

О ПРИНЦИПАХ ОПИСАНИЯ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Лукашенко А.Т.¹, Веселовский И.С.^{1,2}

¹Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ,
Москва

²Институт космических исследований РАН, Москва

ON THE PRINCIPLES OF 3D HIGHER ORDER MAGNETIC FIELD NULL POINTS DESCRIPTION

Lukashenko A.T.¹, Veselovsky I.S.^{1,2}

¹Skobeltsyn Research Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow, Russia

²Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In the processes on the Sun a topological structure of the magnetic field, for which null points are a part of, plays an important role. Finding those lines, where the magnetic field vector directs along the position vector or vanishes, can help to describe magnetic nulls. We call such lines reference rays. In the vicinity of the most typical (non-degenerate) 1st order null point there are six non-zero reference rays, composing three mutually perpendicular lines [1, 2]. In the vicinity of the most typical point of 2nd order – up to 14 reference rays, which are also non-zero and may have different mutual arrangement in the space. The presence of null lines (one possible in the case of 1st order and up to three in the 2nd) means degeneration. In these cases one needs to take into account along these lines higher order terms of the Taylor expansion. It is also possible purely geometric degeneration (the appearance of additional symmetries). The results may be useful not only for the null point description, but also in other applications relating to the analysis of expansion in spherical harmonics.

Введение

Нулевые точки магнитного поля (точки, в которых $\mathbf{B} = 0$) могут быть классифицированы, во-первых, по их порядку p , под которым мы подразумеваем порядок наименьшего ненулевого члена разложения компонент вектора поля в ряд Тейлора вблизи такой точки. Согласно определению [3], “скелет” нулевой точки – это совокупность линий поля, оканчивающихся в нуле. Он может включать как одномерные (т.н. γ -линии [4]), так и двумерные (т.н. Σ -поверхности [4]) многообразия. Можно говорить о различии типов точек одного порядка по совокупности этих многообразий, с учётом того, входят составляющие их линии в нулевую точку (γ_- , Σ_-) или выходят из неё (γ_+ , Σ_+). Существенно также отсутствие или наличие проходящих через нулевую точку нулевых (в порядке p) прямых, поскольку во втором случае нужно учитывать влияние нелинейности более высокого порядка. Следующее уточнение классификации может быть произведено по наличию тех или иных симметрий и по асимптотическому поведению линий поля вблизи линий и поверхностей “скелета”.

Поиску γ -линий и Σ -поверхностей помогает решение следующей задачи на собственные функции (СФ):

$$\mathbf{B} = \lambda R^{p-1} \mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, λ – собственные значения (СЗ). Далее мы будем называть лучи с началом в нулевой точке, на которых выполняются уравнение (1), реперами. У нулей чётного порядка СЗ λ на дополняющих друг друга до прямой лучах одинаковы, а у нечётного – отличаются знаком.

Нулевые точки потенциального поля

В потенциальном случае вектор магнитного поля представим как градиент потенциала $\mathbf{B} = \nabla U$, который должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (2)$$

Разложение потенциала в ряд Тейлора вблизи нулевой точки:

$$U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \bigg|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \dots, \quad (3)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. При этом в уравнении (1)

$$B_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1 \dots j_p} R_{j_1} \dots R_{j_p}, \quad (4)$$

где тензор постоянных коэффициентов

$$T_{ij_1 \dots j_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}} \quad (5)$$

полностью симметричен, а его свёртка по любым двум индексам равна нулю.

У невырожденной нулевой точки 1-го порядка имеется 6 ненулевых реперов, а “скелет” состоит из γ_+ -линий (2 репера) и перпендикулярной ей $\Sigma_{\pm}$ -поверхности (в состав которой входят 4 репера) [1, 2, 5]. В геометрически вырожденном (аксиальная симметрия) случае Σ -поверхность представляет собой континуум реперов. Вырождением с появлением нулевой, в 1-м порядке, прямой будет т.н. D -нуль. В общем случае поле на такой прямой не обращается в нуль тождественно, а имеет квадратичную составляющую, направленную к ней под произвольным углом. Следующими по вырожденности будут нули 2-го порядка общего вида.

Ранее нами было показано [5, 6], что за счёт выбора системы координат исследование нулевой точки 2-го порядка общего вида можно свести к рассмотрению нуля, заданного потенциалом

$$U = V_3^0 + K V_3^{1,2} + F V_3^{2,1} + G V_3^{2,2}, \quad (6)$$

где K, F, G – числовые коэффициенты,

$$\begin{aligned} V_3^0 &= \frac{1}{6} [2z^3 - 3z(x^2 + y^2)], \\ V_3^{1,2} &= xyz, \\ V_3^{2,1} &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (x^3 - 3xy^2), \quad V_3^{2,2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (3x^2y - y^3). \end{aligned} \quad (7)$$

Мы считаем, что система координат повернута так, что коэффициент при $V_3^{1,1} = z \frac{x^2 - y^2}{2}$ равен нулю.

Из условия $[\mathbf{B}, \mathbf{R}] = 0$ можно найти, что реперными, помимо оси z , являющейся таковой в силу выбора системы координат, будут прямые

$$\begin{cases} y = ux \\ z = vx, \end{cases} \quad (8)$$

где u – корни полиномиального уравнения 6-й степени

$$\begin{aligned} f(u) &= (2F^2 + KFG - K^2)u^6 + (KF^2 - 3KG^2 - 12FG + 2K^3)u^5 + \\ &+ (18G^2 - 12F^2 - 5KFG + K^2)u^4 + 2(20FG - KF^2 - KG^2 - 2K^3)u^3 + \\ &+ (18F^2 - 12G^2 - 5KFG + K^2)u^2 + (KG^2 - 3KF^2 - 12FG + 2K^3)u + \\ &+ 2G^2 + KFG - K^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$v = \frac{Fu(3 - u^2) + G(3u^2 - 1)}{\sqrt{2}K(1 - u^2)}. \quad (10)$$

(некоторые частные случаи требуют отдельного рассмотрения, на чём останавливаться не будем).

Решениями (8)–(10) могут быть до 6 прямых [2], что, в совокупности с полуосями оси z , даёт до 14 реперов. Численное решение уравнений показывает, что в типичном случае число реперов равно 14 или 10, и они ненулевые.

В случаях вырожденных нулевых точек 2-го порядка возможны также другие варианты. Так, у точек, заданных потенциалами $V_3^{2,j}$, $j = 1, 2$ имеется 8 реперов, причём два из них образуют нулевую прямую (ось z). Исключительными также являются случай базисной функции V_3^0 и отличающиеся от него лишь поворотом в пространстве и масштабным фактором $\sqrt{5}$ нулевые точки с наборами параметров $|K| = 2$, $|F| = |G| = 1$, $KFG > 0$, при которых все коэффициенты полинома (9) обращаются в нуль. В этих случаях имеется геометрическое вырождение, когда помимо двух изолированных реперов наличествует континуум реперов, образующих две конические поверхности. Во 2-м порядке могут возникать также две нулевых

прямых (например, при потенциале $U_I = V_3^0 + KV_3^{2,1}$, если $K > 1$) или, как максимум, три (например, при $V_3^{2,j}$, $j = 1, 2$).

Как показывает проведённое рассмотрение, описанные в [7] нулевые точки 2-го порядка, потенциал вблизи которых задаётся отдельными шаровыми функциями (перенормированными записями которых в декартовой системе координат являются функции (7)), представляют собой вырожденные, весьма специфические, по сравнению с нулями 2-го порядка общего вида, случаи.

Заключение

Изначально предполагалось, что ось z направлена вдоль репера [5, 6]. Такой выбор может быть осуществлён не единственным образом. Соответственно, разложение потенциала вблизи одной и той же нулевой точки может быть записано по-разному. Установление классов эквивалентности относительно поворотов в пространстве нуждается в дальнейших исследованиях.

Можно предполагать, что более глубокое изучение задачи (1) на собственные функции и собственные значения, может быть полезно не только при описании нулевых точек, но и в других приложениях, связанных с анализом разложений по сферическим гармоникам.

Литература

1. Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R. The structure of three-dimensional magnetic neutral points // *Phys. Plasmas*. V. 3. P. 759–770. 1996.
2. Dumin Yu.V., Somov B.V. What is generic structure of the 3D null-point magnetic reconnection? // arXiv:1407.6039v2 [physics.plasm-ph]. 2015.
3. Priest E.R., Bungey T.N., Titov V.S. The 3D topology and interaction of complex magnetic flux systems // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* V. 84. № 1. P. 127–163. doi: 10.1080/03091929708208976. 1997.
4. Cowley S.W.H. A qualitative study of the reconnection between the Earth's magnetic field and an interplanetary field of arbitrary orientation // *Radio Science*. V. 8. P. 903–913. 1973.
5. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. О геометрии потенциального магнитного поля в окрестностях нулевых точек 2-го и высших порядков // Тр. Всероссийской ежегодной конференции с международным участием «Солнечная и солнечно-земная физика–2014». С. 263–266. 2014.
6. Лукашенко А.Т., Веселовский И.С. Общие принципы описания нулевых точек потенциального магнитного поля 2-го и высших порядков в пространстве // *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 55. № 8. С. 1–7. 2015. (В печати.)
7. Жугжда Ю.Д. Нейтральные (нулевые) точки магнитных полей // *Геомагнетизм и аэронавигация*. Т. 6. С. 506–511. 1966.