda')} \right)$$

на функции u и u_n равно нулю.

Определим операторы $\frac{\delta}{\delta u(\lambda')}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}$ следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} \equiv \frac{\delta}{\delta y(\lambda')} \hat{K} \qquad \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta y_n(\lambda')} \hat{K}.$$

Так как $\hat{K} = \hat{K}^2$, то на столбцы $\binom{u}{u_n}$ данный оператор действует как тождественный:

$$\begin{pmatrix} u(\lambda') \\ u_n(\lambda') \end{pmatrix} = \hat{K} \begin{pmatrix} u(\lambda') \\ u_n(\lambda') \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\frac{\delta u(\lambda')}{\delta u(\mu')} = \delta(\lambda' - \mu') - M_a(\lambda') N_n^a(\mu'), \qquad (\textit{П } 1.3)$$

$$\frac{\delta u(\lambda')}{\delta u_n(\mu')} = M_a(\lambda') N^a(\mu'). \qquad (\textit{П } 1.4)$$

$$\frac{\delta u_n(\lambda')}{\delta u(\mu')} = -M_{an}(\lambda') N_n^a(\mu'), \qquad (\textit{П } 1.5)$$

$$\frac{\delta u(\lambda')}{\delta u_n(\mu')} = \delta(\lambda' - \mu') + M_{an}(\lambda') N^a(\mu'). \qquad (\textit{П } 1.6)$$

Функциональные производные $\frac{\delta}{\delta u(\lambda')}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}$ удовлетворяют соотношению:

$$\int\limits_C dS \left(M_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} + M_{an}(\lambda') \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} \right) dS = 0. \qquad (\textit{П } 1.7)$$

Используем полученное равенство для выражения производных по $f(\mathbf{x}')$ и $f_n(\mathbf{x}')$ в терминах производных по новым переменным.

Вариации $f(\mathbf{x}')$ и $f_n(\mathbf{x}')$ в терминах $v(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ и $u(\mathbf{x}', \tilde{\tau})$ суть:

$$\delta f(\mathbf{x}') = G\delta v + \delta u = -GM_c(\mathbf{x}', \tilde{\tau})\delta\tau^b + \bar{\delta} u(\mathbf{x}', \tilde{\tau}) + \frac{\partial u}{\partial \tau^b} \cdot \delta\tau^b, \quad (\textit{П } 1.8.1)$$

$$\delta f_n(\mathbf{x}') = -GM_{bn}(\mathbf{x}',\tilde{\tau})\delta\tau^b + \bar{\delta} u_n(\mathbf{x}',\tilde{\tau}) + \frac{\partial u_n}{\partial \tau^b}\cdot\delta\tau^b, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.8.2)$$

где $\bar{\delta} u$ и $\bar{\delta} u_n$ — вариации формы функций. Параметры τ^a трактуются нами как новые переменные, следовательно, производная $\frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x}',\tilde{\tau})}$ берётся при фиксированных τ^a, т.е. варьируется только форма функции u. Учитывая это, мы в дальнейшем будем вместо $\bar{\delta} u(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ и $\bar{\delta} u_n(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ писать $\delta u(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ и $\delta u_n(\mathbf{x}',\tilde{\tau})$ соответственно. Рассмотрим вариации по C, для этого перепишем формулы (*П* 1.7) и (*П* 1.8) в следующем виде:

$$\delta u(\lambda') = \delta f(\lambda') + (GM_c(\lambda') - u_b(\lambda'))\delta\tau^b, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.8.1')$$

$$\delta u_n(\lambda') = \delta f_n(\lambda') + (GM_{bn}(\lambda') - u_{bn}(\lambda'))\delta\tau^b, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.8.2')$$

Получаем следующие значения для производных:

$$\frac{\delta u(\mu')}{\delta f(\lambda')} = \delta(\lambda'-\mu') + (GM_a(\mu') + u_a(\mu'))\frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')}, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.9)$$

$$\frac{\delta u(\mu')}{\delta f_n(\lambda')} = (GM_a(\mu') + u_a(\mu'))\frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')}, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.10)$$

$$\frac{\delta u_n(\mu')}{\delta f(\lambda')} = (GM_{an}(\mu') + u_{an}(\mu'))\frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')}, \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.11)$$

$$\frac{\delta u_n(\mu')}{\delta f_n(\lambda')} = \delta(\lambda'-\mu') + (GM_{an}(\mu') + u_{an}(\mu'))\frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')}. \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.12)$$

В силу условий, связывающих производные по $u(\lambda')$ и $u_n(\lambda')$, имеем:

$$\frac{\delta}{\delta f(\lambda')} = \int\left(\frac{\delta u(\lambda')}{\delta f(\lambda')}\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \frac{\delta u_n(\lambda')}{\delta f(\lambda')}\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}\right)\,dS + \frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta}{\delta f(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \frac{\delta\tau^a}{\delta f(\lambda')}\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \qquad (\text{\textit{П}}1.13)$$

$$\frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')} = \int\left(\frac{\delta u(\lambda')}{\delta f_n(\lambda')}\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \frac{\delta u_n(\lambda')}{\delta f_n(\lambda')}\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}\right)\,dS + \frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{\delta}{\delta f_n(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} + \frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(\lambda')}\left(\frac{\partial}{\partial\tau^a} + \hat{S}_a\right), \qquad (\text{\textit{П}}\ 1.14)$$

оператор $\hat{S}_a$ определён следующим образом:

$$\hat{S}_a = \int\limits_C \left(u_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + u_{na}(\lambda') \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} \right) dS. \qquad (\mathit{П}\ 1.15)$$

$$u_a(\lambda') \equiv \frac{\partial u(\lambda')}{\partial \tau^a}, \qquad u_{an}(\lambda') \equiv \frac{\partial u_n(\lambda')}{\partial \tau^a}.$$

Приложение 2

Условие обращения в нуль первого порядка в разложении интегралов движения

Для сокращения вычислений ограничимся случаем, когда поверхность C задаётся уравнением $t' = 0$. В этом случае $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t'}$.

Интеграл

$$\mathcal{H}_{-1} = \int \Big(F_{,0}\hat{P} + F_{,1}\hat{Q}_{,1} + F_{,2}\hat{Q}_{,2} + F_{,3}\hat{Q}_{,3} + V'(F)\hat{Q} \Big) d^3S,$$

интегрированием по частям преобразуется к виду:

$$\mathcal{H}_{-1} = \int \Big(F_{,0}\hat{P} - \Big(F_{,11} + F_{,22} + F_{,33} - V'(F) \Big)\hat{Q} \Big) d^3S.$$

При этом граничные условия выбираются так, чтобы внеинтегральные члены обращались в нуль:

$$F_{,k}(\lambda')\hat{Q}(\lambda')|_{\partial C} = 0. \tag{П 2.1}$$

Интеграл $\mathcal{H}_{-1}$ можно разбить на две части:

$$\mathcal{H}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\mathcal{H}^0_{-1} + \mathcal{H}^1_{-1}),$$

где

$$\mathcal{H}^0_{-1} \equiv -\int \left(F_n(\lambda')\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + \Big(\sum_{k=1}^{3} F_{,kk}(\lambda') - V'(F) \Big) \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} \right) d^3S,$$

$$\mathcal{H}^1_{-1} \equiv \int \Big(- F_n(\lambda')u_n(\lambda') - \Big(\sum_{k=1}^{3} F_{,kk}(\lambda') - V'(F)\Big)u(\lambda')\Big) d^3S.$$

Известно, что производные $\frac{\delta}{\delta u(\lambda')}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')}$ связаны соотношениями:

$$\int \left(M_a(\lambda') \frac{\delta}{\delta u(\lambda')} + M_{an}(\lambda') \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} \right) d^3S = 0. \qquad (\textit{П } 2.2)$$

Интеграл $\mathcal{H}^0_{-1}$ обратится в нуль, если

$$F_{,0} = c^a M_a, \qquad F_{,11} - F_{,22} - F_{,33} - V'(F) = c^a M_{at}, \qquad (\textit{П } 2.3)$$

то есть, если на гиперплоскости C выполняется соотношение:

$$F_{,00} - F_{,11} - F_{,22} - F_{,33} + V'(F) = 0. \qquad (\textit{П } 2.4)$$

Одновременно на поверхности C должны выполняться соотношения

$$F_n(\lambda') = cv_n(\lambda'), \qquad F_{nn}(\lambda') = cv_{nn}(\lambda'), \qquad (\textit{П } 2.5)$$

где c — произвольная константа.

Учитывая, что интегралы r_a являются линейными функционалами от u и u_n, легко получить, что интеграл $\mathcal{H}^1_{-1}$ обратится в нуль при

$$v(\lambda') = -\tilde{N}^a(\lambda') J_a. \qquad (\textit{П } 2.6)$$

Тогда из формулы (24) следует, что $c = \sqrt{2}$. Таким образом,

$$v(\lambda') = -\tilde{N}^a(\lambda') J_a = \frac{1}{\sqrt{2}} F(\lambda') \Longrightarrow F(\lambda') = -\sqrt{2}\tilde{N}^a(\lambda') J_a. \qquad (\textit{П } 2.7)$$

Следствием этого соотношения являются равенства:

$$J_a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega(F, M_a). \qquad (\textit{П } 2.8)$$

Оказывается, полученных соотношений почти достаточно для обращения в нуль всех остальных интегралов O^a_{-1}. Необходимо только задать дополнительные граничные условия на C.

Рассмотрим операторы импульса $\mathcal{P}^k_{-1}$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$\mathcal{P}^k_{-1} = -\frac{1}{2} \int (F_k \hat{P} + \hat{Q}_k F_n) d^3S = -\frac{1}{2} \int (F_k \hat{P} + \hat{Q} F_{kn}) d^3S.$$

Здесь мы использовали граничное условие $QF_n|_{\partial C} = 0$.

Подставляя выражения для $\hat{P}$ и $\hat{Q}$, имеем:

$$\mathcal{P}^k_{-1} = -\frac{1}{2}\int\left(F_k\frac{\delta}{\delta u} + F_{kn}\frac{\delta}{\delta u_n}\right) + F_k(u_n + \tilde{N}^a_n r_a) + F_{nk}(u + \tilde{N}^a r_a)d^3S.$$

Так как $F = \sqrt{2}v$, то

$$F_k = \sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial x'^k} = -\sqrt{2}\frac{\partial v}{\partial \tau^k} = \sqrt{2}M_k. \qquad (\textit{П}\ 2.9)$$

Отсюда следует, что вклад членов, пропорциональных производным по u и u_n, равен нулю, и

$$\mathcal{P}^k_{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(r_a + \int(F_k u_n + F_{nk}u)d^3S\right).$$

В силу соотношения $v(\lambda') = -\tilde{N}^a(\lambda')J_a$, получаем, что все $\mathcal{P}^k_{-1} = 0$.

Как нетрудно заметить, операторы $\mathcal{H}_{-1}$ и $\mathcal{P}^k_{-1}$ первоначально преобразовывались к виду

$$O^a_{-1} = \tilde{c}\int(M_a\hat{P} - M_{an}\hat{Q})\,d^3S, \qquad (\textit{П}\ 2.10)$$

при этом $\tilde{c}$ — некоторая константа, нулевое значение индекса a соответствует $\mathcal{H}_{-\infty}$, при $a = k$ получаем $O^a_{-1} = \mathcal{P}^k_{-1}$.

Очевидно, что подынтегральное выражение обращается в нуль независимо от значения индекса a, т.е. также и при $a = 4, \ldots, 9$.

Рассмотрим теперь операторы момента импульса. Для обращения в нуль данных операторов достаточно записать их в форме (*П* 2.10), при этом значение индекса будет, разумеется, больше трёх.

$$\mathcal{M}^{0j} = \int(f^2_{,0} - \mathcal{L})x'^j + f_{,0}f_{,j}t')\,d^3S,$$

следовательно,

$$\mathcal{M}^{0j}_{-1} = \int((F_n\hat{P} + F_{,k}\hat{Q}_{,k} + V'(F)\hat{Q})x'^j + +(F_{,0}\hat{Q}_{,j} + \hat{P}F_{,j})t')\,d^3S.$$

Интегрированием по частям получаем, что

$$\mathcal{M}^{0j}_{-1} = \int(\hat{P}(F_{,0}x'^j + F_{,j}t') - \hat{Q}(F_{,00}x'^j + F_{,j0}t'))\,d^3S.$$

Мы наложили граничные условия:

$$F_{,k}Qx'^j|_{\partial C} = 0 \qquad tF_{,k}Q|_{\partial C} = 0,$$

обнуляющие внеинтегральные члены и воспользовались тем, что F — решение уравнения (*П* 2.4). Используя явные выражения для M_a, соответствующих Лоренцевым поворотам, получаем, что $\mathcal{M}^{0j}_{-1}$ представимы в виде (*П* 2.10), и, следовательно, равны нулю.

Для пространственных поворотов аналогично получаем:

$$\mathcal{M}^{kj}_{-1} = \int \left(\hat{P}(F_{,j}x'^k - F_{,k}x'^j) - \hat{Q}(F_{,j0}x'^k + F_{,k0}x'^j)\right) d^3S.$$

Здесь мы воспользовались граничным условием:

$$F_{,0}Qx'^j|_{\partial C} = 0.$$

Как легко видеть, данный интеграл также имеет вид (*П* 2.10).

Итак, найдены условия, при которых все интегралы движения в минус первом (по G^{-1}) порядке обращаются в нуль.

Приложение 3

Операторы проектирования для функций w и w_η и вариационные производные по w и w_η

Проведём замену переменных:

$$w(\lambda') = u(\lambda') + \tilde{N}^a(\lambda') r_a, \tag{П 3.1}$$

$$w_n(\lambda') = u_n(\lambda') + \tilde{N}^a_n(\lambda') r_a. \tag{П 3.2}$$

Данная замена не является тривиальной, так как

$$r_a = J_b R^b_a = J_b \int\limits_C (\tilde{N}^b_{an}(\lambda') u(\lambda') - \tilde{N}^b_a(\lambda') u_n(\lambda'))\, dS$$

являются функционалами от u и u_n.

Из равенства $F(0,x') = -\sqrt{2}\tilde{N}^a(0,x') J_a$, следует, что

$$r_a \equiv R^b_a J_b = \omega(\tilde{N}^b_a, u) J_b = -\omega(M_a, u). \tag{П 3.3}$$

Таким образом,

$$w(\lambda') = u(\lambda') + \tilde{N}^a(\lambda') \omega(M_a, u) \equiv \hat{\tilde{K}} u. \tag{П 3.4}$$

Легко показать, что оператор $\hat{\tilde{K}}$ является проектором:

$$\hat{\tilde{K}}^2 = \hat{\tilde{K}}.$$

Функции $w(\lambda')$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $u(\lambda')$:

$$\omega(\tilde{N}^a, w) = 0,$$

а также новым условиям

$$\omega(M_a, w) = 0. \qquad (\Pi\ 3.5)$$

Как и в случае функций u и u_n, условия, связывающие w и w_n, приводят к тому, что производные по этим функциям не являются независимыми:

$$\int \left(M_a \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + M_{an} \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \right) d^3S = 0 \qquad (\Pi\ 3.6a)$$

$$\int \left(\tilde{N}^a \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + \tilde{N}^a_n \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \right) d^3S = 0. \qquad (\Pi\ 3.6b)$$

Замена (Π 3.1) приводит к потере степеней свободы, и, разумеется, не является взаимнооднозначной. Для сохранения общего числа степеней свободы будем рассматривать r_a как новые независимые переменные.

Вычислим производные $\frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')}$ и $\frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')}$:

$$\frac{\delta r_a}{\delta u(y)} = -\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} \omega(M_a, u) = -\int\limits_C \left(\tilde{M}_{an}(\lambda') \frac{\delta u(\lambda')}{\delta u(y)} - \tilde{M}_a(\lambda') \frac{\delta u_n(\lambda')}{\delta u(y)} \right) dS.$$

Подставляя значения $\frac{\delta u(\lambda')}{\delta u(y)}$ и $\frac{\delta u_n(\lambda')}{\delta u(y)}$, получаем:

$$\frac{\delta r_a}{\delta u} = -M_{an}(\lambda') + \omega(M_a, M_b) \tilde{N}^b_n(\lambda'). \qquad (\Pi\ 3.7)$$

Аналогично,

$$\frac{\delta r_a}{\delta u_n} = M_a(\lambda') - \omega(M_a, M_b) \tilde{N}^b(\lambda'). \qquad (\Pi\ 3.8)$$

Для того, чтобы выразить операторы $\frac{\delta}{\delta u}$ и $\frac{\delta}{\delta u_n}$ через производные по новым переменным, необходимо найти значения $\frac{\delta w}{\delta u}$, $\frac{\delta w}{\delta u_n}$, $\frac{\delta w_n}{\delta u}$ и $\frac{\delta w_n}{\delta u_n}$.

Согласно формуле (Π 3.4)

$$\frac{\delta w(\lambda')}{\delta u(\mu')} = \delta(\lambda' - \mu') + N^a(\lambda') \int \left(M_{an}(\lambda'') \frac{\delta u(\lambda'')}{\delta u(\mu')} - M_{an}(\lambda') \frac{\delta u_n(\lambda'')}{\delta u(\mu')} \right) !''_1 !''_2 !''_3.$$

Используя формулы (*П* 1.3) и (*П* 1.4), получаем:

$$\frac{\delta w(\lambda')}{\delta u(\mu')} = \delta(\lambda' - \mu') + N^a(\lambda')(M_{an}(\mu') - \omega(M_a, M_b)N^b_n(\mu')). \qquad (П\ 3.9)$$

$$\frac{\delta w(\lambda')}{\delta u_n(\mu')} = -N^a(\lambda')(M_a(\mu') - \omega(M_a, M_b)N^b(\mu')), \qquad (П\ 3.10)$$

$$\frac{\delta w_n(\lambda')}{\delta u(\mu')} = N^a_n(\lambda')(M_{an}(\mu') - \omega(M_a, M_b)N^b_n(\mu')), \qquad (П\ 3.11)$$

$$\frac{\delta w_n(\lambda')}{\delta u_n(\mu')} = \delta(\lambda' - \mu') + N^a_n(\lambda')(M_a(\mu') - \omega(M_a, M_b)N^b(\mu')). \qquad (П\ 3.12)$$

Полученные выражения и условия связи (*П* 3.6*a*) и (*П* 3.6*b*) позволяют вычислить

$$\frac{\delta}{\delta u(\mu')} = \int \left(\frac{\delta w(\lambda')}{\delta u(\mu')} \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + \frac{\delta w_n(\lambda')}{\delta u(\mu')} \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \right) =$$
$$= \frac{\delta}{\delta w(\mu')} + \frac{\delta r_a(\lambda')}{\delta u(\mu')} \frac{\partial}{\partial r_a} \qquad (П\ 3.13)$$

и

$$\frac{\delta}{\delta u_n(\mu')} = \frac{\delta}{\delta w_n(\mu')} + \frac{\delta r_a(\lambda')}{\delta u_n(\mu')} \frac{\partial}{\partial r_a}. \qquad (П\ 3.14)$$

Приложение 4

Интегралы движения в нулевом порядке по константе связи G

Рассмотрение интегралов движения в нулевом порядке по G начнём с Гамильниана:

$$\mathcal{H}_0 = \int \left(\frac{1}{2} \left(\hat{P}^2 + \sum_{k=1}^{3} \hat{Q}_{,k}^2 + V''(F)\hat{Q}^2 \right) + F_{,k}\hat{A}_{,k} + F_{,0}\hat{A}_{,0} + V'(F)\hat{A} \right) d^3S.$$

Данный интеграл интегрированием по частям преобразуем к виду:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int \left(\hat{P}^2 + \sum_{k=1}^{3} Q_{,k}^2 + V''(F)\hat{Q} \right) d^3S +$$

$$+ \int \left(F_{,0}\hat{A}_{,0} - \left(\sum_{k=1}^{3} F_{,kk} - V'(F) \right) A \right) d^3S.$$

При этом граничные условия выбираются так, что внеинтегральные члены обращаются в нуль. Так как F — решение уравнения $(2.6')$, то

$$\int \left(F_{,0}\hat{A}_{,0} - \left(\sum_{k=1}^{3} F_{kk} - V'(F) \right) A \right) d^3S = \int \left(F_{,0}\hat{A}_{,0} - F_{,00}A \right) d^3S$$

$$= \sqrt{2} \int \left(M_0 \hat{A}_{,0} - M_{0n} A \right) d^3S =$$

$$= \left(i\hat{S}_b + i\frac{\partial}{\partial \tau^b} + R_b^a r_a \right) \int \left(M_0(\lambda')\tilde{N}_n^b(\lambda') - M_{0n}(\lambda')\tilde{N}^b(\lambda') \right) d^3S =$$

$$= i\hat{S}_0 + i\frac{\partial}{\partial \tau^0} + R_0^a r_a.$$

Выразим теперь полученный интеграл в терминах w и w_n и r_a. Напомним, что

$$w(0,x') = u(0,x') + \tilde{N}^a(0,x')r_a, \qquad w_n(0,x') = u_n(0,x') + \tilde{N}^a_n(0,x')r_a,$$

$$\frac{\delta}{\delta u(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} + \frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')}\frac{\partial}{\partial r_a}, \qquad \frac{\delta}{\delta u_n(\lambda')} = \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} + \frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')}\frac{\partial}{\partial r_a},$$

где

$$\frac{\delta r_a}{\delta u(\lambda')} = -M_{an}(\lambda') + \omega(M_a, M_b)\tilde{N}^b_n(\lambda'),$$
$$\frac{\delta r_a}{\delta u_n(\lambda')} = M_a(\lambda') - \omega(M_a, M_b)\tilde{N}^b(\lambda').$$

Следовательно,

$$\hat{S}_0 = \int \left(w_n \frac{\delta}{\delta w} + w_{nn}\frac{\delta}{\delta w_n}\right) dS + \frac{\partial}{\partial r_a}\int \left(w_n \frac{\delta r_a}{\delta u} + w_{nn}\frac{\delta r_a}{\delta u_n}\right) dS +$$
$$+ r_b \int \left(\tilde{N}^b_n \frac{\delta}{\delta w} + \tilde{N}^b_{nn}\frac{\delta}{\delta w_n}\right) dS + r_b\frac{\partial}{\partial r_a}\int \left(\tilde{N}^b_n \frac{\delta r_a}{\delta u} + \tilde{N}^b_{nn}\frac{\delta r_a}{\delta u_n}\right) dS.$$
$$R^a_0 r_a = r_a \int \left(\tilde{N}^a_n w_n - \tilde{N}^a_{nn} w\right) dS + r_a r_b \int \left(\tilde{N}^a_n \tilde{N}^b_n - \tilde{N}^a_{nn}\tilde{N}^b\right) dS$$

Операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ выражаются через новые переменные следующим образом:

$$\hat{P} = \bar{P} + \bar{p}, \qquad \hat{Q} = \bar{Q} + \bar{q},$$

где

$$\bar{P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w_n(\lambda') - i\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}\right), \qquad \bar{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u}\frac{\partial}{\partial r_a},$$
$$\bar{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w(\lambda') + i\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}\right), \qquad \bar{q} = \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u_n}\frac{\partial}{\partial r_a}.$$

На данном этапе мы не конкретизируем структуру векторов состояния с целью редукции числа состояний.

Покажем, что полученный гамильтониан не содержит линейных по r_a членов. Действительно, данные слагаемые:

$$ir_a \int \left(\tilde{N}_n^a \frac{\delta}{\delta w} + \tilde{N}_{nn}^a \frac{\delta}{\delta w_n} \right) + r_c \int (\tilde{N}_n^c w_n - \tilde{N}_{nn}^c w) =$$

$$= r_a \int \tilde{N}_n^a \left(i\frac{\delta}{\delta w} + w_n \right) - \tilde{N}_{nn}^c \left(i\frac{\delta}{\delta w_n} - w \right).$$

обращаются в нуль: первое в силу дополнительных условий

$$\begin{aligned}
&\int \tilde{N}^a(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, && \int \tilde{N}^a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,\\
&\int \tilde{N}_n^a(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, && \int \tilde{N}_n^a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,\\
&\int M_a(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, && \int M_a(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0,\\
&\int M_{an}(0,x')w(0,x')\,d^3S = 0, && \int M_{an}(0,x')w_n(0,x')\,d^3S = 0.
\end{aligned}$$

$$\int M_a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}dS = 0, \qquad \int M_{an}(\lambda')\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}dS = 0,$$

$$\int \tilde{N}^a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}dS = 0, \qquad \int \tilde{N}_n^a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}dS = 0,$$

$$\int M_a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}dS = 0, \qquad \int M_{an}(\lambda')\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}dS = 0,$$

$$\int \tilde{N}^a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}dS = 0, \qquad \int \tilde{N}_n^a(\lambda')\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}dS = 0;$$

второе, поскольку состояние поля таково, что

$$\frac{\delta}{\delta w(\lambda')} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta w(\lambda')} - iw_n(\lambda'), \qquad \frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')} \longrightarrow iw(\lambda').$$

Соберём слагаемые, линейные по $\frac{\partial}{\partial r_a}$:

$$i\frac{\partial}{\partial r_a} \int \left(w_n \frac{\delta r_a}{\delta u} + w_{nn} \frac{\delta r_a}{\delta u_n} \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r_a} \int \Bigg(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u} \left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{\delta w} \right) + i\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\delta r_a}{\delta u_n} \right)_\lambda \sqrt{2} w_\lambda +$$

$$+V''(F)\sqrt{2}w\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\delta r_a}{\delta u_n}\right)+iw_n\frac{\delta r_a}{\delta u}+iw_{nn}\frac{\delta r_a}{\delta u_n}\bigg).$$

Прямые вычисления показывают, что данное выражение обращается в нуль, так как функция w — решение линейного уравнения:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w(\mathbf{x}',\tilde{\tau})}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}+V''(F)\cdot w(\mathbf{x}',\tilde{\tau})=0.$$

Таким образом получаем:

$$\mathcal{H}_0=i\frac{\partial}{\partial\tau^0}+\mathcal{H}_{01}+\mathcal{H}_{02}+\mathcal{H}_{03},$$

где

$$\mathcal{H}_{01}=\frac{1}{2}\int(\bar{P}^2+\sum_{k=1}^{3}\bar{Q}^2_{\lambda_k}+V''(F)\bar{Q}^2)\,d^3S,$$
$$\mathcal{H}_{02}=i\int\left(w_n\frac{\delta}{\delta w(\lambda')}+w_{nn}\frac{\delta}{\delta w_n(\lambda')}\right)\,d^3S,$$
$$\mathcal{H}_{03}=\frac{1}{2}\int(\bar{p}^2+\sum_{k=1}^{3}\bar{q}^2_{\lambda_k}+V''(F)\bar{q}^2)\,d^3S+$$
$$+ir_a\frac{\partial}{\partial r_b}\int\left(\tilde{N}^a_n\frac{\delta r_b}{\delta u(\lambda')}-\tilde{N}^a_{nn}\frac{\delta r_b}{\delta u_n(\lambda')}\right)\,d^3S+r_ar_b\int(\tilde{N}^a_n\tilde{N}^b_n-\tilde{N}^a_{nn}\tilde{N}^b)\,d^3S.$$

Выделим в H_0 слагаемые:

$$h_0\equiv\mathcal{H}_{01}+\mathcal{H}_{02}=\frac{1}{2}\int\left(\hat{P}^2+\hat{Q}^2_\lambda+V''(F)\hat{Q}^2\right)+i\int w_n\frac{\delta}{\delta w}+w_{nn}\frac{\delta}{\delta w_n}.$$

После редукции пространства состояний

$$\hat{P}(\mathbf{x}')\to -i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\delta}{\delta w(\mathbf{x}')},\qquad \hat{Q}(\mathbf{x}')\to\sqrt{2}w(\mathbf{x}'),$$

h_0 принимает вид:

$$h_0=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{\delta}{\delta w}\right)^2+\frac{1}{2}\int\left(w^2_\lambda+w_{nn}w+V''(F)w^2\right)+$$

$$+i\int w_n\left(\frac{\delta}{\delta w}-iw_w\right).$$

Так как
$$\int w_\lambda^2 = \int \frac{\partial}{\partial\lambda}(ww_\lambda) - ww_{\lambda\lambda}$$
и функция $w(\mathbf{x}')$ при малых t удовлетворяет уравнению
$$w_{nn}(\mathbf{x}') - w_{\lambda\lambda}(\mathbf{x}') + V''(F(0,x))w = 0,$$
то при
$$w(\mathbf{x}')w_\lambda(\mathbf{x}')|_{\partial C} = 0, \tag{П11.5}$$
получаем
$$h_0 = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{\delta}{\delta w}\right)^2 + \int w_n^2 + i\int w_n\frac{\delta}{\delta w}\,d^3S =$$
$$= \int\left(\frac{i}{2}\frac{\delta}{\delta w} + w_n\right)^2\,d^3S.$$

Пусть справедливо представление $w(x)$ в виде ряда
$$w(\mathbf{x}) = \sum\varphi_s(x)c_s(t),$$
где $\varphi_s(x)$ -ортонормированные функции, являющиеся решением уравнений
$$-\varphi_{sxx}(x) + V''(F)\varphi_s(x) = \omega_s^2\varphi_s,(x) \qquad \int\varphi_s\varphi_p = \delta_{sp},$$
и производная по w также представляется в виде ряда:
$$\frac{\delta}{\delta w(x)} = \sum\varphi_s(x)\frac{\partial}{\partial c_s(t)}.$$

Оператор h_0 приобретает вид:
$$h_0 = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{\delta}{\delta w}\right)^2 + \int w_n^2 + i\int w_n\frac{\delta}{\delta w} = -\frac{1}{4}\sum_s\left(\frac{\delta}{\delta c_s}\right)^2 + \omega_s^2 c_s^2.$$
В этом случае операторы рождения-уничтожения могут быть определены как
$$a_s = \gamma_s c_s + \beta_s\frac{\partial}{\partial c_s}, \qquad a_s^+ = \gamma_s c_s - \beta_s\frac{\partial}{\partial c_s},$$
то есть
$$c_s = \frac{1}{2\gamma_s}(a_s + a_s^+), \qquad \frac{\partial}{\partial c_s} = \frac{1}{2\beta_s}(a_s - a_s^+),$$

и

$$h_0 = \sum -\frac{1}{16\beta_s^2}(a_s - a_s^+)^2 + \frac{\omega_s^2}{4\gamma_s^2}(a_s + a_s^+)^2.$$

Если выполняется равенство

$$\frac{1}{16\beta_s^2} = \frac{\omega_s^2}{4\gamma_s^2},$$

то есть

$$\gamma_s = 2\omega_s\beta_s,$$

то h_0 выглядит так:

$$h_0 = \sum \frac{1}{8\beta_s^2}\left(a_s^+ a_s + a_s a_s^+\right).$$

Пусть

$$\frac{1}{4\beta_s^2} = \omega_s,$$

то есть

$$\beta_s = \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}}, \qquad \gamma_s = \sqrt{\omega_s},$$

тогда

$$h_0 = \sum \frac{\omega_s}{2}\left(a_s^+ a_s + a_s a_s^+\right),$$

$$a_s = \sqrt{\omega_s} c_s + \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}}\frac{\partial}{\partial c_s},$$

$$a_s^+ = \sqrt{\omega_s} c_s - \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}}\frac{\partial}{\partial c_s}.$$

Функция $w(x)$, заданная в форме ряда по $\phi_s(x)$, будет (по крайней мере при малых t), удовлетворять волновому уравнению, если зависимость a и a^+ от времени определяется уравнениями Гейзенберга с гамильтонианом h_0.

$$a_s(t) = e^{-i\omega_s t}\ a_s,$$

$$a_s^+(t) = e^{i\omega_s t}\ a_s^+,$$

Зависимость w от t имеет вид:

$$w(t) = \sum_s \frac{1}{2\sqrt{\omega_s}} \varphi_s \left(a_s e^{-i\omega_s t} + a_s^+ e^{i\omega_s t} \right),$$

$$w_t(t) = -i \sum_s \frac{\sqrt{\omega_s}}{2} \varphi_s \left(a_s e^{-i\omega_s t} - a_s^+ e^{i\omega_s t} \right),$$

и в нуле

$$w_t|_{t=0} = -i \sum_s \frac{\sqrt{\omega_s}}{2} \varphi_s \left(a_s \ - a_s^+ \right).$$

С другой стороны,

$$\hat{P} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \varphi_s \frac{\partial}{\partial c_s} = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \varphi_s \frac{1}{2\beta_s} (a_s - a_s^+) =$$

$$-i \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{\omega_s} \varphi_s (a_s - a_s^+).$$

Таким образом, оператор

$$\bar{P} = \sqrt{2} w_{t'}|_{t'=0}$$

то есть,

$$w_{t'}(\mathbf{x}', \tilde{\tau})|_{t'=0} = -\frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta w(\mathbf{x}', \tilde{\tau})}.$$

Итак,

$$h_0 = 0,$$

и гамильтониан принимает вид:

$$H = i \frac{\partial}{\partial \tau^0} + \frac{1}{2} \int \left(p^2 + q_\lambda^2 + V''(F) q^2 \right) +$$

$$+ i r_a \frac{\partial}{\partial r_b} \int \left(\tilde{N}_n^a \frac{\delta r_b}{\delta u} + \tilde{N}_{nn}^a \frac{\delta r_b}{\delta u_n} \right) + r_a r_c \int \left(\tilde{N}_n^a \tilde{N}_n^c + \tilde{N}_{nn}^a \tilde{N}^b \right).$$

Слагаемые, содержащие только избыточные переменные r_a и $\frac{\partial}{\partial r_a}$, могут быть удалены соответствующим выбором векторов состояний, данная процедура совершенно аналогична, рассмотренной в [54].

Аналогичные вычисления, выполненные для других интегралов движения показывают, что интегралы движения в нулевом порядке равны:

$$\mathcal{H}_0 = i \frac{\partial}{\partial \tau^0}, \qquad \mathcal{P}_0^k = -i \frac{\partial}{\partial \tau^k},$$

$$\mathcal{M}_0^{0k} = i\left(\frac{\partial}{\partial \tau^{3+k}} - \tau^0 \frac{\partial}{\partial \tau^k} - \tau^k \frac{\partial}{\partial \tau^0}\right),$$
$$\mathcal{M}_0^{kj} = i\left(\frac{\partial}{\partial \tau^{4+k+j}} + \tau^k \frac{\partial}{\partial \tau^j} - \tau^j \frac{\partial}{\partial \tau^k}\right),$$

Данные интегралы удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов группы Пуанкаре и порождают алгебру Ли данной группы.

Приложение 5

Примеры классических решений теории φ^4 в виде бегущих волн

Рассмотрим уравнение Лагранжа–Эйлера для (1+1)-мерной теории φ^4:

$$\frac{\partial^2\varphi_{cl}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_{cl}}{\partial t^2} - m^2\varphi_{cl} - \lambda\varphi_{cl}^3 = 0$$

с целью нахождения решений в виде бегущих волн. Будем рассматривать случай $m^2 \geqslant 0$ и $\lambda > 0$.

Как известно из теории эллиптических интегралов, если

$$z = \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(\psi)}},$$

то обратная функция $\vartheta(z)$ называется амплитудой Якоби:

$$\vartheta \equiv \mathrm{am}(z, k).$$

При $k \in (0, 1)$ и $z \in \mathbb{R}$ функция $\mathrm{am}(z, k)$ оказывается действительной. Эллиптические функции Якоби

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}(z, k) &\equiv \sin(\mathrm{am}(z, k)), \\ \mathrm{cn}(z, k) &\equiv \cos(\mathrm{am}(z, k)), \\ \mathrm{dn}(z, k) &\equiv \sqrt{1 - k^2\sin^2(\mathrm{am}(z, k))}. \end{aligned}$$

являются периодическим решениями уравнения Дюффинга:

$$\frac{d^2 f(z, k)}{dz^2} = a_1(k) f^3(z, k) + a_2(k) f(z, k),$$

при этом коэффициенты a_1 и a_2 определяются видом функции $f(z)$.

Функции

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{\mathrm{cn}(z,k)}, & \dfrac{1}{\mathrm{sn}(z,k)}, & \dfrac{1}{\mathrm{dn}(z,k)}, \\
\dfrac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}, & \dfrac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{sn}(z,k)}, & \dfrac{\mathrm{cn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}, \\
\dfrac{\mathrm{dn}(z,k)}{\mathrm{cn}(z,k)}, & \dfrac{\mathrm{dn}(z,k)}{\mathrm{sn}(z,k)}, & \dfrac{\mathrm{sn}(z,k)}{\mathrm{dn}(z,k)}.
\end{array}$$

также являются периодическими решениями данного уравнения.

Функция $\mathrm{cn}(z,k)$ — решение следующего уравнения:

$$\frac{d^2\,\mathrm{cn}(z,k)}{dz^2} = (2k^2-1)\,\mathrm{cn}(z,k) - 2k^2\,\mathrm{cn}^3(z,k).$$

Подставив $\varphi \equiv A\,\mathrm{cn}(z,k)$ с $z \equiv \alpha x + \beta t$ в уравнение Лагранжа–Эйлера, получаем:

$$A(\alpha^2-\beta^2)\frac{d^2\,\mathrm{cn}(z,k)}{dz^2} - m^2\,\mathrm{cn}(z,k) - \lambda\,\mathrm{cn}^3(z,k) = 0.$$

Сравнивая два последних уравнения, приходим к системе:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2k^2(\alpha^2-\beta^2)+A^2\lambda &=& 0, \\ (2k^2-1)(\alpha^2-\beta^2) &=& m^2. \end{array}\right.$$

Решая её, находим

$$\left\{\begin{array}{rcl} k^2 &=& \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{m^2}{\alpha^2-\beta^2}\right), \\ A^2 &=& \dfrac{\beta^2-\alpha^2-m^2}{\lambda}. \end{array}\right.$$

Если $\beta^2 > \alpha^2+m^2$, то $0 < A^2$, $0 < k^2 < \frac{1}{2}$, и полученное решение оказывается действительным (для $x,t \in \mathbb{R}$). С другой стороны, если $\beta^2 < \alpha^2 - m^2$, то $A^2 < 0$, $\frac{1}{2} < k^2 < 1$, и мы получаем чисто мнимое решение.

Решение, пропорциональное $\mathrm{sn}(z,k)$, получается аналогично.

Как известно,

$$\frac{d^2 \operatorname{sn}(z,k)}{dz^2} = -(k^2+1)\operatorname{sn}(z,k) + 2k^2 \operatorname{sn}^3(z,k),$$

следовательно, функция $B\operatorname{sn}(z,k)$ будет удовлетворять уравнению Лагранжа–Эйлера при

$$\begin{cases} k^2 &= \dfrac{m^2}{\beta^2-\alpha^2} - 1, \\ B^2 &= 2\dfrac{\beta^2-\alpha^2-m^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Как легко проверить, если $k \in (0,1)$, то $\beta^2 \in (\alpha^2 + \frac{m^2}{2}, \alpha^2 + m^2)$ и $B^2 < 0$.

Несмотря на то, что уравнение Лагранжа–Эйлера нелинейно, функция

$$e^{i\operatorname{am}(z,k)} \equiv \operatorname{cn}(z,k) + i\operatorname{sn}(z,k)$$

также оказывается пропорциональной решению $\varphi = Ce^{i\operatorname{am}(z,k)}$, с параметрами, определяемыми следующей системой:

$$\begin{cases} k^2 &= 2 - \dfrac{m^2}{\beta^2-\alpha^2}, \\ C^2 &= 2\dfrac{\beta^2-\alpha^2-m^2}{\lambda}. \end{cases}$$

Если $k \in (0,1)$, то $\beta^2 \in (\alpha^2 + \frac{m^2}{2}, \alpha^2 + m^2)$, следовательно, $C^2 < 0$. Подобный результат легко может быть получен и для функции $\bar{\varphi} \equiv -Ce^{-i\operatorname{am}(z,k)}$.

Рассмотрим более подробно решение $\varphi = A\operatorname{cn}(z,k)$. Разложение Фурье для $\operatorname{cn}(z,k)$ есть [66]:

$$\operatorname{cn}(z,k) = \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\cos\left((2n-1)\frac{\pi z}{2K}\right),$$

где $q \equiv e^{-\pi\frac{K'}{K}}$.

Периодами $\operatorname{cn}(z,k)$ являются числа $4K$ и $2K + 2iK'$, зависящие от параметра k^2. Используя формулу

$$\cos(z,k) \equiv \cos(\alpha x + \beta t) = \cos(\alpha x)\cos(\beta t) - \sin(\alpha x)\sin(\beta t),$$

получаем

$$\mathrm{cn}(\alpha x + \beta t) = C(\alpha x + \beta t) - S(\alpha x + \beta t),$$

где

$$C(\alpha x + \beta t) \equiv \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\cos\left((2n-1)\frac{\pi\alpha x}{2K}\right)\cos\left((2n-1)\frac{\pi\beta t}{2K}\right),$$

$$S(\alpha x + \beta t) \equiv \frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}}\sin\left((2n-1)\frac{\pi\alpha x}{2K}\right)\sin\left((2n-1)\frac{\pi\beta t}{2K}\right).$$

Выбирая и фиксируя k^2 $(0 < k^2 < \frac{1}{2})$, мы определяем значения K, K' и q. Для определения α, β and A воспользуемся системой

$$\left\{\begin{array}{rcl} k^2 & = & \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{m^2}{\alpha^2 - \beta^2}\right), \\ A^2 & = & \dfrac{\beta^2 - \alpha^2 - m^2}{\lambda}. \end{array}\right.$$

Каждому k^2 однозначно соответствуют значения $\alpha^2 - \beta^2$ и A^2, в то же время, для определения α^2 необходимо задать дополнительное условие. Выбирая α^2 так, что

$$\frac{\pi\alpha}{2K} = 1,$$

получаем, что наше решение удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) \qquad\qquad \partial_x\varphi(0,t) = \partial_x\varphi(\pi,t).$$

Легко видеть, что действительные решения получены при условии $\beta^2 > \alpha^2$. Следовательно, данные решения преобразование Пуанкаре можно превратить в периодические по времени и постоянные по пространственной координате. Для получения действительного решения, периодического по пространственной координате, необходимо изменить знак при массовом члене в уравнении Лагранжа–Эйлера.

Приложение 6

Изучение стабильности статического поля, периодического по пространственной координате

Уравнение Лагранжа–Эйлера для $(1+1)$-мерной теории φ^4:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + m^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0. \qquad (\textit{П}\ 6.1)$$

имеет решение

$$\varphi_{cl}(t,x) = A\,\mathrm{sn}(\frac{x - vt - x_0}{\sqrt{1-v^2}}, k), \qquad (\textit{П}\ 6.2)$$

при этом амплитуда A и модуль эллиптического синуса связаны с параметрами уравнения (*П* 6.1) следующим образом:

$$k^2 = m^2 - 1, \qquad A^2 = 2\frac{m^2-1}{\lambda}. \qquad (\textit{П}\ 6.3)$$

Действительное решение получаем при $1 < m^2 < 2$.

Целью данного приложения является квантование вблизи φ_{cl} в терминах переменных Боголюбова. Данное приложение показывает, что преобразование Боголюбова, ранее применяемое при квантовании существенно-нелинейных систем вблизи солитонного решения [50], является, как и следовало ожидать, частным случаем преобразования Боголюбова, введённого для квантования вблизи нестационарных классических полей.

Ввведём новую переменную $\tau = vt + x_0$. Преобразование Боголюбова будет иметь вид:

$$f(x) = G\varphi_{cl}(x-\tau) + u(x-\tau). \qquad (П\ 6.4)$$

Дополнительное условие запишем в виде

$$\omega(\tilde{N}, y) \equiv \int \tilde{N}_n(x)u(x) = 0. \qquad (П\ 6.5)$$

Функция $\tilde{N}_n(x)$ выбирается так, чтобы

$$\int \tilde{N}_n(x)M(x) = 1, \qquad (П\ 6.6)$$

где

$$M(x) \equiv -\frac{\partial\varphi_{cl}(x-\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_{cl}(x-\tau)}{\partial x}. \qquad (П\ 6.7)$$

Подчеркнём, что на поверхности C функции $\tilde{N}(x)$ и $\tilde{N}_n(x)$ задаются независимо. Выбором дополнительного условия в виде ($П$ 6.5), мы положили $\tilde{N}(x) = 0$.

Функцию u, удовлетворяющую условиям ($П$ 6.5), можно построить из произвольной дифференцируемой функции y следующим образом:

$$u(x) = \int A(x,\tilde{x})y(\tilde{x})d\tilde{x} \equiv$$
$$\int \Big(\delta(x-\tilde{x}) - M(x)N(\tilde{x})\Big)y(\tilde{x})\,d\tilde{x} = y(x) - M_a(x)\cdot\omega(\tilde{N}, y). \qquad (П\ 6.8)$$

Условия ($П$ 6.5) выделяют на пространстве дифференцируемых функций подпространство функций u, являющихся решениями интегрального уравнения

$$u = \int \Big(\delta(x-\tilde{x}) - M(x)N(\tilde{x})\Big)u(\tilde{x})\,d\tilde{x}. \qquad (П\ 6.9)$$

Оператор

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} = \int A(x,\tilde{x})\frac{\delta}{\delta u(\tilde{x})}d\tilde{x}$$

удовлетворяет условию

$$\int M(\tilde{x})\frac{\delta}{\delta u(\tilde{x})}\,d\tilde{x} = 0. \qquad (П\ 6.10)$$

Подставляя в (*П* 6.5) выражение

$$u(x-\tau) = f(x) - G\varphi_{cl}(x-\tau),$$

получаем, что следствием инвариантности дополнительного условия относительно вариаций параметра τ являются соотношение:

$$\frac{\delta\tau}{\delta f(x)} = -\frac{1}{G}\left(\frac{\tilde{N}_n(x-\tau)}{1-\frac{1}{G}\int\tilde{N}_n(\tilde{x})u(\tilde{x})d\tilde{x}}\right). \qquad (П\ 6.11)$$

Как и в случае нестационарного классического решения проводится преобразование векторов состояний для повышения порядка операторов $\frac{\partial}{\partial\tau^a}$:

$$\Phi[u,u_n] \longrightarrow e^{iG^2J(\tau)}\Phi[u,u_n]. \qquad (П\ 6.12)$$

Соответствующее преобразование операторов выглядит так:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau} \longrightarrow -G^2J_\tau + i\frac{\partial}{\partial\tau}, \qquad J_\tau = \frac{\partial J}{\partial\tau}.$$

Для обращения в нуль интегралов движения в минус первом порядке (по G^{-1}) выберем функцию $\tilde{N}_n(x)$ пропорциональной $M(x)$. Определяемый из условия обращения в нуль интегралов движения в минус первом порядке параметр J_τ оказывается пропорциональным скорости v, определённой в формуле (*П* 6.2).

Рассмотрим теперь уравнение для квантовой поправки в случае $J_\tau = v = 0$. Имеем:

$$\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2} + (m^2 - 3\lambda\varphi_{cl}^2)\cdot u(t,x) = 0. \qquad (П\ 6.12)$$

Для простоты ограничимся случаем статического классического решения $\varphi_{cl} \equiv A\,\mathrm{sn}(x,k)$. Получаем

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2u}{\partial t^2} + (m^2 - 6k^2\,\mathrm{sn}^2(x,k))\cdot u = 0.$$

Будем искать решение уравнения (*П* 6.12) в виде

$$u(t,x) \equiv r(t)s(x).$$

Получаем, что уравнение (*П* 6.12) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (m^2 - 3\varphi^2)\cdot u = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{d^2 s(x)}{dx^2} r(t) - \frac{d^2 r(t)}{dt^2} s(x)\right) + (m^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2(x,k))\cdot r(t)s(x) = 0, \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 s(x)}{dx^2} &= (6k^2 \operatorname{sn}^2(x,k) - \Lambda)s(x), \\ \dfrac{d^2 r(t)}{dt^2} &= (m^2 - \Lambda)r(t), \end{cases}$$

где Λ — произвольная константа.

Таким образом, $s(x)$ должно быть решением уравнения Ламе.

$$\frac{d^2 s(x)}{dx^2} + (\Lambda - 6k^2 \operatorname{sn}^2(x,k))\cdot s(x) = 0.$$

Рассмотрим данное уравнение в форме Вейерштрасса:

$$\frac{d^2 s(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} - (B + 6\wp(\tilde{z}))\cdot s(\tilde{z}) = 0,$$

где $\wp(\tilde{z})$ — дважды периодическая функция Вейерштрасса, B — константа, а $\tilde{z}$ новая переменная:

$$B = \Lambda(e_1 - e_3) - 6e_3\ , \quad \tilde{z} = x\sqrt{e_1 - e_3} + i\tilde{K}',$$

$\tilde{K}'$ — половина мнимого периода функции $\operatorname{sn}(x,k)$.

Будем искать решение уравнения Ламе в следующем виде[84]:

$$L(\tilde{z}) = \frac{\sigma(\tilde{z} + a_1)\sigma(\tilde{z} + a_2)}{\sigma(\tilde{z})^2} e^{-\tilde{z}(\zeta(a_1) + \zeta(a_2))},$$

где $\sigma(\tilde{z})$ и $\zeta(\tilde{z})$ являются эллиптическими функциями Вейерштрасса, соответствующими функции $\wp(\tilde{z})$. В результате получаем систему уравнений на параметры a_1 и a_2:

$$\begin{cases} \wp(a_1) &= \dfrac{B}{6} - \dfrac{1}{2}\sqrt{g_2 - \dfrac{B^2}{3}}, \\ \\ \wp(a_2) &= \dfrac{B}{6} + \dfrac{1}{2}\sqrt{g_2 - \dfrac{B^2}{3}}, \\ \\ \dfrac{d\wp(a_1)}{d\tilde{z}} &= -\dfrac{d\wp(a_2)}{d\tilde{z}}. \end{cases}$$

Для каждого значения B найдено не одно, а два решения уравнения, поскольку, если пара (a_1,a_2) генерирует решение, т.е. удовлетворяет вышеприведённой системе, то пара $(-a_1,-a_2)$ также генерирует решение уравнения. Полученные решения будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда они будут являться либо периодическими, либо антипериодическими (т.е. являющимися периодическими функциями с периодом, удвоенным по сравнению с действительным периодом функции $\mathrm{sn}^2(x,k)$) решениями уравнения. Итак, получена фундаментальная система решений для почти всех собственных значений.

Для проведения квантования нам потребуется построить разложение по решениям уравнения Ламэ произвольной функции, принадлежащей некоторому классу. Мы воспользуемся теоремой о разложении по решениям дифференциального уравнения второго порядка в случае периодического потенциала [85].

Обозначим через Λ_n собственные значения соответствующие периодическим собственным функциям, а через μ_n — антипериодическим. Легко проверить, что следующие пять собственных функций уравнения

Ламе соответствуют следующим собственным значениям:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \operatorname{sn}^2(x) - \tfrac{1}{(1+k^2)-\sqrt{(1-k^2+k^4)}}, \quad \Lambda_0 = 2(1+k^2) - 2\sqrt{(1-k^2+k^4)};\\
L_1(x) &= \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x), \mu_0 = 1+k^2;\\
L_2(x) &= \operatorname{sn}(x)\operatorname{dn}(x), \mu_1 = 1+4k^2;\\
L_3(x) &= \operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(x), \Lambda_1 = 4+k^2;\\
L_4(x) &= \operatorname{sn}^2(x) - \tfrac{1}{(1+k^2)+\sqrt{(1-k^2+k^4)}}, \quad \Lambda_2 = 2(1+k^2) + 2\sqrt{(1-k^2+k^4)};
\end{aligned}$$

Из условия $k^2 \in (0,1)$ немедленно следует, что

$$0 < \Lambda_0 < \mu_0 < \mu_1 < \Lambda_1 < \Lambda_2,$$

а также то, что за период функции $\operatorname{sn}(x,k)$ функция $L_0(x)$ не обращается в нуль, функции $L_1(x)$ и $L_2(x)$ имеют по одному нулю каждая, а функции $L_3(x)$ и $L_4(x)$ имеют по два нуля. Следовательно, полученные собственные значения являются минимальными.

Рассматриваемое нами уравнение является уравнением Ламэ с $n = 2$. В случае произвольного натурального n Айнс [86] доказал равенства $\Lambda_{2j+1} = \Lambda_{2j+2}$, $\mu_{2j} = \mu_{2j+1}$, при $2j \geqslant n$ (в нашем случае $\Lambda_{2j+1} = \Lambda_{2j+2}$, $\mu_{2j} = \mu_{2j+1}$, при $j \geqslant 1$). Благодаря данному условию, теорему разложения по собственным функциям нашего уравнения можно построить, зная только значения Λ_0, μ_0, μ_1, Λ_1 и Λ_2.

Функция $L(-x, a_1, a_2)$ будучи пропорциональной $L(x, -a_1, -a_2)$, является линейно независимой от $L(x, a_1, a_2)$. Таким образом, мы получаем чётные и нечётные решения:

$$\nu(x,\Lambda) = \frac{L(x,a_1,a_2) + L(-x,a_1,a_2)}{2L(0,a_1,a_2)},$$

$$\psi(x,\Lambda) = \frac{L(x,a_1,a_2) - L(-x,a_1,a_2)}{2L'(0,a_1,a_2)}.$$

Как легко заметить

$$\nu(0,\Lambda)=1, \qquad \nu'(0,\Lambda)=0;$$
$$\psi(0,\Lambda)=0, \qquad \psi'(0,\Lambda)=1.$$

Разложение по собственным функциям может быть записано в терминах $\nu(x,\Lambda)$ и $\psi(x,\Lambda)$. Однако оно будет выглядеть более прозрачно в терминах новых функций, также образующих фундаментальную систему решений:

$$\tilde{\nu}(x,\Lambda)=\sqrt{\frac{L(0)}{L'(0)}}\nu(x,\Lambda),$$
$$\tilde{\psi}(x,\Lambda)=i\sqrt{\frac{L'(0)}{L(0)}}\psi(x,\Lambda).$$

Сформулируем теорему разложения:

пусть $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$ — непрерывная функция, тогда $f(x)$ представима в виде интеграла:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0}(\tilde{\nu}(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde{\nu})+\tilde{\psi}(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde{\psi}))d\Lambda,$$

где

$$F(\Lambda,\tilde{\nu})\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\tilde{\nu}(x,\Lambda)dx,$$
$$F(\Lambda,\tilde{\psi})\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\tilde{\psi}(x,\Lambda)dx.$$

Область интегрирования $S_0=[\lambda_0,\mu_0]\cup[\mu_1,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\infty)$.

Так как, мы раскладываем уравнение Лагранжа–Эйлера в ряд по малому параметру $\frac{1}{G}$, то $u(t,x)$ должно быть ограниченной во всём пространстве–времени функцией. При $\Lambda-m^2-6k^2>0$ и $\Lambda\in S_0$, получаем, что функция $u(t,x)$ — ограниченная. Так как $\mu_1=m^2$, то необходимо ограничить область интегрирования:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1}(\tilde{\nu}(x,\Lambda)e^{i\sqrt{\Lambda-\tilde{m}^2-6k^2}t}F_+(\Lambda,\tilde{\nu})+\tilde{\nu}(x,\Lambda)e^{-i\sqrt{\Lambda-\tilde{m}^2-6k^2}t}F_-(\Lambda,\tilde{\nu})+$$

$$+\tilde\psi(x,\Lambda)e^{i\sqrt{\Lambda-m^2-6k^2}t}F_+(\Lambda,\tilde\psi)+\tilde\psi(x,\Lambda)e^{-i\sqrt{\Lambda-m^2-6k^2}t}F_-(\Lambda,\tilde\psi))d\Lambda,$$

$$\text{где}\quad S_1=(\mu_1,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\infty).$$

Функции $F_\pm(\Lambda,\tilde\nu)$ и $F_\pm(\Lambda,\tilde\psi)$ — произвольны.

Следующая формула даёт импульсное представление нашего поля ($R(w)$ — произвольная функция):

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iwt}R(w)dw\int\limits_{S_1}(\tilde\nu(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\nu)+$$

$$+\tilde\psi(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\psi))\delta(w^2-\Lambda+\mu_1)\,d\Lambda$$

Пусть $w_0\equiv\sqrt{\Lambda-\mu_1}$. Если $\Lambda\in S_1$, то $w_0\in\mathbb{R}$. Применим стандартную процедуру квантования [87], то есть, мы будем рассматривать поле как сумму отрицательно- и положительно-частотных частей:

$$u(t,x)=v^+(t,x)+v^-(t,x),$$

где

$$v^+(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1}\frac{1}{2w_0}e^{iw_0t}R(w_0)(\tilde\nu(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\nu)+\tilde\psi(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\psi))d\Lambda,$$

$$v^-(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1}\frac{1}{2w_0}e^{-iw_0t}R(-w_0)(\tilde\nu(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\nu)+\tilde\psi(x,\Lambda)F(\Lambda,\tilde\psi))d\Lambda,$$

и строим импульсное представление Гамильтониана

$$H=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+(m^2+6k^2\,\mathrm{sn}^2(x,k))\cdot v^2\right)dx.$$

Подставляя $u(t,x)=v^+(t,x)+v^-(t,x)$ и, используя соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\Lambda)\nu(x,\Lambda')dx=0,$$

получаем

$$H=\frac{1}{2}\int\limits_{S_1}R(w_0)R(-w_0)\left(F^2(\Lambda,\tilde\nu)+F^2(\Lambda,\tilde\psi)\right)d\Lambda.$$

Операторы уничтожения имеют вид

$$\begin{aligned} a_1(\Lambda) &= \tfrac{1}{\sqrt{2w_0}} R(-w_0(\Lambda)) F(\Lambda, \tilde{\nu}), \\ a_2(\Lambda) &= \tfrac{1}{\sqrt{2w_0}} R(-w_0(\Lambda)) F(\Lambda, \tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Поле $u(t,x)$ — действительное, следовательно, $R^*(w) = R(-w)$ отсюда получаются операторы рождения

$$\begin{aligned} a_1^+(\Lambda) &= \tfrac{1}{\sqrt{2w_0}} R(w_0(\Lambda)) F(\Lambda, \tilde{\nu}), \\ a_2^+(\Lambda) &= \tfrac{1}{\sqrt{2w_0}} R(w_0(\Lambda)) F(\Lambda, \tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Гамильтониан равен

$$H = \int\limits_{S_1} w_0(\Lambda)(a_1^+(\Lambda)a_1(\Lambda) + a_2^+(\Lambda)a_2(\Lambda))d\Lambda,$$

где

$$w_0(\Lambda) \equiv \sqrt{\Lambda - \mu_1},$$

$$S_1 = (\mu_1, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty).$$

Как легко видеть,

$$[a_1(\Lambda), a_1^+(\Lambda')] = [a_2(\Lambda), a_2^+(\Lambda')] = \delta(\Lambda - \Lambda').$$

Таким образом, построено квантовое поле, состоящее из двух сортов скалярных частиц. Ограничение области интегрирования связано с необходимостью сохранения стабильности классического решения. Многочастичные конфигурации также не приводят к нарушению стабильности, так как сумма энергий частиц принадлежит интервалу S_1, в случае, когда энергия каждой частицы принадлежит данному интервалу.

Приложение 7

Нахождение приближённого решения системы (3.7) методами компьютерной алгебры

Программа отыскания приближённого решения системы (3.7) написана на языке аналитических вычислений **REDUCE 3.6** (описание компьютерного языка **REDUCE** дано, например, в монографиях [71, 72, 74, 75]).

Представленная программа строит систему уравнений (3.7): $R_{jj} = 0$ и находит частное решение этой системы. Построение системы (3.7) осуществляется следующим образом.

Периодическое решение уравнения (3.5) будем искать в виде конечной суммы

$$phi(xx,tt) = \sum_{j=1}^{n} a(2j-1)\sin((2j-1)xx)\sin((2j-1)tt).$$

Ряд Фурье точного периодического решения уравнения (3.5), т. е. функции $\varphi_0(x,\tilde{t})$, содержит бесконечное число гармоник, число гармоник приближённого решения $phi(xx,tt)$ выбирается в зависимости от возможностей ЭВМ, на которой проводятся вычисления. При $n = 10$ программа даёт результат на компьютере с 16 Мегабайтами оперативной памяти, для получения решения с $n = 20$ необходим компьютер с 128 Мегабайтами оперативной памяти.

Построение системы (3.7) осуществляется следующим образом: подставляя в уравнение (3.5) Фурье разложение функции $phi(xx,tt)$ и используя процедуру "fourier", разлагаем данное уравнение в ряд Фурье и получаем систему уравнений на коэффициенты Фурье функции $phi(xx,tt)$, т.е. систему (3.7). Полученная система записывается в список "listequa". Число уравнений равняется $3n$. Так как ищется действительное решение, то необходимо, чтобы все $a\,(j) \in \mathbb{R}$.

Первый коэффициент a_1 является параметром, задающим амплитуду колебаний. Действительно, если $a_j = c_j a_1$ и $\omega_1 = c_\omega a_1^2$, то все полиномы R_{jj} пропорциональны a_1^3: $R_{jj}(\mathbf{a}) = a_1^3 R_{jj}(\mathbf{c})$ и, следовательно, коэффициент a_1 может быть выбран произвольно. Нашей задачей является решение системы $R_{jj}(\mathbf{c})$. Так как неизвестные $a\,(j)$ являются коэффициентами Фурье некоторой функции, то разумно предположить, что модули данных коэффициентов образуют убывающую последовательность, точнее, мы будем предполагать, что действительные числа $c\,(j) \equiv a\,(j)/a\,(1)$, удовлетворяют следующему условию: $\forall j > 1 : |c\,(j)| < 1$.

Приближённое решение полученной системы строится следующим образом. На первом шаге мы полагаем, что все $c\,(j) = 0$, кроме $c\,(3)$ и, естественно, $c(1) \equiv 1$. Из первого уравнения системы (т.е. первого элемента в списке "listequa") мы получаем, C_{omega} как полином от $c\,(3)$. Подставляя данное выражение для C_{omega} во второе уравнение системы, получаем, что это уравнения оказывается кубическим уравнением на $c\,(3)$ и может быть решено с помощью стандартной процедуры системы **REDUCE** (**SOLVE**). Решение данного уравнения ищется в режиме "on round", когда все иррациональные числа заменяются их приближёнными значениями, поэтому подстановка $|c\,(3)|$ в левую часть уравнения, т.е. в полином R_{22}, не приведёт к равенству $R_{22} = 0$. Стандартная точность решений нелинейных уравнений процедурой **SOLVE** в режиме "on round" есть 10^{-11}. К примеру, второе уравнение системы считается решенным, если подстановка корня приводит к неравенству $|R_{22}| < 10^{-11}$. Из полученных трёх решений выбираем действительное решение, удовлетворяющее условию $|c\,(3)| < 1$. Существование подобного решения соответствует нашему предположению об убывании коэффициентов Фурье функции $phi(xx,tt)$.

На следующем шаге мы ищем значение $c\,(5)$, которое на первом шаге подразумевалось равным нулю. Оператор **clear** $c\,(5)$ восстанавливает

$c\,(5)$ как переменную. Используя полученное значение $c\,(3)$, из первого уравнения получаем C_{omega} уже как полином от $c\,(5)$. Подставляя это значение C_{omega} в третье уравнение и решая его, определяем значение $c\,(5)$.

Вычисляя $c\,(3)$, мы полагали $c\,(5) = 0$. Теперь, зная более точное значение $c\,(5)$, мы должны проверить правильность значения $c\,(3)$. Для этого в полином R_{22}, то есть левую часть второго уравнения системы, подставляем имеющиеся значения C_{omega}, $c\,(3)$ и $c\,(5)$. Если выполняется равенство $|R_{22}| < 10^{-11}$, то уравнение будем считать решенным и перейдём к поиску следующего коэффициента, в противном случае заново решаем данное уравнение относительно $c\,(3)$. При этом значение $c\,(5)$ не равно нулю. После этого мы повторяем второй шаг и ищем значение $c\,(5)$, соответствующее новому значению $c\,(3)$. После нахождения значения коэффициента $c\,(2n-1)$ программа заканчивает свою работу. В качестве результата печатаются не только значения коэффициентов $c\,(2j-1)$, но и значения R_{jj}, получаемые после подстановки данных коэффициентов. Критерием правильности работы программы является выполнение равенства $|R_{jj}| < 10^{-11}$ для всех j.

```
out "rjj.res";
in fourier$
n:=10$
operator a,c,phi$
depend phi,xx,tt$

% Expand the unknown function phi(xx,tt), which is a solution
% of equation (5), and equation (6) in the Fourier series.

phi(xx,tt):=for j:=1:n sum a(2j-1)*sin((2j-1)*xx)
                                  *sin((2*j-1)*tt)$
equation1:=2*w1*df(phi(xx,tt),tt,2)+
                fourier(fourier(phi(xx,tt)**3,xx),tt)$
listequa:={}$
```

```
%  The frequency w_1 is proportional to a(1)^2.

w1:=C_omega*a(1)**2$
for j:=2:n do  a(2*j-1):=c(2*j-1)*a(1)$
equation1:=equation1$

% Construct the system (3.7): R_{jj}(c)=0.

for k:=1:3*n do
    listequa:=append(listequa,
             {16*df(equation1,sin((2*k-1)*xx),sin((2*k-1)*tt))
              /a(1)**3});

% Find a real solution of this system.

on rounded$
C_omega:=0$

% C_omega must be connected variable, because I want
% to clear it without message: "WARNING...".

for k:=2:n do
<< for j:=k:n do c(2*j-1):=0;
   clear C_omega, c(2*k-1);
   firstequa:=first(listequa);
   C_omega:=C_omega-firstequa/df(firstequa,C_omega);
   equa:=part(listequa,k);

% All equations, which we solve using the procedure SOLVE, are
% cubic equations, hence, they have at least one real root.
% We assume that the absolute value of one of real
% roots is less than unit.
% We solve the equation and select this real solution
% as value of c(2*k-1).
```

```
   solve_equa:=solve(equa,c(2*k-1));
   while solve_equa neq {} do
 << c(2*k-1):=part(solve_equa,1,2);
    if( c(2*k-1)=sub(i=-i,c(2*k-1)) and abs(c(2*k-1))<1)
      then solve_equa:={}
      else solve_equa:=rest(solve_equa);
 >>;
  test:=0;
  while(test=0) do
 << test:=1;
    clear C_omega;
    firstequa:=first(listequa);
    C_omega:=C_omega-firstequa/df(firstequa,C_omega);
    for j:=2:k do
  <<
    equa:=part(listequa,j);
    if(abs(equa)>10**(-11)) then
    << clear c(2*j-1);
       test:=0;
       equa:=part(listequa,j);
       solve_equa:=solve(equa,c(2*j-1));
       while solve_equa neq {} do
          << c(2*j-1):=part(solve_equa,1,2);
             if(c(2*j-1)=sub(i=-i,c(2*j-1)) and abs(c(2*j-1))<1)
               then solve_equa:={}
               else solve_equa:=rest(solve_equa);
          >>;
    >>;
  >>;
 >>;
>>;

% Write the obtained result.
```

```
c(1):=1$
for j:=1:n do  write "c(",2*j-1,"):=", c(2*j-1);
for j:=2:n do  write "c(",2*j-3,")/c(",2*j-1,"):= ",
                     c(2*j-3)/c(2*j-1);
write "C_omega:=", C_omega;
for j:=1:3*n do  write "R(",j,",",j,"):=",part(listequa,j);
quit;
end;
```

Процедура "fourier" разлагает полиномы от $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в ряд Фурье.

```
  procedure fourier(FF,X);

% This procedure constructs Fourier-series expansions
%  for polynomials of sin(x) and cos(x).

  begin
        scalar F;
        for all a, b such that df(a,x) neq 0 and df(b,x) neq 0
               let
                  cos(a)*cos(b)=(cos(a-b)+cos(a+b))/2,
                  sin(a)*sin(b)=(cos(a-b)-cos(a+b))/2,
                  sin(a)*cos(b)=(sin(a-b)+sin(a+b))/2,
                  sin(a)**2=(1-cos(2*a))/2,
                  cos(a)**2=(1+cos(2*a))/2;
        F:=FF;
        for all a, b such that
            df(a,x) neq 0 and df(b,x) neq 0
clear
                     cos(a)*cos(b),
                     sin(a)*sin(b),
```

```
                    sin(a)*cos(b),
                    sin(a)**2,
                    cos(a)**2;
         return F;
end;
```

Приложение 8

Параметризация полученного приближённого решения

С помощью программы, представленной в предыдущем Приложении, мы получили, что для решения системы с точностью $\delta = 10^{-11}$ достаточно представить φ_0 в виде суммы восьми нечётных гармоник, при этом поправка к частоте есть

$$\omega_1 = 0.282680034541 a_1^2.$$

Полученные численные значения коэффициентов Фурье c_j оказались весьма близки к соответствующим членам следующей конечной последовательности:

$$\mathbf{d} = \{d_{2j-1} = \frac{f_{2j-1}}{f_1}, \text{ где } \quad f_{2j-1} \equiv \frac{q^{j-1/2}}{1+q^{2j-1}}; \;\; d_{2j} = 0; \;\; j < 23\},$$

при этом

$$q = 0.0142142623201.$$

Как легко проверить, подстановка данной конечной последовательности даёт

$$\forall j \in \mathrm{I\!N} \quad : \quad |R_{jj}(\mathbf{d})| < 10^{-12}.$$

Иными словами, последовательность $\mathbf{d}$ является приближённым решением системы (3.7). Как оказалось, члены последовательности $\mathbf{d}$ пропорциональны соответствующим коэффициентам Фурье функции эллиптического косинуса $\mathrm{cn}(z, k)$. Так с помощью численных (компьютерных) вычислений удаётся углядеть аналитическую форму функции $\varphi_0(x, \tilde{t})$.

Следующая таблица иллюстрирует полученный результат:

j	c_j	$R_{jj}(\mathbf{c})$	d_j	$R_{jj}(\mathbf{d})$
1	1	0	1	0
3	$1.44162661711 \times 10^{-2}$	3.5×10^{-12}	$1.44162661711 \times 10^{-2}$	-8.0×10^{-14}
5	$2.04917177408 \times 10^{-4}$	2.1×10^{-12}	$2.04917177419 \times 10^{-4}$	-3.4×10^{-15}
7	$2.91274649724 \times 10^{-6}$	7.8×10^{-12}	$2.91274651543 \times 10^{-6}$	-9.7×10^{-17}
9	$4.14025418115 \times 10^{-8}$	8.3×10^{-13}	$4.14025430425 \times 10^{-8}$	-2.3×10^{-18}
11	$5.88506592014 \times 10^{-10}$	1.0×10^{-14}	$5.88506607528 \times 10^{-10}$	-4.9×10^{-20}
13	$8.36488192079 \times 10^{-12}$	4.6×10^{-13}	$8.36518729655 \times 10^{-12}$	-9.7×10^{-22}
15	$1.18901919266 \times 10^{-13}$	-7.8×10^{-22}	$1.1890496659 \times 10^{-13}$	-1.8×10^{-23}
17	0	4.4×10^{-12}	$1.69014638629 \times 10^{-15}$	-3.4×10^{-25}
19	0	7.3×10^{-14}	$2.40241840942 \times 10^{-17}$	-6.0×10^{-27}
21	0	1.1×10^{-15}	$3.41486054743 \times 10^{-19}$	-1.0×10^{-28}
23	0	1.7×10^{-17}	$4.85397236079 \times 10^{-21}$	-1.8×10^{-30}
25	0	2.4×10^{-19}	$6.89956364312 \times 10^{-23}$	-3.0×10^{-32}
27	0	3.3×10^{-21}	$9.8072207518 \times 10^{-25}$	-4.9×10^{-34}
29	0	4.2×10^{-23}	$1.39402408398 \times 10^{-26}$	-8.1×10^{-36}
31	0	5.2×10^{-25}	$1.98150240103 \times 10^{-28}$	-1.3×10^{-37}
33	0	5.7×10^{-27}	$2.81655949163 \times 10^{-30}$	-2.1×10^{-39}
35	0	6.1×10^{-29}	$4.00353154544 \times 10^{-32}$	-3.4×10^{-41}
37	0	6.2×10^{-31}	$5.69072475939 \times 10^{-34}$	-5.4×10^{-43}
39	0	5.9×10^{-33}	$8.08894545219 \times 10^{-36}$	-8.5×10^{-45}
41	0	5.0×10^{-35}	$1.14978392551 \times 10^{-37}$	-1.3×10^{-46}
43	0	3.6×10^{-37}	$1.63433303287 \times 10^{-39}$	-2.1×10^{-48}
45	0	1.7×10^{-39}	$2.32308384477 \times 10^{-41}$	-1.6×10^{-49}
$j > 45$	0	0	0	$\lvert R_{jj}(\mathbf{d})\rvert < 10^{-40}$

Библиография

[1] **Poincare H.**
New Methods of Celestial Mechanics.
Volume 1–3. NASA TTF–450, 1967.
{ Русский перевод:
Пуанкаре А.
Новые Методы Небесной Механики.
Избранные труды, Москва: Наука, 1971–1974.}

[2] **Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.**
Введение в Нелинейную Механику.
Харьков: Изд-во АН УССР, 1937.

[3] **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.**
Асимптотические Методы в Теории Нелинейных Колебаний.
Москва: Наука, 1974.

[4] **Боголюбов Н.Н.**
Об Одной Новой Форме Адиабатической Теории Возмущений в Задаче о Взаимодействии Частицы с Квантовым Полем.
УМЖ. 1950. Т. 2, № 2, С. 3–24; Избр. тр. Киев: Наукова думка. 1970. Т. 2, С. 499–519.

[5] **Тябликов С.В.**
Адиабатическая Форма Теории Возмущений в Задаче о Взаимодействии Частицы с Квантовым Полем.
ЖЭТФ. 1951. Т. 21, С. 377–383.

[6] **Москаленко В.А.**
К Теории Теплового Возбуждения Полярона.
ЖЭТФ. 1958. Т. 34, С. 346–354.

[7] **Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталёв О.А.**
Осцилляторные Уровни Частицы как Следствие Сильного Взаимодействия с Полем.
ТМФ. 1972. Т. 10, № 2, С. 162–181.

[8] **Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталёв О.А.**
Преобразование Боголюбова в Теории Сильной Связи. II.
ТМФ. 1972. Т. 11, № 3, С. 317–330.

[9] **Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталёв О.А.**
Преобразование Боголюбова в Теории Сильной Связи. III.
ТМФ. 1973. Т. 12, № 2, С. 164–178.

[10] **Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н.**
Задача Двух Тел в Адиабатической и Сильной Связи.
ТМФ. 1974. Т. 21, № 1, С. 13–29.

[11] **Семёнов С.В.**
Задача Трех Тел в Теории Сильной Связи.
ТМФ. 1974. Т. 18, № 3, С. 353–366.

[12] **Шургая А.В.**
Движение Нерелятивистской Частицы со Спином в Квантовом Поле с Сильной Связью.
ТМФ. 1976. Т. 28, № 2, С. 223–231.

[13] **Шургая А.В.**
Нерелятивистская Модель Взаимодействия Скалярной Частицы с Квантованным Полем.
ТМФ. 1978. Т. 34, № 2, С. 267–272.

[14] **Завтрак С.Т., Комаров Л.К., Феранчук И.Д.**
Теория Сильной Связи Частицы и Квантованного Поля с Внутренними Степенями Свободы.
ТМФ. 1981. Т. 47, № 1, С. 55–66.

[15] **Разумов А.В., Тимофеевская О.Д.**
Рассеяние в Симметричной Скалярной Теории в Случае Большой

Константы Связи.
ТМФ. 1976. Т. 27, № 2, С. 163–171.

[16] **Боголюбов П.Н., Дорохов А.Е.**
Об Устойчивости Классических Решений Уравнений Янга-Миллса с Источником.
ТМФ. 1982. Т. 51, № 2, С. 224–233.

[17] **Тюрин Н.Е., Шургая А.В.**
Метод Сильной Связи в Модели с Фиксированным Источником.
ТМФ. 1973. Т. 16, № 2, С. 197–212;

[18] **Тимофеевская О.Д., Тюрин Н.Е., Шургая А.В.**
Метод Сильной Связи в Заряженной Скалярной Теории с Двумя Источниками.
ТМФ. 1973. Т. 17, № 1, С. 79–89.

[19] **Разумов А.В., Таранов А.Ю.**
Рассеяние на Нерелятивистской Частице в Теории Сильной Связи.
ТМФ. 1978. Т. 35, № 3, С. 312–321.

[20] **Свешников К.А., Силаев П.К., Хрусталёв О.А..**
Квантование Гравитационного Поля в Окрестности Решения Шварцшильда в Релятивистской Теории Гравитации.
ТМФ. 1989. Т. 80. № 2, С. 173–191.

[21] **Branco G.C., Sakita B., Senjanovic P.**
Functional Approach to Strong-coupling Theory in Static Models.
Phys. Rev. D. 1974, V. 10, № 8, pp. 2573–2582.
Branco G.C., Sakita B., Senjanovic P.
Functional Approach to Strong-coupling Theory in Static Models. II. *General case.*
Phys. Rev. D. 1974. V. 10, № 8, pp. 2583–2587.

[22] **Gervais J.L., Sakita B.**
Extended Particles in Field Theories.
Phys. Rev. D. 1975, V. 11, № 10, pp. 2943–2945.
Gervais J.L., Jevicki A., Sakita B.
Perturbation Expansion around Extended-particle States in Quantum Field Theory.
Phys. Rev. D. 1975, V. 12, № 4, pp. 1038–1051.
Gervais J.L., Jevicki A., Sakita B.
Collective Coordinate Method for Quantization of Extended Systems.
Phys. Rep. C. 1976. V. 23, № 3, pp. 294–300.

[23] **Callan C.G., Gross D.J.**
Quantum Perturbation Theory of Solitons.
Nucl. Phys. B. 1975. V. 93, № 1, pp. 29–55.

[24] **Christ N.H., Lee T.D.**
Quantum Expansion of Soliton Solutions.
Phys. Rev. D. 1975. V. 12. № 6, pp. 1606–1627.

[25] **Greutz M.**
Quantum Mechanics of Extended Objects in Relativistic Field Theory
Phys. Rev. D. 1975. V. 12. № 10, pp. 3126–3144.

[26] **Tomboulis E.**
Canonical Quantization of Nonlinear Waves.
Phys. Rev. D. 1975. V. 12. № 6, pp. 1678–1683.

[27] **Watanabe Y.**
A Classical Theory of the Collective Description.
Prog. Theor. Phys., 1956, V. 16, № 1, pp. 1–22.

[28] **Шургая А.В.**
Метод Коллективных Переменных и Обобщенный Гамильтонов Формализм.
ТМФ. 1980. Т. 45. № 1, С. 46–53.

[29] **Шургая А.В.**
Метод Коллективных Переменных в Релятивистской Теории.
ТМФ. 1983. Т. 57, № 3, С. 392–405.

[30] **Тимофеевская О.Д.**
Учет Относительного Движения в Заряженной Скалярной Теории с Двумя Источниками.
ТМФ. 1978. Т. 37, № 2, С. 203–211.

[31] **Тимофеевская О.Д.**
Квантование в Окрестности Классического Решения в Нелинейной $O(3)$–Инвариантной Теории.
ТМФ. 1978. Т. 37, № 3, С. 326–335.

[32] **Тимофеевская О.Д.**
Преобразование Боголюбова в Нелинейных Моделях Теории Поля.
В кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовая теория поля (Труды Международного семинара), **Т. I. Серпухов: ИФВЭ, 1978, С. 140–153.**

[33] **Тимофеевская О.Д.**
Преобразование Боголюбова для Систем, Содержащих Фермионы.
В кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля (Труды V Международного семинара), **т.I. — Серпухов: ИФВЭ, 1982.**

[34] **Тимофеевская О.Д.**
Преобразование Боголюбова в Терминах Операторов Рождения и Уничтожения.
ТМФ. 1983. Т. 54, № 3, С. 464–468.

[35] **Борняков В.Г., Тимофеевская О.Д.**
Преобразование Боголюбова в Модели Ли.
ТМФ. 1983. Т. 55, № 2, С. 205–215.

[36] **Борняков В.Г.**
Рассеяние в Модели Ли, Решаемой Методом Преобразования Н.Н. Боголюбова.

— Препринт ИФВЭ 83–189, **Серпухов, 1983.**
Борняков В.Г.
Квантование Статической Модели Ли Методом Преобразования Боголюбова.
— Препринт ИФВЭ 84–137, **Серпухов, 1984;**

[37] **Свешников К.А.**
Преобразование Н.Н.Боголюбова для Группы Пуанкаре. — Препринт ИФВЭ 82–35, **Серпухов, 1982;**
Свешников К.А.
Ковариантное Каноническое Квантование и Операторные Связи Дирака.
— Препринт ИФВЭ 82–36, **Серпухов, 1982;**

[38] **Свешников К.А.**
Ковариантная Теория Возмущений в Окрестности Классического Решения.
ТМФ. 1983. Т. 55, № 3, С. 361–384;
Свешников К.А.
Квантовая Динамика Протяженного Объекта в Групповых Переменных Н.Н.Боголюбова.
ТМФ. 1988. Т. 74, № 3, С. 373–391.

[39] **Разумов А.В., Хрусталёв О.А.**
Применение Метода Н.Н.Боголюбова к Квантованию Бозонных Полей в Окрестности Классического Решения.
ТМФ. 1976. Т. 29, № 3, С. 300–307.

[40] **Разумов А.В., Таранов А.Ю., Хрусталёв О.А.**
Метод Боголюбова и Квантование Полей в Окрестности Классического Решения.
В кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовая теория поля (Труды Международного семинара), **т.I. — Серпухов: ИФВЭ, 1978, С. 5–25.**

[41] **Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu.**
Collective Coordinate Method in the Canonical Formalism: Bogolubov's

Transformation.
Nucl. Phys. B. 1980. V. 172, № 1, pp. 44–58.

[42] **Разумов А.В., Таранов А.Ю.**
Коллективные Координаты на Симплектических Многообразиях.
ТМФ, 1982, Т. 52, № 1, С. 34–43.

[43] **Разумов А.В., Таранов А.Ю.**
Геометрический Смысл Метода Коллективных Координат.
Препринт ИФВЭ 82–41, Серпухов, 1982.

[44] **Разумов А.В., Таранов А.Ю.**
О Квантовании Систем со Связями Первого Рода.
ТМФ, 1983, Т. 57, № 2, С. 232–237.

[45] **Razumov. A.V.**
Stenberg Construction and Reduction. **J. Math. Phys. 1990. V. 31, № 6, pp. 1416–1421.**

[46] **Faddeev L.D., Korenin V.E.**
About the Zero Mode Problem in the Quantization of Soliton.
Phys. Letters B. 1976. V. 63. pp. 435-438.

[47] **Matveev V.A.**
Cancellation of the Zero-mode Singularities in Soliton Quantization Theory.
Nucl. Phys. B. 1977. V. 121. pp. 403-412.

[48] **Matsumoto H., Semenoff G., Umedzava H.**
A Perturbative Look at the Dynamics of Extended Systems in Quantum Field Theory.
J. Math. Phys. 1981. V. 22, № 10, pp. 2208–2226.

[49] **Matsumoto H., Sodano P., Umedzava H.**
Extended Objects in Quantum Systems and Soliton Solutions.
Phys. Rev. D. 1979. V. 19, № 2, pp. 511–516.
Matsumoto H., Semenoff G.,, Umedzava H., Umedzava M.
Extended Objects in Quantum Field Theory.
J. Math. Phys. 1980. V. 21, № 7, pp. 1761–1769.

[50] **Разумов А.В.**
Преобразование Н.Н. Боголюбова и Квантование Солитонов.
ТМФ. 1977. Т. 30, № 1, С. 18–27.

[51] **Matsumoto H., Umedzava H., Papastamatiou N.J.**
Canonical Quantization of the Sine–Gordon System in the Multisoliton Sector.
Phys. Rev. D. 1983. V. 28, № 6, pp. 1949–1965.

[52] **Steinmann O.**
Semiclassical fields in Soliton Sectors.
Nucl. Phys. B. 1977. V. 131, № 4,5, pp. 459–476;
Steinmann O.
Quantum Fields in Two–soliton Sectors.
Nucl. Phys. B. 1978. V. 145, № 1, pp. 141–165.

[53] **Тверской В.Б.**
Гейзенберговы Поля в Окрестности Классического Решения.
ТМФ. 1986. Т. 68, № 3, С. 338–349.
Тверской В.Б.
Высшие Порядки Теории Возмущений в Окрестности Классического Решения.
ТМФ. 1987. Т. 70, № 2, С. 218–225.

[54] **Хрусталёв О.А., Чичикина М.В.**
Групповые Переменные Боголюбова в Релятивистской Теории Поля.
ТМФ. 1997. Т. 111, № 2, С. 242–251.
Хрусталёв О.А., Чичикина М.В.
Переменные Боголюбова для Релятивистски-инвариантных Систем.
ТМФ. 1997. Т. 111, № 3, С. 413–422.

[55] **Хрусталёв О.А., Чичикина М.В., Спирина Е.Ю.**
Нестационарный Полярон.
ТМФ. 2000. Т. 122, № 3, С. 416–424.

[56] **Lamb. G.**
Analytical Descriptions of Ultrashort Optical Pulse Propagation in a Resonant Medium.
Rev. Mod. Phys. 1971. V. 43, № 2, pp. 99–124.

[57] **Lamb G.**
Elements of Soliton Theory.
Wiley, New York, 1980.

[58] **Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.**
Solitons and Nonlinear Wave Equations.
Academic Press, London, New York. 1984.
{ Русский перевод:
Додд Р., Эйлбек Дж., Гибсон Дж., Моррис Х.
Солитоны и Нелинейные Волновые Уравнения.
Москва: Мир, 1988.}

[59] **Rajaraman R.**
An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory.
North–Holland Publishing House, Amsterdam, New York, 1982.
{ Русский перевод:
Раджараман Р.
Солитоны и Инстантоны в Квантовой Теории Поля.
Москва: Мир, 1985.}

[60] **Силаев П.К., Хрусталёв О.А.**
Дважды Периодические Решения в Существенно Нелинейной Одномерной Полевой Модели.
ТМФ. 1998. Т. 117, № 2. С. 300–307.

[61] **Coron J.M.**
Pèriode Minimale Pour une Corde Vibrante de Longueur Infinie
C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 1982 V. 294, pp. 127–129.

[62] **Brezis H., Coron J.M., Nirenberg L.**
Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of

P.Rabinowitz
Commun. Pure Appl. Math. 1980 V. 33, pp. 667–689.

[63] **Rabinowitz P.**
Free Vibrations for a Semilinear Wave Equation.
Commun. Pure Appl. Math. 1978 V. 31, pp. 31–68.
Rabinowitz P.
Periodic Solutions for a Hamiltonian Systems
Commun. Pure Appl. Math. 1978 V. 31, pp. 157–184.

[64] **Brezis H.**
Periodic Solutions of Nonlinear Vibrations Strings and Duality Principles
Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 1983 V. 8, № 3, pp. 409–426.

[65] **Duffing G.**
Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz und Ihre Technische Bedeutung.
Vieweg, Braunschweig, 1918.

[66] *Higher Transcendental Functions. Volume 3.*
Edited by H. Bateman, A. Erdelyi. MC Graw-Hill Book Company, New York, 1955.
{ Русский перевод:
Бейтман Г., Эрдейи А.
Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье).
Москва: Наука, 1967.}

[67] **Aubry S.**
A Unified Approach to the Interpretation of Displasive and Order–Disorder Systems II.
J. Chem. Phys. 1976. V. 64, pp. 3392–3402.

[68] **Багров В.Г., Вшивцев А.С., Кетов С.В.**
Дополнительные Главы Математической Физики (Калибровочные

Поля),
Томск, Изд–во Томского университета, 1990.

[69] **Курдгелаидзе Д.Ф.**
Теория Нелинейного Поля $(\Box - \lambda\varphi^2)\varphi = 0$
ЖЭТФ. 1959. Т. 36, № 3, С. 842–849.

[70] **Nayfeh A.H.**
Pertubation Methods.
John Wiley & Sons, New York, 1973
{ Русский перевод:
Найфе А.
Методы Возмущений.
Москва: Мир, 1976.}

[71] **Hearn A.C.**
REDUCE. *User's Manual. Version 3.6.*
RAND Publication CP78, 1995.

[72] **Еднерал В.Ф., Крюков А.Р., Родионов А.Я.**
Язык Аналитических Вычислений **REDUCE,**
Москва: Издательство МГУ, 1989.

[73] **Климов Д.М., Руденко В.М.**
Методы Компьютерной Алгебры в Задачах Механики.
Москва: "Наука", 1989.

[74] **Rayna G.**
REDUCE. *Software for Algebraic Computation.*
New York: Springer, 1989.

[75] **Davenport J., Siret Y., Tournier E.**
Calcul Formel, Systemes et Algorithmes de Manipulations Algebriques.
Masson, Paris, New York, 1987.
{ Русский перевод:
Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.
Компьютерная Алгебра.
Москва: Мир, 1991.}

[76] **Buchberger B.**
Theoretical Basis for the Reductionof Polynomials to Canonical Forms.
SIGSAM Bulletin. 1976. V. 39, pp. 19–29,
Buchberger B.
Some Proporties of Gröbner–Bases for Polynomial Ideals.
SIGSAM Bulletin. 1976. V. 40, pp. 19–24.

[77] **Khrustalev O.A., Vernov S.Yu.**
Quantization close to periodic classical solutions (ϕ^4 theory).
The Proceedings of the XI International Workshop on QFTHEP, (Sankt-Peterburg 1996), **Издат. Отдел УНЦ ДО МГУ, pp. 353–360, Москва, 1997.**

[78] **Вернов С.Ю., Хрусталёв О.А.**
Приближенные дважды периодические решения в (1+1)*–мерной теории* φ^4.
ТМФ, 1998, Т. 116, № 2, стр. 182–192.

[79] **Вернов С.Ю., Хрусталёв О.А.**
Построение асимптотических решений уравнения ϕ^4 *в форме стоячей волны*
Труды Второй Открытой Научной Конференции Молодых Учёных и Специалистов ОИЯИ, **Дубна, 1998, стр. 89–91.**

[80] **Khrustalev O.A., Vernov S.Yu.**
Construction of doubly periodic solutions via the Poincare–Lindstedt method in the case of massless φ^4 *theory.*
The Electronic Proceedings of the Fourth International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra (ACA'98), Prague, Czech Republic.

http://math.unm.edu/ACA/1998/sessions/dynamical/vernov

Принята для публикации в журнале **"Mathematics and Computers in Simulations".**

[81] **Khrustalev O.A., Vernov S.Yu.**
Construction of asymptotic periodic solutions for quasilinear wave equation in the case of massless φ^4 *theory.*

The Proceedings of the XII International Workshop on QFTHEP (Samara,1997), **Издат. Отдел УНЦ ДО МГУ, Москва, 1999, pp. 408–414.**

[82] **Khrustalev O.A., Vernov S.Yu.**
Approximate Standing Wave Solutions in Massless φ^4 Theory.
The Proceedings of the International Seminar "Quarks-98" (Suzdal, Russia, May 1998), **Издат. Отдел ИЯИ РАН, Москва, 1999, V. 2, pp. 158–168.**

[83] **Khrustalev O.A., Tchitchikina M.V., Vernov S.Yu.**
Quantization in terms of Bogolyubov Group Variables.
The Proceedings of the XXII Int. Workshop on the Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory. **Protvino: IHEP, 2000, pp. 260-271,** *http://dbserv.ihep.su/~pubs/tconf99/vern.htm*

[84] **Whittaker E.T., Watson G.N.**
A Course of Modern Analysis.
The University Press, Cambridge, 1927
{ Русский перевод: **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.**
Курс Современного Анализа.
Москва: Изд–во Физико–Математической Литературы, Т. 1, 1962, Т. 2 1963.}

[85] **Titchmarsh E.C.**
Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations.
The Clarendon Press, Oxford, 1958.

[86] **Ince E.L.**
Proc. Royal Soc., Edinburgh, 1940, V. 60, pp. 83–99.

[87] **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.**
Введение в Теорию Квантованных Полей.
Москва: "Наука", 1984.