МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Гордиенко Алексей Сергеевич

(Ко)модульные алгебры и их обобщения

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор М.В. Зайцев

Москва — 2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень её разработанности

Во многих областях математики и физики (см., например, [1, 9, 15, 69]) находят своё применение *алгебры*, то есть векторные пространства над некоторым полем F (например, F может быть полем $\mathbb{R}$ вещественных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел), в которых задана бинарная операция внутреннего умножения, линейная по каждому аргументу.

Часто алгебры, встречающиеся в приложениях, наделены некоторой дополнительной структурой или (обобщёнными) симметриями: действием (полу)группы эндоморфизмами и антиэндоморфизмами, (полу)групповой градуировкой или действием алгебры Ли дифференцированиями (см., например, [17, 68, 74, 83]). Для работы с такими дополнительными структурами оказывается полезным понятие модульной и комодульной алгебры над алгеброй Хопфа и даже более общее понятие алгебры с обобщённым H-действием. В частности, понятие (ко)модульной алгебры позволяет изучать различные виды дополнительных структур на алгебрах одновременно.

Кроме того, (ко)модульные алгебры естественным образом возникают в геометрии: если некоторая аффинная алгебраическая группа действует морфизмами на аффинном алгебраическом многообразии (например, рассматриваются симметрии некоторой поверхности, заданной алгебраическими уравнениями), то алгебра регулярных функций (множество функций, которые можно определить при помощи многочленов от координат точки, с операциями сложения, умножения между собой и на скаляры) будет модульной алгеброй над групповой алгеброй этой группы и над универсальной обёртывающей алгебры Ли этой группы и комодульной алгеброй над алгеброй регулярных функций на аффинной алгебраической группе [27].

Обратим внимание на то, что в классическом случае алгебры регулярных функций на многообразиях коммутативны, так как для умножения функций выполнен перестановочный закон. Однако в новом направлении, которое получило название некоммутативной геометрии, рассматриваются «некоммутативные пространства», т. е. такие пространства, алгебры регулярных функций которых некоммутативны. Поэтому изучение (ко)действий необязательно коммутативных алгебр Хопфа на необязательно коммутативных алгебрах можно интерпретировать как изучение квантовых симметрий некоммутативных пространств. Последние находят своё применение в теоретической физике (см., например, [49, 52]).

Одним из важнейших примеров комодульных алгебр являются алгебры, градуированные группами и полугруппами. В 2002–2008 гг. Ю. А. Бахтуриным, М. В. Зайцевым и С. К. Сегалом были классифицированы групповые градуировки на матричных алгебрах и градуированно простые алгебры, градуированные группами [4, 37]. В 2013 году вышла монография А. Эльдуке и М. В. Кочетова, подводящая итог исследованиям групповых градуировок на простых алгебрах Ли [54]. Многими авторами также исследовались кольца, градуированные полугруппами. В частности, Э. Йесперсом, А. В. Келаревым и М. Клэйзом [46, 76, 77] изучались градуированные полугруппами PI-кольца, а Ю. А. Бахтуриным, М. В. Зайцевым, Э. Йесперсом, П. Нистедтом, Й. Ойнертом и П. Уаутерсом [39, 89, 101] были получены результаты, касающиеся простых и градуированно простых колец и алгебр, градуированных полугруппами.

Как показано в §4.4 данной диссертации, при изучении градуированно простых ассоциативных колец или алгебр, градуированных полугруппами, достаточно ограничиться градуировками 0-простыми полугруппами, т.е. полугруппами с 0, не содержащими нетривиальных идеалов. Для конечных 0-простых полугрупп T справедлива структурная теорема Риса [11, теорема 3.5], которая утверждает, что полугруппа T изоморфна полугруппе Риса матричного типа над группой с нулём G^0 для некоторой максимальной подгруппы G полугруппы T. При этом двумя диаметрально противоположными важнейшими частными случаями оказываются случай, когда $T = G^0$, т.е. кольцо или алгебра градуированы конечной группой (этот случай как раз и был исследован Ю. А. Бахтуриным, М. В. Зайцевым и С. К. Сегалом в [4]), и случай, когда все максимальные подгруппы градуирующей полугруппы тривиальны. Второму случаю посвящены §4.4–4.7 настоящей диссертации.

Достаточные условия инвариантности радикала Джекобсона в ассоциативных H-модульных алгебрах были получены В. В. Линченко, С. Монтгомери и Л. Смоллом [80, 81, 82]. Проблема градуированности радикала Джекобсона в алгебрах, градуированных группами и полугруппами, изучалась, в частности, Дж. Бергманом, Э. Йесперсом, А. В. Келаревым, М. Коэн, С. Монтгомери, Я. Окнинским, Э. Пучиловским [44, 48, 73, 78] и другими авторами. Достаточные условия существования инвариантных разложений Веддербёрна — Мальцева и Леви в ассоциативных алгебрах и алгебрах Ли были получены Э. Тафтом [100]. Достаточные условия существования H-(ко)инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева для конечномерных ассоциативных H-(ко)модульных алгебр были получены А. В. Сидоровым [20] и Д. Штефаном и Ф. Ван Ойстайеном [98]. H-инвариантный аналог теоремы Веддербёрна — Артина был доказан Ф. Ван Ойстайеном и С. М. Скрябиным [96, 97]. В случае, когда некоторая алгебра A является H-комодульной для некоторой бесконечномерной алгебры Хопфа, на алгебре A действует алгебра H^*, двойственная к коалгебре H, однако это действие не является действием алгебры Хопфа, поскольку на H^* не удаётся определить коумножение. В данной диссертации предлагается метод, позволяющий устранить это затруднение в случае конечномерных алгебр A.

Конечномерные ассоциативные $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры, где $H_{m^2}(\zeta)$ — алгебра Тафта, которые не содержат ненулевых нильпотентных элементов были классифицированы С. Монтгомери и Х.-Ю. Шнайдером в теореме 2.5 из работы [87]. Точные модульные категории над категорией $\mathrm{Rep}(H_{m^2}(\zeta))$ рассматривались в теореме 4.10 из работы П. И. Этингофа и В. В. Острика [55], а $H_{m^2}(\zeta)$-действия на алгебрах путей колчанов исследовались Р. Кинзером и Ч. Уолтон в [79]. Действия точечных алгебр Хопфа на матричных алгебрах также изучались Ю. А. Бахтуриным и С. Монтгомери в [36].

Одной из важных сторон исследования алгебраических систем является изучение тех тождеств, которые выполняются в этих алгебраических системах. «Хотя тождества представляют собой простейшие замкнутые высказывания логического языка, язык тождеств все же достаточно богатый, чтобы на нём можно было выражать многие тонкие свойства систем и их классов.» (А.И. Мальцев [13, с. 337]) При исследовании тождеств в алгебрах естественным образом возникают их числовые характеристики. Одними из важнейших числовых характеристик являются коразмерности. Коразмерности оказываются полезным инструментом при решении различных задач, например, при доказательстве наличия или отсутствия нетривиальных тождеств [92, 93]. Кроме того, коразмерности естественным образом возникают при вычислении базиса тождеств в алгебре над полем характеристики 0. Коразмерности служат своеобразной оценкой количества тождеств, которым удовлетворяет конкретная алгебра. Существует также интерпретация коразмерностей, напрямую не связанная с полиномиальными тождествами: n-я коразмерность — это размерность пространства n-линейных функций на алгебре, представимых в виде (вообще говоря, некоммутативного или даже неассоциативного) многочлена от своих аргументов.

Асимптотическое поведение коразмерностей вызывает дополнительный интерес в связи с тем, что это поведение тесно связано со структурой изучаемой алгебры [64, 66], на чём мы подробно остановимся в главах 7–8.

В 1984 году А. Регев показал [94], что коразмерности $c_n(M_k(F))$ полиномиальных тождеств алгебры $M_k(F)$ всех матриц $k \times k$ над произвольным полем F характеристики 0 имеют следующую асимптотику (здесь и далее $f \sim g$, если $\lim \frac{f}{g} = 1$):

$$c_n(M_k(F)) \sim \alpha_k n^{-\frac{k^2-1}{2}} k^{2n} \text{ при } n \to \infty,$$

где $\alpha_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(k^2-1)/2} \cdot 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (k-1)! \cdot k^{(k^2+4)/2}$, $k \in \mathbb{N}$ фиксировано.

Основываясь на этом результате, Ш. Амицур выдвинул следующую гипотезу:

Гипотеза (Ш. Амицур [66, гипотеза 6.1.3]). *Пусть A — ассоциативная PI-алгебра над полем характеристики* 0, *а $c_n(A)$ — последовательность коразмерностей ее полиномиальных тождеств. Тогда существует PI-экспонента* $\mathrm{PIexp}(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$.

Гипотеза Ш. Амицура была доказана М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [64] в 1999 году для всех ассоциативных алгебр. Наверное, самым замечательным в этом результате оказалось то, что в случае, когда алгебра A конечномерна, а основное поле алгебраически замкнуто, для PI-экспоненты была получена явная формула, в которой участвовал радикал Джекобсона $J(A)$ и простые компоненты разложения факторалгебры $A/J(A)$. Кроме того, в 2002 году М. В. Зайцев [10] доказал аналог гипотезы Амицура для коразмерностей полиномиальных тождеств конечномерных алгебр Ли. В случае алгебр Ли также была получена формула для PI-экспоненты, однако эта формула оказалась сложнее, чем в ассоциативном случае, и включала в себя аннуляторы неприводимых факторов присоединённого представления алгебры Ли. В 2011 году А. Джамбруно, М. В. Зайцев и И. П. Шестаков доказали аналог гипотезы Амицура для конечномерных йордановых и альтернативных алгебр [63]. В 2012 году А. Джамбруно и М. В. Зайцев доказали существование PI-экспоненты для любой конечномерной простой необязательно ассоциативной алгебры [67, теорема 3].

В общем же случае аналог гипотезы Амицура для произвольных неассоциативных и даже для бесконечномерных алгебр Ли может быть неверен. Во-первых, рост коразмерностей может оказаться сверхэкспоненциальным [6]. Во-вторых, экспонента этого роста может оказаться дробным числом [5, 61, 85]. В-третьих, в 2014 году М. В. Зайцев построил пример бесконечномерной неассоциативной алгебры A, для которой $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} = 1$, а $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} > 1$ [102]. Вопрос о том, существует ли такая алгебра Ли L, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(L)} \neq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(L)},$$

по-прежнему остаётся открытым.

В связи с результатами, перечисленными выше, представляет интерес дальнейшее изучение связи между строением алгебр и асимптотическим поведением их полиномиальных тождеств, особенно в случае алгебр, наделённых какой-то дополнительной структурой. При изучении алгебр с дополнительной структурой естественно ввести эту дополнительную структуру в сигнатуру полиномиальных тождеств и рассматривать градуированные, G-, дифференциальные и H-тождества [25, 33, 34]. Такой подход оказывается весьма плодотворным, например, при изучении градуированных алгебр: в 2012 году Э. Альхадефф и О. Давид [28], используя градуированные тождества, показали, что для всякой алгебры A над алгебраически замкнутым полем, градуированной конечной группой, при условии, что градуировка минимальна и регулярна, порядок градуирующей группы является фиксированным числом и совпадает с экспонентой роста обычных тождеств алгебры A. Кроме того, в §7.7 и §8.10 данной диссертации формулируются критерии градуированной, G- и H-простоты ассоциативных алгебр и алгебр Ли в терминах соответствующих коразмерностей.

Для того, чтобы одновременно изучать разные типы дополнительных структур на алгебрах, оказывается удобным рассматривать так называемые обобщённые H-действия, определение которых даётся в главе 5. Скорее всего, первым, кто начал рассматривать такие действия и соответствующие полиномиальные H-тождества, был Аллан Берел [43, замечание после теоремы 15] в 1996 году. Обобщённые H-действия особенно полезны тем, что к ним сводятся многие структуры, которые, вообще говоря, не являются модульными структурами над алгебрами Хопфа, например, действия групп не только автоморфизмами, но и антиавтоморфизмами, градуировки бесконечными (полу)группами на конечномерных алгебрах, градуированные действия групп, суперинволюции и псевдоинволюции (см. главу 5).

Обозначим через $\left(c_n^H(A)\right)_{n=1}^{\infty}$ последовательность коразмерностей полиномиальных H-тождеств в алгебре A с обобщённым H-действием. Следующий вопрос возникает естественным образом:

Вопрос. При каких условиях на H-действие справедлив аналог гипотезы Амицура, т.е. существует предел
$$\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$
который является целым числом? Какие условия необходимо для этого наложить на структуру алгебры A ?

Здесь нужно отметить, что при такой постановке вопроса сам аналог гипотезы Амицура становится инструментом исследования и понимания дополнительных структур на алгебрах.

Ответу на вопрос, поставленный выше, посвящены главы 6–9 диссертации, причём в указанных главах интенсивно применяется структурная теория, развитая в главах 2–5.

Как показано в примере 6.7, в случае, когда обе алгебры A и H бесконечномерны, сами коразмерности $c_n^H(A)$ могут оказаться бесконечными. Поэтому при изучении H-коразмерностей имеет смысл ограничиться случаем, когда одна из двух алгебр A и H конечномерна.

Аналог гипотезы Амицура для $*$-коразмерностей конечномерных ассоциативных алгебр с инволюцией был доказан в 1999 году М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [65]. На случай бесконечномерных PI-алгебр с инволюцией данный результат был обобщён А. Джамбруно, С. Полсино Милисом и А. Валенти в 2017 году [62].

Аналог гипотезы Амицура для $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных коразмерностей конечномерных ассоциативных супералгебр был доказан в 2003 году Ф. Бенанти, А. Джамбруно и М. Пипитоне [42]. В случае ассоциативных алгебр, градуированных произвольной конечной группой, аналог гипотезы Амицура для градуированных полиномиальных тождеств был доказан в 2010–2011 гг. Э. Альхадеффом, А. Джамбруно и Д. Ла Маттиной [29, 30, 59]. Отсюда сразу же получалась справедливость и аналога гипотезы Амицура для полиномиальных G-тождеств в случая действия конечной абелевой группы G автоморфизмами. Доказательство оценки снизу было основано на классификации конечномерных градуированно простых алгебр. Здесь нужно отметить, что в [120] (см. также [47]) было показано, что не всякая градуировка даже на матричной алгебре эквивалентна градуировке конечной группой.

Также М. В. Зайцевым и Д. Реповшем было доказано существование градуированной PI-экспоненты в конечномерных градуированно простых алгебрах, градуированных коммутативными полугруппами [95, теорема 2]. Полиномиальная оценка сверху для кодлин полиномиальных H-тождеств ассоциативных PI-алгебр с обобщённым действием конечномерной ассоциативной алгебры H с единицей была получена А. Берелом [43].

Наконец, в последнее время получили популярность исследования асимптотического поведения коразмерностей соответствующих типов тождеств в конечномерных ассоциативных алгебрах с супер- и псевдоинволюциями [53, 57, 58, 71, 72]. Как было впервые отмечено Р. Б. дос Сантосом [53], всякая алгебра с суперинволюцией является алгеброй с обобщённым H-действием. В теореме 5.10 ниже будет показано, что к обобщённым H-действиям сводятся не только супер- и псевдоинволюции, но и для любые действия на алгебре, согласованные с некоторой градуировкой, имеющей конечный носитель.

Для полиномиальных H-тождеств H-модульных ассоциативных алгебр аналог гипотезы Амицура может быть сформулирован в следующей форме, которая принадлежит Ю. А. Бахтурину:

Гипотеза. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра, где H — алгебра Хопфа на полем характеристики* 0. *Тогда существует предел* $\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$, *который является целым числом.*

В главе 7 гипотеза Амицура — Бахтурина доказывается для конечномерных ассоциативных H-модульных алгебр A, где H — произвольная алгебра Хопфа, в случае, когда радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем. Кроме того, гипотеза Амицура — Бахтурина доказывается для конечномерных ассоциативных H-модульных алгебр в случае, когда алгебра Хопфа H либо полупроста и конечномерна, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами. Класс $\mathcal{C}$ таких алгебр Хопфа достаточно широк. С одной стороны, он включает алгебры Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, также как алгебры Хопфа $H(C, n, c, c^*, a, b)$ (см. [51, определение 5.6.15]), которые были использованы для опровержения гипотезы Капланского о конечном числе попарно неизоморфных алгебр Хопфа заданной размерности [32, 40, 41]. С другой стороны, класс $\mathcal{C}$ содержит и неточечные алгебры Хопфа, например, две алгебры Хопфа размерности 16 (см. [45, теорема 5.1]).

Отметим также, что Я. Карасик, используя результаты автора диссертации, доказал в 2015 году гипотезу Амицура — Бахтурина для необязательно конечномерных ассоциативных H-модульных PI-алгебр в случае, когда H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа [75].

Цели и задачи диссертации

Главными целями диссертации являются:

1. получение достаточных условий, при которых в H-комодульной ассоциативной алгебре радикал Джекобсона является H-коинвариантным идеалом;

2. получение достаточных условий, при которых в H-(ко)модульной алгебре Ли нильпотентный и разрешимый радикалы являются H-(ко)инвариантными идеалами;

3. получение достаточных условий для существования H-(ко)инвариантного разложения Леви в H-(ко)модульных алгебрах Ли;

4. классификация конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли, простых по отношению к действию алгебр Тафта;

5. классификация конечномерные ассоциативные градуированно простые алгебры, градуированные конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами;

6. выявление классов дополнительных структур на ассоциативных алгебрах и алгебрах Ли, для которых справедливы аналоги гипотезы Амицура и, в частности, классы алгебр Хопфа H и классы H-модульных ассоциативных алгебр, для которых справедлива гипотеза Амицура — Бахтурина.

7. построение примеров ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, в которых экспонента роста коразмерностей соответствующих тождеств является нецелым числом;

8. доказательство существования градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H-действием.

Объект и предмет исследования

Диссертация посвящена изучению (ко)модульных алгебр над биалгебрами и алгебрами Хопфа и их обобщений, в частности, градуированных алгебр, алгебр с действием некоторой группы автоморфизмами и антиавтоморфизмами, алгебр с действием некоторой алгебры Ли дифференцированиями и алгебр с обобщённым H-действием, а также изучению асимптотического поведения соответствующих полиномиальных тождеств.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. получены достаточные условия H-коинвариантности радикала Джекобсона в H-комодульных ассоциативных алгебрах;

2. получены достаточные условия H-(ко)инвариантности радикалов в H-(ко)модульных алгебрах Ли;

3. доказан H-(ко)инвариантный аналог теоремы Леви;

4. классифицированы конечномерные ассоциативные алгебры и алгебры Ли, простые по отношению к действию алгебр Тафта;

5. классифицированы конечномерные ассоциативные градуированно простые алгебры, градуированные конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами;

6. доказаны аналоги гипотезы Амицура для важных классов дополнительных структур на конечномерных алгебрах;

7. построена серия конечномерных градуированно простых ассоциативных алгебр, градуированных лентами правых нулей, с дробной градуированной PI-экспонентой (полученные примеры являются первыми примерами ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, в которых экспонента роста коразмерностей соответствующих тождеств является нецелым числом);

8. доказано существование градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H-действием.

В частности, для ассоциативных H-модульных алгебр в случае, когда алгебра Хопфа H либо полупроста и конечномерна, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами, и в случае, когда H — произвольная алгебра Хопфа, а радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем, доказана гипотеза Амицура — Бахтурина.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в работе, расширяют знания о структуре (ко)модульных алгебр и их обобщений и асимптотическом поведении числовых характеристик соответствующих тождеств.

Автором диссертации разработаны новые методы, заключающиеся, в частности, в применении обобщённых H-действий в исследовании конечномерных градуированных и комодульных алгебр, а также в применении теоремы плотности при построении кососимметрических H-многочленов, не являющихся полиномиальными H-тождествами. Преимуществом последнего метода является отсутствие необходимости классификации соответствующих H-простых алгебр. Кроме того, автором было доказано существование для конечномерных ассоциативных алгебр с обобщённым H-действием слабого аналога разложения Веддербёрна — Мальцева, которое позволяет изучать асимптотическое поведение коразмерностей H-тождеств даже в случае, когда радикал Джекобсона такой алгебры не является H-инвариантным идеалом.

Впервые были построены примеры конечномерных ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, в которых экспонента роста коразмерностей соответствующих тождеств является нецелым числом.

Результаты диссертации могут найти применение в теории колец, теории полиномиальных тождеств, а также оказаться полезными при работе с алгебрами, наделёнными дополнительной структурой, которые возникают в геометрии, анализе, теоретической и математической физике.

Результаты диссертации могут быть использованы для чтения спецкурсов по теории колец, теории алгебр Хопфа, теории полиномиальных тождеств и теории представлений.

Методы исследования

В работе используются как традиционные методы теории ассоциативных алгебр, теории алгебр Ли, теории алгебр Хопфа, теории полугрупп и теории представлений, в частности, методы, разработанные А. Джамбруно, М. В. Зайцевым и Ю. П. Размысловым, так и новые методы, разработанные автором диссертации, в частности, применение обобщённых H-действий в исследовании конечномерных градуированных и комодульных алгебр, а также применение теоремы плотности при построении кососимметрических H-многочленов, не являющихся полиномиальными H-тождествами. Кроме того, автором было доказано существование для конечномерных ассоциативных алгебр с обобщённым H-действием слабого аналога разложения Веддербёрна — Мальцева, которое позволяет изучать асимптотическое поведение коразмерностей H-тождеств даже в случае, когда радикал Джекобсона такой алгебры не является H-инвариантным идеалом.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1. достаточные условия H-коинвариантности радикала Джекобсона в H-комодульных ассоциативных алгебрах;
2. достаточные условия H-(ко)инвариантности радикалов в H-(ко)модульных алгебрах Ли;
3. H-(ко)инвариантный аналог теоремы Леви;
4. классификация конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли, простых по отношению к действию алгебр Тафта;
5. классификация конечномерных ассоциативных градуированно простых алгебр, градуированных конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами;
6. справедливость аналогов гипотезы Амицура для важных классов дополнительных структур на конечномерных алгебрах;
7. построение серии конечномерных градуированно простых ассоциативных алгебр, градуированных лентами правых нулей, с дробной градуированной PI-экспонентой;
8. существование градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H-действием.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы при помощи строгих математических доказательств и докладывались на следующих конференциях и семинарах:

I. Международные конференции:

1. International Workshop “Polynomial Identities in Algebras. II”, Memorial University of Newfoundland, St. John’s, NL, Canada, September 2–6, 2011;
2. International Workshop “Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras. III”, Memorial University of Newfoundland, Bonne Bay Marine Station, Norris Point, NL, Canada, August 12–18, 2012;
3. International Conference “Classical Aspects of Ring Theory and Module Theory”, Stefan Banach centre, Będlewo, Poland, July 14–20, 2013;
4. Международная конференция по алгебре и математической логике “Мальцевские чтения-2013”, Новосибирск, 12–15 ноября 2013 года;
5. Международная конференция по алгебре и математической логике “Мальцевские чтения-2014”, Новосибирск, 10–13 ноября 2014 года;
6. International conference “New trends in Hopf algebras and tensor categories”, Royal Flemish Academy of Belgium for Science and the Arts, Brussels, Belgium, June 2–5, 2015;
7. International conference “Groups and Rings. Theory and Applications” (GriTA2015), Sofia, Bulgaria, July 15–22, 2015;
8. International conference “Brauer groups, Hopf algebras and monoidal categories” in honour of Professor Stefaan Caenepeel on the occasion of his 60th birthday, University of Turin, Italy, May 24–27, 2016;
9. International Conference “Groups and Rings – Theory and Applications” (GRiTA 2016), Sofia, Bulgaria, July 11–15, 2016;
10. International Workshop “Hopf Algebras, Algebraic Groups and Related Structures” (HAAG 2016), Memorial University of Newfoundland, St. John’s, NL, Canada, June 13–17, 2016;
11. International Workshop “Combinatorics of group actions and its applications” (CGAA 2017), Memorial University of Newfoundland, St. John’s, NL, Canada, August 28 – September 1, 2017;
12. Международная конференция, посвящённая 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, Москва, 28–31 мая 2019 года.

II. Семинары:

1. научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (неоднократно);
2. семинар “Избранные вопросы алгебры” кафедры высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (многократно);
3. семинар по алгебре Оттавского университета (Оттава, Канада);
4. семинар по алгебре университета Memorial University of Newfoundland (Сент-Джонс, Канада, многократно);
5. семинар по алгебре университета Vrije Universiteit Brussel (Брюссель, Бельгия, многократно);
6. семинар по алгебре Антверпенского университета (Антверпен, Бельгия);
7. семинар по алгебре Палермского университета (Палермо, Италия);
8. семинар по алгебре Хайфского университета (Хайфа, Израиль);
9. семинар по алгебре Израильского технологического института “Технион” (Хайфа, Израиль).

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, девяти глав и заключения. Библиография содержит 123 наименования. Текст диссертации изложен на 301 странице.

Содержание работы

Данную работу, если не учитывать вспомогательные разделы, можно условно разделить на две части, тесно связанные между собой. В первой части, состоящей из глав 2–5, рассматриваются структурные вопросы теории (ко)модульных алгебр, а также понятие эквивалентности (ко)модульных структур. Во второй части, состоящей из глав 6–9, исследуется рост коразмерностей полиномиальных тождеств в алгебрах с дополнительной структурой. Кроме того, во **вводной главе 1** приводится список обозначений и перечисляются основные используемые понятия и факты.

Главы 2 и 3 посвящены структурным вопросам теории (ко)модульных ассоциативных алгебр и алгебр Ли над алгебрами Хопфа. Центральную роль здесь играет вопрос о (ко)инвариантности радикалов и существовании (ко)инвариантных разложений Веддербёрна — Артина, Веддербёрна — Мальцева, Леви и разложения полупростой H-(ко)модульной алгебры Ли в прямую сумму (ко)инвариантных идеалов, являющихся H-простыми алгебрами.

В случае, когда некоторая алгебра A является H-комодульной для некоторой бесконечномерной алгебры Хопфа, на алгебре A действует алгебра H^*, двойственная к коалгебре H, однако это действие не является действием алгебры Хопфа, поскольку на H^* не удаётся определить коумножение. В данной диссертации предлагается метод, позволяющий устранить это затруднение в случае конечномерных алгебр A. При помощи этого метода, в частности, доказываются достаточные условия H-коинвариантности радикалов в H-комодульных ассоциативных алгебрах и алгебрах Ли. Кроме того, в главе 3 доказываются достаточные условия H-инвариантности радикалов в H-модульных алгебрах Ли, существование H-(ко)инвариантного разложения Леви и (ко)инвариантные аналоги теоремы Вейля. Наконец, в главах 2 и 3 классифицируются конечномерные ассоциативные алгебры и алгебры Ли, простые по отношению к действию алгебр Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, что является частью более обширного исследования алгебр с действием расширений Оре.

Оказывается, что если ослабить требования к (ко)действующей алгебре и разрешить ей быть просто биалгеброй, а не алгеброй Хопфа, то многие структурные результаты оказываются неверны. Так, например, в **главе 4** рассматриваются ассоциативные алгебры, градуированные полугруппами из двух элементов (что эквивалентно кодействию соответствующей полугрупповой биалгебры), радикал Джекобсона которых не является градуированным идеалом, и алгебры, для которых не существует градуированных разложений Веддербёрна — Артина и Веддербёрна — Мальцева. Кроме того, получаются некоторые достаточные условия существования таких градуированных разложений. В §4.4–4.7 классифицируются все конечномерные градуированно простые ассоциативные алгебры, градуированные конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами.

В **главе 5** вводится понятие обобщённого H-действия, обобщённого H-действия, согласованного с некоторой градуировкой, и действия группы, согласованного с градуировкой, а также приводятся примеры таких действий. Кроме того, доказывается существование для конечномерных ассоциативных алгебр с обобщённым H-действием слабого аналога разложения Веддербёрна — Мальцева, которое будет затем использовано в главе 7 для изучения асимптотического поведения коразмерностей H-тождеств в алгебрах с необязательно H-инвариантным радикалом Джекобсона.

В **главе 6** вводится понятие полиномиального H-тождества для алгебры с обобщённым H-действием, определяются коразмерности таких тождеств, устанавливается связь между коразмерностями градуированных тождеств и коразмерностями полиномиальных H-тождеств, формулируются аналоги гипотезы Амицура, доказывается оценка сверху на H-кодлины, существование градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H-действием.

В **главах 7 и 8** доказывается аналог гипотезы Амицура для градуированных полиномиальных тождеств для всех конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли, градуированных произвольными группами. Для доказательства аналога гипотезы Амицура в случае ассоциативных алгебр автором диссертации был разработан метод, который заключается в замене градуировки на обобщённое H-действие для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей. Этот метод, в частности, позволяет отказаться от использования классификации градуированно простых алгебр и доказывать оценку снизу для коразмерностей с использованием теоремы плотности и центральных многочленов. Случай конечномерных алгебр Ли, градуированных произвольной группой, сводится к случаю алгебр Ли, градуированных конечнопорождённой абелевой группой. Градуировка конечнопорождённой абелевой группой G затем заменяется на действие алгебры Хопфа $F\hat{G}$, где F — основное поле, а $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, F^{\times})$.

Также в главе 7 аналог гипотезы Амицура доказывается для коразмерностей полиномиальных G-тождеств конечномерных ассоциативных алгебр с действием произвольной группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами, а в главе 8 аналогичный результат доказывается для алгебр Ли при условии, что либо группа G является редуктивной аффинной алгебраической группой, действующей рационально, либо разрешимый радикал алгебры Ли является нильпотентным идеалом. Кроме того, в главе 7 аналог гипотезы Амицура доказывается для коразмерностей дифференциальных полиномиальных тождеств конечномерных ассоциативных алгебр с действием произвольной алгебры Ли дифференцированиями, а в главе 8 аналогичный результат доказывается для алгебр Ли при условии, что либо алгебра Ли, действующая дифференцированиями, конечномерная полупростая, либо разрешимый радикал алгебры Ли, на которой действуют дифференцированиями, является нильпотентным идеалом. Наконец, в главе 7 аналог гипотезы Амицура доказывается для ассоциативных алгебр с градуированным действием произвольной группы (см. определение 5.11).

В главе 7 также доказывается гипотеза Амицура — Бахтурина для конечномерных ассоциативных H-модульных алгебр A, где H — произвольная алгебра Хопфа, в случае, когда радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем. Кроме того, гипотеза Амицура — Бахтурина доказывается для конечномерных ассоциативных H-модульных алгебр в случае, когда алгебра Хопфа H либо полупроста и конечномерна, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами.

В главе 8 аналог гипотезы Амицура доказывается для конечномерных H-модульных алгебр Ли L в следующих трёх случаях:

1. когда H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа;
2. когда H — произвольная алгебра Хопфа, но разрешимый радикал алгебры Ли L является нильпотентным H-инвариантным идеалом;
3. когда H является алгеброй Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, а L — $H_{m^2}(\zeta)$-простая алгебра Ли. (Это единственный известный случай справедливости аналога гипотезы Амицура в H-модульной алгебре Ли с не H-инвариантным разрешимым радикалом.)

В целом схема доказательства аналогов гипотезы Амицура следует плану, разработанному А. Джамбруно и М. В. Зайцевым для обычных тождеств, однако для того, чтобы учесть дополнительную структуру на алгебрах, требуются новые методы, которые и разрабатываются в диссертации.

Все аналоги гипотезы Амицура для ассоциативных алгебр с различной дополнительной структурой получаются в данной диссертации как следствия единственного утверждения (теоремы 7.10), которое выводит требуемое асимптотическое поведение коразмерностей из существования для простых алгебр соответствующей сигнатуры полилинейного многочлена, кососимметричного по достаточному числу наборов переменных, а также существования инвариантного аналога разложения Веддербёрна — Артина. Выполнение данных условий напрямую зависит от того, насколько хорошей является дополнительная структура на алгебре.

В **главе 9** изучается рост коразмерностей в конечномерных ассоциативных алгебрах, градуированных полугруппами, и строится семейство таких алгебр, имеющих дробную градуированную PI-экспоненту. Эти примеры оказались первыми примерами ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, имеющих дробную экспоненту роста коразмерностей соответствующих тождеств. Здесь также существенно используется метод замены градуировки на обобщённое H-действие для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей.

Благодарности

Автор благодарит своего научного консультанта, доктора физико-математических наук, профессора Михаила Владимировича Зайцева за поддержку и внимание к результатам.

Автор выражает признательность Ю. А. Бахтурину, Эрику Йесперсу, А. А. Клячко, М. В. Кочетову и В. К. Харченко за плодотворное обсуждение результатов данной работы и конструктивные замечания. Автор благодарен участникам семинара «Избранные вопросы алгебры» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ за обсуждение результатов диссертации. Автор признателен сотрудникам математических кафедр университетов Memorial University of Newfoundland (Сент-Джонс, Канада) и Vrije Universiteit Brussel (Брюссель, Бельгия), на которых автору посчастливилось заниматься исследованиями в 2010–2018 годах в рамках грантов AARMS и Fonds Wetenschappelijk Onderzoek — Vlaanderen, за обсуждение результатов диссертации и творческую атмосферу, которая способствовала научной работе. Наконец, автор выражает благодарность коллективу кафедры высшей математики МГТУ ГА, на которой он работает с февраля 2019 года, за дружескую атмосферу и возможность завершить работу над диссертацией.

Автор признателен своей семье за помощь и поддержку при написании диссертации.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Список обозначений

В диссертации используются следующие обозначения:

1_M	единица моноида (группы, алгебры, ...) M
δ^i_j, δ_{ij}	символы Кронекера, $\delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$
$\lvert M\rvert$	число элементов во множестве M
A^2	по определению, $A^2 = \langle ab \mid a, b \in A\rangle_F$
$A \hookrightarrow B$	вложение (инъективное отображение) множества A во множество B
$A \xrightarrow{\sim} B$	изоморфизм алгебраических структур A и B
$A \times B$	произведение объектов A и B некоторой категории; например, прямое произведение алгебраических структур A и B или декартово произведение множеств A и B
$A \sqcup B$	копроизведение объектов A и B некоторой категории; например, объединение непересекающихся множеств A и B
$f \sim g$	запись означает, что $\lim \frac{f}{g} = 1$
$V \otimes W$	тензорное произведение векторных пространств V и W над основным полем F

$\lambda \vdash n$	разбиение числа n, с. 39
$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_N}$	полиномиальный коэффициент, равный $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_N!}$
$\binom{n}{k}_\zeta$	квантовый биномиальный коэффициент, с. 63
V^*	векторное пространство, двойственное к векторному пространству V, т.е. пространство линейных функций на V со значениями в основном поле F
A^{op}	алгебра A, в которой в умножении меняются местами аргументы: $\mu^{\mathrm{op}}(a \otimes b) := \mu(b \otimes a)$
A°	коалгебра, конечная двойственная к алгебре A, с. 28
H°	алгебра Хопфа, конечная двойственная к алгебре Хопфа H, с. 30
$\langle Q \rangle_F$	F-линейная оболочка подмножества Q некоторого векторного пространства над полем F
$\tilde\varphi$	изоморфизм $\tilde\varphi \colon \mathrm{End}_F(A_1) \mathrel{\widetilde{\rightarrow}} \mathrm{End}_F(A_2)$, индуцированный изоморфизмом $\varphi \colon A_1 \mathrel{\widetilde{\rightarrow}} A_2$, задаётся при помощи равенства $\tilde\varphi(\psi)(a) = \varphi\Big(\psi\big(\varphi^{-1}(a)\big)\Big)$ для $\psi \in \mathrm{End}_F(A_1)$ и $a \in A_2$
$\hat G$	если G — группа, то $\hat G := \mathrm{Hom}(G, F^\times)$ — группа гомоморфизмов из G в мультипликативную группу $F^\times$ поля F, т.е. группа всех линейных характеров группы G
$\Phi(x_1, \ldots, x_q)$	$\Phi(x_1, \ldots, x_q) := \frac{1}{x_1^{x_1} \ldots x_s^{x_q}}$ для $x_1, \ldots, x_q \geqslant 0$, где $0^0 := 1$
$\chi_n^H(A)$	n-й кохарактер полиномиальных H-тождеств алгебры A, с. 154
$\chi_n^{T\text{-gr}}(A)$	n-й кохарактер T-градуированных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 163
$\chi(\lambda)$	характер неприводимого представления группы S_n, отвечающий разбиению $\lambda \vdash n$
$[x_1, \ldots, x_n]$	длинный коммутатор $[[\ldots[[x_1, x_2], x_3], \ldots], x_n]$
ad	присоединённое представление алгебры Ли: $(\mathrm{ad}\, a)b := [a, b]$

$\mathbf{Alg}_F$	категория ассоциативных алгебр с единицей над полем F
$\mathrm{Ann}_R(M)$	аннулятор модуля M над кольцом R
$\mathrm{Aut}(A)$	группа автоморфизмов алгебраической структуры A
$\mathrm{Aut}^*(A)$	группа автоморфизмов и антиавтоморфизмов алгебраической структуры A
$\mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(A)$	группа линейных биекций $A \xrightarrow{\sim} A$, сохраняющих умножение
$\mathrm{char}\, F$	характеристика поля F
C_n	циклическая группа порядка n в мультипликативной записи
$c_n(A)$	n-я коразмерность обычных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 155
$c_n^H(A)$	n-я коразмерность полиномиальных H-тождеств алгебры A с обобщённым H-действием, с. 154
$c_n^{T\text{-gr}}(A)$	n-я коразмерность T-градуированных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 163
C_{T_λ}	подгруппа симметрической группы, переводящая в себя множество чисел каждого столбца таблицы Юнга T_λ
D_λ	диаграмма Юнга, отвечающая разбиению λ, с. 39
$\deg P$	степень многочлена P
$\mathrm{Der}(A)$	алгебра Ли дифференцирований алгебры A
e_{ij}	матричная единица, т.е. матрица $n \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные клетки заполнены нулями
$\mathrm{End}_F(V)$	алгебра F-линейных операторов из векторного пространства V над полем F в себя

e_{T_λ}	симметризатор, построенный по таблице Юнга T_λ, с. 40
FG	групповая алгебра группы G над полем F, с. 29
FT	полугрупповая алгебра полугруппы T над полем F, с. 29
F^T	алгебра функций из множества T в поле F с поточечными операциями
$F\langle X\rangle$	свободная ассоциативная алгебра без единицы на множестве X над полем F
$F\{X\}$	(абсолютно) свободная неассоциативная алгебра на множестве X над полем F, с. 152
$F\langle X\vert H\rangle$	свободная ассоциативная алгебра без единицы на множестве X с символами операторов из алгебры H над полем F, с. 158
$F\{X\vert H\}$	свободная неассоциативная алгебра на множестве X с символами операторов из алгебры H над полем F, с. 153
$\mathcal{F}(X)$	свободная группа со множеством X свободных порождающих
$G(H)$	группа группоподобных элементов алгебры Хопфа H, с. 30
$\mathrm{GL}_n(F)$	группа всех невырожденных квадратных матриц $n\times n$ над полем F
$\mathfrak{gl}_n(F)$	алгебра Ли всех квадратных матриц размера $n\times n$
Grp	категория групп
H_4	алгебра Свидлера, с. 30
$H_{m^2}(\zeta)$	алгебра Тафта, с. 30
$\mathrm{Hom}(A,B)$	гомоморфизмы из алгебраической структуры A в алгебраическую структуру B

$\mathrm{Hom}_F(V,W)$	пространство F-линейных операторов (или, что то же, F-линейных отображений) из векторного пространства V в векторное пространство W над полем F
q_t	элемент алгебры F^T, заданный равенством $q_t(s) := \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ при } s=t, \\ 0 \text{ при } s\neq t, \end{smallmatrix}\right.$ с. 145
id_M	тождественный морфизм объекта M некоторой категории в себя; например, тождественное отображение множества M в себя
$\mathrm{Id}(A)$	идеал обычных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 155
$\mathrm{Id}^H(A)$	идеал полиномиальных H-тождеств алгебры A с обобщённым H-действием, с. 153
$\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$	T-градуированных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 163
$\mathrm{im}\,\varphi$	образ гомоморфизма или линейного отображения φ
$J(A)$	радикал Джекобсона ассоциативной алгебры A
$J^H(A)$	H-радикал конечномерной ассоциативной H-модульной алгебры A, с. 49
$\ker\varphi$	ядро гомоморфизма или линейного отображения φ
$\ell_n(A)$	n-я кодлина обычных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 155
$\ell_n^H(A)$	n-я кодлина полиномиальных H-тождеств алгебры A, с. 155
$\ell_n^{T\text{-gr}}(A)$	n-я кодлина T-градуированных полиномиальных тождеств алгебры A, с. 163
$L(X)$	свободная алгебра Ли на множестве X, с. 161
$L(X\|H)$	свободная H-модульная алгебра Ли на множестве X, с. 161
$m(A,\lambda)$	кратность неприводимого характера $\chi(\lambda)$ в разложении кохарактера $\chi_n(A)$

$m(A,H,\lambda)$	кратность неприводимого характера $\chi(\lambda)$ в разложении кохарактера $\chi^H_n(A)$
$m(A,T\text{-gr},\lambda)$	кратность неприводимого характера $\chi(\lambda)$ в разложении кохарактера $\chi^{T\text{-gr}}_n(A)$
$M_{k\times\ell}(F)$	пространство всех матриц размера $k\times\ell$ над полем F
$M_{s,\ell}(F)$	алгебра $M_{s+\ell}(F)$ с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой, заданной равенствами $M^{(0)}_{s,\ell}(F) := \left(\begin{smallmatrix} M_s(F) & 0 \\ 0 & M_\ell(F)\end{smallmatrix}\right)$ и $M^{(1)}_{s,\ell}(F) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & M_{s\times\ell}(F) \\ M_{\ell\times s}(F) & 0\end{smallmatrix}\right)$
$M_n(F)$	алгебра всех матриц размера $n\times n$ над полем F
$M(\lambda)$	FS_n-модуль, изоморфный минимальному левому идеалу $FS_n e_{T_\lambda}$
$\mathbb{N}$	множество $\{1,2,3,\ldots\}$ натуральных чисел
$\mathcal{O}(G)$	алгебра Хопфа регулярных функций на аффинной алгебраической группе G, с. 29
$\mathcal{O}(V)$	алгебра регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии V
$\mathrm{PGL}_n(F)$	проективная линейная группа, т.е. факторгруппа группы $\mathrm{GL}_n(F)$ по её центру
P_n	пространство полилинейных ассоциативных многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$
P^H_n	пространство полилинейных ассоциативных H-многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$, с. 158
$P^{T\text{-gr}}_n$	пространство полилинейных ассоциативных T-градуированных многочленов n-й степени
$\mathrm{PIexp}^H(A)$	H-PI-экспонента алгебры A, с. 154, $\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c^H_n(A)}$
$\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A)$	T-градуированная PI-экспонента алгебры A, с. 163, $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) := \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c^{T\text{-gr}}_n(A)}$

R_{T_λ}	подгруппа симметрической группы, переводящая в себя множество чисел каждой строки таблицы Юнга T_λ
S_n	группа подстановок (симметрическая группа) на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$
$\mathfrak{sl}_n(F)$	алгебра Ли всех квадратных матриц размера $n \times n$ с нулевым следом
$\operatorname{supp} \Gamma$	носитель градуировки Γ, с. 33
$\mathfrak{t}_n(F)$	алгебра Ли верхнетреугольных матриц размера $n \times n$
T_λ	таблица Юнга, отвечающая разбиению λ, с. 40
$\operatorname{tr} \mathcal{A}$	след линейного оператора $\mathcal{A}$
λ^T	разбиение, транспонированное по отношению к разбиению λ, с. 40
$U(L)$	универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли L
$\mathrm{UT}_n(F)$	алгебра всех верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ над полем F
$\mathbf{Vect}_F$	категория векторных пространств над полем F
V_n	пространство полилинейных лиевских многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$
V_n^H	пространство полилинейных лиевских H-многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, с. 162
$V_n^{T\text{-gr}}$	пространство полилинейных лиевских T-градуированных многочленов n-й степени
W_n	пространство полилинейных неассоциативных многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, с. 155
W_n^H	пространство полилинейных неассоциативных H-многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$, с. 154

$W_n^{T\text{-gr}}$ — пространство полилинейных неассоциативных T-градуированных многочленов n-й степени, с. 163

$X^{T\text{-gr}}$ — объединение $X^{T\text{-gr}} := \bigsqcup_{t\in T} X^{(t)}$ непересекающихся множеств $X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots\}$, с. 162

$\mathbb{Z}_+$ — множество $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ целых неотрицательных чисел

$Z(A)$ — *центр* алгебраической структуры A: если A — группа или ассоциативное кольцо, то

$$Z(A) := \{b \in A \mid ab = ba \text{ для всех } a \in A\};$$

если же A — алгебра Ли, то

$$Z(A) := \{b \in A \mid [a, b] = 0 \text{ для всех } a \in A\}$$

Алгебры, рассматриваемые в диссертации, необязательно ассоциативны и необязательно содержат единицу. Все коалгебры, которые рассматриваются в диссертации, коассоциативные с коединицей.

1.2 (Ко)алгебры, алгебры Ли, биалгебры и алгебры Хопфа

В данном параграфе мы напомним основные понятия, связанные с (ко)алгебрами, алгебрами Ли, биалгебрами и алгебрами Хопфа. Подробнее с этими понятиями можно познакомиться в монографиях [24, 51, 86, 99].

1.2.1 Алгебры и коалгебры

Прежде всего напомним понятие алгебры над полем в удобной для нас форме, а именно, на языке линейных отображений и коммутативных диаграмм.

Определение 1.1. *Алгеброй над полем* F называется пара (A, μ), состоящая из векторного пространства A над F и линейного отображения $\mu\colon A \otimes A \to A$.

При помощи отображения μ на векторном пространстве A задаётся операция внутреннего умножения, линейная по каждому аргументу: $ab := \mu(a \otimes b)$ для всех $a, b \in A$.

Алгебра (A, μ) называется *ассоциативной*, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu\otimes \mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd}$$

В случае алгебр Ли существует традиция обозначать операцию внутреннего умножения при помощи коммутатора:

Определение 1.2. *Алгеброй Ли над полем F* называется векторное пространство L над полем F с заданным на нём билинейным отображением $(a,b) \mapsto [a,b]$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. (антикоммутативность) $\quad [a,a] = 0$;
2. (тождество Якоби) $\quad [a,[b,c]] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$ для всех $a,b,c \in L$.

Замечание 1.3. В случае, когда $\operatorname{char} F \neq 2$, условие 1 эквивалентно условию $[a,b] = -[b,a]$ для всех $a,b \in L$.

Дадим теперь определение алгебры с единицей:

Определение 1.4. Набор (A,μ,u) называется *алгеброй с единицей над полем F*, если (A,μ) — алгебра над F, а $u\colon F \to A$ — линейное отображение и, кроме того, следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} A \otimes F \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \otimes u"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} F \otimes A \arrow[rr, "u \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

(Здесь мы использовали естественные отождествления $A \otimes F \cong F \otimes A \cong A$.)

Если ввести обозначение $1_A := u(1_F)$, то элемент $1_A \in A$ будет удовлетворять классическому определению единицы в алгебре.

Определение коассоциативной коалгебры с коединицей получается из определения ассоциативной алгебры с единицей формальным обращением стрелок:

Определение 1.5. Набор (C,Δ,ε) называется *коассоциативной коалгеброй с коединицей*, если C — векторное пространство на полем F, $\Delta\colon C \to C \otimes C$ и $\varepsilon\colon C \to F$ являются линейными отображениями и, кроме того, следующие диаграммы коммутативны:

1. (коассоциативность)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

2. (наличие коединицы)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon"] & & C \otimes F \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C"] & & F \otimes C \end{tikzcd}$$

(Здесь мы использовали естественные отождествления $C \otimes F \cong F \otimes C \cong C$.)

В диссертации под *коалгебрами* понимаются именно коассоциативные коалгебры с коединицей.

Отображение Δ называется *коумножением*, а отображение ε называется *коединицей* коалгебры (C, Δ, ε).

Подпространство I коалгебры (C, Δ, ε) называется *коидеалом*, если $\varepsilon(C) = 0$ и $\Delta(C) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$. На факторпространстве C/I можно естественным образом ввести структуру коалгебры. Коидеалы — это в точности ядра гомоморфизмов коалгебр.

Подпространство D коалгебры (C, Δ, ε) называется *подкоалгеброй*, если $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

В работе используются обозначения М. Свидлера $\Delta c = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, где $c \in C$ и опущен знак суммы. Если оператор Δ применяется к элементу несколько раз, то в силу коассоциативности неважно, к какому именно множителю тензорного произведения применяется каждое последующее Δ. В частности, мы можем определить

$$c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n)} := (\underbrace{\mathrm{id}_C \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}_C}_{n-k-1} \otimes \Delta \otimes \underbrace{\mathrm{id}_C \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}_C}_{k})\, c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n-1)}$$

для $c \in C$, где результат не зависит от $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Говорят, что коалгебра (C, Δ, ε) *кокоммутативна*, если $c_{(1)} \otimes c_{(2)} = c_{(2)} \otimes c_{(1)}$ для всех $c \in C$.

Если (C, Δ, ε) — коалгебра, то алгебра $(C^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$, *двойственная* к (C, Δ, ε), определяется при помощи ограничения отображения $\Delta^* \colon (C \otimes C)^* \to C^*$, двойственного к Δ, на подпространство $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$ и композиции отображения $\varepsilon^* \colon C^* \to F^*$ с естественным отождествлением $F^* \cong F$. (Для удобства отображения Δ^* и ε^*, изменённые таким образом, обозначаются по-прежнему через Δ^* и ε^*.) Очевидно, что коалгебра (C, Δ, ε) кокоммутативна, если и только если алгебра $(C^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$ коммутативна.

Если (A, μ, u) — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей, то, используя двойственные отображения $\mu^* \colon A^* \to (A \otimes A)^*$ и $u^* \colon A^* \to F^*$ и естественные отождествления $(A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$ и $F^* \cong F$, можно определить коалгебру (A^*, μ^*, u^*), *двойственную* к (A, μ, u). Если алгебра A бесконечномерна, то определить двойственную коалгебру таким образом уже не получается. В этом случае рассматривают помножество $A^\circ \subseteq A^*$ таких линейных функций на алгебре A, которые содержат в своём ядре некоторый идеал конечной коразмерности. Тогда $\mu^*(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$. Обозначив через μ° и u°, соответственно, ограничения отображений μ^* и u^* на A°, получаем коалгебру $(A^\circ, \mu^\circ, u^\circ)$, *конечную двойственную* к (A, μ, u).

В дальнейшем коалгебры (C, Δ, ε) для краткости обозначаются просто через C. Аналогичное соглашение действует и для остальных алгебраических структур.

1.2.2 Биалгебры и алгебры Хопфа

Биалгеброй называется алгебра, на которой, кроме этого, ещё задана структура коалгебры, и эти две структуры согласованы между собой:

Определение 1.6. Набор $(B, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ называется *биалгеброй* над полем F, если (B, μ, u) — ассоциативная алгебра с единицей, а (B, Δ, ε) — (коассоциативная) коалгебра (с коединицей), причём $\Delta\colon B \to B \otimes B$ и $\varepsilon\colon B \to F$ являются гомоморфизмами алгебр с единицей.

Подпространство I биалгебры B называется *биидеалом*, если B — одновременно и идеал, и коидеал. Факторпространство B/I естественным образом наследует с B структуру биалгебры.

Если от моноида потребовать, чтобы все его элементы были обратимы, то мы получим определение группы. Алгебры Хопфа выделяются среди класса всех биалгебр схожим способом[1]:

Определение 1.7. Набор $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon, S)$ называется *алгеброй Хопфа* над полем F, если $(H, \mu, u, \Delta, \varepsilon)$ — биалгебра, а $S\colon H \to H$ — такое линейное отображение, что

$$(Sh_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}(Sh_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H \text{ for all } h \in H.$$

Отображение S называется *антиподом* алгебры H. Можно показать, что S является антигомоморфизмом алгебры H. Более того, $(Sh)_{(1)} \otimes (Sh)_{(2)} = Sh_{(2)} \otimes Sh_{(1)}$ для всех $h \in H$ [51, предложение 4.2.6].

Пример 1.8. Пусть T — полугруппа, а F — поле. Рассмотрим алгебру FT с базисом, состоящим из элементов полугруппы T и умножением, продолженным по линейности с умножения в T. Тогда FT называется *полугрупповой алгеброй* полугруппы T. Определим отображения $\Delta\colon FT \to FT \otimes FT$ и $\varepsilon\colon FT \to F$ при помощи формул $\Delta(t) = t \otimes t$, $\varepsilon(t) = 1$ при $t \in T$, а затем продолжим их по линейности на всё FT. Тогда FT — биалгебра, если и только если T — *моноид*, т.е. полугруппа с единицей. Более того, FT является алгеброй Хопфа, если и только если T — группа, причём в последнем случае справедливо равенство $S(t) = t^{-1}$ для всех $t \in T$. Полугрупповая алгебра FG группы G называется *групповой алгеброй* группы G.

Пример 1.9. Если L — алгебра Ли, то её универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ является алгеброй Хопфа, где $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$, $\varepsilon(v) = 0$, $S(v) = -v$ для $v \in L$. На всю алгебру $U(L)$ отображения Δ, ε, S продолжаются таким образом, чтобы Δ и ε были гомоморфизмами алгебр с 1, а S — антигомоморфизмом алгебр с 1.

Пример 1.10. Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F. Тогда алгебра регулярных функций $\mathcal{O}(G)$ на G является алгеброй Хопфа, где коумножение $\Delta\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G)$ — это гомоморфизм алгебр, индуцированный умножением $G \to G \times G$ в группе, коединица $\varepsilon\colon \mathcal{O}(G) \to F$ определяется равенством $\varepsilon(f) = f(1_G)$ для всех $f \in \mathcal{O}(G)$, а антипод $S\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G)$ — это гомоморфизм алгебр, индуцированный морфизмом аффинных алгебраических многообразий $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.

[1] Многочисленные сходства между группами и алгебрами Хопфа объясняются тем, что оба этих понятия являются частными случаями одного и того же понятия для разных категорий: категории **Sets** множеств и категории $\mathbf{Vect}_F$ векторных пространств над некоторым полем F.

Пример 1.11. Пусть $m \geqslant 2$ — натуральное число, а ζ — примитивный корень m-й степени из единицы в поле F. (Такой корень может существовать в поле F, только если $\operatorname{char} F \nmid m$.) Рассмотрим алгебру $H_{m^2}(\zeta)$ с 1, порождённую элементами c и v, которые удовлетворяют соотношениям $c^m = 1$, $v^m = 0$, $vc = \zeta cv$. Тогда элементы $(c^i v^k)_{0 \leqslant i,k \leqslant m-1}$ образуют базис алгебры $H_{m^2}(\zeta)$. Введём на алгебре $H_{m^2}(\zeta)$ структуру коалгебры при помощи равенств $\Delta(c) = c \otimes c$, $\Delta(v) = c \otimes v + v \otimes 1$, $\varepsilon(c) = 1$, $\varepsilon(v) = 0$. Тогда $H_{m^2}(\zeta)$ — алгебра Хопфа с антиподом S, где $S(c) = c^{-1}$ и $S(v) = -c^{-1}v$. Алгебра Хопфа $H_{m^2}(\zeta)$ называется *алгеброй Тафта*. Алгебра $H_4(-1)$ называется *алгеброй Свидлера*. Так как (-1) — единственный примитивный корень 2-й степени из единицы, мы будем обозначать алгебру Свидлера просто через H_4.

Определение 1.12. Элемент $h \neq 0$ алгебры Хопфа H называется *группоподобным*, если $\Delta h = h \otimes h$. Группоподобные элементы алгебры Хопфа образуют группу $G(H)$ относительно операции умножения.

Определение 1.13. Элемент h алгебры Хопфа H называется *примитивным*, если $\Delta h = h \otimes 1 + 1 \otimes h$. Примитивные элементы алгебры Хопфа образуют алгебру Ли относительно коммутатора $[h_1, h_2] = h_1 h_2 - h_2 h_1$.

Если H — биалгебра или алгебра Хопфа, то можно рассмотреть коалгебру H°, конечную двойственную к алгебре H. Как множество H° является подалгеброй в алгебре H^*. Биалгебра H° называется *конечной двойственной* к биалгебре H. Если H — алгебра Хопфа, то H° также является алгеброй Хопфа. Если H конечномерна, то $H^\circ = H^*$, и H^* называется, соответственно, биалгеброй или алгеброй Хопфа, *двойственной* к H.

Подпространство I алгебры Хопфа H называется *идеалом Хопфа*, если I — биидеал и, кроме того, $SI \subseteq I$. Факторпространство H/I естественным образом наследует с H структуру алгебры Хопфа.

1.2.3 ad-инвариантные левые интегралы на алгебрах Хопфа

Пусть H — алгебра Хопфа. Напомним, что линейная функция $t \in H^*$ называется *левым интегралом на* H, если $t(h_{(2)})h_{(1)} = t(h)1_H$ для всех $h \in H$. Говорят, что левый интеграл t является ad-*инвариантным*, если $t(a_{(1)}\, b\, S(a_{(2)})) = \varepsilon(a)t(b)$ для всех $a, b \in H$.

В теореме 3.25 будет доказано существование H-коинвариантного разложения Леви в предположении, что для алгебры Хопфа H существует ad-инвариантный левый интеграл $t \in H^*$ такой, что $t(1) = 1$. Приведём три главных примера алгебр Хопфа H, обладающих таким свойством [98].

Прежде всего заметим, что существование такого интеграла $t \in H^*$, что $t(1) = 1$, эквивалентно кополупростоте алгебры Хопфа H (см., например, [51, пример 5.5.9]).

Пример 1.14. Пусть H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа над полем характеристики 0. Тогда существует такой ad-инвариантный левый интеграл $t \in H^*$, что $t(1) = 1$.

Доказательство. В силу теоремы Ларсона — Рэдфорда (см., например, [51, теорема 7.4.6]), алгебра Хопфа H полупроста, если и только если она кополупроста. Третьим эквивалентным условием является $S^2 = \mathrm{id}_H$. Как мы уже отметили выше, если H кополупроста, существует левый интеграл $t \in H^*$ такой, что $t(1) = 1$. Всякий интеграл на конечномерной полупростой алгебре Хопфа кокоммутативен (см., например, [51, упражнение 7.4.7]), т.е. $t(ab) = t(ba)$ для всех $a, b \in H$. Следовательно,

$$t(a_{(1)}\ b\ S(a_{(2)})) = t(b(Sa_{(2)})a_{(1)}) = t\Big(b\ S\big((Sa_{(1)})a_{(2)}\big)\Big) = \varepsilon(a)t(b) \text{ для всех } a, b \in H$$

и интеграл t является ad-инвариантным. □

Пример 1.15. Пусть G — группа. Определим $t \in (FG)^*$ при помощи равенств

$$t(g) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad g \neq 1, \\ 1 & \text{при} \quad g = 1. \end{cases}$$

Тогда t является левым ad-инвариантным интегралом для алгебры Хопфа FG, причём $t(1) = 1$.

Пример 1.16. Пусть G — редуктивная аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда существует такой ad-инвариантный левый интеграл $t \in \mathcal{O}(G)^*$, что $t(1) = 1$.

Доказательство. Все рациональные представления группы G вполне приводимы (см. [88]). Отсюда в силу теоремы 4.2.12 из [27] алгебра Хопфа $\mathcal{O}(G)$ кополупроста. Следовательно, существует такой левый интеграл $t \in \mathcal{O}(G)^*$, что $t(1) = 1$. Его ad-инвариантность следует из коммутативности алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)$. □

Приведём теперь пример алгебры Хопфа, у которой не существует ненулевых интегралов.

Пример 1.17. Пусть L — алгебра Ли над полем F характеристики 0 и $t \in U(L)^*$ является левым интегралом, тогда $t = 0$.

Доказательство. В силу теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта достаточно показать, что $t(v_1^{m_1} \dots v_k^{m_k}) = 0$ для всех линейно независимых элементов $v_1, \dots, v_k \in L$ и всех $m_1, \dots, m_k \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Фиксируем элементы $v_1, \dots, v_k \in L$ и введём лексикографическое упорядочение $\prec$ на наборах $(m_1, \dots, m_k)$. Будем доказывать утверждение индукцией по этому упорядочению.

Сперва заметим, что $t(v)1 = t(1)v + t(v)1$ для всех $v \in L$. Следовательно, $t(1) = 0$ и база индукции доказана. Пусть $m_1, \dots, m_k \geqslant 0$. Введём обозначения

$$\Lambda := \{(\ell_1, \dots, \ell_k) \mid 0 \leqslant \ell_i \leqslant m_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\ 0 \leqslant \ell_k \leqslant m_k + 1\}$$

и

$$\Lambda_1 := \Lambda \backslash \{(m_1, \dots, m_k + 1), (m_1, \dots, m_k)\} = \{(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \Lambda \mid (\ell_1, \dots, \ell_k) \prec (m_1, \dots, m_k)\}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k+1})1 = t\left((v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k+1})_{(2)}\right)(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k+1})_{(1)} = \\
&= \sum_{(\ell_1,\dots,\ell_k)\in\Lambda} \binom{m_1}{\ell_1}\binom{m_2}{\ell_2}\dots\binom{m_{k-1}}{\ell_{k-1}}\binom{m_k+1}{\ell_k}\ t(v_1^{\ell_1}\dots v_k^{\ell_k})\ v_1^{m_1-\ell_1}\dots v_k^{(m_k+1)-\ell_k} = \\
&= t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k+1})1 + (m_k+1)t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k})v_k + \\
&+ \sum_{(\ell_1,\dots,\ell_k)\in\Lambda_1} \binom{m_1}{\ell_1}\binom{m_2}{\ell_2}\dots\binom{m_{k-1}}{\ell_{k-1}}\binom{m_k+1}{\ell_k}\ t(v_1^{\ell_1}\dots v_k^{\ell_k})\ v_1^{m_1-\ell_1}\dots v_k^{(m_k+1)-\ell_k} = \\
&= t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k+1})1 + (m_k+1)t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k})v_k + 0
\end{aligned}
$$

в силу предположения индукции. Следовательно, $t(v_1^{m_1}\dots v_k^{m_k}) = 0$. □

1.3 Градуировки, их эквивалентность и универсальные группы

В данном параграфе мы следуем монографиям [54, 77].

Пусть $\Gamma\colon A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — разложение (необязательно ассоциативной) алгебры A над некоторым полем F в прямую сумму подпространств, проиндексированных элементами некоторого множества T. Говорят, что Γ — *градуировка*, если для любых элементов $t_1, t_2 \in T$ существует такой элемент $t \in T$, что $A^{(t_1)}A^{(t_2)} \subseteq A^{(t)}$. Если на алгебре A задана градуировка множеством T, алгебра A называется *T-градуированной.* Подпространства $A^{(t)}$, где $t \in T$, называются *однородными компонентами* или *компонентами градуировки.*

Если T наделена структурой (полу)группы и для всех $t_1, t_2 \in T$ выполнено $A^{(t_1)}A^{(t_2)} \subseteq A^{(t_1 t_2)}$, то градуировка называется *(полу)групповой.*

Пусть $V \subseteq A$ — некоторое подпространство градуированной алгебры A. Говорят, что V — *градуированное* или *однородное* относительно градуировки Γ подпространство, если $V = \bigoplus_{t\in T} V \cap A^{(t)}$. Аналогично вводятся понятия *однородных (градуированных) идеалов* и *подалгебр.*

Элементы подмножества $\bigcup_{t\in T} A^{(t)}$ называются *градуированными* или *однородными.* Если $a \in A^{(t)}$, то говорят, что a — *элемент T-степени t.*

Важнейшим примером групповой градуировки является элементарная градуировка на матричной алгебре:

Определение 1.18. Пусть F — поле, G — группа, $n \in \mathbb{N}$, а $(g_1, \dots, g_n)$ некоторый набор из n элементов группы G. Определим градуировку на алгебре $M_n(F)$ матриц размера $n \times n$, потребовав, чтобы для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ матричная единица e_{ij} принадлежала однородной компоненте, отвечающей элементу $g_i g_j^{-1}$. Такая градуировка называется *элементарной G-градуировкой, заданной набором $(g_1, \dots, g_n)$.*

Замечание 1.19. Заметим, что элементарная градуировка однозначно определяется G-степенями элементов $e_{i,i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, так как эти матричные единицы вместе с матричными единицами $e_{i+1,i}$ порождают алгебру $M_n(F)$. Обратно, если G — произвольная группа, а $(h_1, \dots, h_{n-1})$ — произвольный набор из $(n-1)$ её элемента, тогда элементарная градуировка, обладающая свойством $e_{i,i+1} \in M_n(F)^{(h_i)}$ может быть задана набором $(g_1, \dots, g_n)$, где $g_i = \prod_{j=i}^{n-1} h_j$.

При работе с градуировками важно определиться, когда мы считаем две градуировки схожими. Самое узкое определение, которое здесь можно дать — это определение изоморфизма градуировок.

Пусть
$$\Gamma_1\colon A_1 = \bigoplus_{t_1 \in T_1} A_1^{(t_1)}, \qquad \Gamma_2\colon A_2 = \bigoplus_{t_2 \in T_2} A_2^{(t_2)} \tag{1.1}$$
— две градуировки, где A_1 и A_2 — алгебры, а T_1 и T_2 — два множества.

Определение 1.20. Пусть $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — изоморфизм алгебр. Говорят, что φ — *изоморфизм градуировок*, если $T_1 = T_2$ и $\varphi\left(A_1^{(t)}\right) \subseteq A_2^{(t)}$ для всех $t \in T_1$. В этом случае говорят, что алгебры A_1 и A_2 *градуированно изоморфны*.

Для многих приложений [29, 30, 38, 59, 117] бывает несущественным, элементами какого конкретного множества или (полу)группы алгебра градуирована. (Здесь следует, однако отметить, что то, является ли T группой или полугруппой, оказывает существенное влияние на структуру градуированной алгебры, см. главу 4.) Замена градуирующего множества оставляет градуированные подпространства и идеалы градуированными. В случае градуированных тождеств (см. главу 7) эта замена просто приводит к замене меток у переменных, а все числовые характеристики остаются прежними. Таким образом, оказывается полезным следующее более широкое определение:

Определение 1.21 ([54])**.** Пусть заданы две градуировки (1.1) и изоморфизм алгебр $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$. Говорят, что φ — *эквивалентность градуировок*, если для любого $t_1 \in T_1$ с $A_1^{(t_1)} \ne 0$ существует такое $t_2 \in T_2$, что $\varphi\left(A_1^{(t_1)}\right) = A_2^{(t_2)}$. В этом случае говорят, что градуировки Γ_1 и Γ_2 *эквивалентны при помощи изоморфизма* φ.

Определение 1.22. Если $A_1 = A_2$ и $\varphi = \mathrm{id}_{A_1}$, то говорят, что множества T_1 и T_2 *реализуют на* A_1 *одну и ту же градуировку*, подразумевая здесь под градуировкой лишь разложение алгебры A_1 в прямую сумму градуированных компонент.

Определение 1.23. *Носителем* градуировки $\Gamma\colon A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ называется множество $\operatorname{supp}\Gamma := \{t \in T \mid A^{(t)} \ne 0\}$.

Очевидно что, всякая эквивалентность φ градуировок Γ_1 и Γ_2 определяет биекцию $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{supp}\Gamma_2$, где $\varphi\left(A_1^{(t)}\right) = A_2^{(\psi(t))}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma_1$.

Если φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, то можно определить градуировку $\Gamma_3\colon A_2 = \bigoplus_{t_1\in T_1} \varphi\left(A_1^{(t_1)}\right)$. При этом φ будет являться изоморфизмом градуировок Γ_1 и Γ_3, а Γ_2 и Γ_3 будут эквивалентны при помощи тождественного изоморфизма алгебры A_2, т.е. Γ_2 будет получаться из Γ_3 переименованием однородных компонент при помощи элементов множества T_2. Таким образом, всякая эквивалентность градуировок сводится к изоморфизму градуировок и переименованию однородных компонент и, с точностью до градуированного изоморфизма, всегда можно считать, что все градуировки, эквивалентные данной, заданы на одной и той же алгебре, а эквивалентности являются тождественными изоморфизмами.

Определение 1.24. Пусть $\Gamma_1\colon A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ и $\Gamma_2\colon A = \bigoplus_{h\in H} A^{(h)}$ — некоторые градуировки, где G и H — группы, а A — алгебра. Будем говорить, что Γ_2 *грубее*, чем Γ_1, а Γ_1 *тоньше*, чем Γ_2, если для всех $g \in G$ таких, что $A^{(g)} \ne 0$, существует $h \in H$ такое, что $A^{(g)} \subseteq A^{(h)}$. В этом случае Γ_2 называется *огрублением* градуировки Γ_1, а Γ_1 называется *утончением* градуировки Γ_2. Будем обозначать через $\pi_{\Gamma_1\to\Gamma_2}\colon G_{\Gamma_1} \twoheadrightarrow G_{\Gamma_2}$ гомоморфизм групп, заданный условием $\pi_{\Gamma_1\to\Gamma_2}(\varkappa_{\Gamma_1}(g)) = \varkappa_{\Gamma_2}(h)$ для $g \in \operatorname{supp}\Gamma_1$ и $h \in \operatorname{supp}\Gamma_2$ таких, что $A^{(g)} \subseteq A^{(h)}$.

С лингвистической точки зрения правильней было бы говорить «грубее или эквивалентна» вместо просто «грубее» и «тоньше или эквивалентна» вместо просто «тоньше». Однако для краткости слова «или эквивалентна» будут опускаться.

1.4 (Ко)модули и (ко)модульные алгебры

1.4.1 Модули и комодули

Подобно тому, как определение ассоциативной алгебры с единицей было дано на языке линейных отображений, дадим определение модуля над алгеброй.

Определение 1.25. Пусть M — векторное пространство, (A,μ) — ассоциативная алгебра, а $\psi\colon A\otimes M \to M$ — линейное отображение. Говорят, что (M,ψ) — *(левый) модуль* над алгеброй A, если коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\psi"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}_M"'] & A\otimes M \arrow[d, "\psi"'] \\
A\otimes M \arrow[r, "\psi"] & M
\end{tikzcd}$$

Действие алгебры A на M обозначается через $am := \psi(a\otimes m)$ для всех $a\in A$, $m\in M$.

Определение 1.26. Пусть (A,μ,u) — ассоциативная алгебра с единицей над полем F. Говорят, что (M,ψ) — *унитальный модуль* над (A,μ,u), если (M,ψ) — модуль над (A,μ) и, кроме того, коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
F\otimes M \arrow[rr, "u\otimes\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\sim"] & & A\otimes M \arrow[dl, "\mu"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

(Здесь мы использовали естественное отождествление $F\otimes M \cong M$.)

В дальнейшем под модулями над ассоциативными алгебрами с единицей будут пониматься именно унитальные модули.

В случае модулей над алгебрами Ли согласованность действия алгебры Ли и её операции коммутатора выглядит следующим образом:

Определение 1.27. Пусть V — векторное пространство, а L — алгебра Ли над полем F. Говорят, что V — *(левый) модуль* над L, если задано билинейное отображение $L \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$ такое, что $[a, b]v = a(bv) - b(av)$ для всех $a, b \in L$, $v \in V$.

Эквивалентным языком является является язык линейных представлений алгебр Ли. *Линейным представлением* ψ алгебры Ли L на векторном пространстве V над полем F называется гомоморфизм алгебр Ли $L \to \mathfrak{gl}(V)$. (Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ совпадает как множество с множеством $\mathrm{End}_F(V)$ линейных операторов $V \to V$, а коммутатор на $\mathfrak{gl}(V)$ определяется по формуле $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] := \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ для всех $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}_F(V)$.) Ясно, что любое представление $\psi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ задаёт на V структуру L-модуля через равенство $av := \psi(a)v$, где $a \in L$, $v \in V$.

Важнейшим примером представления всякой алгебры Ли L является *присоединённое представление* $\mathrm{ad} \colon L \to \mathfrak{gl}(L)$, где $(\mathrm{ad}\, a)(b) := [a, b]$ для всех $a, b \in L$.

Теперь дадим определение комодуля над коалгеброй:

Определение 1.28. Пусть (C, Δ, ε) — коалгебра на полем F. Пара (M, ρ), где M — векторное пространство над F, $\rho \colon M \to M \otimes C$ — линейное отображение, называется *(правым) комодулем* над коалгеброй (C, Δ, ε), если следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes \mathrm{id}_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ M \otimes C \arrow[rr, "\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon"] & & M \otimes F \end{tikzcd}$$

(Здесь мы использовали естественное отождествление $M \otimes F \cong M$.)

При работе с комодулями в диссертации используются обозначения Свидлера: $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$, где $m \in M$ и опущен знак суммы.

Пример 1.29. Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F и пусть $\mathcal{O}(G)$ — алгебра регулярных функций на G, которая, как было отмечено в примере 1.10, является алгеброй Хопфа. Пусть на некотором конечномерном векторном пространстве V над F задано *рациональное* представление группы G, т.е. для некоторого базиса $v_1, \ldots, v_n$ пространства V существуют элементы $\omega_{ij} \in \mathcal{O}(G)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, такие, что $gv_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(g)v_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и $g \in G$. Тогда V является $\mathcal{O}(G)$-комодулем, где $\rho(v_j) := \sum_{i=1}^n v_i \otimes \omega_{ij}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если M — правый C-комодуль, то M является левым C^*-модулем, где

$$c^* m := c^*(m_{(1)})m_{(0)} \text{ для всех } c^* \in C^* \text{ и } m \in M.$$

Действие алгебры C^* позволяет описать подкомодули, порождённые заданными подпространствами:

Лемма 1.30. *Пусть V — подпространство C-комодуля M, где C — коалгебра над полем F. Тогда подпространство $C^*V := \langle c^*v \mid c^* \in C^*,\ v \in V \rangle_F$ является C-подкомодулем.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $c^* \in C^*$ и $v \in V$ выполнено $\rho(c^*v) \in C^*V \otimes C$. Выберем базис $(c_\alpha)_\alpha$ в коалгебре C и фиксируем произвольные элементы $c^* \in C^*$ и $v \in V$. Тогда существуют такие элементы $m_{\alpha\beta} \in M$ (из которых только конечное число ненулевые), что

$$(\rho \otimes \mathrm{id}_C)\rho(v) = \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta} \otimes c_\alpha \otimes c_\beta.$$

Определим линейные функции $c^\alpha \in C^*$ при помощи формул

$$c^\alpha(c_\beta) := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Тогда для всех α и β имеем

$$m_{\alpha\beta} = (\mathrm{id}_M \otimes c_\alpha \otimes c_\beta)(\rho \otimes \mathrm{id}_C)\rho(v) = (\mathrm{id}_M \otimes c_\alpha \otimes c_\beta)(\mathrm{id}_M \otimes \Delta)\rho(v) = (c_\alpha c_\beta)v \in C^*V.$$

Отсюда $\rho(c^*v) = \sum_{\alpha,\beta} c^*(c_\beta) m_{\alpha\beta} \otimes c_\alpha \in C^*V \otimes C$. □

Если M — левый модуль над конечномерной алгеброй A, то M — правый A^*-комодуль, где соответствующее отображение $\rho\colon M \to M \otimes A^*$ определяется равенством

$$am = m_{(1)}(a)\, m_{(0)} \text{ для всех } a \in A \text{ и } m \in M.$$

1.4.2 Модульные и комодульные алгебры

Наличие в биалгебре коумножения и коединицы позволяет формулировать дополнительные условия на действие такой биалгебры на некоторой алгебре:

Определение 1.31. Говорят, что (необязательно ассоциативная) алгебра A над полем F является *(левой) H-модульной алгеброй* для биалгебры H, если A — это левый H-комодуль и

$$h(ab) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}b) \text{ для всех } a, b \in A,\ h \in H. \tag{1.2}$$

Обозначим через ψ линейное отображение $H \otimes A \to A$, заданный равенством $\psi(h \otimes a) = ha$ для всех $h \in H$ и $a \in A$. Отображение ψ называется *H-модульной структурой* или *H-действием* на A.

Мы будем говорить, что A — *H-модульная алгебра с единицей*, если A — алгебра с единицей 1_A и $h1_A = \varepsilon(h)1_A$ для всех $h \in H$.

Пример 1.32. Если T — моноид, то FT-модульная алгебра — это в точности алгебра, на которой моноид T действует эндоморфизмами. Если G — группа, то FG-модульная алгебра — это в точности алгебра, на которой группа G действует автоморфизмами.

Пример 1.33. Если L — алгебра Ли, то $U(L)$-модульная алгебра — это в точности такая алгебра A, на которой алгебра Ли L действует дифференцированиями, т.е. $v(ab) = (va)b + a(vb)$ для всех $v \in L$ и $a, b \in A$.

Пример 1.34. Пусть M — H-модуль, где H — алгебра Хопфа над полем F. Тогда алгебра $\mathrm{End}_F(M)$ является ассоциативной H-модульной алгеброй с единицей, где

$$(h\varphi)(m) := h_{(1)}\varphi\big((Sh_{(2)})m\big) \text{ для всех } m \in M \text{ и } h \in H. \tag{1.3}$$

Определение 1.35. Говорят, что (необязательно ассоциативная) алгебра A над полем F является *(правой) H-комодульной алгеброй* для биалгебры H, если A — это правый H-комодуль и $(ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}$ для всех $a, b \in A$.

Отображение $\rho\colon A \to A \otimes H$, задающее на A структуру H-комодуля, называется *H-комодульной структурой* или *H-кодействием* на A.

Мы будем говорить, что A — *H-комодульная алгебра с единицей*, если A — алгебра с единицей 1_A и $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_H$.

Пример 1.36. Если T — моноид, то FT-комодульная алгебра — это в точности алгебра, градуированная моноидом T. При этом комодульная структура $\rho\colon A \to A \otimes FT$ на алгебре $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ задаётся следующим образом: $\rho(a) := a \otimes t$ для всех $a \in A^{(t)}$, где $t \in T$.

Для того, чтобы сформулировать второй пример, напомним, что если V и W — векторные пространства над полем F, причём $\dim V < +\infty$, то существует естественная линейная биекция

$$\mathrm{Hom}_F(V, V \otimes W) \cong V^* \otimes V \otimes W \cong \mathrm{End}_F(V) \otimes W.$$

Пример 1.37. Пусть M — конечномерный H-комодуль, где H — алгебра Хопфа над полем F. Тогда алгебра $\mathrm{End}_F(M)$ является ассоциативной H-комодульной алгеброй с единицей, где комодульная структура задаётся равенством

$$\varphi_{(0)}m \otimes \varphi_{(1)} = \varphi(m_{(0)})_{(0)} \otimes \varphi(m_{(0)})_{(1)}(Sm_{(1)}) \text{ для всех } \varphi \in \mathrm{End}_F(M) \text{ и } m \in M.$$

(Здесь мы пользуемся линейной биекцией $\mathrm{Hom}_F(M, M \otimes H) \cong \mathrm{End}_F(M) \otimes H$.)

Соответствие между модулями и комодулями переносится и на модульные и комодульные алгебры:

- если A — правая H-комодульная алгебра для некоторой биалгебры H, то A является левой H°-модульной алгеброй, где $h^\circ a := h^\circ(a_{(1)})a_{(0)}$ для всех $h^\circ \in H^\circ$ и $a \in A$;
- если A — левая модульная алгебра над конечномерной биалгеброй H, то A — правая H^*-комодульная алгебра, где H^*-комодульная струкутра $\rho\colon A \to A \otimes H^*$ определяется равенством $ha = a_{(1)}(h)\, a_{(0)}$ для всех $h \in H$ и $a \in A$.

Пример 1.38. Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F и пусть $\mathcal{O}(G)$ — алгебра Хопфа регулярных функций на G. Предположим, что G действует рационально автоморфизмами на конечномерной алгебре A, т.е. для некоторого базиса $a_1, \dots, a_n$ алгебры A существуют элементы $\omega_{ij} \in \mathcal{O}(G)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, такие, что

$ga_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij}(g)a_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и $g \in G$. Тогда A является $\mathcal{O}(G)$-комодульной алгеброй, где $\rho(a_j) := \sum_{i=1}^n a_i \otimes \omega_{ij}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. В то же время A — $\mathcal{O}(G)^\circ$-модульная алгебра: $f^* a_j = \sum_{i=1}^n f^*(\omega_{ij})a_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и $f^* \in \mathcal{O}(G)^\circ$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G — это подпространство алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)^\circ$, состоящее из всех её примитивных элементов, а $\mathfrak{g}$-действие на A дифференцированиями — это просто ограничение $\mathcal{O}(G)^\circ$-действия. В то же время, сама группа G может быть отождествлена с множеством всех группоподобных элементов алгебры Хопфа. Таким образом, на A действуют три алгебры Хопфа: $\mathcal{O}(G)^\circ$, FG и $U(\mathfrak{g})$.

1.5 Критерий нильпотентности линейного оператора

В данном параграфе формулируется и доказывается обобщение известного критерия нильпотентности линейного оператора в терминах следа на случай поля произвольной характеристики. Хотя это утверждение и не является новым, но его доказательство в требуемой нам форме сложно найти в общедоступной литературе.

Теорема 1.39. *Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем F, причём либо $\operatorname{char} F = 0$, либо $\operatorname{char} F > \dim V$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен, если и только если $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^k\right) = 0$ для всех $1 \leqslant k \leqslant \dim V$.*

Доказательство. Расширим основное поле F до его алгебраического замыкания $\overline{F}$ и рассмотрим оператор $\bar{\mathcal{A}}\colon \overline{V} \to \overline{V}$, где $\overline{V} := \overline{F} \otimes_F V$, заданный при помощи равенства $\bar{\mathcal{A}}(\alpha \otimes v) := \alpha \otimes \mathcal{A}v$ для всех $\alpha \in \overline{F}$ и $v \in V$.

Для любого базиса $v_1, \ldots, v_n$ пространства V элементы $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ образуют базис пространства $\overline{V}$. Более того, оператор $\bar{\mathcal{A}}$ в базисе $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ имеет ту же матрицу, что и оператор $\mathcal{A}$ в базисе $v_1, \ldots, v_n$. Следовательно, $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^k\right) = \operatorname{tr}\left(\bar{\mathcal{A}}^k\right)$. Более того, оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен, если и только если нильпотентен оператор $\bar{\mathcal{A}}$. Отсюда без ограничения общности можно считать, что основное поле F алгебраически замкнуто.

Приведём оператор $\mathcal{A}$ к жордановой нормальной форме, сгруппировав клетки, отвечающие одинаковым собственным значениям. Пусть в матрице A оператора $\mathcal{A}$ в соответствующем базисе на главной диагонали стоит n_1 элементов λ_1, n_2 элементов λ_2, …, n_s элементов λ_k, причём элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in F$ попарно различны. Поскольку матрица A верхнетреугольная, при возведении $\mathcal{A}$ в степень в эту же степень возводятся и элементы λ_i. Поэтому, если оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен, все элементы λ_i равны нулю, откуда все $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^k\right) = \sum_{i=1}^s n_i \lambda_i^k$ также равны 0.

Обратно, предположим, что $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^k\right) = \sum_{i=1}^s n_i \lambda_i^k = 0$ для всех $1 \leqslant k \leqslant \dim V =: n$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_s^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_s^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1\lambda_1 \\ n_2\lambda_2 \\ \vdots \\ n_s\lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая невырожденность матрицы Вандермонда, получаем, что

$$\begin{pmatrix} n_1\lambda_1 \\ n_2\lambda_2 \\ \vdots \\ n_s\lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{char} F = 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$.

В случае $\operatorname{char} F > 0$ справедливы неравенства $n_i \leqslant \dim A < \operatorname{char} F$, откуда также следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ имеет верхнетреугольную матрицу с нулями на главной диагонали и, следовательно, нильпотентен. □

Замечание 1.40. В теореме 1.39 недостаточно требовать только того, чтобы число $\dim V$ не делилось на характеристику поля. Действительно, рассмотрим для простого числа $p = \operatorname{char} F$ оператор $\mathcal{A}$, который в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на главной диагонали равно p. Тогда $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^k\right) = p = 0$ для всех $k > 0$, однако оператор $\mathcal{A}$ не является нильпотентным, несмотря на то, что $\dim V = p + 1$ не делится на p.

1.6 Представления симметрической группы

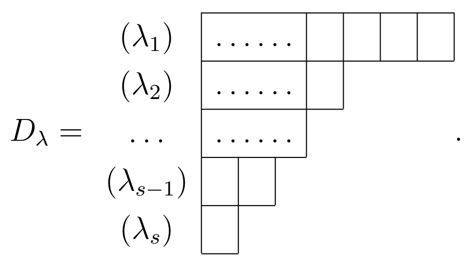
Приведем необходимые определения и результаты из теории представлений симметрической группы [3, 22, 56, 66]. В данном параграфе через F обозначается произвольное поле характеристики 0.

Разбиением числа $n \in \mathbb{N}$ называется набор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ из целых чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_s > 0$, $s \in \mathbb{N}$, такой что $\sum\limits_{k=1}^{s} \lambda_k = n$. Будем обозначать это через $\lambda \vdash n$. Удобно считать, что $\lambda_j = 0$ при $j > s$ или $j < 0$.

По каждому разбиению λ можно построить *диаграмму Юнга*

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i\}.$$

Диаграмму Юнга можно изобразить в виде набора клеток (числа в скобках указывают количество клеток в соответствующей строчке):



Будем придерживаться соглашения, при котором паре (i,j) соответствует клетка, стоящая в i-й строке и j-м столбце.

Диаграмма Юнга, заполненная в некотором порядке числами 1, 2, …, n, называется *таблицей Юнга*:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ \hline 5 & 6 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 8 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

В данном примере $\lambda = (5,2,1,1)$.

В обозначении T_λ подразумевается, что таблица T_λ получена заполнением диаграммы D_λ, отвечающей разбиению $\lambda \vdash n$. Будем говорить также, что таблица T_λ имеет форму λ.

Пусть S_n — симметрическая группа, т.е. группа биекций множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Обозначим через C_{T_λ} подгруппу в S_n, переводящую в себя множество чисел каждого столбца, а через R_{T_λ} — подгруппу, переводящую в себя множество чисел каждой строки диаграммы T_λ. Пусть FS_n — групповая алгебра группы S_n над полем F. Для каждой таблицы Юнга T_λ определим *симметризатор Юнга*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\rho\in R_{T_\lambda},\\ \sigma\in C_{T_\lambda}}} (\operatorname{sign}\sigma)\rho\sigma.$$

Теорема 1.41 ([56, лемма 4.26, с. 54], [3, следствие из леммы 3.2.5, с. 110]). *Пусть T_λ и T_μ — таблицы Юнга, отвечающие некоторым разбиениям $\lambda,\mu \vdash n$ соответственно. Тогда $e_{T_\lambda}(FS_n)e_{T_\mu} = 0$ при $\lambda \ne \mu$ и $e_{T_\lambda}^2 = \beta e_{T_\lambda}$ для некоторого $\beta \in \mathbb{N}$.*

В силу последнего свойства симметризаторы Юнга называются квазиидемпотентами.

Теорема 1.42 ([56, теорема 4.3, с. 46], [3, теорема 3.2.6, с. 111]). *Для всякого разбиения $\lambda \vdash n$, $n \in \mathbb{N}$, и таблицы Юнга T_λ идеал $FS_n e_{T_\lambda}$ является минимальным левым идеалом алгебры FS_n. Всякий неприводимый FS_n-модуль изоморфен одному из модулей $FS_n e_{T_\lambda}$ для некоторого $\lambda \vdash n$. При этом FS_n-модули $FS_n e_{T'_\lambda}$ и $FS_n e_{T''_\mu}$, где $\lambda,\mu \vdash n$, изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu$ (таблицы T'_λ и T''_μ могут быть произвольными).*

Для произвольного разбиения $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s) \vdash n$ определим *транспонированное разбиение* $\lambda^T = (\lambda_1^T,\lambda_2^T,\ldots,\lambda_r^T) \vdash n$. Здесь $\lambda_j^T = \max\{k \mid \lambda_k \geqslant j\}$, $r = \max\{j \mid \lambda_j^T > 0\} = \lambda_1$. Иными словами, λ_j^T — число клеток в j-м столбце диаграммы D_λ, а диаграмма D_{λ^T} получается из диаграммы D_λ отражением относительно главной диагонали. Обозначим через h_{ij} длину крюка диаграммы D_λ с углом в клетке (i,j):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & & & \\ \hline & & (i,j) & (i,j+1) & \ldots & (i,\lambda_i) & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-6} & & (i+1,j) & & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-4} & & \ldots & \multicolumn{5}{c}{} \\ \cline{1-3} & & (\lambda_j^T,j) & \multicolumn{5}{c}{} \\ \cline{1-3} & \multicolumn{7}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Понятно, что $h_{ij} = (\lambda_i - i) + (\lambda_j^T - j) + 1$.

Теорема 1.43 (формула крюков [56, предложение 4.12, с. 50], [22, §4.3, с. 68])**.** *Пусть M_λ — FS_n-модуль, изоморфный минимальному левому идеалу $FS_n e_{T_\lambda}$. Тогда*

$$\dim M_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in D_\lambda} h_{ij}}.$$

Лемма 1.44 ([56, лемма 4.21, с. 53], [3, лемма 3.2.5, с. 110])**.** *Пусть T_λ — таблица Юнга, отвечающая разбиению $\lambda \vdash n$, и для некоторого элемента $a \in FS_n$ при всех $\rho \in R_{T_\lambda}$ и $\sigma \in C_{T_\lambda}$ выполняется равенство $\rho a \sigma = (\operatorname{sign}\sigma) a$. Тогда $a = \alpha e_{T_\lambda}$ для некоторого $\alpha \in F$. Обратно, для всякого элемента $a = \alpha e_{T_\lambda}$ справедливо указанное равенство.*

Следующая теорема позволяет вычислять кратности вхождения неприводимых слагаемых.

Теорема 1.45. *Пусть T_λ — таблица Юнга, отвечающая фиксированному разбиению $\lambda \vdash n$, $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} M_i \oplus \bigoplus\limits_{j=1}^{k} L_j$ — разложение FS_n-модуля M в прямую сумму неприводимых подмодулей, причем $M_i \cong M_\lambda$ при всех $1 \leqslant i \leqslant m$, а $L_j \ncong M_\lambda$ при всех $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда $m = \dim(e_{T_\lambda} M)$. В частности, если $e_{T_\lambda} M = 0$, то модули M_λ не входят в разложение модуля M.*

Доказательство. Для всякого j по теореме 1.42 существует такое $\mu \vdash n$, $\mu \neq \lambda$, что $L_j \cong FS_n e_{T_\mu}$. Поэтому $e_{T_\lambda} L_j = e_{T_\lambda}(FS_n) e_{T_\mu} = 0$ в силу теоремы 1.41. Отсюда для завершения доказательства достаточно показать, что $\dim e_{T_\lambda} M_\lambda = 1$. Это следует из леммы 1.44 и того, что, в силу теоремы 1.41, $e_{T_\lambda} M_\lambda = e_{T_\lambda}(FS_n) e_{T_\lambda} \ni e_{T_\lambda}^2 \neq 0$. $\square$

Глава 2

Ассоциативные (ко)модульные алгебры

В данной главе рассматриваются структурные вопросы теории ассоциативных (ко)модульных алгебр. (Отдельные результаты остаются справедливыми и для необязательно ассоциативных алгебр.) Доказанные утверждения будут затем использованы в главе 7 при изучении полиномиальных H-тождеств. Для работы с конечномерными H-комодульными алгебрами разрабатывается специальная техника, которая позволяет компенсировать отсутствие коумножения в алгебре H^* в случае бесконечномерных алгебр Хопфа H.

Результаты главы были опубликованы в работах [112, 114, 115, 117, 119].

2.1 (Ко)инвариантность радикала Джекобсона

Пусть A — H-модульная алгебра для некоторой биалгебры H. Подпространство $V \subseteq A$ называется *инвариантным относительно H-действия*, если $HV = V$, т.е. если V является H-подмодулем.

Аналогично, если A — H-комодульная алгебра для некоторой биалгебры H, то подпространство $V \subseteq A$ называется *коинвариантным относительно H-кодействия*, если $\rho(V) \subseteq V \otimes H$, т.е. если V является H-подкомодулем.

Если $A^2 \neq 0$ и алгебра A не содержит нетривиальных H-(ко)инвариантных двусторонних идеалов, то A называется *H-простой* алгеброй. В частности, алгебра A, градуированная группой G, называется *G-градуированно простой*, если $A^2 \neq 0$ и A не содержит нетривиальных градуированных идеалов. Аналогично, алгебра A с действием группы G автоморфизмами называется *G-простой*, если $A^2 \neq 0$ и A не содержит нетривиальных G-инвариантных идеалов.

В. В. Линченко было доказано достаточное условие H-инвариантности радикала в H-модульной ассоциативной алгебре. Для удобства читателя приведём не только уточнённую[1] формулировку этого результата, но и его доказательство.

Теорема 2.1 (В. В. Линченко [80, теорема 2.1])**.** *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с антиподом*

[1] В работе В. В. Линченко имеется неточность связанная с условием на характеристику основного поля, см. замечание 1.40.

S таким, что $S^2 = \mathrm{id}_H$. Предположим, что либо $\mathrm{char}\, F = 0$, либо $\mathrm{char}\, F > \dim A$. Тогда радикал Джекобсона $J := J(A)$ алгебры A является её H-подмодулем.

В доказательстве используется следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес:

Предложение 2.2 ([80, лемма 1.2]). *Пусть A — (необязательно ассоциативная) H-модульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с антиподом S, являющимся обратимым оператором. Тогда для всякого двухстороннего идеала $I \subseteq A$ подмодуль $HI := \langle ha \mid h \in H, a \in I\rangle_F$ также является двухсторонним идеалом.*

Доказательство. Пусть $a \in I$, $b \in A$ и $h \in H$. Тогда

$$(ha)b = (h_{(1)}a)(\varepsilon(h_{(2)})b) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}(Sh_{(3)})b) = h_{(1)}(a((Sh_{(2)})b)) \in HI, \tag{2.1}$$

поскольку $a(gb) \in I$ для любого $g \in H$.

Применив к равенствам

$$(Sh_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}(Sh_{(2)}) = \varepsilon(h)1_H$$

антигомоморфизм S^{-1}, для всякого $h \in H$ получаем

$$h_{(2)}(S^{-1}h_{(1)}) = (S^{-1}h_{(2)})h_{(1)} = \varepsilon(h)1_H. \tag{2.2}$$

Отсюда получаем

$$b(ha) = (\varepsilon(h_{(1)})b)(h_{(2)}a) = (h_{(2)}(S^{-1}h_{(1)})b)(h_{(3)}a) = h_{(2)}(((S^{-1}h_{(1)})b)a) \in HI. \tag{2.3}$$

$\square$

Доказательство теоремы 2.1. Поскольку всякий ниль-идеал содержится в радикале Джекобсона (см., например, [26, лемма 1.2.2]), достаточно доказать, что H-подмодуль HJ, который в силу предложения 2.2 является идеалом, состоит из нильпотентных элементов.

Обозначим через $\Phi\colon A \to \mathrm{End}_F(A)$ *левое регулярное представление* алгебры A, то есть гомоморфизм, заданный равенством $\Phi(a)b := ab$ для всех $a \in A$ и $b \in A$. Для всякого элемента $h \in H$ обозначим через $\rho\colon H \to \mathrm{End}_F(A)$ гомоморфизм, заданный равенством $\rho(h)a := ha$ для всех $a \in A$.

Докажем, что для всех $v \in HJ$ выполнено $\mathrm{tr}\,(\Phi(v)) = 0$. Действительно, если $h \in H$ и $a \in J$, то

$$\mathrm{tr}\,(\Phi(ha)) \overset{(2.1)}{=} \mathrm{tr}\,\big(\rho(h_{(1)})\Phi(a)\rho(Sh_{(2)})\big) = \mathrm{tr}\,\big(\rho(Sh_{(2)})\rho(h_{(1)})\Phi(a)\big) \overset{(2.2)}{=} \varepsilon(h)\,\mathrm{tr}\,(\Phi(a)) = 0,$$

поскольку элемент a, а следовательно, и оператор $\Phi(a)$ нильпотентны.

Из $v^k \in HJ$ для всех $v \in HJ$ и $k \in \mathbb{N}$ получаем $\mathrm{tr}\,\big(\Phi(v^k)\big) = 0$. Следовательно, в силу теоремы 1.39 оператор $\Phi(v)$ нильпотентен, т.е. $\Phi(v)^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда $v^{m+1} = \Phi(v)^m v = 0$ и HJ является ниль-идеалом. Поэтому $HJ \subseteq J$. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра над полем характеристики 0 для некоторой конечномерной полупростой (или кополупростой) алгебры Хопфа H. Тогда радикал Джекобсона алгебры A является её H-подмодулем.*

Доказательство. В силу теоремы Ларсона — Рэдфорда всякая конечномерная алгебра Хопфа H над полем характеристики 0 полупроста, если и только если она кополупроста, что, в свою очередь, справедливо, если и только если $S^2 = \mathrm{id}_H$ (см., например, [51, теорема 7.4.6]). Отсюда для доказательства утверждения достаточно применить теорему 2.1. $\square$

Оказывается, аналогичный результат справедлив и для комодульных алгебр:

Теорема 2.4. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-комодульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с антиподом S таким, что $S^2 = \mathrm{id}_H$. Предположим, что либо $\operatorname{char} F = 0$, либо $\operatorname{char} F > \dim A$. Тогда радикал Джекобсона $J := J(A)$ алгебры A является её H-подкомодулем.*

Отсюда мы получаем новое доказательство[2] градуированности радикала Джекобсона в конечномерных градуированных алгебрах:

Следствие 2.5. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F, градуированная произвольной группой G, причём либо $\operatorname{char} F = 0$, либо $\operatorname{char} F > \dim A$. Тогда радикал Джекобсона алгебры A является её градуированным идеалом.*

Прежде чем доказывать теорему 2.4, напомним что всякая H-комодульная алгебра A, где H — некоторая биалгебра, является H^*-модулем, где H^* — алгебра, двойственная к коалгебре H, и $h^*a := h^*(a_{(1)})a_{(0)}$ при $a \in A$ и $h^* \in H^*$.

Если биалгебра H бесконечномерна, далеко не всегда можно определить на H^* структуру коалгебры, двойственной к алгебре H. Однако на H^* можно тем не менее определить некий аналог коумножения:

Лемма 2.6. *Пусть H_1 — конечномерное подпространство биалгебры H над полем F. Тогда для любого $h^* \in H^*$ существуют такие $s \in \mathbb{N}$, $h_i^{*\prime}, h_i^{*\prime\prime} \in H^*$, $1 \leqslant i \leqslant s$, что*

$$h^*(hq) = \sum_{i=1}^{s} h_i^{*\prime}(h) h_i^{*\prime\prime}(q) \text{ для всех } h, q \in H_1.$$

В частности, если A — (необязательно ассоциативная) H-комодульная алгебра, а $a, b \in A$ — такие элементы, что $\rho(a), \rho(b) \in A \otimes H_1$, то

$$h^*(ab) = \sum_{i=1}^{s} (h_i^{*\prime} a)(h_i^{*\prime\prime} b). \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\Xi\colon H^* \to (H_1 \otimes H_1)^*$, заданное при помощи равенства $\Xi(h^*)(h \otimes q) = h^*(hq)$ для всех $h^* \in H^*$, $h, q \in H$. Используя естественное отождествление $(H_1 \otimes H_1)^* = H_1^* \otimes H_1^*$, получаем $\Xi(h^*) = \sum_{i=1}^{s} h_i^{*\prime} \otimes h_i^{*\prime\prime}$ для некоторых $s \in \mathbb{N}$,

[2] Другое доказательство в случае поля характеристики 0 см., например, в [78, теорема 2.1].

$h_i^{*\prime}, h_i^{*\prime\prime} \in H_1^*$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Продолжая линейные функции с H_1 на H, можно считать, что $h_i^{*\prime}, h_i^{*\prime\prime} \in H^*$. Тогда $h^*(hq) = \sum_{i=1}^s h_i^{*\prime}(h)h_i^{*\prime\prime}(q)$ для всех $h, q \in H_1$. Первая часть утверждения доказана.

Если A — H-комодульная алгебра и $\rho(A) \subseteq A \otimes H_1$, то

$$h^*(ab) = h^*(a_{(1)}b_{(1)})a_{(0)}b_{(0)} = \sum_{i=1}^s h_i^{*\prime}(a_{(1)})h_i^{*\prime\prime}(b_{(1)})a_{(0)}b_{(0)} = \sum_{i=1}^s (h_i^{*\prime}a)(h_i^{*\prime\prime}b)$$

для всех $a, b \in A$. □

Докажем теперь, что подкомодуль (см. лемму 1.30), порождённый идеалом, также является идеалом.

Лемма 2.7. *Пусть A — (необязательно ассоциативная) H-комодульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с антиподом S, являющимся обратимым оператором. Тогда для всякого двухстороннего идеала $I \subseteq A$ подпространство $H^*I := \langle h^*a \mid h^* \in H^*, a \in I\rangle_F$ также является двухсторонним идеалом.*

Доказательство. Пусть $a \in I$, $b \in A$, $h^* \in H^*$. Выберем такое конечномерное подпространство $H_2 \subseteq H$, что $\rho(a), \rho(b) \in A \otimes H_2$ и $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\rho(b) \in A \otimes H_2 \otimes H_2$. Теперь выберем для h^* элементы $h_i^{*\prime}$ и $h_i^{*\prime\prime}$ в соответствии с леммой 2.6, где $H_1 := H_2 + H_2^2 + SH_2 + S^{-1}H_2$.

Тогда

$$(h^*a)b = h^*(a_{(1)})a_{(0)}b = h^*(\varepsilon(b_{(1)})a_{(1)})a_{(0)}b_{(0)} = h^*(a_{(1)}b_{(1)}Sb_{(2)})a_{(0)}b_{(0)} =$$

$$= \sum_i h_i^{*\prime}(a_{(1)}b_{(1)})h_i^{*\prime\prime}(Sb_{(2)})a_{(0)}b_{(0)} = \sum_i h_i^{*\prime}(a(S^*h_i^{*\prime\prime})b) \in H^*I. \tag{2.5}$$

Аналогично,

$$b(h^*a) = h^*(a_{(1)})ba_{(0)} = h^*(\varepsilon(b_{(1)})a_{(1)})b_{(0)}a_{(0)} = h^*((S^{-1}b_{(2)})b_{(1)}a_{(1)})b_{(0)}a_{(0)} =$$

$$= \sum_i h_i^{*\prime}(S^{-1}b_{(2)})h_i^{*\prime\prime}(b_{(1)}a_{(1)})b_{(0)}a_{(0)} = \sum_i h_i^{*\prime\prime}((((S^{-1})^*h_i^{*\prime})b)a) \in H^*I. \tag{2.6}$$

□

Теперь докажем одно важное свойство следа регулярного представления:

Лемма 2.8. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-комодульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с антиподом S таким, что $S^2 = \mathrm{id}_H$. Тогда для левого регулярного представления $\Phi\colon A \to \mathrm{End}_F(A)$, $\Phi(a)b := ab$, справедливо равенство*

$$\mathrm{tr}(\Phi(h^*a)) = h^*(1)\,\mathrm{tr}(\Phi(a)) \text{ для всех } h^* \in H^* \text{ и } a \in A.$$

Доказательство. Зададим на алгебре $\mathrm{End}_F(A)$ структуру H-комодульной алгебры в соответствии с примером 1.37. Кроме того, выберем такое подпространство $H_2 \subseteq H$, что $\rho(A) \subseteq A \otimes H_2$. Положим $H_1 := H_2 + H_2^2 + SH_2$ и в соответствии с леммой 2.6 для каждого

$h^* \in H^*$ фиксируем такие $h_i^{*\prime}, h_i^{*\prime\prime} \in H^*$, что для всех $a, b \in A$ справедливо равенство (2.4). Тогда для всех $h^* \in H^*$, $\psi \in \mathrm{End}_F(A)$ и $a \in A$

$$(h^*\psi)a = h^*(\psi(a_{(0)})_{(1)}(Sa_{(1)}))\psi(a_{(0)})_{(0)} = \sum_i h_i^{*\prime}\psi((S^*h_i^{*\prime\prime})a). \tag{2.7}$$

Следовательно, $h^*\psi = \sum_i \zeta(h_i^{*\prime})\psi\zeta(S^*h_i^{*\prime\prime})$ для всех $h^* \in H^*$ и $\psi \in \mathrm{End}_F(A)$, где $\zeta \colon H^* \to \mathrm{End}_F(A)$ — отображение, задающее на A структуру H^*-модуля.

Заметим, что отображение Φ является гомоморфизмом H-комодулей. Отсюда Φ также является гомоморфизмом H^*-модулей. Из (2.7) следует, что

$$\mathrm{tr}(\Phi(h^*a)) = \sum_i \mathrm{tr}\,\zeta(h_i^{*\prime})\Phi(a)\zeta(S^*h_i^{*\prime\prime}) = \sum_i \mathrm{tr}(\zeta((S^*h_i^{*\prime\prime})h_i^{*\prime})\Phi(a)).$$

Учитывая, что

$$\sum_i \zeta((S^*h_i^{*\prime\prime})h_i^{*\prime})b = \sum_i (S^*h_i^{*\prime\prime})(h_i^{*\prime}(b_{(1)})b_{(0)}) =$$

$$= \sum_i (h_i^{*\prime\prime})(Sb_{(1)})h_i^{*\prime}(b_{(2)})b_{(0)} = h^*(b_{(2)}Sb_{(1)})b_{(0)} = h^*(1)b$$

для всех $h^* \in H^*$ и $b \in A$, получаем $\mathrm{tr}(\Phi(h^*a)) = h^*(1)\,\mathrm{tr}(\Phi(a))$. □

Доказательство теоремы 2.4. В силу лемм 1.30 и 2.7 подпространство $H^*J \supseteq J$ является H-инвариантным двустронним идеалом. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что H^*J является ниль-идеалом.

Напомним, что в конечномерных алгебрах радикал Джекобсона является нильпотентным идеалом, откуда $\mathrm{tr}(\Phi(a)) = 0$ для всех $a \in J$. Применяя лемму 2.8, получаем, что $\mathrm{tr}(\Phi(v)) = 0$ для всех $v \in H^*J$ и, в частности, $\mathrm{tr}(\Phi(w)^k) = 0$ для всех $w \in H^*J$ и $k \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 1.39 оператор $\Phi(a)$ является нильпотентным, и H^*J — ниль-идеал. Отсюда $H^*J = J$. □

2.2 $U(\mathfrak{g})$-простые и G-простые алгебры

В данном параграфе доказывается, что для конечномерных ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль с действием некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями понятия $U(\mathfrak{g})$-простой и простой алгебры совпадают. Аналогичный результат верен и для алгебр с рациональным действием связной аффинной алгебраической группы.

Лемма 2.9. *Пусть $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма идеалов) — необязательно ассоциативная алгебра над произвольным полем F, где B_i — простые алгебры, а δ — некоторое дифференцирование алгебры B. Тогда все алгебры B_i инвариантны относительно дифференцирования δ.*

Доказательство. Пусть $a \in B_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant q$. Тогда $\delta(a) = \sum_{i=1}^q b_i$, где $b_j \in B_j$ при $1 \leqslant j \leqslant q$. Для всех $b \in B_j$, где $j \neq i$, справедливо равенство

$$0 = \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) = b_jb + a\delta(b),$$

откуда $b_j b = -a\delta(b) \in B_i \cap B_j$, т.е. $b_j b = 0$. Аналогично доказывается, что $bb_j = 0$ для всех $b \in B_j$. Поскольку множество $\{v \in B_j \mid vB_j = B_j v = 0\}$ образует двусторонний идеал в простой алгебре B_j, получаем, что $b_j = 0$ для всех $j \neq i$ и $\delta(a) \in B_i$. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что A и 0 — единственные $\mathfrak{g}$-инвариантные идеалы алгебры A. Тогда либо алгебра A полупроста, либо $A^2 = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 радикал Джекобсона является $U(\mathfrak{g})$-инвариантным идеалом, откуда либо $J(A) = 0$ и лемма доказана, либо $A = J(A)$ является нильпотентной алгеброй. Во втором случае $A^2 \neq A$ — $\mathfrak{g}$-инвариантный идеал, и, как следствие, $A^2 = 0$. $\square$

Теорема 2.11. *Если B — конечномерная $\mathfrak{g}$-простая ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, то алгебра B проста.*

Доказательство. Согласно лемме 2.10 алгебра B полупроста, т.е. в силу теоремы Веддербёрна — Артина $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма идеалов) для некоторых простых алгебр B_i. В силу леммы 2.9 всякий идеал B_i является $\mathfrak{g}$-инвариантным, откуда $q = 1$ и $B = B_1$. $\square$

Формально алгебры, на которых некоторая группа действовать не только автоморфизмами, но и антиавтоморфизмами, не являются модульными алгебрами над алгебрами Хопфа. Однако в случае действия связной аффинной алгебраической группы всё сводится к случаю лишь автоморфизмов:

Предложение 2.12. *Пусть A — конечномерная (необязательно ассоциативная) алгебра над алгебраически замкнутым полем F, на которой рационально действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами некоторая связная аффинная алгебраическая группа G. Тогда группа G действует на A автоморфизмами.*

Доказательство. Если $\operatorname{Aut}(A) \neq \operatorname{Aut}^*(A)$, то G-действие индуцирует гомоморфизм групп $G \to \operatorname{Aut}^*(A)/\operatorname{Aut}(A) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. При этом прообразы элементов группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ являются непересекающимися подмножествами в G, замкнутыми в топологии Зарисского. В силу связности группы G она целиком отображается в нейтральный элемент группы $\operatorname{Aut}^*(A)/\operatorname{Aut}(A)$, откуда группа G действует на A автоморфизмами. $\square$

Теперь докажем теорему об алгебрах, простых по отношению к действию таких групп:

Теорема 2.13. *Пусть A — конечномерная G-простая ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F, на которой рационально действует автоморфизмами некоторая связная аффинная алгебраическая группа G. Тогда алгебра A проста в обычном смысле.*

Доказательство. Предположим теперь, что алгебра A является G-простой. Поскольку радикал Джекобсона инвариантен относительно автоморфизмов, всякая G-простая алгебра полупроста. Отсюда в силу теоремы Веддербёрна — Артина $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма идеалов) для некоторых простых алгебр B_i. Заметим, что B_i являются единственными простыми идеалами алгебры A (достаточно рассмотреть для каждого простого идеала I алгебры A произведения $IB_j, B_jI \subseteq I \cap B_j$). Отсюда G-действие индуцирует гомоморфизм $\varphi\colon G \to S_n$, где $gB_i = B_{\varphi(g)(i)}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant q$ и $g \in G$, а S_n — n-я группа подстановок. Следовательно, группа G раскладывается в объединение попарно непересекающихся замкнутых подмножеств, отвечающих разным $\varphi(g) \in S_n$. Поскольку группа G связна, гомоморфизм φ отображает всю группу G в тождественную подстановку и $gB_i = B_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant q$ и $g \in G$. Отсюда $q = 1$, $B = B_1$, и алгебра B простая. $\square$

Аналоги теорем 2.11 и 2.13 справедливы и для алгебр Ли. (См. теоремы 3.6 и 3.7).

2.3 H-(ко)инвариантные аналоги теорем Веддербёрна — Артина и Веддербёрна — Мальцева

Сперва докажем достаточные условия для (ко)инвариантности аннуляторов под(ко)модулей в (ко)модульных алгебрах:

Лемма 2.14. *Пусть M — H-подмодуль в ассоциативной H-модульной алгебре A для некоторой алгебры Хопфа H с биективным антиподом S над полем F, тогда подпространство $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M) := \{a \in A \mid ab = ba = 0$ для всех $b \in M\}$ также является H-подмодулем.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$, $b \in M$, $h \in H$. Тогда из (2.1) следует, что

$$(ha)b = h_{(1)}(a((Sh_{(2)})b)) = 0.$$

В то же время из (2.3) следует, что

$$b(ha) = h_{(2)}(((S^{-1}h_{(1)})b)a) = 0.$$

Таким образом, $ha \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$. $\square$

Лемма 2.15. *Пусть M — H-подкомодуль в ассоциативной H-комодульной алгебре A для некоторой алгебры Хопфа H с биективным антиподом S над полем F, тогда подпространство $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$ также является H-подкомодулем.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$, $b \in M$, $h^* \in H^*$. Тогда

$$(h^*a)b = h^*(a_{(1)})a_{(0)}b = h^*\big(a_{(1)}\varepsilon(b_{(1)})1_H\big)a_{(0)}b_{(0)} =$$
$$= h^*(a_{(1)}b_{(1)}Sb_{(2)})a_{(0)}b_{(0)} = h^*\big((ab_{(0)})_{(1)}Sb_{(1)}\big)(ab_{(0)})_{(0)} = 0,$$

поскольку для каждого слагаемого $ab_{(0)} = 0$. Аналогично,

$$b(h^*a) = h^*(a_{(1)})ba_{(0)} = h^*\big(\varepsilon(b_{(1)})a_{(1)}\big)b_{(0)}a_{(0)} =$$
$$= h^*\big((S^{-1}b_{(2)})b_{(1)}a_{(1)}\big)b_{(0)}a_{(0)} = h^*\big((S^{-1}b_{(1)})(b_{(0)}a)_{(1)}\big)(b_{(0)}a)_{(0)} = 0,$$

поскольку для каждого слагаемого $b_{(0)}a = 0$. Таким образом, $h^*a \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$, откуда $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$ является H-подкомодулем. $\square$

Рассмотрим ассоциативные алгебры, *полупростые* в обычном смысле, т.е. такие алгебры, радикал Джекобсона которых равен 0. В доказательстве теоремы ниже мы используем идею из предложения 3.1 из работы [90]:

Теорема 2.16. *Пусть B — конечномерная полупростая ассоциативная H-модульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с биективным антиподом. Тогда $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма идеалов, являющихся H-подмодулями) для некоторых H-простых H-модульных алгебр B_i.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $\dim B$. Если алгебра B является H-простой, доказывать нечего. Предположим, что B содержит нетривиальные H-инвариантные идеалы. В силу обычной теоремы Веддербёрна — Артина справедливо равенство $B = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$ (прямая сумма идеалов), где A_i — простые алгебры, которые необязательно являются H-подмодулями. Пусть B_1 — минимальный идеал алгебры B, являющийся H-подмодулем. Тогда $B_1 = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. (Для доказательства этого равенства достаточно рассмотреть идеалы $B_1 A_j$ для всех j, которые либо равны 0, либо совпадают с A_j в силу минимальности последних.) Рассмотрим $\tilde{B}_1 = \{a \in A \mid ab = ba = 0 \text{ для всех } b \in B_1\}$. Тогда $\tilde{B}_1$ равна сумме всех идеалов A_j, где $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, и $A = B_1 \oplus \tilde{B}_1$. В силу леммы 2.14 идеал $\tilde{B}_1$ является H-подмодулем. Теперь достаточно применить предположение индукции к алгебре $\tilde{B}_1$. $\square$

Используя вместо леммы 2.14 лемму 2.15 получаем аналогичное утверждение и для комодульных алгебр:

Теорема 2.17. *Пусть B — конечномерная полупростая ассоциативная H-комодульная алгебра над полем F для некоторой алгебры Хопфа H с биективным антиподом. Тогда $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма идеалов, являющихся H-подкомодулями) для некоторых H-простых H-комодульных алгебр B_i.*

Для конечномерных H-модульных алгебр A, радикал Джекобсона которых не является H-подмодулем, естественно ввести понятие *H-радикала* $J^H(A)$, т.е. максимального H-инвариантного нильпотентного идеала. Такой идеал существует, поскольку сумма всех H-инвариантных нильпотентных идеалов лежит в $J(A)$ и снова является H-инвариантным нильпотентным идеалом.

В главе 7 нам потребуется разложение и для таких алгебр, для которых $J^H(A) = 0$, хотя $J(A) \neq 0$:

Теорема 2.18 (С. М. Скрябин — Ф. Ван Ойстайен)**.** *Пусть A — левая H-модульная правоартинова ассоциативная алгебра с единицей для некоторой алгебры Хопфа H над полем F такая, что $J^H(A) = 0$. Тогда $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторого $q \in \mathbb{Z}_+$ и некоторых H-простых H-модульных алгебр B_i.*

Доказательство. См. [96, теорема 1.1], [97, лемма 4.2]. □

Для того, чтобы применять теорему 2.18, не предполагая наличие единицы, сделаем следующее наблюдение, которое представляет и самостоятельный интерес:

Лемма 2.19. *Пусть A — левая H-модульная правоартинова ассоциативная алгебра с единицей для некоторой алгебры Хопфа H над полем F такая, что $J^H(A) = 0$. Тогда A — H-модульная алгебра с единицей.*

Доказательство. Пусть $A^+ := A \oplus F1_{A^+}$, где 1_{A^+} — присоединённая единица алгебры A. Определим действие $h1_{A^+} := \varepsilon(h)1_{A^+}$ для всех $h \in H$. Тогда A^+ — H-модульная алгебра с единицей, а A — её двусторонний H-инвариантный идеал. Поскольку A^+/A и A являются правоартиновыми A^+-модулями, A^+ — правоартинова алгебра, и мы можем применить теорему 2.18. Тогда $A^+ = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых $q \in \mathbb{Z}_+$ некоторых H-простых H-модульных алгебр B_i. Поскольку A — двусторонний H-инвариантный идеал алгебры A^+ и каждый идеал AB_i равен либо 0, либо B_i, мы получим, что алгебра A является прямой суммой всех идеалов B_i, за исключением одного. Теперь утверждение леммы следует из того, что алгебры B_i с единицей и $h1_{B_i} = \varepsilon(h)1_{B_i}$ для всех $h \in H$. □

Как следствие, если A — конечномерная H-модульная ассоциативная алгебра для некоторой алгебры Хопфа H, то $A/J^H(A) = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых H-модульных алгебр B_i.

Нам также понадобится следующее обобщение теоремы Веддербёрна — Мальцева:

Теорема 2.20 (Д. Штефан — Ф. Ван Ойстайен)**.** *Пусть H — алгебра Хопфа над произвольным полем, для которой существует ad-инвариантный левый интеграл $t \in H^*$ такой, что $t(1) = 1$, а A — конечномерная H-комодульная ассоциативная алгебра, причём $J(A)$ является H-подкомодулем, а $A/J(A)$ — сепарабельная алгебра. Тогда существует такая H-коинвариантная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма H-подкомодулей).*

Доказательство. Доказательство для случая, когда алгебра A с единицей см. в [98, теорема 2.4].

В случае, когда алгебра A не содержит единицы, как и в доказательстве леммы 2.19, рассмотрим алгебру $A^+ := A \oplus F1_{A^+}$, где 1_{A^+} — присоединённая единица алгебры A, и определим кодействие $\rho(1_{A^+}) := 1_{A^+} \otimes 1_H$. Тогда A^+ — H-комодульная алгебра с единицей, а A — её двусторонний H-коинвариантный идеал, причём в силу своей нильпотентности $J(A^+) \subseteq A$, т.е. $J(A^+) = J(A)$. Поскольку алгебра A^+ содержит единицу, а $A^+/J(A) \cong F \oplus A/J(A)$ — сепарабельная алгебра (см., например, следствие из §10.6 в [16]), в силу сделанных замечаний существует разложение $A^+ = B_0 \oplus J(A)$ (прямая сумма H-подкомодулей), где B_0 — некоторая H-коинвариантная максимальная подалгебра алгебры A^+. Отметим при этом, что единица алгебры B_0 совпадает с единицей алгебры A^+ (например, это следует из нильпотентности идеала $J(A)$). Отсюда $B_0 = F1_{A^+} \oplus B$ и $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма H-подкомодулей), где $B := A \cap B_0$. □

Следствие 2.21. *Пусть H — алгебра Хопфа над полем характеристики 0, для которой существует ad-инвариантный левый интеграл $t \in H^*$ такой, что $t(1) = 1$, а A — конечномерная H-комодульная ассоциативная алгебра, причём $J(A)$ является H-подкомодулем. Тогда существует такая H-коинвариантная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма H-подкомодулей).*

С учётом примеров 1.14–1.16, 1.36, 1.38, следствий 2.3, 2.5 и двойственности между H-действиями и H^*-кодействиями при $\dim H < +\infty$ получаются также такие следствия:

Следствие 2.22. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем характеристики 0, градуированная произвольной группой. Тогда существует такая градуированная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма градуированных подпространств).*

Следствие 2.23. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами редуктивная аффинная алгебраическая группа G. Тогда существует такая G-инвариантная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма G-инвариантных подпространств).*

Следствие 2.24. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-(ко)модульная алгебра над полем характеристики 0, где H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа. Тогда существует такая H-(ко)инвариантная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма H-(ко)подмодулей).*

Приведём теперь примеры H-модульных ассоциативных алгебр, для которых H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева не существует.

Пример 2.25 (Ю. А. Бахтурин)**.** Пусть

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} C & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; C, D \in M_m(F) \right\} \subseteq M_{2m}(F),$$

$m \geqslant 2$. Тогда

$$J(A) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; D \in M_m(F) \right\}. \tag{2.8}$$

Определим $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ по формуле

$$\varphi \left(\begin{array}{cc} C & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} C & C + D \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тогда группа $G = \langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z}$ действует на алгебре A автоморфизмами, т.е. A является FG-модульной алгеброй. Однако в A не существует такой FG-инвариантной полупростой подалгебры B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма FG-подмодулей).

Доказательство. Пусть $a \in A$. Тогда $\varphi(a) - a \in J(A)$. Предположим, что B — такое G-инвариантное подпространство, что $B \cap J(A) = \{0\}$. Тогда $\varphi(b) - b = 0$ для всех $b \in B$ и $B \subseteq J(A)$. Следовательно, $B = 0$ и FG-инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева не существует. $\square$

2.4 Связь между дифференцированиями и автоморфизмами

В данном параграфе доказывается, что можно заменить всякое действие конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями на рациональное действие связной редуктивной аффинной алгебраической группы автоморфизмами, что позволяет перенести ряд результатов на случай алгебр с действием алгебр Ли.

Рассмотрим сперва классическую связь между автоморфизмами и дифференцированиями:

Предложение 2.26. *Пусть A — необязательно ассоциативная конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой задано рациональное представление некоторой связной аффинной алгебраической группы G. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G и определим представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на A как дифференциал представления группы G. Тогда*

1. *алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на A дифференцированиями, если и только если группа G действует на A автоморфизмами;*
2. *все $\mathfrak{g}$-подмодули в A являются G-инвариантными подпространствами и наоборот.*

Доказательство. Умножение $\mu\colon A \otimes A \to A$ можно отождествить с элементом $\mu = \sum_i \mu_{1i} \otimes \mu_{2i} \otimes \mu_{3i} \in A^* \otimes A^* \otimes A$. Группа G и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действуют на $A^* \otimes A^* \otimes A$ следующим образом:

$$g(u(\cdot) \otimes v(\cdot) \otimes w) = u(g^{-1}(\cdot)) \otimes v(g^{-1}(\cdot)) \otimes (gw),$$

$$\delta(u(\cdot) \otimes v(\cdot) \otimes w) = u(\cdot) \otimes v(\cdot) \otimes \delta w - u(\delta(\cdot)) \otimes v(\cdot) \otimes w - u(\cdot) \otimes v(\delta(\cdot)) \otimes w,$$

где $u, v \in A^*$, $w \in A$, $\delta \in \mathfrak{g}$, $g \in G$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на A дифференцированиями, если и только если $\delta(bc) = (\delta b)c + b(\delta c)$ для всех $b, c \in A$, $\delta \in \mathfrak{g}$, что в свою очередь эквивалентно равенствам $\sum_i \mu_{1i}(b)\mu_{2i}(c)(\delta\mu_{3i}) = \sum_i (\mu_{1i}(\delta b)\mu_{2i}(c)\mu_{3i} + \mu_{1i}(b)\mu_{2i}(\delta c)\mu_{3i})$, $\delta\mu = 0$ для всех $\delta \in \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}\mu = 0$. В силу теоремы 13.2 из [23] последнее равенство эквивалентно равенству $G\mu = \mu$, что в свою очередь равносильно равенству $g(bc) = (gb)(gc)$, которое означает, что группа G действует на A автоморфизмами. Используя теорему 13.2 из [23] ещё раз, получаем, что G и $\mathfrak{g}$ имеют в A одни и те же инвариантные подпространства. □

Теперь докажем требуемый результат о замене действия:

Теорема 2.27. *Пусть A — необязательно ассоциативная конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями конечномерная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существует такое рациональное действие односвязной полупростой аффинной алгебраической группы G на A автоморфизмами, что выполняются следующие условия:*

1. *алгебра Ли группы G совпадает с $\mathfrak{g}$;*
2. *$\mathfrak{g}$-действие на A является дифференциалом G-действия на A;*

3. все $\mathfrak{g}$-подмодули в A являются G-инвариантными подпространствами и наоборот.

Доказательство. В силу теоремы 5.1 из главы XVIII монографии [70] существует односвязная аффинная алгебраическая группа G, алгебра Ли которой изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В силу теоремы 13.5 из [23] группа G полупроста, а значит и редуктивна.

Алгебра A как $\mathfrak{g}$-модуль является прямой суммой неприводимых $\mathfrak{g}$-подмодулей M_i, которые отвечают некоторым доминантным весам λ_i алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Определим на M_i неприводимые рациональные представления группы G со старшими весами λ_i. Теперь утверждение теоремы следует из предложения 2.26. □

Следствие 2.28. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, на которой действует дифференцированиями конечномерная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существует такая $\mathfrak{g}$-инвариантная максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма $\mathfrak{g}$-инвариантных подпространств).*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 2.27 и следствием 2.23. □

Как показывает пример ниже, в случае неполупростых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ подобный результат может быть неверен.

Пример 2.29. Пусть A — та же ассоциативная алгебра, что и в примере 2.25. Определим на векторном пространстве A структуру алгебры Ли при помощи коммутатора $[x, y] = xy - yx$ и обозначим соответствующую алгебру Ли через $\mathfrak{g}$. Рассмотрим стандартное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на A дифференцированиями. Тогда A оказывается $U(\mathfrak{g})$-модульной ассоциативной алгеброй (см. пример 1.33), но в A не существует такой $U(\mathfrak{g})$-инвариантной полупростой подалгебры B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма $U(\mathfrak{g})$-подмодулей).

Доказательство. Предположим, что $A = B \oplus J(A)$, где B — некоторый $U(\mathfrak{g})$-подмодуль. Тогда B является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $J(A)$ — абелевым идеалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда $J(A)$ содержится в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что не соответствует действительности. Получаем противоречие. Следовательно, $U(\mathfrak{g})$-инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева для алгебры A не существует. □

2.5 Эквивалентность (ко)модульных структур

В теоремах 2.31 и 2.32, которые доказываются ниже, мы формулируем критерии эквивалентности градуировок и наличия отношения «тоньше-грубее» между ними в терминах линейных операторов. Эти критерии затем будут использованы для того, чтобы ввести понятие эквивалентности для (ко)модульных структур.

Пусть G — группа, а F — поле. Тогда алгебра $(FG)^*$, двойственная к коалгебре FG, изоморфна алгебре всех функций $G \to F$ с поточечными операциями. Если алгебра

$A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ над полем F градуирована группой G, тогда алгебра $(FG)^*$ действует на алгебре A следующим образом: $ha = h(g)a$ для всех $h \in (FG)^*$, $a \in A^{(g)}$, $g \in G$.

Обе теоремы данного параграфа являются следствиями следующего утверждения:

Лемма 2.30. *Пусть* $\Gamma_1 \colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ *и* $\Gamma_2 \colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ *— групповые градуировки на (необязательно ассоциативных) алгебрах* A_1 *и* A_2, *а* $\varphi \colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ *— изоморфизм алгебр. Обозначим через* $\zeta_i \colon (FG_i)^* \to \mathrm{End}_F(A_i)$, *где* $i = 1, 2$, *гомоморфизм из алгебры* $(FG_i)^*$ *в алгебру* $\mathrm{End}_F(A_i)$ *линейных операторов на* A_i, *соответствующий* $(FG_i)^*$*-действию, определённому выше, а через* $\tilde\varphi$ *— изоморфизм алгебр* $\mathrm{End}_F(A_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_F(A_2)$, *заданный при помощи равенства* $\tilde\varphi(\psi)(a) = \varphi\Big(\psi\big(\varphi^{-1}(a)\big)\Big)$ *для всех* $\psi \in \mathrm{End}_F(A_1)$ *и* $a \in A_2$. *Тогда включение*

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) \supseteq \zeta_2\big((FG_2)^*\big), \tag{2.9}$$

справедливо, если и только если для любого $g_1 \in G_1$ *существует такое* $g_2 \in G_2$, *что* $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right) \subseteq A_2^{(g_2)}$.

Доказательство. Если для любого $g_1 \in G_1$ существует такое $g_2 \in G_2$, что $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right) \subseteq A_2^{(g_2)}$, то всякое подпространство $A_2^{(g_2)}$ является прямой суммой некоторых из подпространств $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right)$, поскольку

$$\bigoplus_{g_1\in G_1} \varphi\left(A_1^{(g_1)}\right) = \varphi(A_1) = A_2 = \bigoplus_{g_2\in G_2} A_2^{(g_2)}.$$

Заметим, что множество $\zeta_i\big((FG_i)^*\big)$ состоит из всех линейных операторов, которые действуют скалярно на каждой однородной компоненте $A_i^{(g_i)}$, где $g_i \in G_i$. Следовательно, множество $\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big)$ состоит из всех линейных операторов на A_2, которые действуют скалярно на каждом подпространстве $\varphi\Big(\zeta_1\left(A_1^{(g_1)}\right)\Big)$. Поскольку всякое подпространство $A_2^{(g_2)}$ является прямой суммой некоторых из подпространств $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right)$, все операторы из множества $\zeta_2\big((FG_2)^*\big)$ также действуют скалярно на каждом подпространстве $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right)$, откуда и следует включение (2.9).

Обратно, пусть справедливо включение (2.9). Обозначим через p_{g_2}, где $g_2 \in \operatorname{supp}\Gamma_2$, проекцию на подпространство $A_2^{(g_2)}$ вдоль подпространства $\bigoplus\limits_{\substack{h\in\operatorname{supp}\Gamma_2,\\ h\ne g_2}} A_2^{(h)}$, т.е. $p_{g_2}a := a$ для всех $a \in A_2^{(g_2)}$ и $p_{g_2}a := 0$ для всех $a \in \bigoplus\limits_{\substack{h\in\operatorname{supp}\Gamma_2,\\ h\ne g_2}} A_2^{(h)}$. Тогда из (2.9) следует, что $p_{g_2} \in \tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big)$ для всех $g_2 \in \operatorname{supp}\Gamma_2$. В частности, оператор p_{g_2} действует скалярно на всех компонентах $\varphi\left(A_1^{(g)}\right)$, где $g \in \operatorname{supp}\Gamma_1$. Поскольку $p_{g_2}^2 = p_{g_2}$, то для всякого $g \in \operatorname{supp}\Gamma_1$ либо $p_{g_2}\varphi\left(A_1^{(g)}\right) = 0$, либо $p_{g_2}a = a$ для всех $a \in \varphi\left(A_1^{(g)}\right)$. Следовательно, подпространство $A_2^{(g_2)} = \operatorname{im}(p_{g_2})$ является прямой суммой некоторых компонент $\varphi\left(A_1^{(g)}\right)$ для некоторых $g \in \operatorname{supp}\Gamma_1$. В силу того, что

$$\bigoplus_{g_1\in\operatorname{supp}\Gamma_1} \varphi\left(A_1^{(g_1)}\right) = \bigoplus_{g_2\in\operatorname{supp}\Gamma_2} A_2^{(g_2)},$$

для любого $g_1 \in G_1$ существует такое $g_2 \in G_2$, что $\varphi\left(A_1^{(g_1)}\right) \subseteq A_2^{(g_2)}$. □

Из леммы 2.30 вытекают следующие утверждения:

Теорема 2.31. *Пусть* $\Gamma_1\colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ *и* $\Gamma_2\colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ *— групповые градуировки на (необязательно ассоциативных) алгебрах* A_1 *и* A_2, *а* $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ *— изоморфизм алгебр. Тогда* φ *— эквивалентность градуировок, если и только если*

$$\tilde\varphi\Bigl(\zeta_1\bigl((FG_1)^*\bigr)\Bigr) = \zeta_2\bigl((FG_2)^*\bigr),$$

где $\zeta_i\colon (FG_i)^* \to \mathrm{End}_F(A_i)$ *— гомоморфизм из алгебры* $(FG_i)^*$ *в алгебру* $\mathrm{End}_F(A_i)$ *линейных операторов на* A_i, *соответствующий* $(FG_i)^*$*-действию, определённому выше,* $i = 1, 2$, *а изоморфизм алгебр* $\tilde\varphi\colon \mathrm{End}_F(A_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_F(A_2)$ *задан при помощи равенства* $\tilde\varphi(\psi)(a) = \varphi\Bigl(\psi\bigl(\varphi^{-1}(a)\bigr)\Bigr)$ *для* $\psi \in \mathrm{End}_F(A_1)$ *и* $a \in A_2$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 2.30 к φ и φ^{-1}. □

Теорема 2.32. *Пусть* $\Gamma_1\colon A = \bigoplus_{g\in G_1} A^{(g)}$ *и* $\Gamma_2\colon A = \bigoplus_{g\in G_2} A^{(g)}$ *— градуировки на одной и той же (необязательно ассоциативной) алгебре* A *и пусть* $\zeta_i\colon (FG_i)^* \to \mathrm{End}_F(A)$ *— соответствующие этим градуировкам гомоморфизмы. Тогда* Γ_1 *тоньше, чем* Γ_2, *если и только если* $\zeta_1\bigl((FG_1)^*\bigr) \supseteq \zeta_2\bigl((FG_2)^*\bigr)$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 2.30 к $A_1 = A_2 = A$ и $\varphi = \mathrm{id}_A$. □

Основываясь на теореме 2.31, дадим следующие определения:

Определение 2.33. Пусть A_i — (необязательно ассоциативные) H_i-комодульные алгебры для алгебр Хопфа H_i, $i = 1, 2$. Будем говорить, что комодульные структуры A_1 и A_2 эквивалентны при помощи изоморфизма алгебр $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$, если

$$\tilde\varphi\Bigl(\zeta_1\bigl(H_1^*\bigr)\Bigr) = \zeta_2\bigl(H_2^*\bigr), \tag{2.10}$$

где ζ_i — гомоморфизмы алгебр $H_i^* \to \mathrm{End}_F(A_i)$, индуцированные комодульными структурами на A_i, а изоморфизм $\tilde\varphi\colon \mathrm{End}_F(A_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_F(A_2)$ определён выше в теореме 2.31.

Определение 2.34. Пусть A_i — (необязательно ассоциативные) H_i-модульные алгебры для алгебр Хопфа H_i, $i = 1, 2$. Будем говорить, что комодульные структуры A_1 и A_2 эквивалентны при помощи изоморфизма алгебр $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$, если

$$\tilde\varphi\Bigl(\zeta_1\bigl(H_1\bigr)\Bigr) = \zeta_2\bigl(H_2\bigr), \tag{2.11}$$

где ζ_i — гомоморфизмы алгебр $H_i \to \mathrm{End}_F(A_i)$, задающие модульные структуры на A_i.

В случае, если $A_1 = A_2$ и не оговорено противное, под эквивалентностью (ко)модульных структур будем понимать эквивалентность при помощи тождественного изоморфизма.

Ниже в лемме 6.21 будет доказано, что числовые характеристики полиномиальных H-тождеств в алгебрах с эквивалентными H-модульными структурами совпадают.

2.6 Действия аффинных алгебраических групп

Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F и пусть $\mathcal{O}(G)$ — алгебра регулярных функций на G. Предположим, что G действует рационально автоморфизмами на конечномерной алгебре A.

Как было отмечено в примере 1.38, на A действуют три алгебры Хопфа: $\mathcal{O}(G)^\circ$, FG и $U(\mathfrak{g})$ (универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Ниже в теореме 2.36 доказывается, что все эти три действия эквивалентны в случае, когда группа G связна. Для того, чтобы это доказать, нам потребуется вспомогательная лемма:

Лемма 2.35. *Пусть V — конечномерный комодуль над коалгеброй C, $\rho\colon V \to V \otimes C$ — соответствующее комодульное отображение, а $\zeta\colon C^* \to \mathrm{End}_F(V)$ — соответствующее действие алгебры C^* на V, заданное при помощи равенства $c^*v := c^*(v_{(1)})v_{(0)}$ для $c^* \in C^*$ и $v \in V$. Пусть $A \subseteq C^*$ —* ***плотная***[3] *подалгебра, т.е.*

$$A^\perp := \{c \in C \mid a(c) = 0 \text{ для всех } a \in A\} = 0.$$

Тогда $\zeta(A) = \zeta(C^*)$.

Доказательство. В силу того, что пространство V конечномерно, существует конечномерная подкоалгебра $D \subseteq C$ такая, что $\rho(V) \subseteq V \otimes D$. Следовательно, достаточно показать, что ограничение линейных функций из обоих множеств C^* и A на подпространство на D совпадает с D^*. Для множества C^* это очевидно, так как любая линейная функция, заданная на подпространстве D, продолжается на всё пространство C. Для множества A равенство доказывается следующим образом. Линейные функции на D, соответствующие элементам алгебры A, образуют подпространство W в пространстве D^*. Если $W \neq D^*$, то в силу конечномерности пространства D существует элемент $d \in D$, $d \neq 0$, такой, что $w(d) = 0$ для всех $w \in W$. Следовательно, $d \in A^\perp$, и мы получаем противоречие с тем, что A плотно в C^*. Следовательно, ограничение линейных функций из A на D совпадает с D^*. Из равенства $\zeta(c^*) = \zeta(a)$ для всех $a \in A$, $c^* \in C^*$ таких, что $c^*\big|_D = a\big|_D$, следует, что $\zeta(A) = \zeta(C^*)$. □

Теперь мы готовы доказать теорему:

Теорема 2.36. *Пусть G — связная аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, действующая рационально автоморфизмами на конечномерной алгебре A. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Тогда соответствующие действия алгебр Хопфа FG, $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{O}(G)^\circ$ на A эквивалентны.*

Доказательство. В силу леммы 2.35 достаточно доказать, что образы алгебр FG, $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{O}(G)^\circ$ плотны в $\mathcal{O}(G)^*$. Для FG это следует из определения алгебры $\mathcal{O}(G)$. Если мы докажем, что алгебра $U(\mathfrak{g})$ плотна в $\mathcal{O}(G)^*$, отсюда сразу будет следовать, что $\mathcal{O}(G)^\circ$ также плотна в $\mathcal{O}(G)^*$, так как $U(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{O}(G)^\circ$.

[3] Именно такое определение плотности даётся в монографии [86], на результаты из которой мы ссылаемся ниже, однако из доказательства леммы видно, что это определение эквивалентно обычному определению плотности в конечной топологии.

Пусть $I := \ker\varepsilon$, множество всех полиномиальных функций из алгебры $\mathcal{O}(G)$, которые принимают нулевое значение в точке 1_G. В силу предложения 9.2.5 из [86]

$$U(\mathfrak{g}) = \{a \in \mathcal{O}(G)^\circ \mid a(I^n) = 0 \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{O}(G)',$$

где $\mathcal{O}(G)'$ неприводимая компонента для ε в $\mathcal{O}(G)^\circ$ (см. определение 5.6.1 в [86]). В силу [23, глава II, § 7.3] из связности группы G следует, что G неприводимо как многообразие. Отсюда, применив следствие из теоремы Крулля [2, следствие 10.18], получаем, что $\bigcap_{n\geqslant 1} I^n = 0$. Из предложения 9.2.10 монографии [86] следует, что $U(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}(G)'$ плотно в $\mathcal{O}(G)^*$. Отсюда $\mathcal{O}(G)^\circ$ также плотно в $\mathcal{O}(G)^*$ и действия алгебр Хопфа FG, $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{O}(G)^\circ$ на A эквивалентны. $\square$

Замечание 2.37. Доказательство теоремы 2.36 основано на идее, предложенной М. В. Кочетовым в ходе совместной работы с автором диссертации над статьёй [112].

2.7 Действия алгебр Хопфа на алгебре двойных чисел

В этом параграфе мы покажем на примере алгебры $F[x]/(x^2)$ двойных чисел, как можно использовать понятие эквивалентности модульных структур для классификации последних. Для краткости будем обозначать алгебру Хопфа Свидлера $H_4(-1)$ (см. пример 1.11) просто через H_4. Напомним, что как алгебра H_4 порождена двумя элементами c и v, удовлетворяющими соотношениям $c^2 = 1$, $v^2 = 0$ и $vc = -cv$. Структура коалгебры и антипод задаются равенствами

$$\Delta(c) = c \otimes c, \quad \Delta(v) = c \otimes v + v \otimes 1, \quad S(c) = c, \quad S(v) = -cv.$$

Теорема 2.38. *Пусть $\psi\colon H \otimes A \to A$ — структура H-модульной алгебры с 1 на $A = F[x]/(x^2)$, где H — некоторая алгебра Хопфа, $\operatorname{char} F \ne 2$. Тогда ψ эквивалентно одной из следующих модульных структур на A:*

1. *действие поля F на алгебре A умножением на скаляры;*
2. *действие групповой алгебры FG, где $G = \langle c\rangle_2$, заданное равенством $c\bar{x} = -\bar{x}$;*
3. *H_4-действие, заданное равенствами $c\bar{1} = \bar{1}$, $c\bar{x} = -\bar{x}$, $v\bar{1} = 0$, $v\bar{x} = \bar{1}$.*

Доказательство. Как и прежде, определим отображение $\zeta\colon H \to \operatorname{End}_F(A)$ через $\zeta(h)(a) = \psi(h \otimes a)$, где $a \in A$, $h \in H$. Кроме того, фиксируем базис $\bar{1}$, $\bar{x}$ в алгебре A и отождествим $\operatorname{End}_F(A)$ с алгеброй $M_2(F)$ квадратных матриц 2×2. В силу того, что A — H-модульная алгебра с 1, существуют $\alpha, \beta \in H^*$ такие, что $\zeta(h) = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon(h) & \beta(h) \\ 0 & \alpha(h) \end{smallmatrix}\right)$ для всех $h \in H$.

Из (1.2) следует, что

$$0 = h(\bar{x}^2) = (h_{(1)}\bar{x})(h_{(2)}\bar{x}) = (\beta(h_{(1)})\bar{1} + \alpha(h_{(1)})\bar{x})(\beta(h_{(2)})\bar{1} + \alpha(h_{(2)})\bar{x}) =$$
$$= \beta(h_{(1)})\beta(h_{(2)})\bar{1} + (\alpha(h_{(1)})\beta(h_{(2)}) + \beta(h_{(1)})\alpha(h_{(2)}))\bar{x}.$$

Отсюда

$$\beta(h_{(1)})\beta(h_{(2)}) = 0, \tag{2.12}$$

$$\alpha(h_{(1)})\beta(h_{(2)}) + \beta(h_{(1)})\alpha(h_{(2)}) = 0 \tag{2.13}$$

для всех $h \in H$.

Рассмотрев ранг матрицы линейного оператора ζ, заключаем, что $\dim \zeta(H) = \dim\langle \alpha, \beta, \varepsilon\rangle_F$.

Если $\dim \zeta(H) = 3$, то $\zeta(H)$ — подалгебра всех верхнетреугольных матриц, и модульная структура ψ эквивалентна структуре 3.

Пусть $\dim \zeta(H) \leqslant 2$. Если α и ε линейно зависимы, то из $\varepsilon \neq 0$ следует, что $\alpha = \gamma\varepsilon$ для некоторого $\gamma \in F$. Отсюда $1 = \alpha(1_H) = \gamma\varepsilon(1_H) = \gamma$ и $\alpha = \varepsilon$. В силу (2.13) имеем $2\beta(h) = 0$ и $\beta = 0$. Следовательно, $\zeta(H)$ — это алгебра всех скалярных матриц, и модульная структура ψ эквивалентна структуре 1.

Предположим, что $\dim \zeta(H) \leqslant 2$, однако α и ε линейно независимы. Тогда $\beta = \lambda\varepsilon + \gamma\alpha$ и из равенства $\zeta(1_H) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ следует, что $0 = \lambda + \gamma$ и $\beta = \lambda(\varepsilon - \alpha)$. Из (2.12) и (2.13) следует, что

$$\lambda^2\big(\varepsilon(h) - 2\alpha(h) + \alpha(h_{(1)})\alpha(h_{(2)})\big) = 0, \tag{2.14}$$

$$2\lambda\left(\alpha(h) - \alpha(h_{(1)})\alpha(h_{(2)})\right) = 0 \tag{2.15}$$

для всех $h \in H$. Предположим, что $\lambda \neq 0$. В силу того, что $\operatorname{char} F \neq 2$, из (2.15) следует, что

$$\alpha(h_{(1)})\alpha(h_{(2)}) = \alpha(h).$$

Поэтому из (2.14) получаем, что

$$\alpha(h) = \varepsilon(h),$$

что противоречит предположению о линейной независимости α и ε. Следовательно, $\lambda = 0$ и $\beta = 0$. Отсюда $\zeta(H)$ совпадает с алгеброй диагональных матриц и модульная структура ψ эквивалентна структуре 2. $\square$

2.8 Алгебры с действием расширений Оре

В §2.9–2.10 будут классифицированы конечномерные $H_{m^2}(\zeta)$-простые $H_{m^2}(\zeta)$-модульные ассоциативные алгебры, где $H_{m^2}(\zeta)$ — алгебра Тафта. Однако определённые структурные результаты могут быть получены и в более общем случае алгебр, простых по отношению к действию алгебр Хопфа, полученных при помощи расширений Оре. Эти результаты будут затем использованы в главе 7 для доказательства гипотезы Амицура — Бахтурина для H-модульных алгебр в случае, когда алгебра Хопфа H получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами (теорема 7.13).

В данном параграфе доказывается, что если A — конечномерная H-простая H-модульная алгебра, где H — алгебра Хопфа, полученная при помощи расширения Оре некоторой алгебры Хопфа $\tilde{H}$ косопримитивным элементом v, то алгебра $A/J^{\tilde{H}}(A)$ является $\tilde{H}$-простой. Если при этом $A/J^{\tilde{H}}(A) \neq 0$, то, применяя оператор v достаточное число раз, можно перевести всякий ненулевой элемент в элемент, не принадлежащий $J^{\tilde{H}}(A)$. Это свойство будет затем использовано в доказательстве теоремы 7.7.

Напомним сперва определение расширения Оре.

Определение 2.39. Пусть заданы ассоциативная алгебра C над полем F, автоморфизм $\varphi\colon C \xrightarrow{\sim} C$ и *φ-косое дифференцирование* $\delta\colon C \to C$, т.е. такое отображение δ, что $\delta(ab) = \varphi(a)\delta(b) + \delta(a)b$ для всех $a, b \in C$. Тогда *расширение Оре* $C[v, \varphi, \delta]$ состоит из всевозможных формальных многочленов $\sum_{i=0}^{n} a_i v^n$, где $a_i \in C$, $n \in \mathbb{Z}_+$, умножение которых индуцировано умножением в алгебре C с учётом соотношения $va - \varphi(a)v = \delta(a)$ для всех $a \in C$.

Заметим, что если B — алгебра, порождённая элементом v и подалгеброй $C \subseteq B$, а $\varphi\colon C \xrightarrow{\sim} C$ — такой автоморфизм алгебры, что $va - \varphi(a)v \in C$ для всех $a \in C$, то отображение δ, определённое при помощи равенства

$$\delta(a) = va - \varphi(a)v \text{ для } a \in C,$$

всегда является φ-косым дифференцированием на C. В этом случае $B \cong C[v, \varphi, \delta]/I$, где I — некоторый такой идеал алгебры B, что $C \cap I = 0$.

Определение 2.40. Мы будем говорить, что алгебра B *получена при помощи расширения Оре алгебры C элементом v*.

Элемент $v \in H$ называется *косопримитивным*, если $\Delta v = g_1 \otimes v + v \otimes g_2$ для некоторых $g_1, g_2 \in G(H)$.

Пример 2.41. Алгебра Тафта $H_{m^2}(\zeta)$ получена при помощи расширения Оре групповой алгебры FC_m, где $C_m = \langle c \rangle_m$ — циклическая группа порядка m, косопримитивным элементом v. Как алгебра $H_{m^2}(\zeta) \cong FC_n[v, \varphi, 0]/I$, где автоморфизм φ задан равенством $\varphi(c) = \zeta c$, а идеал I порождён элементом v^m.

С другими примерами алгебр Хопфа, полученных при помощи расширений Оре можно познакомиться, например, в [51, §5.6].

Лемма 2.42. *Пусть алгебра Хопфа H над полем F порождена как алгебра своей подалгеброй Хопфа $\tilde{H}$ и косопримитивным элементом $v \in H$, где $\Delta v = g_1 \otimes v + v \otimes g_2$, $g_1, g_2 \in G(\tilde{H})$. Пусть A — конечномерная ассоциативная H-простая H-модульная алгебра. Тогда либо A является $\tilde{H}$-простой, либо $J^{\tilde{H}}(A) \neq 0$.*

Доказательство. Предположим, что $J^{\tilde{H}}(A) = 0$. В силу теоремы 2.18 и леммы 2.19 существует разложение $A = N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$ (прямая сумма $\tilde{H}$-инвариантных идеалов) для некоторых $\tilde{H}$-простых алгебр N_i с единицей. Докажем, что все N_i являются H-подмодулями. Достаточно показать, что $vN_i \subseteq N_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$. Пусть $a \in N_i$ и $b \in N_j$, $i \neq j$. Тогда

$$(va)b = v(a(g_2^{-1}b)) - (g_1a)(vg_2^{-1}b) = -(g_1a)(vg_2^{-1}b) \in N_i.$$

В то же время $b \in N_j$ и $(va)b \in N_j$. Следовательно, $(va)b = 0$. Аналогично получаем, что $b(va) = 0$. Поскольку элемент $b \in N_j$, где $j \neq i$, является произвольным, получаем $va \in N_i$. Следовательно, все N_i являются H-инвариантными, $s = 1$, и алгебра A является $\tilde{H}$-простой. $\square$

Для всякой алгебры Хопфа H будем обозначать через $\mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(H)$ группу всевозможных автоморфизмов H как алгебры, т.е. таких линейных биекций, от которых требуется лишь сохранение умножения.

Теорема 2.43. *Пусть алгебра Хопфа H над полем F порождена как алгебра своей подалгеброй Хопфа $\tilde{H}$ и косопримитивным элементом $v \in H$, где $\Delta v = g_1 \otimes v + v \otimes g_2$, $g_1, g_2 \in G(\tilde{H})$. Предположим также, что существует такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(\tilde{H})$, что что $vh - \varphi(h)v \in \tilde{H}$ для всех $h \in \tilde{H}$. Пусть A — конечномерная ассоциативная H-простая H-модульная алгебра с $J^{\tilde{H}}(A) \neq 0$. Обозначим через q такое натуральное число, что $J^{\tilde{H}}(A)^q = 0$, а $J^{\tilde{H}}(A)^{q-1} \neq 0$. Пусть $\tilde{J} \subseteq J^{\tilde{H}}(A)^{q-1}$ — минимальный двухсторонний $\tilde{H}$-инвариантный идеал. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что*

$$I_k := \bigoplus_{i=0}^{k-1} v^i \tilde{J}$$

при всех $1 \leqslant k \leqslant m$ являются $\tilde{H}$-инвариантными идеалами, $I_m = A$, $I_{m-1} = J^{\tilde{H}}(A)$. Также для всех $0 \leqslant k \leqslant m-1$ отображение $v^k\tilde{J} \twoheadrightarrow v^{k+1}\tilde{J}$, заданное при помощи формулы $a \mapsto va$, является F-линейной биекцией. Более того, $A/J^{\tilde{H}}(A)$ — $\tilde{H}$-простая алгебра.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы 2.43, дадим несколько определений.

Пусть A — (левая) H-модульная алгебра. Будем говорить, что M — *$(H,(A,A))$-бимодуль*, если M — (левый) H-модуль и (A,A)-бимодуль и при этом $h(am) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}m)$, $h(ma) = (h_{(1)}m)(h_{(2)}a)$ для всех $a \in A$ и $m \in M$.

Пусть $\psi\colon M_1 \to M_2$ — F-линейное отображение, где M_1 и M_2 являются $(H,(A,A))$-бимодулями. Пусть $g_1, g_2 \in G(H)$ и пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(H)$. Будем говорить, что ψ — *(φ, g_1, g_2)-гомоморфизм*, если $\psi(am) = (g_1a)\psi(m)$, $\psi(ma) = \psi(m)(g_2a)$ и $\psi(hm) = \varphi(h)\psi(m)$. Если такое отображение ψ биективно, будем говорить, что ψ — *(φ, g_1, g_2)-изоморфизм*. Ясно, что в этом случае ψ^{-1} является $(\varphi^{-1}, g_1^{-1}, g_2^{-1})$-изоморфизмом.

Доказательство теоремы 2.43. Если идеал $\tilde{J}$ инвариантен относительно действия v, то $\tilde{J}$ является H-инвариантным идеалом алгебры A, откуда $A = \tilde{J}$ в силу H-простоты алгебры A. Тогда из $\tilde{J} \subseteq J(A)$ следует, что $A^2 = \tilde{J}^2 = 0$, что противоречит определению H-простой алгебры. Отсюда $v\tilde{J} \subsetneqq \tilde{J}$.

Введём обозначение

$$I_k := \sum_{i=0}^{k-1} v^i \tilde{J} \text{ при } k \geqslant 1.$$

Поскольку $hva \in v\varphi^{-1}(h)a + \tilde{H}a$ для всех $h \in \tilde{H}$ и $a \in A$, подпространства I_k являются $\tilde{H}$-подмодулями.

Более того, поскольку элемент v косопримитивен, справедливы равенства

$$b(va) = v((g_1^{-1}b)a) - (vg_1^{-1}b)(g_2a)$$

и

$$(va)b = v(a(g_2^{-1}b)) - (g_1a)(vg_2^{-1}b)$$

для всех $a, b \in A$. Рассматривая произвольные $a \in I_k$, по индукции получаем, что все I_k являются двусторонними идеалами.

В силу того, что алгебра A конечномерна, существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $I_k \subsetneqq I_{k+1}$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$, а $I_{m+1} = I_m$. Тогда $\tilde{H}$-модуль I_m инвариантен относительно действия v, откуда $A = I_m$ в силу H-простоты алгебры A.

Пусть $I_0 := 0$. Определим сюрьективные F-линейные отображения

$$\theta_k \colon I_k/I_{k-1} \twoheadrightarrow I_{k+1}/I_k, \text{ где } 1 \leqslant k \leqslant m-1,$$

при помощи равенств

$$\theta_k(a + I_{k-1}) := va + I_k, \quad a \in I_k.$$

Заметим, что

$$\theta_k((a + I_{k-1})b) = v(ab) + I_k = (g_1a)(vb) + (va)(g_2b) + I_k = \theta_k(a + I_{k-1})(g_2b)$$

и

$$\theta_k(b(a + I_{k-1})) = v(ba) + I_k = (g_1b)(va) + (vb)(g_2a) + I_k = (g_1b)\theta_k(a + I_{k-1})$$

для всех $a \in I_k$, $b \in A$.

Более того,

$$\theta_k(h(a + I_{k-1})) = vha + I_k = \varphi(h)va + I_k = \varphi(h)\theta_k(a + I_{k-1}).$$

Следовательно, θ_k является (φ, g_1, g_2)-гомоморфизмом.

Поскольку $I_1 = \tilde{J}$ является неприводимым $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодулем, либо отображение θ_1 биективно, либо $I_2/I_1 = 0$, т.е. $m = 1$. В первом случае I_2/I_1 также является неприводимым $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодулем. Продолжая эту процедуру, мы получаем, что I_k/I_{k-1}, $1 \leqslant k \leqslant m$, являются неприводимыми $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодулями, $(\varphi^{1-k}, g_1^{1-k}, g_2^{1-k})$-изоморфными $\tilde{J}$. Сравнивая их размерности, получаем, что отображение $v^k\tilde{J} \twoheadrightarrow v^{k+1}\tilde{J}$, определённое при помощи формулы $a \mapsto va$ должно быть F-линейной биекцией для всех $0 \leqslant k \leqslant m-1$ и сумма в определении идеалов I_k прямая.

Из $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодульной версии теоремы Жордана — Гёльдера следует, что в любом композиционном ряде $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодулей в A всякий фактор $(\tilde{\varphi}, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$-изоморфен $(\tilde{H}, (A, A))$-бимодулю $\tilde{J}$ для подходящих $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(\tilde{H})$, $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in G(\tilde{H})$. В силу теоремы 2.18 существует разложение $A/J^{\tilde{H}}(A) = N_1 \oplus \ldots \oplus N_s$ (прямая сумма $\tilde{H}$-инвариантных идеалов) для некоторых $\tilde{H}$-простых алгебры N_i. Предположим, что $s \geqslant 2$. Поскольку N_1 и N_2 являются неприводимыми факторами в композиционном ряде $(\tilde{H},(A,A))$-бимодулей алгебры A, существует $(\tilde{\varphi},\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)$-изоморфизм $\psi\colon N_1 \xrightarrow{\sim} N_2$ для некоторых $\tilde{g}_1,\tilde{g}_2 \in G(\tilde{H})$ и $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(H)$.

Обозначим через $\bar{a}$ образ элемента $a \in A$ в $A/J^{\tilde{H}}(A)$. Тогда для всех $\bar{a},\bar{b} \in N_2$ имеем

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{a}b = \psi(\psi^{-1}(\bar{a}))b = \psi(\psi^{-1}(\bar{a})(\tilde{g}_2^{-1}b)) = \psi(\psi^{-1}(\bar{a})(\tilde{g}_2^{-1}\bar{b})) = 0,$$

поскольку $\psi^{-1}(\bar{a}) \in N_1$ и $\tilde{g}_2^{-1}\bar{b} \in N_2$. Отсюда $N_2^2 = 0$ и мы получаем противоречие с тем, что идеал N_2 является $\tilde{H}$-простой алгеброй. Следовательно, $s = 1$ и $A/J^{\tilde{H}}(A)$ является $\tilde{H}$-простой алгеброй. В частности, $J^{\tilde{H}}(A)$ является максимальным $\tilde{H}$-инвариантным идеалом.

Докажем, что $J^{\tilde{H}}(A)$ является единственным максимальным $\tilde{H}$-инвариантным идеалом. Действительно, если $I \subseteq A$ был бы другим $\tilde{H}$-инвариантным идеалом таким, что $I \subsetneqq J^{\tilde{H}}(A)$, тогда было бы справедливо равенство $A = I + J^{\tilde{H}}(A)$ и существовал бы изоморфизм

$$A/(I \cap J^{\tilde{H}}(A)) \cong I/(I \cap J^{\tilde{H}}(A)) \oplus J^{\tilde{H}}(A)/(I \cap J^{\tilde{H}}(A))$$

(прямая сумма $\tilde{H}$-инвариантных идеалов). Поскольку в силу леммы 2.19 алгебра A с единицей, алгебра $A/(I \cap J^{\tilde{H}}(A))$ и, следовательно, алгебра $J^{\tilde{H}}(A)/(I \cap J^{\tilde{H}}(A))$ также должны были бы быть с единицей, что противоречит нильпотентности идеала $J^{\tilde{H}}(A)$. Следовательно, $J^{\tilde{H}}(A)$ действительно является единственным максимальным $\tilde{H}$-инвариантым идеалом алгебры A.

Поскольку A/I_{m-1} как $(\tilde{H},(A,A))$-бимодуль $(\varphi^{1-m}, g_1^{1-m}, g_2^{1-m})$-изоморфен $\tilde{J}$, а $\tilde{J}$ является неприводимым $(\tilde{H},(A,A))$-бимодулем, A/I_{m-1} — $\tilde{H}$-простая алгебра. Следовательно, I_{m-1} также является максимальным $\tilde{H}$-инвариантным идеалом, и $I_{m-1} = J^{\tilde{H}}(A)$. □

При помощи теоремы 2.43 можно определить F-линейное отображение $\psi\colon A \to A$ при помощи формул $\psi(v^k a) := v^{k-1}a$ для $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $a \in \tilde{J}$, и $\psi(\tilde{J}) := 0$. Заметим, что $\psi^m = 0$, а $\psi(A) = J^{\tilde{H}}(A)$.

Определим теперь F-линейные отображения $\psi_k\colon A/J^{\tilde{H}}(A) \to A$, где $0 \leqslant k \leqslant m-1$, следующим образом. Для всякого $\bar{a} \in \bar{A} := A/J^{\tilde{H}}(A)$ существует единственный такой элемент $a \in v^{m-1}\tilde{J}$, что $\bar{a} = a + J^{\tilde{H}}(A)$. Определим $\psi_k(\bar{a}) := \psi^k(a)$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$. Тогда $A = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \psi_k(\bar{A})$. Другими словами, алгебра A составлена из образов алгебры $\bar{A}$. Произведения элементов $\psi_k(a)$ будут вычислены в следующем разделе.

Исследуем, как ведёт себя отображение ψ_{m-1} по отношению к $\tilde{H}$-действию.

Предложение 2.44. *Предположим, что выполнены предположения теоремы 2.43. Тогда $h\psi_{m-1}(\bar{a}) = \psi_{m-1}(\varphi^{m-1}(h)\bar{a})$ для всех $\bar{a} \in \bar{A}$ и $\tilde{h} \in \tilde{H}$.*

Доказательство. Поскольку $\psi_{m-1}(\bar{a}) \in \tilde{J}$, а $\tilde{J}$ — $\tilde{H}$-инвариантный идеал, $h\psi_{m-1}(\bar{a}) = b$ для некоторого $b \in \tilde{J}$. Пусть $\delta(h) := vh - \varphi(h)v$, где $h \in \tilde{H}$. Тогда

$$v^{m-1}b = v^{m-1}h\psi_{m-1}(\bar{a}) = v^{m-2}\varphi(h)v\psi_{m-1}(\bar{a}) + v^{m-2}\delta(h)\psi_{m-1}(\bar{a}) =$$
$$= \varphi^{m-1}(h)v^{m-1}\psi_{m-1}(\bar{a}) + \sum_{i=0}^{m-2} v^{m-i-2}\delta\left(\varphi^i(h)\right)v^i\psi_{m-1}(\bar{a}) =$$
$$= \varphi^{m-1}(h)\psi_0(a) + \sum_{i=0}^{m-2} v^{m-i-2}\delta\left(\varphi^i(h)\right)v^i\psi_{m-1}(\bar{a}).$$

В силу теоремы 2.43 второе слагаемое принадлежит $J^{\tilde{H}}(A)$. Следовательно, $\pi(v^{m-1}b) = \varphi^{m-1}(h)\bar{a}$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J^{\tilde{H}}(A)$ — естественный сюръективный гомоморфизм. Поскольку $v^{m-1}b \in v^{m-1}\tilde{J}$, получаем $\psi_0(\varphi^{m-1}(h)\bar{a}) = v^{m-1}b$ и

$$h\psi_{m-1}(\bar{a}) = b = \psi_{m-1}(\varphi^{m-1}(h)\bar{a}).$$

□

2.9 Умножение в алгебрах, простых по отношению к действию расширений Оре

В этом параграфе мы покажем, что при некоторых дополнительных предположениях относительно H умножение в H-простой алгебре A определяется умножением в $\tilde{H}$-простой алгебре $A/J^{\tilde{H}}(A)$. Примерами алгебр Хопфа H, для которых справедливы результаты параграфа по-прежнему служат алгебра Тафта $H_{m^2}(\zeta)$ и алгебры Хопфа из [51, §5.6]. В частности, удаётся получить полную классификацию конечномерных неполупростых $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр (теоремы 2.49 и 2.50).

В теореме 2.45, которая доказывается ниже, используются *квантовые биномиальные коэффициенты*:

$$\binom{n}{k}_\zeta := \frac{n!_\zeta}{(n-k)!_\zeta\ k!_\zeta},$$

где $n!_\zeta := n_\zeta(n-1)_\zeta \cdot \ldots \cdot 1_\zeta$ и $n_\zeta := 1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $0_\zeta := 1$. При этом даже при $n!_\zeta = 0$ мы считаем, что $\binom{n}{n}_\zeta := \binom{n}{0}_\zeta := 1$.

Пусть H — алгебра Хопфа над полем F, порождённая как алгебра подалгеброй Хопфа $\tilde{H}$ и косопримитивным элементом $v \in H$, где $\Delta v = g \otimes v + v \otimes 1$, $g \in G(\tilde{H})$. Предположим также, что существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{Alg}}(\tilde{H})$ такой, что $vh - \varphi(h)v \in \tilde{H}$ для всех $h \in \tilde{H}$, причём $vg = \varphi(g)v$ и $\varphi(g) = \zeta g$ для примитивного корня ζ степени t из единицы, где $v^t\tilde{J} \subseteq \tilde{J}$, например, $v^t \in \tilde{H}$. Пусть A — конечномерная ассоциативная H-простая H-модульная алгебра с $J^{\tilde{H}}(A) \ne 0$. Обозначим через $\tilde{J} \subseteq J^{\tilde{H}}(A)^{q-1}$ некоторый минимальный двухсторонний $\tilde{H}$-инвариантный идеал, где натуральное число q задано условиями $J^{\tilde{H}}(A)^q = 0$ и $J^{\tilde{H}}(A)^{q-1} \ne 0$. Введём обозначение $v^{-1}\tilde{J} := \{a \in A \mid va \in \tilde{J}\}$.

Теорема 2.45. *Число t равно числу m из теоремы 2.43, подпространство $B := v^{-1}\tilde{J}$ является g-инвариантной подалгеброй, которая совпадает с $v^{m-1}\tilde{J}$, имеет место разложение $A = B \oplus J^{\tilde{H}}(A)$ (прямая сумма подпространств), отображение $\psi_0\colon A/J^{\tilde{H}}(A) \xrightarrow{\sim} B$ является изоморфизмом алгебр и для любых $0 \leqslant k, \ell < m$ и $\bar{a}, \bar{b} \in A/J^{\tilde{H}}(A)$ справедлива формула*

$$\psi_k(\bar{a})\psi_\ell(\bar{b}) = \tbinom{k+\ell}{k}_\zeta \psi_{k+\ell}((g^\ell\bar{a})\bar{b}). \tag{2.16}$$

(Здесь ψ_k — отображения, определённые в конце §2.8.)

Для того, чтобы доказать теорему 2.45, нам потребуется несколько лемм.

Прежде всего заметим, что $\psi(ga) = \zeta^{-1}g\psi(a)$ для всех $a \in A$, где ψ — отображение, определённое в предыдущем параграфе.

Лемма 2.46. *Для всех $a \in A$ и $b \in v^{-1}\tilde{J}$ справедливы равенства $\psi(ab) = \psi(a)b$ и $\psi(ba) = (g^{-1}b)\psi(a)$.*

Доказательство. В случае $a \in \tilde{J}$ утверждение леммы очевидно, так как $\psi(\tilde{J}) = 0$. Поскольку в силу теоремы 2.43 справедливо равенство $A = vJ^{\tilde{H}}(A) + \tilde{J}$, достаточно доказать равенства из формулировки в случае, когда $a = vu$ для некоторого $u \in J^{\tilde{H}}(A)$. Заметим, что по определению $\psi(vu) = u$ для всех $u \in J^{\tilde{H}}(A)$. Более того, $J^{\tilde{H}}(A)$ является $\tilde{H}$-инвариантным двухсторонним идеалом и $(gu)(vb) \in J^{\tilde{H}}(A)\tilde{J} = 0$. Следовательно,

$$\psi(ab) = \psi((vu)b) = \psi(v(ub)) - \psi((gu)(vb)) = ub = \psi(vu)b = \psi(a)b.$$

Аналогично,

$$\psi(ba) = \psi(b(vu)) = \psi(v((g^{-1}b)u)) - \psi((vg^{-1}b)u) =$$
$$= (g^{-1}b)u - \zeta^{-1}\psi((g^{-1}vb)u) = (g^{-1}b)\psi(vu) - 0 = (g^{-1}b)\psi(a).$$

□

Теперь мы можем доказать формулу, в которою входят степени отображения ψ.

Лемма 2.47. *Пусть $a, b \in v^{-1}\tilde{J}$, $0 \leqslant k, \ell < t$. Тогда*

$$\psi^k(a)\psi^\ell(b) = \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}((g^\ell a)b). \tag{2.17}$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по $k+\ell$. Если $k = 0$ и $\ell = 0$, то (2.17) является следствием леммы 2.46. Предположим, что $k, \ell \geqslant 1$. Тогда $\psi^k(a), \psi^\ell(b) \in J^{\tilde{H}}(A)$. Для всех $u \in A$ выполнено $v\psi(u) - u \in \tilde{J}$. Поскольку $J^{\tilde{H}}(A)\tilde{J} = \tilde{J}J^{\tilde{H}}(A) = 0$, выполнено $(g\psi^k(a))v\psi^\ell(b) = (g\psi^k(a))\psi^{\ell-1}(b)$ и $(v\psi^k(a))\psi^\ell(b) = \psi^{k-1}(a)\psi^\ell(b)$. Кроме того, для всех $u \in J^{\tilde{H}}(A)$ справедливо равенство $\psi(vu) = u$. Следовательно,

$$\psi^k(a)\psi^\ell(b) = \psi(v(\psi^k(a)\psi^\ell(b))) =$$
$$= \psi((g\psi^k(a))v\psi^\ell(b) + (v\psi^k(a))\psi^\ell(b)) = \psi(\zeta^k(\psi^k(ga))\psi^{\ell-1}(b) + \psi^{k-1}(a)\psi^\ell(b)) =$$
$$= \psi\left(\zeta^k\binom{k+\ell-1}{k}_\zeta \psi^{k+\ell-1}((g^\ell a)b) + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta \psi^{k+\ell-1}((g^\ell a)b)\right) = \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}((g^\ell a)b).$$

□

Следствие 2.48. *Пусть m — число из теоремы 2.43. Тогда $t = m$ и ζ — примитивный корень степени m из единицы.*

Доказательство. Сперва заметим, что из $v^t\tilde{J} \subseteq \tilde{J}$ следует, что I_t является H-инвариантным идеалом алгебры A и $m \leqslant t$. Кроме того, $m \geqslant 2$, так как $I_{m-1} = J^{\tilde{H}}(A) \neq 0$. В силу леммы 2.19 алгебра A содержит единицу 1_A, причём $1_A \notin I_{m-1}$, поскольку I_{m-1} является нетривиальным идеалом. Отсюда $\psi^{m-1}(1_A) \in J^{\tilde{H}}(A)\backslash\{0\}$. Так как $v\psi(a) - a \in \tilde{J}$ для всех $a \in A$, получаем $v\psi^{m-1}(1_A) = \psi^{m-2}(1_A) + j_1$ и $v\psi(1_A) = 1_A + j_2$ для некоторых $j_1, j_2 \in \tilde{J}$. Заметим, что $\psi^{m-1}(1_A)\psi(1_A) = \binom{m}{m-1}_\zeta \psi^m(1_A) = 0$. Однако

$$0 = v(\psi^{m-1}(1_A)\psi(1_A)) = (v\psi^{m-1}(1_A))\psi(1_A) + (g\psi^{m-1}(1_A))v\psi(1_A) =$$
$$= (\psi^{m-2}(1_A) + j_1)\psi(1_A) + \zeta^{m-1}\psi^{m-1}(1_A)(1_A + j_2) = \psi^{m-2}(1_A)\psi(1_A) + \zeta^{m-1}\psi^{m-2}(1_A)1_A =$$
$$= \left(\binom{m-1}{m-2}_\zeta + \zeta^{m-1}\right)\psi^{m-1}(1_A) = m_\zeta\ \psi^{m-1}(1_A),$$

так как $J^{\tilde{H}}(A)\tilde{J} = \tilde{J}J^{\tilde{H}}(A) = 0$. Следовательно, $m_\zeta = 0$ и $t = m$. $\square$

Доказательство теоремы 2.45. По условию $v^{m-1}\tilde{J} \subseteq v^{-1}\tilde{J}$. Заметим, что

$$vJ^{\tilde{H}}(A) = vI_{m-1} = \bigoplus_{i=1}^{m-1} v^i \tilde{J}$$

и $v^{-1}\tilde{J} \cap J^{\tilde{H}}(A) = 0$. Следовательно, $v^{-1}\tilde{J} = v^{m-1}\tilde{J}$. Так как $\tilde{J}$ является $\tilde{H}$-инвариантным идеалом,

$$v(ab) = (ga)(vb) + (va)b \in \tilde{J} \text{ для всех } a, b \in v^{-1}\tilde{J},$$

и $v^{-1}\tilde{J}$ — подалгебра. Теперь из

$$A = v^{m-1}\tilde{J} \oplus J^{\tilde{H}}(A) \qquad \text{(прямая сумма подпространств)}$$

следует, что $A = B \oplus J^{\tilde{H}}(A)$, а из (2.17) следует (2.16). $\square$

Теперь применим полученные результаты в случае, когда H является алгеброй Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, т.е. $\tilde{H} = FC_m$ и $vc = \zeta cv$. При этом будем пользоваться соответствием между FC_m-модульными алгебрами и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированными алгебрами, которое основано на изоморфизмах $(FC_m)^* \cong FC_m$ (см., например, [66, §3.2]) и $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \cong (C_m, \cdot)$. Для того, чтобы не перегружать обозначения, будем обозначать компоненту $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированной алгебры A, отвечающую элементу $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, через $A^{(k)}$, где $0 \leqslant k \leqslant m-1$, а не через $A^{(\bar{k})}$.

Начнём с того, что приведём примеры ассоциативных $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр, а затем докажем, что любая из конечномерных неполупростых ассоциативных $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр изоморфна одной из $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебр из теоремы ниже:

Теорема 2.49. *Пусть B — некоторая $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая ассоциативная алгебра над полем F, содержащим примитивный корень ζ степени m из единицы. Положим $W_0 := B$ и определим векторные пространства W_i, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$, как копии векторного пространства B. Обозначим одной и той же буквой ψ соответствующие линейные биекции $W_{i-1} \to W_i$ и зададим на каждом W_i градуировку группой $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ по формуле $W_i^{(\ell+1)} := \psi\left(W_{i-1}^{(\ell)}\right)$. Положим $\psi(W_{m-1}) := 0$. Рассмотрим $H_{m^2}(\zeta)$-модуль $A = \bigoplus_{i=0}^{m-1} W_i$ (прямая сумма подпространств), где $v\psi(a) := a$ для всех $a \in W_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-2$, $vB := 0$, а $ca^{(i)} := \zeta^i a^{(i)}$ для всех $a^{(i)} \in A^{(i)}$, $A^{(i)} := \bigoplus_{k=0}^{m-1} W_k^{(i)}$ (прямая сумма подпространств). Определим на A умножение при помощи формулы*

$$\psi^k(a)\psi^\ell(b) := \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}((c^\ell a)b) \text{ для всех } a, b \in B \text{ и } 0 \leqslant k, \ell < m.$$

Тогда A — ассоциативная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра.

Доказательство. То, что формулы выше действительно задают на A структуру $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры, проверяется непосредственно.

Пусть I — $H_{m^2}(\zeta)$-инвариантный двухсторонний идеал алгебры A. В силу того, что $v^m = 0$, справедливо равенство $v^m I = 0$. Обозначим через $t \in \mathbb{Z}_+$ такое число, что $v^t I \neq 0$, однако $v^{t+1}I = 0$. Тогда $0 \neq v^t I \subseteq I \cap \ker v$. Однако $\ker v = B$ является градуированно простой алгеброй. Следовательно, $\ker v \subseteq I$. Поскольку $1_A = 1_B \in I$, получаем $I = A$. Отсюда алгебра A является $H_{m^2}(\zeta)$-простой. $\square$

Теперь докажем, что мы действительно получили все неполупростые ассоциативные $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры.

Теорема 2.50. *Пусть A — конечномерная ассоциативная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над полем F, содержащим примитивный корень ζ степени m и $J(A) \neq 0$. Тогда A изоморфна алгебре из теоремы 2.49.*

Доказательство. Из теоремы 2.45 следует, что $v^{-1}\tilde{J} = v^{m-1}\tilde{J}$. Из равенства $v^m = 0$, которое выполняется в алгебре Тафта, получаем, что

$$v^{m-1}\tilde{J} \subseteq \ker v \subseteq v^{-1}\tilde{J}$$

и

$$\ker v = v^{-1}\tilde{J} = v^{m-1}\tilde{J} \cong A/J^{FC_m}(A)$$

— градуированно простая алгебра. Теперь достаточно положить $W_i := v^{m-i+1}\tilde{J}$ и снова применить теорему 2.45. $\square$

Замечание 2.51. Поскольку максимальная полупростая подалгебра $\ker v$ определена однозначно, любые две такие $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры A изоморфны как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры, если и только если их подалгебры $\ker v$ изоморфны как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированные алгебры. Более того, все автоморфизмы алгебры A как $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры порождаются автоморфизмами алгебры $\ker v$ как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированной алгебры. Действительно, пусть $\theta\colon A \to A$ — автоморфизм алгебры A как $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры. Тогда из

$$\tilde{J} = (\psi(1_A))^{m-1} (\ker v) = J(A)^{m-1}$$

следует, что $\theta(\tilde{J}) = \tilde{J}$ и

$$v^{m-1}\theta(\psi^{m-1}(a)) = \theta(a) \text{ для всех } a \in \ker v,$$

откуда

$$\theta(\psi^{m-1}(a)) = \psi^{m-1}(\theta(a)).$$

Применяя v^{m-k-1}, получаем $\theta(\psi^k(a)) = \psi^k(\theta(a))$ для всех $a \in \ker v$ и $0 \leqslant k < m$.

2.10 Полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры

Для завершения классификации конечномерных ассоциативных $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр осталось рассмотреть случай, когда такие алгебры полупросты. Оказывается, все полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры являются FC_m-простыми, т.е. не имеют нетривиальных идеалов, инвариантных относительно действия оператора c:

Теорема 2.52. *Пусть A — конечномерная полупростая ассоциативная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F. Тогда*

$$A \cong \underbrace{M_k(F) \oplus M_k(F) \oplus \ldots \oplus M_k(F)}_{t} \qquad \text{(прямая сумма идеалов)}$$

для некоторых $k, t \in \mathbb{N}$, $t \mid m$, и существуют такие матрицы $P \in M_k(F)$ и $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$, где $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$, E_k — единичная матрица размера $k \times k$, $QPQ^{-1} = \zeta^{-t}P$, $P^m = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$, что

$$c\,(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (Qa_tQ^{-1}, a_1, \ldots, a_{t-1}), \tag{2.18}$$

$$v\,(a_1, a_2, \ldots, a_t) = (Pa_1 - (Qa_tQ^{-1})P, \zeta(Pa_2 - a_1P), \ldots, \zeta^{t-1}(Pa_t - a_{t-1}P)) \tag{2.19}$$

для всех $a_1, a_2, \ldots, a_t \in M_k(F)$.

Замечание 2.53. Диагонализируя Q, можно считать, что

$$Q = \operatorname{diag}\Big\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{\zeta^t, \ldots, \zeta^t}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\zeta^{t\left(\frac{m}{t}-1\right)}, \ldots, \zeta^{t\left(\frac{m}{t}-1\right)}}_{k_{\frac{m}{t}}}\Big\}$$

для некоторых $k_1, \ldots, k_{\frac{m}{t}} \in \mathbb{Z}_+$, $k_1 + \ldots + k_{\frac{m}{t}} = k$. Теперь из $QPQ^{-1} = \zeta^{-t}P$ следует, что $P = (P_{ij})$ является блочной матрицей, где P_{ij} — матрица размера $k_{i-1} \times k_{j-1}$, причём $P_{ij} = 0$ для всех $j \ne i+1$ и $(i,j) \ne \left(\frac{m}{t}, 1\right)$.

Прежде, чем доказывать теорему 2.52, докажем три вспомогательные леммы. В первых двух мы докажем все утверждения теоремы 2.52, за исключением равенства $P^m = \alpha E_k$. В лемме 2.54 рассматривается случай $t = 1$, т.е. когда алгебра A изоморфна алгебре всех квадратных матриц.

Лемма 2.54. *Пусть A — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F, изоморфная как алгебра алгебре $M_k(F)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют такие матрицы $P \in M_k(F)$, $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$, $Q^m = E_k$, что $QPQ^{-1} = \zeta^{-1}P$ и A изоморфна как $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра алгебре $M_k(F)$, наделённой следующим $H_{m^2}(\zeta)$-действием: $ca = QaQ^{-1}$ и $va = Pa - (QaQ^{-1})P$ для всех $a \in M_k(F)$.*

Доказательство. Все автоморфизмы полных матричных алгебр внутренние (см., например, [26, §4.3]). Отсюда $ca = QaQ^{-1}$ для некоторой матрицы $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$. Поскольку $c^m = 1$, матрица Q^m скалярная. Умножая Q на корень m-й степени из соответствующего скаляра, мы можем считать, что $Q^m = E_k$.

Напомним, что элемент v действует на A как косое дифференцирование. Докажем[4], что это косое дифференцирование является *внутренним*, т.е. существует такая матрица $P \in A$, что $va = Pa - (ca)P$ для всех $a \in A$. Действительно, для всех $a, b \in A$ справедливы равенства

$$Q^{-1}(v(ab)) = Q^{-1}((ca)(vb) + (va)b) = Q^{-1}((QaQ^{-1})(vb) + (va)b) = a(Q^{-1}(vb)) + (Q^{-1}(va))b.$$

[4]Данный результат является «фольклорным». Автор благодарен В. К. Харченко, который сообщил ему простое доказательство данного результата.

Следовательно, $Q^{-1}(v(\cdot))$ — обычное дифференцирование. Поскольку все дифференцирования полных матричных алгебр внутренние (см., например, [26, §4.3]), существует такая матрица $P_0 \in A$, что $Q^{-1}(va) = P_0 a - aP_0$ для всех $a \in A$. При этом

$$va = QP_0 a - QaP_0 = QP_0 a - QaQ^{-1}QP_0 = Pa - (QaQ^{-1})P \text{ для всех } a \in A,$$

где $P = QP_0$, т.е. v действует как внутреннее косое дифференцирование.

Теперь заметим, что из $vc = \zeta cv$ следует, что $c^{-1}v = \zeta vc^{-1}$,

$$Q^{-1}(Pa - (QaQ^{-1})P)Q = \zeta\big(P(Q^{-1}aQ) - aP\big),$$

$$Q^{-1}PaQ - aQ^{-1}PQ = \zeta PQ^{-1}aQ - \zeta aP,$$

$$Q^{-1}Pa - aQ^{-1}P = \zeta PQ^{-1}a - \zeta aPQ^{-1},$$

$$Q^{-1}Pa - \zeta PQ^{-1}a = aQ^{-1}P - \zeta aPQ^{-1},$$

$$(Q^{-1}P - \zeta PQ^{-1})a = a(Q^{-1}P - \zeta PQ^{-1}) \text{ для всех } a \in A.$$

Следовательно, $Q^{-1}P - \zeta PQ^{-1} = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$. Теперь заменим P на $(P - \frac{\alpha}{1-\zeta}Q)$. Тогда равенство $va = Pa - (ca)P$ будет по-прежнему справедливо, но, кроме этого, будут также справедливы равенства $Q^{-1}P - \zeta PQ^{-1} = 0$ и $QPQ^{-1} = \zeta^{-1}P$. □

Рассмотрим теперь общий случай.

Лемма 2.55. *Пусть A — конечномерная полупростая ассоциативная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F. Тогда $A \cong \underbrace{M_k(F) \oplus M_k(F) \oplus \ldots \oplus M_k(F)}_{t}$ (прямая сумма идеалов) для некоторых $k, t \in \mathbb{N}$, где $t \mid m$, и существуют такие матрицы $P \in M_k(F)$ и $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$, $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$, где $QPQ^{-1} = \zeta^{-t}P$, что для всех $a_1, a_2, \ldots, a_t \in M_k(F)$ справедливы равенства (2.18) и (2.19).*

Доказательство. Поскольку алгебра A полупроста, она является прямой суммой идеалов, каждый из которых, в свою очередь, является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой подалгеброй. (Это следует, например, из теоремы 2.17.) Пусть B — один из таких идеалов. Тогда $vb = v(1_B b) = (c1_B)(vb) + (v1_B)b \in B$ для всех $b \in B$. Отсюда B — $H_{m^2}(\zeta)$-подмодуль, $A = B$, и A — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая или, что то же, FC_m-простая алгебра. В силу классической теоремы Веддербёрна — Артина алгебра A является прямой суммой идеалов, каждый из которых изоморфен алгебре $M_k(F)$ для некоторого k, при этом оператор c, действуя как автоморфизм, переводит всякий минимальный идеал I, где $I \cong M_k(F)$, в другой идеал cI. Отсюда $I + cI + \ldots + c^{m-1}I$ является FC_m-инвариантным идеалом, т.е., с учётом FC_m-простоты алгебры A, должно выполняться равенство

$$A = I + cI + \ldots + c^{m-1}I.$$

Выбирая такое минимальное $t \in \mathbb{N}$, что $c^t I = I$, получаем, что

$$A \cong \underbrace{M_k(F) \oplus M_k(F) \oplus \ldots \oplus M_k(F)}_{t} \text{ (прямая сумма идеалов),}$$

причём элемент c отображает i-ю компоненту в $(i+1)$-ю. Из равенства $c^m I = I$ следует, что $t \mid m$.

Для случая $t = 1$ утверждение данной леммы доказано в лемме 2.54. Рассмотрим случай $t \geqslant 2$. Заметим, что c^t отображает всякое прямое слагаемое в себя. Поскольку всякий автоморфизм полной матричной алгебры внутренний, существует такая матрица Q, что $c^t(a, 0, \ldots, 0) = (QaQ^{-1}, 0, \ldots, 0)$ для всех $a \in M_k(F)$. Теперь из $c^m = \mathrm{id}_A$ следует, что $Q^{\frac{m}{t}}$ — скалярная матрица. Без ограничения общности можно считать, что $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$, поскольку поле F алгебраически замкнуто и мы можем домножить матрицу Q на корень m-й степени из соответствующего скаляра. Отсюда мы можем считать, что справедливо равенство (2.18).

Обозначим через $\pi_i \colon A \to M_k(F)$ проекцию на i-ю компоненту. Рассмотрим отображения $\rho_{ij} \in \mathrm{End}_F(M_k(F))$, где $1 \leqslant i, j \leqslant t$, заданные формулами $\rho_{ij}(a) := \pi_i\bigl(v\,(\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, a, 0, \ldots, 0)\bigr)$ для $a \in M_k(F)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\rho_{ij}(ab) = \pi_i\bigl(v\,(0, \ldots, 0, ab, 0, \ldots, 0)\bigr) = \\
= \pi_i\Bigl(v\bigl((0, \ldots, 0, a, 0, \ldots, 0)(0, \ldots, 0, b, 0, \ldots, 0)\bigr)\Bigr) = \\
= \pi_i\Bigl(\bigl(c(0, \ldots, 0, a, 0, \ldots, 0)\bigr)v(0, \ldots, 0, b, 0, \ldots, 0)\Bigr) + \\
+ \pi_i\Bigl(\bigl(v(0, \ldots, 0, a, 0, \ldots, 0)\bigr)(0, \ldots, 0, b, 0, \ldots, 0)\Bigr) = \\
= \delta_{ij}\, \rho_{ii}(a)b + \delta_{j,i-1}\, a\rho_{i,i-1}(b) + \delta_{i1}\delta_{jt}\, QaQ^{-1}\rho_{1t}(b)
\end{aligned}$$

для всех $a, b \in M_k(F)$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Пусть $\rho_{ii}(E_k) = P_i$, $\rho_{i,i-1}(E_k) = Q_i$, $\rho_{1t}(E_k) = Q_1$, где $P_i, Q_i \in M_k(F)$. Тогда из равенства $a_i E_k = a_i$ для всех $a_i \in M_k(F)$ следует, что

$$\begin{aligned}
v(a_1, \ldots, a_t) = \Bigl(\pi_1(v\,(a_1, \ldots, a_t)), \ldots, \pi_t\bigl(v\,(a_1, \ldots, a_t)\bigr)\Bigr) = \\
= \bigl(P_1 a_1 + (Qa_tQ^{-1})Q_1, P_2 a_2 + a_1 Q_2, \ldots, P_t a_t + a_{t-1} Q_t\bigr).
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
0 = v((\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, E_k, 0, \ldots, 0)(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, E_k, 0, \ldots, 0)) = \\
= (c(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, E_k, 0, \ldots, 0))(v(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, E_k, 0, \ldots, 0)) + \\
+ (v(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, E_k, 0, \ldots, 0))(\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, E_k, 0, \ldots, 0) = \\
= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, P_{i+1} + Q_{i+1}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Следовательно, $P_{i+1} + Q_{i+1} = 0$, откуда $Q_j = -P_j$ для всех $1 \leqslant j \leqslant t$.

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned}
(-\zeta Q P_t Q^{-1}, 0, \ldots, 0, \zeta P_{t-1}) = \zeta cv(0, \ldots, 0, E_k, 0) = vc(0, \ldots, 0, E_k, 0) = \\
= v(0, \ldots, 0, E_k) = (-P_1, 0, \ldots, 0, P_t),
\end{aligned}$$

$$(\zeta Q P_t Q^{-1}, -\zeta P_1, 0, \dots, 0) = \zeta c v(0, \dots, 0, E_k) = v c(0, \dots, 0, E_k) =$$
$$= v(E_k, 0, \dots, 0) = (P_1, -P_2, 0, \dots, 0),$$

и $P_1 = \zeta Q P_t Q^{-1}$, $P_2 = \zeta P_1$, $P_t = \zeta P_{t-1}$.

Кроме того, если $t > 2$, то

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, \zeta P_i, -\zeta P_{i+1}, 0, \dots, 0) = \zeta c v(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, E_k, 0, \dots, 0) =$$
$$= v c(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, E_k, 0, \dots, 0) = v(\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, E_k, 0, \dots, 0) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, P_{i+1}, -P_{i+2}, 0, \dots, 0)$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant t-2$. Следовательно, $P_{i+1} = \zeta P_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t-1$. Пусть $P := P_1$. Тогда $P_i = \zeta^{i-1} P$, $\zeta^t Q P Q^{-1} = P$, справедливо равенство (2.19), и лемма доказана. □

Докажем теперь следующий результат:

Лемма 2.56. *Пусть v — оператор на алгебре $M_k(F)^t$, заданный при помощи формулы (2.19), где $QPQ^{-1} = \zeta^{-t} P$. Тогда*

$$v^\ell(a_1, a_2, \dots, a_t) = (b_1, b_2, \dots, b_t),$$

где

$$b_k = \zeta^{\ell(k-1)} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}} P^{\ell-j} a_{k-j} P^j \tag{2.20}$$

и $a_{-j} := Q a_{t-j} Q^{-1}$, $j \geqslant 0$, $a_i \in M_k(F)$, $1 \leqslant \ell \leqslant m$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по ℓ. База $\ell = 1$ очевидна в силу (2.19). Предположим, что (2.20) справедливо для ℓ. Тогда

$$v^{\ell+1}(a_1, a_2, \dots, a_t) = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_t),$$

где $\tilde{b}_k = \zeta^{k-1}(P b_k - b_{k-1} P)$, $1 \leqslant k \leqslant t$ и $b_0 := Q b_t Q^{-1}$, причём в силу условия $QPQ^{-1} = \zeta^{-t} P$ результат вычисления b_k по формуле (2.20) при $k = 0$ также совпадает с b_0. Следовательно,

$$\tilde{b}_k = \zeta^{k-1} \left(\zeta^{\ell(k-1)} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}} P^{\ell-j+1} a_{k-j} P^j - \right.$$
$$\left. - \zeta^{\ell(k-2)} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}} P^{\ell-j} a_{k-j-1} P^{j+1} \right) =$$
$$= \zeta^{k-1} \left(\zeta^{\ell(k-1)} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}} P^{\ell-j+1} a_{k-j} P^j - \right.$$
$$\left. - \zeta^{\ell(k-2)} \sum_{j=1}^{\ell+1} (-1)^{j-1} \zeta^{-\frac{(j-2)(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j-1}_{\zeta^{-1}} P^{\ell-j+1} a_{k-j} P^j \right) =$$

$$= \zeta^{(\ell+1)(k-1)}\left(\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^j\zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}}\binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}}P^{\ell-j+1}a_{k-j}P^j + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{\ell+1}(-1)^j\zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}}\zeta^{j-\ell-1}\binom{\ell}{j-1}_{\zeta^{-1}}P^{\ell-j+1}a_{k-j}P^j\right) =$$
$$= \zeta^{(\ell+1)(k-1)}\sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^j\zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}}\binom{\ell+1}{j}_{\zeta^{-1}}P^{\ell-j+1}a_{k-j}P^j.$$

Отсюда (2.20) справедливо для всех $1 \leqslant \ell \leqslant m$. □

Доказательство теоремы 2.52. Напомним, что $v^m = 0$ и $\binom{m}{j}_{\zeta^{-1}} = 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Если m нечётно, то

$$(-1)^m\zeta^{-\frac{m(m-1)}{2}} = (-1)\cdot 1^{-\frac{m-1}{2}} = -1.$$

Если m чётно, то $\zeta^{\frac{m}{2}} = -1$, т.е. по-прежнему

$$(-1)^m\zeta^{-\frac{m(m-1)}{2}} = 1\cdot(-1)^{-(m-1)} = -1.$$

Следовательно, из лемм 2.55 и 2.56 следует, что

$$v^m(a_1,\ldots,a_t) = (P^m a_1 - a_{1-m}P^m, P^m a_2 - a_{2-m}P^m, \ldots, P^m a_t - a_{t-m}P^m) =$$
$$= ([P^m, a_1], [P^m, a_2], \ldots, [P^m, a_t]) = 0$$

для всех $a_i \in M_k(F)$, поскольку $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$. Отсюда $P^m = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$ и теорема доказана. □

Замечание 2.57. Обратно, для всех $k,t \in \mathbb{N}$, где $t \mid m$, и таких матриц $P \in M_k(F)$ и $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$, что $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$, $QPQ^{-1} = \zeta^{-t}P$, $P^m = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$, можно определить структуру $H_{m^2}(\zeta)$-простой алгебры на алгебре $A = \underbrace{M_k(F)\oplus M_k(F)\oplus\ldots\oplus M_k(F)}_{t}$ (прямая сумма идеалов) при помощи формул (2.18) и (2.19). Более того, алгебра A будет FC_m-простой, а значит, и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой.

Исследуем теперь изоморфизмы между такими алгебрами. Начнём с того, что в алгебре $\underbrace{M_k(F)\oplus M_k(F)\oplus\ldots\oplus M_k(F)}_{t}$ (прямая сумма идеалов) существует ровно t минимальных идеалов, причём каждый из них изоморфен алгебре $M_k(F)$ (см., например, [26, лемма 1.4.4]). Отсюда, если две какие-то $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры изморфны, то числа t у них должны совпадать. Поэтому достаточно ограничиться изучением изоморфизмов между алгебрами с одинаковыми t:

Теорема 2.58. *Пусть $A_1 \cong \underbrace{M_k(F)\oplus M_k(F)\oplus\ldots\oplus M_k(F)}_{t}$ (прямая сумма идеалов) — полупростая $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над произвольным полем F, заданная матрицами $P_1 \in M_k(F)$ и $Q_1 \in \mathrm{GL}_k(F)$ при помощи формул (2.18) и (2.19), и пусть A_2 — другая такая алгебра, заданная матрицами $P_2 \in M_k(F)$ и $Q_2 \in \mathrm{GL}_k(F)$. Тогда $A_1 \cong A_2$ как алгебры и $H_{m^2}(\zeta)$-модули, если и только если $P_2 = \zeta^s TP_1T^{-1}$ и $Q_2 = \beta TQ_1T^{-1}$ для некоторых $s \in \mathbb{Z}$, $\beta \in F$ и $T \in \mathrm{GL}_k(F)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный изоморфизм $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебр $\varphi\colon A_1 \to A_2$. Как уже было отмечено перед теоремой, единственными минимальными идеалами обеих алгебр являются компоненты соответствующих прямых сумм. Отсюда каждая копия алгебры $M_k(F)$ из алгебры A_1 отображается на одну из копий алгебры $M_k(F)$ в A_2. Поскольку каждый автоморфизм алгебры $M_k(F)$ внутренний, существует такая матрица $T \in \mathrm{GL}_k(F)$ и число $1 \leqslant r \leqslant t$, что

$$\varphi(a,0,\dots,0) = (\underbrace{0,\dots,0}_{r-1}, TaT^{-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{t-r}) \text{ для всех } a \in M_k(F).$$

По условию φ коммутирует с оператором c, который передвигает компоненты вправо. Отсюда для всех $1 \leqslant j \leqslant t-r+1$ и $a \in M_k(F)$ справедливо равенство

$$\varphi(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, a, 0,\dots,0) = \varphi\bigl(c^{j-1}(a,0,\dots,0)\bigr) = c^{j-1}\varphi(a,0,\dots,0) = \varphi(\underbrace{0,\dots,0}_{r+j-2}, TaT^{-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{t-r-j+1}).$$

Для всех $t-r+2 \leqslant j \leqslant t$ это равенство выглядит следующим образом:

$$\varphi(\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, a, 0,\dots,0) = c^{j-1}\varphi(a,0,\dots,0) = \varphi(\underbrace{0,\dots,0}_{r+j-t-2}, Q_2TaT^{-1}Q_2^{-1}, \underbrace{0,\dots,0}_{2t-r-j+1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(a_1,\dots,a_t) = (Q_2Ta_{t-r+2}T^{-1}Q_2^{-1}, Q_2Ta_{t-r+3}T^{-1}Q_2^{-1}, \dots, Q_2Ta_tT^{-1}Q_2^{-1},\\ Ta_1T^{-1}, Ta_2T^{-1}, Ta_3T^{-1}, \dots, Ta_{t-r+1}T^{-1})\end{aligned} \tag{2.21}$$

для всех $a_i \in M_k(F)$. При этом

$$\begin{aligned}c\varphi(a_1,\dots,a_t) = (Q_2Ta_{t-r+1}T^{-1}Q_2^{-1}, Q_2Ta_{t-r+2}T^{-1}Q_2^{-1}, \dots, Q_2Ta_{t-1}T^{-1}Q_2^{-1},\\ Q_2Ta_tT^{-1}Q_2^{-1}, Ta_1T^{-1}, Ta_2T^{-1}, \dots, Ta_{t-r}T^{-1}),\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}\varphi\bigl(c(a_1,\dots,a_t)\bigr) = (Q_2Ta_{t-r+1}T^{-1}Q_2^{-1}, Q_2Ta_{t-r+2}T^{-1}Q_2^{-1}, \dots, Q_2Ta_{t-1}T^{-1}Q_2^{-1},\\ TQ_1a_tQ_1^{-1}T^{-1}, Ta_1T^{-1}, Ta_2T^{-1}, \dots, Ta_{t-r}T^{-1}).\end{aligned}$$

Учитывая, что $c\varphi = \varphi c$, получаем, что $Q_2Ta_tT^{-1}Q_2^{-1} = TQ_1a_tQ_1^{-1}T^{-1}$ для всех $a_t \in M_k(F)$, т.е. матрица $Q_1^{-1}T^{-1}Q_2T$ коммутирует со всеми квадратными матрицами и, следовательно, является скалярной. Отсюда $Q_2 = \beta TQ_1T^{-1}$ для некоторого $\beta \in F$. Отметим, что $\beta \ne 0$ в силу того, что $Q_1, Q_2, T \in \mathrm{GL}_k(F)$.

Используя равенство $v\varphi = \varphi v$, получаем

$$\begin{aligned}v\varphi(a_1,\dots,a_t) = \bigl(P_2Q_2Ta_{t-r+2}T^{-1}Q_2^{-1} - Q_2Ta_{t-r+1}T^{-1}Q_2^{-1}P_2,\\ \zeta(P_2Q_2Ta_{t-r+3}T^{-1}Q_2^{-1} - Q_2Ta_{t-r+2}T^{-1}Q_2^{-1}P_2), \dots,\\ \zeta^{r-2}(P_2Q_2Ta_tT^{-1}Q_2^{-1} - Q_2Ta_{t-1}T^{-1}Q_2^{-1}P_2), \zeta^{r-1}(P_2Ta_1T^{-1} - Q_2Ta_tT^{-1}Q_2^{-1}P_2),\\ \zeta^r(P_2Ta_2T^{-1} - Ta_1T^{-1}P_2), \dots, \zeta^{t-1}(P_2Ta_{t-r+1}T^{-1} - Ta_{t-r}T^{-1}P_2)\bigr) =\\ = \varphi\bigl(v(a_1,\dots,a_t)\bigr) =\\ = \varphi\Bigl(\bigl(P_1a_1 - (Q_1a_tQ_1^{-1})P_1, \zeta(P_1a_2 - a_1P_1), \dots, \zeta^{t-1}(P_1a_t - a_{t-1}P_1)\bigr)\Bigr) =\\ = \bigl(\zeta^{t-r+1}Q_2T(P_1a_{t-r+2} - a_{t-r+1}P_1)T^{-1}Q_2^{-1}, \dots, \zeta^{t-1}Q_2T(P_1a_t - a_{t-1}P_1)T^{-1}Q_2^{-1},\\ T(P_1a_1 - Q_1a_tQ_1^{-1}P_1)T^{-1}, \zeta T(P_1a_2 - a_1P_1)T^{-1}, \dots, \zeta^{t-r}T(P_1a_{t-r+1} - a_{t-r}P_1)T^{-1}\bigr)\end{aligned} \tag{2.22}$$

для всех $a_i \in M_k(F)$.

Если $t \geqslant 2$, то, подставляя $a_1 = E_k$ и $a_j = 0$ при $j \neq 1$, получаем $P_2 = \zeta^{1-r}\, TP_1T^{-1}$.

В случае $t = 1$ равенство (2.22) принимает вид

$$P_2Ta_1T^{-1} - Q_2Ta_1T^{-1}Q_2^{-1}P_2 = T(P_1a_1 - Q_1a_1Q_1^{-1}P_1)T^{-1}.$$

Умножая слева на $T^{-1}Q_2^{-1}$, справа на T и используя равенство $Q_2 = \beta TQ_1T^{-1}$, получаем

$$T^{-1}Q_2^{-1}P_2Ta_1 - a_1T^{-1}Q_2^{-1}P_2T - \beta^{-1}Q_1^{-1}P_1a_1 + \beta^{-1}a_1Q_1^{-1}P_1 = 0,$$

$$\beta^{-1}Q_1^{-1}T^{-1}P_2Ta_1 - \beta^{-1}a_1Q_1^{-1}T^{-1}P_2T - \beta^{-1}Q_1^{-1}P_1a_1 + \beta^{-1}a_1Q_1^{-1}P_1 = 0,$$

$$(Q_1^{-1}T^{-1}P_2T - Q_1^{-1}P_1)a_1 - a_1(Q_1^{-1}T^{-1}P_2T - Q_1^{-1}P_1) = 0.$$

Поскольку последнее равенство справедливо для всех $a_1 \in M_k(F)$, существует такое $\gamma \in F$, что

$$Q_1^{-1}T^{-1}P_2T - Q_1^{-1}P_1 = \gamma E_k,$$

т.е.

$$P_2 = TP_1T^{-1} + \gamma TQ_1T^{-1} = TP_1T^{-1} + \gamma\beta^{-1}Q_2. \tag{2.23}$$

С другой стороны, умножая (2.23) слева на Q_2, а справа на Q_2^{-1}, получаем

$$Q_2P_2Q_2^{-1} = TQ_1P_1Q_1^{-1}T^{-1} + \gamma\beta^{-1}Q_2.$$

Учитывая равенства $Q_iP_iQ_i^{-1} = \zeta^{-1}P_i$, отсюда следует, что

$$\zeta^{-1}P_2 = \zeta^{-1}TP_1T^{-1} + \gamma\beta^{-1}Q_2,$$

$$P_2 = TP_1T^{-1} + \zeta\gamma\beta^{-1}Q_2. \tag{2.24}$$

Сравнивая (2.23) и (2.24), получаем, что $\gamma = 0$ и $P_2 = TP_1T^{-1}$. Поскольку в случае $t = 1$ справедливо равенство $r = 1$, это означает, что $P_2 = \zeta^{1-r}\, TP_1T^{-1}$ и при $t = 1$. Таким образом, необходимость условий из формулировки теоремы доказана.

Обратно, пусть $P_2 = \zeta^s\, T_0P_1T_0^{-1}$ и $Q_2 = \beta T_0Q_1T_0^{-1}$ для некоторых $s \in \mathbb{Z}$, $\beta \in F$ и $T_0 \in \mathrm{GL}_n(F)$. Представим $(1-s)$ в виде $nt + r$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $1 \leqslant r \leqslant t$. Положив $T := T_0Q_1^n$, получим $P_2 = \zeta^{1-r}\, TP_1T^{-1}$ и $Q_2 = \beta TQ_1T^{-1}$. Теперь для завершения доказательства достаточно определить искомый изоморфизм $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ по формуле (2.21). □

Замечание 2.59. Пусть полупростая ассоциативная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра A задаётся числом $t \in \mathbb{N}$ и матрицами $P \in M_k(F)$ и $Q \in \mathrm{GL}_k(F)$. Из доказательства теоремы 2.58 следует, что всякий автоморфизм $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} A$ задаётся формулой

$$\begin{aligned}\varphi(a_1, \ldots, a_t) = (&QTa_{t-r+2}T^{-1}Q^{-1}, QTa_{t-r+3}T^{-1}Q^{-1}, \ldots, QTa_tT^{-1}Q^{-1},\\ &Ta_1T^{-1}, Ta_2T^{-1}, \ldots, Ta_{t-r+1}T^{-1})\end{aligned}$$

для некоторых $1 \leqslant r \leqslant t$ и $T \in \mathrm{GL}_k(F)$. Для того, чтобы описать умножение в группе $\mathrm{Aut}(A)$ таких автоморфизмов, положим

$$q := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r = 1, \\ t - r + 1 & \text{при} \quad r > 1 \end{cases} \quad \text{и } R := \begin{cases} T & \text{при} \quad r = 1, \\ QT & \text{при} \quad r > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(a_1, \dots, a_t) = (Ra_{q+1}R^{-1}, Ra_{q+2}R^{-1}, \dots, Ra_tR^{-1}, \\ Q^{-1}Ra_1R^{-1}Q, Q^{-1}Ra_2R^{-1}Q, \dots, Q^{-1}Ra_qR^{-1}Q)$$

для всех $a_i \in M_k(F)$. Очевидно, что число q определено однозначно, а матрица R — с точностью до скалярного множителя. Отсюда множество $\mathrm{Aut}(A)$ можно отождествить с множеством пар $(\overline{R}, q)$, где $R \in \mathrm{GL}_k(F)$, а $0 \leqslant q < t$, причём $P = \zeta^q\, RPR^{-1}$ и $QRQ^{-1}R^{-1} = \beta E_k$ для некоторого $\beta \in F$. (Здесь при помощи $\bar{R}$ обозначен класс матрицы $R \in \mathrm{GL}_k(F)$ в группе $\mathrm{PGL}_k(F)$.) Если перенести операцию умножения из группы автоморфизмов на множество таких пар, получается, что

$$(\overline{R}_1, q_1)(\overline{R}_2, q_2) = \begin{cases} \left(\overline{R_1R_2}, \quad q_1 + q_2\right) & \text{при} \quad q_1 + q_2 < t, \\ \left(\overline{R_1R_2Q^{-1}}, \quad q_1 + q_2 - t\right) & \text{при} \quad q_1 + q_2 \geqslant t. \end{cases} \tag{2.25}$$

Отсюда существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}/t\mathbb{Z},$$

где $\rho(\varphi) := \bar{q}$ (класс числа q в группе $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$), а

$$G_0 := \left\{\bar{R} \in \mathrm{PGL}_n(F) \;\middle|\; P = RPR^{-1},\ QRQ^{-1}R^{-1} = \beta E_k \text{ для некоторого } \beta \in F\right\}.$$

При $P = 0$ это описание становится проще. Группа G_0 является централизатором элемента $\bar{Q}$ в $\mathrm{PGL}_k(F)$, а гомоморфизм ρ сюрьективен:

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Действительно, для всякого $0 \leqslant q < t$ пара $(\bar{E}_k, q)$ задаёт автоморфизм алгебры A, причём $\rho(\bar{E}_k, q) = \bar{q} \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$.

При $P \neq 0$ можно дать следующее описание группы $\mathrm{Aut}(A)$, заметив, что в этом случае в паре $(\bar{R}, q)$ число q однозначно определено классом $\bar{R} \in \mathrm{PGL}_k(F)$ при помощи равенства $P = \zeta^q\, RPR^{-1}$. Обозначим через G подгруппу в $\mathrm{PGL}_k(F)$ состоящую из всех таких классов $\bar{R}$, что $P = \zeta^q\, RPR^{-1}$ и $QRQ^{-1}R^{-1} = \beta E_k$ для некоторых $q \in \mathbb{Z}$ и $\beta \in \mathbb{Z}$. Тогда циклическая группа $\langle\bar{Q}\rangle$ является нормальной подгруппой группы G, причём $\mathrm{Aut}(A) \cong G/\langle\bar{Q}\rangle$. Действительно, поскольку в силу теоремы 2.52 справедливы равенства $QPQ^{-1} = \zeta^{-t}P$ и $Q^{\frac{m}{t}} = E_k$, в каждом классе — элементе группы $G/\langle\bar{Q}\rangle$ — существует ровно один представитель $\bar{R}$, для которого $0 \leqslant q < t$, причём умножение таких представителей осуществляется по формуле (2.25).

2.11 Алгебры, простые по отношению к действию алгебры Свидлера

В данном параграфе мы рассмотрим случай $m = 2$ подробнее, получив соответствующие следствия из теорем 2.50, 2.52 и 2.58 и замечаний 2.51 и 2.59. Напомним, что в случае, когда мы рассматриваем алгебру Свидлера H_4, мы всегда предполагаем, что (-1) является примитивным корнем степени 2 из единицы, т.е. характеристика основного поля F отлична от 2.

Будем через $M_{k\times\ell}(F)$ обозначать пространство всех матриц размера $k\times\ell$ над полем F.

Теорема 2.60. *Пусть A — H_4-модульная алгебра над некоторым полем F, изоморфная как алгебра алгебре $M_k(F)$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$. Тогда*

1. *либо A изоморфна как алгебра и H_4-модуль алгебре*

$$M_{s,\ell}(F) := M^{(0)}_{s,\ell}(F)\oplus M^{(1)}_{s,\ell}(F) \text{ (прямая сумма подпространств)},$$

   где $ca = a$ для всех $a\in M^{(0)}_{s,\ell}(F)$, $ca = -a$ для всех $a\in M^{(1)}_{s,\ell}(F)$,

$$M^{(0)}_{s,\ell}(F) := \begin{pmatrix} M_s(F) & 0 \\ 0 & M_\ell(F)\end{pmatrix},$$

$$M^{(1)}_{s,\ell}(F) := \begin{pmatrix} 0 & M_{s\times\ell}(F) \\ M_{\ell\times s}(F) & 0\end{pmatrix}$$

   и $va = Pa-(ca)P$ для всех $a\in A$, где $P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0\end{pmatrix}$, $P_1P_2 = \alpha E_s$, $P_2P_1 = \alpha E_\ell$ для некоторых $s,\ell>0$, $s+\ell = k$, $s\geqslant \ell$, $P_1\in M_{s\times\ell}(F)$, $P_2\in M_{\ell\times s}(F)$, $\alpha\in F$,

2. *либо $ca = a$, $va = 0$ для всех $a\in A$.*

Замечание 2.61. Обратно, для любых таких P и $s\geqslant\ell$, существует H_4-модульная алгебра, изоморфная как алгебра алгебре $M_k(F)$.

Замечание 2.62. Если $s>\ell$, то матрица P_1P_2 вырождена и $P^2 = 0$.

Доказательство теоремы 2.60. Достаточно применить теорему 2.52 и замечание 2.53. Условие $\ell > 0$ следует из того, что если $\ell = 0$, то $ca = a$ для всех $a\in A$ и $va = vca = -cva = -va$, т.е. $va = 0$. □

Теорема 2.63. *Пусть A_1 и A_2 — H_4-модульные алгебры над некоторым полем F, $A_i = A_i^{(0)}\oplus A_i^{(1)}$ (прямая сумма подпространств), где $ca = a$ для всех $a\in A_i^{(0)}$, $ca = -a$ для всех $a\in A_i^{(1)}$,*

$$A_i^{(0)} = \begin{pmatrix} M_{s_i}(F) & 0 \\ 0 & M_{\ell_i}(F)\end{pmatrix},$$

$$A_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & M_{s_i\times\ell_i}(F) \\ M_{\ell_i\times s_i}(F) & 0\end{pmatrix},$$

и $va = P_i a - (ca)P_i$ *для всех* $a \in A_i$, *где* $P_i = \begin{pmatrix} 0 & P_{i1} \\ P_{i2} & 0 \end{pmatrix}$, $P_{i1}P_{i2} = \alpha_i E_{s_i}$, $P_{i2}P_{i1} = \alpha_i E_{\ell_i}$ *для некоторых* $s_i, \ell_i > 0$, $s_i \geqslant \ell_i$, $P_{i1} \in M_{s_i \times \ell_i}(F)$, $P_{i2} \in M_{\ell_i \times s_i}(F)$, $\alpha_i \in F$, $i = 1, 2$. *Тогда* $A_1 \cong A_2$ *как алгебры и* H_4*-модули, если и только если* $s_1 = s_2$, $\ell_1 = \ell_2$ *и существуют такие* $T_1 \in \mathrm{GL}_{s_1}(F)$, $T_2 \in \mathrm{GL}_{\ell_1}(F)$, *что*

1. *либо* $P_{21} = T_1 P_{11} T_2{}^{-1}$ *и* $P_{22} = T_2 P_{12} T_1{}^{-1}$,

2. *либо* $s_1 = \ell_1$, $P_{21} = T_1 P_{12} T_2{}^{-1}$ *и* $P_{22} = T_2 P_{11} T_1{}^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 2.52 алгебрам A_i соответствуют матрицы $Q_i = \begin{pmatrix} E_{s_i} & 0 \\ 0 & E_{\ell_i} \end{pmatrix}$, причём в силу теоремы 2.58 изоморфизм $A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ существует, если и только если существует такая матрица $T \in \mathrm{GL}_k(F)$, что $Q_2 = \beta T Q_1 T^{-1}$ и $P_2 = \pm T P_1 T^{-1}$ для некоторого $\beta \in F$, причём, меняя T на TQ_1, можно считать, что $P_2 = TP_1T^{-1}$.

Поскольку размерности собственных подпространств, отвечающих одному и тому же собственному значению, у линейных операторов с подобными матрицами совпадают и $s_i \geqslant \ell_i$, в случае существования изоморфизма $A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ выполнены условия $\beta = \pm 1$ и $s_1 = s_2$, $\ell_1 = \ell_2$, причём равенство $\beta = -1$ возможно лишь при $s_1 = \ell_1 = s_2 = \ell_2$.

Если $\beta = 1$, то $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, а если $\beta = -1$, то $T = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторых $T_1 \in \mathrm{GL}_{s_1}(F)$, $T_2 \in \mathrm{GL}_{\ell_1}(F)$. Теперь утверждение теоремы следует из равенства $P_2 = TP_1T^{-1}$. Обратное утверждение проверяется непосредственно. $\square$

Пример 2.64. В случае матриц размера 2×2 возможны следующие варианты:

1. $A = A^{(0)} = M_2(F)$, $A^{(1)} = 0$, $ca = a$, $va = 0$ для всех $a \in A$;

2. $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, где
$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in F \right\}$$
и
$$A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in F \right\},$$
$ca = (-1)^i a$, $va = 0$ для всех $a \in A^{(i)}$;

3. $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, где
$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in F \right\}$$
и
$$A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in F \right\},$$
$ca = (-1)^i a$, $va = Pa - (ca)P$ для всех $a \in A^{(i)}$, где $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ и $\gamma \in F$ — фиксированный элемент поля.

Действительно, случай $P = 0$ относится к п.1. Если же $P \neq 0$, то, сопрягая, если нужно, матрицу P матрицей T вида $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, где $\lambda, \mu \in F^\times$, можно считать, что элемент в правом верхнем углу равен 1. В силу теоремы 2.63 различным элементам γ соответствуют неизоморфные алгебры A.

Непосредственным следствием теоремы 2.52 является теорема ниже:

Теорема 2.65. *Пусть A — конечномерная полупростая ассоциативная H_4-простая H_4-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F. Тогда либо*

1. *A изоморфна алгебре $M_k(F)$ для некоторого $k \geqslant 1$, либо*
2. *$A \cong M_k(F) \oplus M_k(F)$ (прямая сумма идеалов) для некоторого $k \geqslant 1$ и существует такая матрица $P \in M_k(F)$, что $P^2 = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$ и*

$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (Pa - bP, aP - Pb) \tag{2.26}$$

для всех $a, b \in M_k(F)$.

Замечание 2.66. Обратно, для любой матрицы $P \in M_k(F)$ такой, что $P^2 = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$, на алгебре $M_k(F) \oplus M_k(F)$ при помощи (2.26) можно определить структуру H_4-простой алгебры, которая, более того, является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно простой.

Из теоремы 2.58 получаем:

Теорема 2.67. *Пусть $A_1 = M_k(F) \oplus M_k(F)$ — полупростая H_4-простая алгебра над полем F, заданная матрицей $P_1 \in M_k(F)$, где $P_1^2 = \alpha_1 E_k$ для некоторого $\alpha_1 \in F$, при помощи формул (2.26), а A_2 — другая такая алгебра, заданная матрицей $P_2 \in M_k(F)$. Тогда $A_1 \cong A_2$ как алгебры и H_4-модули, если и только если $P_2 = \pm T P_1 T^{-1}$ для некоторого $T \in \mathrm{GL}_k(F)$.*

Замечание 2.68. Из теорем 2.65 и 2.67 следует, что любая полупростая ассоциативная H_4-простая алгебра A над алгебраически замкнутым полем F, которая не является простой как обычная алгебра, изоморфна $M_k(F) \oplus M_k(F)$ (прямая сумма идеалов) для некоторого $k \geqslant 1$, где

$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (Pa - bP, aP - Pb)$$

для всех $a, b \in M_k(F)$ и

1. либо $P = (\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{s}, \underbrace{-\alpha, -\alpha, \ldots, -\alpha}_{\ell})$ для некоторых $\alpha \in F$ и $s \geqslant \ell$, $s + \ell = k$,
2. либо P — блочно диагональная матрица с несколькими блоками $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ по главной диагонали (остальные клетки заполнены нулями),

причём эти алгебры не изоморфны для различных P.

Теоремы 2.69, 2.70 и замечание 2.71 являются следствиями, соответственно, теорем 2.50, 2.49 и замечания 2.51:

Теорема 2.69. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H_4-модульная алгебра над некоторым полем F. Предположим, что A — H_4-проста, но не полупроста. Тогда существует такой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный идеал $J \subset A$, что $A = vJ \oplus J$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных подпространств), $J^2 = 0$, vJ — $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра. Более того, существует такая линейная биекция $\psi\colon vJ \to J$, что $v\psi(b) = b$, $a\psi(b) = \psi((ca)b)$, $\psi(a)b = \psi(ab)$ для всех $a, b \in vJ$ и $\psi((vJ)^{(0)}) = J^{(1)}$, $\psi((vJ)^{(1)}) = J^{(0)}$.*

Теорема 2.70. *Пусть B — $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра над некоторым полем F, $\operatorname{char} F \neq 2$, а $\psi\colon B \to J$ линейная биекция из B на некоторое векторное пространство J. Зададим на J градуировку группой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, положив $J^{(0)} := \psi(B^{(1)})$ и $J^{(1)} := \psi(B^{(0)})$, и определим на пространстве $A := B \oplus J$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных подпространств) действие оператора c при помощи формул $ca := a$ для всех $a \in A^{(0)} := B^{(0)} \oplus J^{(0)}$ и $ca := -a$ для всех $a \in A^{(1)} := B^{(1)} \oplus J^{(1)}$ и действие оператора v при помощи формулы $v(a + \psi(b)) = b$ для всех $a, b \in B$. Кроме того, определим на A операцию умножения, положив $a\psi(b) := \psi((ca)b)$, $\psi(a)b := \psi(ab)$ для всех $a, b \in vJ$ и $J^2 := 0$. Тогда A является H_4-простой ассоциативной H_4-модульной алгеброй.*

Замечание 2.71. Две такие алгебры A изоморфны как H_4-модульные алгебры, если и только если их максимальные $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно простые подалгебры B изоморфны как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированные алгебры.

Рассмотрим теперь автоморфизмы конечномерных ассоциативных H_4-простых алгебр. В первых пяти случаях из шести, которые приводятся ниже, группы автоморфизмов вычисляются явным образом. В последнем случае предлагается метод описания группы автоморфизмов.

1. Если $A = M_{s,\ell}(F)$ для некоторых $s > \ell$, $ca = a$ при $a \in M_{s,\ell}^{(0)}(F)$, $ca = -a$ при $a \in M_{s,\ell}^{(1)}(F)$, $va = 0$ для всех $a \in A$, тогда $\operatorname{Aut}(A) \cong (\mathrm{GL}_s(F) \times \mathrm{GL}_\ell(F))/F^\times E_{s+\ell}$, где $F^\times E_n$ — группа невырожденных скалярных матриц размера $n \times n$ (это следует из замечания 2.59 и теоремы 2.63).

2. Если $A = M_{s,s}(F)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, $ca = a$ для всех $a \in M_{s,s}^{(0)}(F)$, $ca = -a$ для всех $a \in M_{s,s}^{(1)}(F)$, $va = 0$ для всех $a \in A$, тогда
$$\operatorname{Aut}(A) \cong \left(\left(\mathrm{GL}_s(F) \times \mathrm{GL}_s(F)\right) \rtimes \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_s \\ E_s & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle_2\right) / F^\times E_{2s}$$
(это также следует из замечания 2.59 и теоремы 2.63).

3. Пусть $A \cong M_k(F) \oplus M_k(F)$ (прямая сумма идеалов) — H_4-простая алгебра для некоторого $k \geqslant 1$ и
$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (0, 0)$$
для всех $a, b \in M_k(F)$. Тогда $\operatorname{Aut}(A) \cong \mathrm{PGL}_k(F) \times C_2$ (это следует из замечания 2.59).

4. Если A — конечномерная неполупростая H_4-простая алгебра, то, как было отмечено в замечании 2.51, $\mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}(vJ)$, где $J := J(A)$, а $\mathrm{Aut}(vJ)$ — группа автоморфизмов vJ как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной алгебры. Группа $\mathrm{Aut}(vJ)$ описана в пп. 1–3.

5. Пусть $A \cong M_k(F) \oplus M_k(F)$ (прямая сумма идеалов), где $k \geqslant 1$, — полупростая H_4-простая алгебра, где
$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (Pa - bP, aP - Pb)$$
для всех $a, b \in M_k(F)$, а $P \in M_k(F)$ — такая ненулевая матрица, что $P^2 = \alpha E_k$ для некоторого $\alpha \in F$. Тогда из замечания 2.59 следует, что $\mathrm{Aut}(A)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{PGL}_k(F)$, состоящей из образов всех таких невырожденных матриц T размера $k \times k$, что $TPT^{-1} = \pm P$. Без ограничения общности можно считать, что матрица P приведена к жордановой нормальной форме. Заметим, что в силу теоремы о ранге матрицы пространство $M_{s,\ell}(F)^{(1)}$ содержит невырожденные матрицы только при $s = \ell$. Следовательно,

   а) если $P = (\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{s}, \underbrace{-\alpha, -\alpha, \ldots, -\alpha}_{\ell})$ для некоторого $\alpha \in F^\times$ и $s \geqslant \ell$, $s + \ell = k$, то группа $\mathrm{Aut}(A)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{PGL}_k(F)$, которая состоит из образов всех обратимых матриц из множества $M_{s,\ell}(F)^{(0)}$ при $s > \ell$ и из множества $M_{s,s}(F)^{(0)} \cup M_{s,s}(F)^{(1)}$ при $s = \ell$.

   б) Если
$$P = \left(\begin{array}{cccccccccc}
\boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\
\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & \ldots & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\
\multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \ldots & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\\
0\;\;0 & 0\;\;0 & \ldots & 0\;\;0 & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\
0\;\;0 & 0\;\;0 & \ldots & 0\;\;0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right),$$
где число клеток $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ равно $\ell \in \mathbb{N}$, то из [14, §69] следует, что группа $\mathrm{Aut}(A)$ изо-

морфна подгруппе $\mathrm{PGL}_k(F)$, состоящей из образов всех обратимых матриц вида

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|ccc}
\alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots & \alpha_{1\ell} & \beta_{1\ell} & \gamma_{1,\ell+1} & \dots & \gamma_{1,k-2\ell} \\
0 & \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} & \dots & 0 & \alpha_{1\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\alpha_{21} & \beta_{21} & \alpha_{22} & \beta_{22} & \dots & \alpha_{2\ell} & \beta_{2\ell} & \gamma_{2,\ell+1} & \dots & \gamma_{2,k-2\ell} \\
0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 & \alpha_{2\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
\alpha_{\ell1} & \beta_{\ell1} & \alpha_{\ell2} & \beta_{\ell2} & \dots & \alpha_{\ell\ell} & \beta_{\ell\ell} & \gamma_{\ell,\ell+1} & \dots & \gamma_{\ell,k-2\ell} \\
0 & \alpha_{\ell1} & 0 & \alpha_{\ell2} & \dots & 0 & \alpha_{\ell\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & \gamma_{\ell+1,1} & 0 & \gamma_{\ell+1,2} & \dots & 0 & \gamma_{\ell+1,\ell} & \gamma_{\ell+1,\ell+1} & \dots & \gamma_{\ell+1,k-2\ell} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \gamma_{k-2\ell,1} & 0 & \gamma_{k-2\ell,2} & \dots & 0 & \gamma_{k-2\ell,\ell} & \gamma_{k-2\ell,\ell+1} & \dots & \gamma_{k-2\ell,k-2\ell}
\end{array}\right)$$

и

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|ccc}
\alpha_{11} & \beta_{11} & \alpha_{12} & \beta_{12} & \dots & \alpha_{1\ell} & \beta_{1\ell} & \gamma_{1,\ell+1} & \dots & \gamma_{1,k-2\ell} \\
0 & -\alpha_{11} & 0 & -\alpha_{12} & \dots & 0 & -\alpha_{1\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\alpha_{21} & \beta_{21} & \alpha_{22} & \beta_{22} & \dots & \alpha_{2\ell} & \beta_{2\ell} & \gamma_{2,\ell+1} & \dots & \gamma_{2,k-2\ell} \\
0 & -\alpha_{21} & 0 & -\alpha_{22} & \dots & 0 & -\alpha_{2\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
\alpha_{\ell1} & \beta_{\ell1} & \alpha_{\ell2} & \beta_{\ell2} & \dots & \alpha_{\ell\ell} & \beta_{\ell\ell} & \gamma_{\ell,\ell+1} & \dots & \gamma_{\ell,k-2\ell} \\
0 & -\alpha_{\ell1} & 0 & -\alpha_{\ell2} & \dots & 0 & -\alpha_{\ell\ell} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & \gamma_{\ell+1,1} & 0 & \gamma_{\ell+1,2} & \dots & 0 & \gamma_{\ell+1,\ell} & \gamma_{\ell+1,\ell+1} & \dots & \gamma_{\ell+1,k-2\ell} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \gamma_{k-2\ell,1} & 0 & \gamma_{k-2\ell,2} & \dots & 0 & \gamma_{k-2\ell,\ell} & \gamma_{k-2\ell,\ell+1} & \dots & \gamma_{k-2\ell,k-2\ell}
\end{array}\right).$$

6. Пусть $A = M_{s,\ell}(F)$ — H_4-модульная алгебра для некоторых $s, \ell \in \mathbb{N}$, $s \geqslant \ell$, где $ca = a$ для всех $a \in M^{(0)}_{s,\ell}(F)$, $ca = -a$ для всех $a \in M^{(1)}_{s,\ell}(F)$, и $va = Pa - (ca)P$ для всех $a \in A$, где $P = \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ P_2 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1P_2 = \alpha E_s$, $P_2P_1 = \alpha E_\ell$, $P_1 \in M_{s\times\ell}(F)$, $P_2 \in M_{\ell\times s}(F)$, $\alpha \in F$. Тогда из замечания 2.59 и теоремы 2.63 следует, что

   (a) если $s \neq \ell$, то группа $\mathrm{Aut}(A)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{PGL}_{s+\ell}(F)$, состоящей из образов всех матриц $R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$, где $R_1 \in \mathrm{GL}_s(F)$, $R_2 \in \mathrm{GL}_\ell(F)$, которые коммутируют с P;

   (b) если $s = \ell$, то группа $\mathrm{Aut}(A)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{PGL}_{2k}(F)$ состоящей из образов всех матриц $R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ и $R = \begin{pmatrix} 0 & R_1 \\ R_2 & 0 \end{pmatrix}$, где $R_1, R_2 \in \mathrm{GL}_s(F)$, которые коммутируют с P.

Как и в предыдущем случае, для любой конкретной матрицы P матрицы R определяются с использованием жордановой нормальной формы матрицы P (см., например, [14, §69]).

Рассмотрим некоторые частные случаи пп. 5 и 6:

Пример 2.72. Пусть $A = M_{1,1}(F)$, причём $ca = a$ для всех $a \in M^{(0)}_{1,1}(F) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)\right\}$, $ca = -a$ для всех $a \in M^{(1)}_{1,1}(F) = \left\{\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ и $va = Pa - (ca)P$ для всех $a \in A$, где $P = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Заметим, что все невырожденные матрицы из $M^{(0)}_{1,1}(F)$ и $M^{(1)}_{1,1}(F)$, коммутирующие с P, имеют вид $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \alpha & 0\end{smallmatrix}\right)$, соответственно, где $\alpha \in F^\times$. Факторизуя по подгруппе скалярных матриц, получаем $\mathrm{Aut}(A) \cong C_2$.

Пример 2.73. Пусть $A \cong M_2(F) \oplus M_2(F)$ (прямая сумма идеалов) — H_4-простая алгебра над полем F, где

$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (Pa - bP, aP - Pb)$$

для всех $a, b \in M_k(F)$, где $P = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\lambda \in F$. Все невырожденные матрицы T, коммутирующие с P, имеют вид $T = \left(\begin{smallmatrix}\mu & \gamma\\ 0 & \mu\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma \in F$, $\mu \in F^\times$. Все невырожденные матрицы T такие, что $TPT^{-1} = -P$, имеют вид $T = \left(\begin{smallmatrix}\mu & \gamma\\ 0 & -\mu\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma \in F$, $\mu \in F^\times$. Факторизуя по подгруппе скалярных матриц, получаем

$$\mathrm{Aut}(A) \cong \left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \mu \in F\right\} \leftthreetimes \langle\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\rangle_2 \cong (F, +) \leftthreetimes C_2,$$

где результат сопряжения элемента $\alpha \in (F, +)$ порождающим группы C_2 равен $(-\alpha)$.

Пример 2.74. Пусть $A \cong M_2(F) \oplus M_2(F)$ (прямая сумма идеалов) — H_4-простая алгебра над полем F,

$$c\,(a, b) = (b, a), \qquad v\,(a, b) = (Pa - bP, aP - Pb)$$

для всех $a, b \in M_2(F)$, где $P = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$. Все невырожденные матрицы, коммутирующие с P, диагональны. Все невырожденные матрицы T такие, что $TPT^{-1} = -P$, имеют вид $T = \left(\begin{smallmatrix}0 & \gamma\\ \mu & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma, \mu \in F^\times$. Факторизуя по подгруппе скалярных матриц, получаем

$$\mathrm{Aut}(A) \cong \left\{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \alpha \in F^\times\right\} \leftthreetimes \langle\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\rangle_2 \cong F^\times \leftthreetimes C_2,$$

где результат сопряжения элемента $\alpha \in F^\times$ порождающим группы C_2 равен α^{-1}.

Глава 3

(Ко)модульные алгебры Ли

В данной главе рассматриваются структурные вопросы теории (ко)модульных алгебр Ли. Доказанные утверждения будут затем использованы в главе 8 при изучении полиномиальных H-тождеств.

Результаты главы были опубликованы в работах [105, 108, 113, 117, 121].

3.1 (Ко)инвариантность радикалов

В данном параграфе доказываются достаточные условия (ко)инвариантности радикалов в (ко)модульных алгебрах Ли.

Для начала докажем следующее утверждение:

Лемма 3.1. *Пусть L — алгебра Ли над некоторым полем F, а $N \subseteq L$ — нильпотентный идеал. Обозначим через A ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(L)$, порождённую подпространством $(\mathrm{ad}\, L)$. Тогда $(\mathrm{ad}\, N) \subseteq J(A)$. (Напомним, что через $\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$ мы обозначаем присоединённое представление алгебры L и $(\mathrm{ad}\, a)b := [a, b]$.)*

Доказательство. Пусть $N^m = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$b_1 \dots b_m = 0 \text{ для всех } b_i \in \mathrm{ad}\, N. \tag{3.1}$$

Обозначим через I двухсторонний идеал алгебры A, порождённый подпространством $(\mathrm{ad}\, N)$. Тогда подпространство I^n, $n \in \mathbb{N}$, состоит из линейных комбинаций элементов

$$(a_{i_{01}} \dots a_{i_{0s_0}}) b_1 (a_{i_{11}} \dots a_{i_{1s_1}}) b_2 (a_{i_{21}} \dots a_{i_{2s_2}}) \dots b_{n-1} (a_{i_{n-1,1}} \dots a_{i_{n-1,s_{n-1}}}) b_n (a_{i_{n1}} \dots a_{i_{ns_n}}),$$

где $b_i \in \mathrm{ad}\, N$, $a_{ij} \in \mathrm{ad}\, L$. Используя равенство $[\mathrm{ad}\, a, \mathrm{ad}\, b] = \mathrm{ad}[a, b]$, можно перенести все элементы a_{ij} вправо и увидеть, что I^n состоит из линейных комбинаций элементов $a(b_1 b_2 \dots b_n)c$, где $a, c \in A$, $b_i \in \mathrm{ad}\, N$. Тогда из (3.1) следует, что $I^m = 0$ и $(\mathrm{ad}\, N) \subseteq I \subseteq J(A)$. $\square$

3.1.1 Модульные алгебры Ли

Напомним, что алгебра Ли L называется *H-модульной* для некоторой алгебры Хопфа H, если алгебра Ли L является H-модулем и

$$h\,[a, b] = [h_{(1)} a, h_{(2)} b] \text{ для всех } h \in H,\ a, b \in L. \tag{3.2}$$

Докажем, что H-подмодуль, порождённый идеалом, также является идеалом:

Лемма 3.2. *Пусть I — идеал в H-модульной алгебре Ли L, где H — алгебра Хопфа над некоторым полем F. Тогда HI является H-инвариантным идеалом алгебры Ли L.*

Доказательство. Пусть $a \in I$, $h \in H$, $b \in L$. Тогда

$$[ha, b] = [h_{(1)}a, \varepsilon(h_{(2)})b] = [h_{(1)}a, h_{(2)}(Sh_{(3)})b] = h_{(1)}[a, (Sh_{(2)})b]. \quad (3.3)$$

Отсюда $[ha, b] \in HI$. □

Теперь мы можем доказать достаточное условие инвариантности радикалов в алгебрах Ли:

Теорема 3.3. *Пусть L — конечномерная H-модульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, а H — алгебра Хопфа с антиподом S таким, что $S^2 = \mathrm{id}_H$. Тогда разрешимый R и нильпотентный N радикалы алгебры Ли L являются её H-подмодулями.*

Доказательство. Определим действие алгебры Хопфа H на алгебре $\mathrm{End}_F(L)$ при помощи равенства $(h\psi)(a) := h_{(1)}\psi((Sh_{(2)})a)$, где $a \in L$, $h \in H$, $\psi \in \mathrm{End}_F(L)$. (См. пример 1.34.) Тогда отображение ad оказывается гомоморфизмом H-модулей. Отсюда ассоциативная подалгебра A алгебры $\mathrm{End}_F(L)$, порождённая подпространством $(\mathrm{ad}\, L)$, является H-подмодулем. В силу леммы 3.2 H-подмодули HN и HR являются идеалами алгебры Ли L. Из леммы 3.1 следует, что $(\mathrm{ad}(HN)) \subseteq HJ(A)$. В то же время, согласно теореме 2.1 справедливо равенство $HJ(A) = J(A)$. Отсюда идеал HN нильпотентен и $HN = N$.

В силу предложения 2.1.7 из [7] справедливо включение $[L, R] \subseteq N$. Применяя (3.3), получаем

$$[HR, HR] \subseteq [HR, L] \subseteq H[R, HL] \subseteq H[R, L] \subseteq HN = N.$$

Следовательно, идеал HR разрешим и $HR = R$. □

Следствие 3.4. *Пусть L — конечномерная H-модульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, а H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа. Тогда разрешимый R и нильпотентный N радикалы алгебры Ли L являются H-подмодулями.*

Доказательство. В силу теоремы Ларсона — Рэдфорда всякая конечномерная алгебра Хопфа H над полем характеристики 0 полупроста, если и только если она кополупроста, что в свою очередь справедливо, если и только если $S^2 = \mathrm{id}_H$ (см., например, [51, теорема 7.4.6]). Отсюда для доказательства утверждения достаточно применить теорему 3.3. □

Также получаем новое доказательство известного результата (см., например, [8, глава III, §6, теорема 7]) о инвариантности радикалов относительно дифференцирований:

Следствие 3.5. *Пусть L и $\mathfrak{g}$ — алгебры Ли над полем характеристики 0, причём $\mathfrak{g}$ действует на L дифференцированиями и $\dim L < +\infty$. Тогда R и N являются $\mathfrak{g}$-подмодулями.*

Доказательство. Алгебра Ли L является $U(\mathfrak{g})$-модульной алгеброй Ли (см. пример 1.33), причём $S^2 = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}$. Отсюда в силу теоремы 3.3 идеалы R и N являются $U(\mathfrak{g})$-подмодулями, а следовательно, и $\mathfrak{g}$-подмодулями. □

Используя следствие 3.5 и разложение конечномерных полупростых алгебр Ли в прямую сумму простых алгебр Ли (см., например, [7, теорема 2.1.4]), получаем по аналогии с теоремами 2.11 и 2.13 следующие утверждения:

Теорема 3.6. *Если B — конечномерная $\mathfrak{g}$-простая алгебра Ли над полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, то алгебра Ли B проста.*

Теорема 3.7. *Пусть L — конечномерная G-простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами некоторая связная аффинная алгебраическая группа G. Тогда алгебра Ли L проста в обычном смысле.*

Приведём теперь пример H-модульной алгебры Ли, радикалы которой не являются её H-подмодулями:

Пример 3.8. Пусть H_4 — алгебра Свидлера (см. пример 1.11) над полем F. Заметим, что $S^2 v = -S(c^{-1}v) = (c^{-1}v)c = -v \neq v$. Пусть W — некоторое трёхмерное векторное пространство. Фиксируем линейную биекцию $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(F) \to W$. Рассмотрим алгебру Ли $L = \mathfrak{sl}_2(F) \oplus W$ (прямая сумма подпространств), в которой коммутатор задаётся формулой

$$[a + \varphi(b), u + \varphi(w)] = [a, u] + \varphi([a, w] + [b, u]) \text{ для всех } a, b, u, w \in \mathfrak{sl}_2(F).$$

Таким образом, W — абелев идеал алгебры Ли L, который совпадает с нильпотентным и разрешимым идеалами алгебры Ли L. Определим H_4-действие через $c(a + \varphi(b)) = a - \varphi(b)$ и $v(a + \varphi(b)) = b$ для всех $a, b \in \mathfrak{sl}_2(F)$. Тогда L — H_4-модульная алгебра Ли, однако её радикал W не является H_4-подмодулем.

3.1.2 Комодульные алгебры Ли

Ниже мы получим достаточные условия коинвариантности радикалов и для комодульных алгебр Ли.

Напомним, что *H-комодульной алгеброй Ли* для алгебры Хопфа H называется алгебра Ли L, которая является H-комодулем, причём

$$\rho([a, b]) = [a_{(0)}, b_{(0)}] \otimes a_{(1)} b_{(1)} \text{ для всех } a, b \in L.$$

Здесь $\rho\colon L \to L \otimes H$ — отображение, задающее на L структуру H-комодуля, $\rho(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$.

Теорема 3.9. *Пусть L — конечномерная H-комодульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, а H — алгебра Хопфа с антиподом S таким, что $S^2 = \mathrm{id}_H$. Тогда разрешимый R и нильпотентный N радикалы алгебры Ли L являются её H-подкомодулями.*

Доказательство. Рассмотрим присоединённое представление $\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$, $(\mathrm{ad}\, a)b := [a, b]$. Введём на ассоциативной алгебре $\mathrm{End}_F(L)$ структуру H-комодульной алгебры, основываясь на примере 1.37. Тогда отображение ad является гомоморфизмом H-комодулей и H^*-модулей.

Обозначим через A ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(L)$, порождённую подпространством $(\mathrm{ad}\, L)$. Поскольку $(\mathrm{ad}\, L)$ является H-подкомодулем, A также является H-подкомодулем. В силу леммы 2.7 подпространства H^*N и H^*R являются идеалами алгебры Ли L. Из теоремы 2.4 и леммы 3.1 следует, что $(\mathrm{ad}(H^*N)) \subseteq H^*J(A) = J(A)$. Следовательно, идеал H^*N нильпотентен и $H^*N = N$.

В силу предложения 2.1.7 из [7] справедливо включение $[L, R] \subseteq N$. Применяя тот же приём, что и в (2.5), получаем

$$[H^*R, H^*R] \subseteq [H^*R, L] \subseteq H^*[R, H^*L] \subseteq H^*[R, L] \subseteq H^*N = N.$$

Отсюда идеал H^*R разрешим и $H^*R = R$. □

Из теоремы 3.9 получается следующее обобщение результата М. В. Зайцева, Д. Пагона и Д. Реповша [90, предложение 3.3]:

Следствие 3.10. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем характеристики 0, градуированная произвольной группой. Тогда разрешимый R и нильпотентный N радикалы алгебры Ли L являются градуированными идеалами.*

3.2 (H, L)-модули над H-модульными алгебрами Ли L

Как будет видно из дальнейшего, при изучении H-(ко)модульных алгебр Ли L важную роль играют L-модули, наделённые дополнительно структурой H-(ко)модуля, в которых структуры L-модуля и H-(ко)модуля согласованы. Мы будем называть такие модули (H, L)-модулями.

Пусть L — H-модульная алгебра Ли, V — H-модуль для некоторой алгебры Хопфа H, а $\psi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — гомоморфизм, задающий на V структуру L-модуля. Будем говорить, что (V, ψ) является (H, L)-*модулем*, если

$$h(\psi(a)v) = \psi(h_{(1)}a)(h_{(2)}v) \text{ для всех } a \in L,\ h \in H,\ v \in V.$$

Если для всех $a \in L$, $v \in V$ положить $av := \psi(a)v$, последнее равенство переписывается в виде

$$h(av) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}v) \text{ для всех } a \in L,\ h \in H,\ v \in V. \tag{3.4}$$

Будем называть (H, L)-модуль (V, ψ) *неприводимым*, если он не содержит нетривиальных H-инвариантных L-подмодулей. Будем говорить, что (H, L)-модуль (V, ψ) *вполне приводим*, если он является прямой суммой неприводимых (H, L)-подмодулей. Будем называть (H, L)-модуль (V, ψ) *точным*, если (V, ψ) точен как L-модуль, т.е. если $\ker \psi = 0$. Часто для краткости мы будем опускать вторую компоненту в обозначении (V, ψ) и писать просто V.

В силу (3.2) для всякой H-модульной алгебры Ли L пара (L, ad) является (H, L)-модулем, причём (H, L)-подмодули (H, L)-модуля (L, ad) — это в точности H-инвариантные идеалы алгебры Ли L.

Если V — модуль над некоторой алгеброй Хопфа H, то алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ наследует структуру H-модуля от ассоциативной H-модульной алгебры $\mathrm{End}_F(V)$ (см. пример 1.34). Однако если H некокоммутативна, нельзя утверждать, что в $\mathfrak{gl}(V)$ выполяется условие (3.2) и что $\mathfrak{gl}(V)$ является H-модульной алгеброй.

Пусть (V, ψ) является (H, L)-модулем для некоторой H-модульной алгебры Ли L. Тогда ψ — гомоморфизм H-модулей. Более того, если через $\zeta\colon H \to \mathrm{End}_F(V)$ мы обозначим гомоморфизм, задающий на V структуру H-модуля, то условие (3.4) станет эквивалентным условию

$$\zeta(h)\psi(a) = \psi(h_{(1)}a)\zeta(h_{(2)}) \text{ для всех } h \in H,\ a \in L. \tag{3.5}$$

Докажем теперь некоторые свойства (H, L)-модулей, которые будут затем использованы в §3.4, §3.10 и главе 8.

Как и в случае ассоциативных алгебр (см. предложение 2.2), начнём с того, что докажем H-инвариантность аннуляторов H-подмодулей, в данном случае H-подмодулей (H, L)-модулей. Благодаря тождеству антикоммутативности в случае алгебр Ли этот результат справедлив без дополнительных предположений относительно антипода алгебры Хопфа.

Лемма 3.11. *Пусть V — (H, L)-модуль для некоторой алгебры Хопфа H и H-модульной алгебры Ли L над произвольным полем F, а $M \subseteq V$ — его H-подмодуль. Тогда аннулятор*

$$\mathrm{Ann}_L(M) := \{a \in L \mid aM = 0\}$$

H-подмодуля M является H-подмодулем алгебры Ли L. Если, кроме этого, M является ещё и L-подмодулем, то $\mathrm{Ann}_L(M)$ является H-инвариантным идеалом алгебры Ли L.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}(ha)v = (h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})a)v = (h_{(1)}a)((\varepsilon(h_{(2)})1)v) = (h_{(1)}a)(h_{(2)}(Sh_{(3)})v) = \\ = (h_{(1)(1)}a)(h_{(1)(2)}(Sh_{(2)})v) = h_{(1)}(a(Sh_{(2)})v) = 0\end{aligned}$$

для всех $v \in M$, $a \in \mathrm{Ann}_L(M)$, $h \in H$, поскольку для каждого слагаемого $(Sh_{(2)})v \in M$. Отсюда $\mathrm{Ann}_L(M)$ действительно является H-подмодулем. Если M — L-подмодуль, то

$$[a, b]v = a(bv) - b(av) = 0 \text{ для всех } v \in M,\ a \in \mathrm{Ann}_L(M),\ b \in L,$$

т.е. $\mathrm{Ann}_L(M)$ является идеалом. □

В случае, когда $V = L$, аннулятор $\mathrm{Ann}_L(M)$ подмножества $M \subseteq L$ называется *централизатором* подмножества M.

В леммах 3.12–3.15, которые доказываются ниже, V является конечномерным (H, L)-модулем, где H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, а L — H-модульная алгебра Ли с H-инвариантным радикалом R. Через $\zeta\colon H \to \mathrm{End}_F(V)$

и $\psi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ будем обозначать гомоморфизмы, отвечающие (H, L)-модульной структуре. Обозначим через A ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(V)$, порождённую операторами из $\psi(L)$ и $\zeta(H)$.

Лемма 3.12. *Справедливо включение $\psi([L, R]) \subseteq J(A)$, где $J(A)$ — радикал Джекобсона алгебры A.*

Доказательство. Пусть

$$V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots \supseteq W_t = \{0\}$$

— композиционный ряд в V из (необязательно H-инвариантных) L-подмодулей. Тогда все факторы W_i/W_{i+1} являются неприводимыми L-модулями. Обозначим через $\psi_i\colon L \to \mathfrak{gl}(W_i/W_{i+1})$ соответствующие гомоморфизмы. Тогда в силу теоремы Э. Картана [7, предложение 1.4.11], каждая из алгебр Ли $\psi_i(L)$ либо полупроста, либо является прямой суммой полупростого идеала и центра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(W_i/W_{i+1})$. Следовательно, алгебра Ли $\psi_i([L, L])$ полупроста и $\psi_i([L, L]\cap R) = 0$. Поскольку $[L, R] \subseteq [L, L]\cap R$, получаем $\psi_i([L, R]) = 0$ и $[L, R]W_i \subseteq W_{i+1}$.

Обозначим через I ассоциативный идеал алгебры A, порождённый всеми элементами пространства $\psi([L, R])$. Тогда I^t — ассоциативный идеал, порождённый элементами вида

$$a_1\bigl(\zeta(h_{10})b_{11}\zeta(h_{11})b_{12}\ldots\zeta(h_{1,s_1-1})b_{1,s_1}\zeta(h_{1,s_1})\bigr)a_2\bigl(\zeta(h_{20})b_{21}\zeta(h_{21})b_{22}\ldots\zeta(h_{2,s_2-1})b_{2,s_2}\zeta(h_{2,s_2})\bigr)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot a_{t-1}\bigl(\zeta(h_{t-1,0})b_{t-1,1}\zeta(h_{t-1,1})b_{t-1,2}\ldots\zeta(h_{t-1,s_{t-1}-1})b_{t-1,s_{t-1}}\zeta(h_{t-1,s_{t-1}})\bigr)a_t,$$

где $a_i \in \psi([L, R])$, $b_{ij} \in \psi(L)$, $h_{ij} \in H$. Используя (3.5), переместим все $\zeta(h_{ij})$ вправо и получим, что I^t порождён элементами

$$b = a_1\bigl((h'_{11}b_{11})\ldots(h'_{1,s_1}b_{1,s_1})\bigr)\ (h_2a_2)\ \bigl((h'_{21}b_{21})\ldots(h'_{2,s_2}b_{2,s_2})\bigr)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot(h_{t-1}a_{t-1})\bigl((h'_{t-1,1}b_{t-1,1})\ldots(h'_{t-1,s_{t-1}}b_{t-1,s_{t-1}})\bigr)(h_ta_t)\zeta(h_{t+1}),$$

где $h_i, h'_{ij} \in H$. Однако все $h_ia_i \in \psi([L, R])$, так как согласно нашим предположениям разрешимый радикал R является H-подмодулем. Следовательно, $(h_ia_i)W_{k-1} \subseteq W_k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant t$. Отсюда $b = 0$, $I^t = 0$ и $\psi([L, R]) \subseteq J(A)$. □

Лемма 3.13. *Предположим, что радикал Джекобсона $J(A_1)$ любой H-инвариантной ассоциативной подалгебры $A_1 \subseteq \mathrm{End}_F(V)$ является H-подмодулем. Обозначим через A_2 ассоциативную подалгебру в $\mathrm{End}_F(V)$, порождённую операторами из $\psi(R)$. Тогда для любой ассоциативной H-инвариантной подалгебры $A_1 \subseteq A_2$ справедливо включение $J(A_1) \subseteq J(A)$.*

Доказательство. Заметим, что в силу H-инвариантности разрешимого радикала R подалгебра A_2 является H-подмодулем. Рассмотрим H-инвариантную подалгебру Ли $\psi(R) + J(A) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Заметим, что алгебра Ли $\psi(R) + J(A)$ разрешима, так как радикал Джекобсона $J(A)$ нильпотентен, а $(\psi(R) + J(A))/J(A) \cong \psi(R)/(\psi(R) \cap J(A))$ является гомоморфным образом разрешимого радикала R. В силу теоремы Ли в пространстве V существует базис, в котором все операторы из $\psi(R) + J(A)$ имеют верхнетреугольные матрицы. Обозначим соответствующее вложение $A \hookrightarrow M_s(F)$, где $s := \dim V$, через θ. При этом $\theta(A_2 + J(A)) \subseteq \mathrm{UT}_s(F)$, где $\mathrm{UT}_s(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц $s \times s$.

Докажем, что H-инвариантный идеал I алгебры A, порождённый подпространством $J(A_1)+J(A)$, нильпотентен. Отсюда будет следовать, что $J(A_1) \subseteq J(A)$.

Прежде всего заметим, что $\theta(J(A_1))$ и $\theta(J(A))$ содержатся в $\mathrm{UT}_s(F)$ и состоят из нильпотентных элементов. Следовательно, в соответствующих матрицах на главной диагонали стоят нулевые элементы и $\theta(J(A_1)), \theta(J(A)) \subseteq \tilde{N}$, где

$$\tilde{N} := \langle e_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant s \rangle_F.$$

Введём обозначение

$$\tilde{N}_k := \langle e_{ij} \mid i+k \leqslant j \rangle_F \subseteq \tilde{N}.$$

Тогда

$$\tilde{N} = \tilde{N}_1 \supsetneqq \tilde{N}_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq \tilde{N}_{m-1} \supsetneqq \tilde{N}_s = \{0\}.$$

Пусть $\mathrm{ht}_{\tilde{N}}\, a := k$, если $\theta(a) \in \tilde{N}_k$, $\theta(a) \notin \tilde{N}_{k+1}$.

Поскольку идеал $J(A)$ нильпотентен, $(J(A))^p = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Докажем, что $I^{s+p} = 0$. Пользуясь (3.5), переместим все $\zeta(h)$, где $h \in H$, вправо и получим, что пространство I^{s+p} является линейной оболочкой элементов $b_1 j_1 b_2 j_2 \ldots j_{s+p} b_{s+p+1} \zeta(h)$, где $j_k \in J(A_1) \cup J(A)$, $b_k \in A_3 \cup \{1\}$, $h \in H$. Здесь через A_3 обозначена подалгебра алгебры $\mathrm{End}_F(V)$, порождённая элементами пространства $\psi(L)$. Если по крайней мере p элементов j_k принадлежат $J(A)$, такое произведение равно 0. Следовательно, мы можем считать, что по крайней мере s элементов j_k принадлежат $J(A_1)$.

Пусть $j_i \in J(A_1)$, $b_i \in A_3 \cup \{1\}$. Воспользуемся индукцией по ℓ, чтобы доказать, что элемент $j_1 b_1 j_2 b_2 \ldots b_{\ell-1} j_\ell$ может быть представлен в виде суммы $\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\alpha j'_1 j'_2 \ldots j'_\beta a$, где $\tilde{j}_i \in J(A_1)$, $j'_i \in J(A)$, $a \in A_3 \cup \{1\}$, а $\alpha + \sum_{i=1}^{\beta} \mathrm{ht}_{\tilde{N}}\, j'_i \geqslant \ell$. Предположим, что элемент $j_1 b_1 j_2 b_2 \ldots b_{\ell-2} j_{\ell-1}$ может быть представлен в виде суммы $\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa a$, где $\tilde{j}_i \in J(A_1)$, $j'_i \in J(A)$, $a \in A_3 \cup \{1\}$, а $\gamma + \sum_{i=1}^{\varkappa} \mathrm{ht}_{\tilde{N}}\, j'_i \geqslant \ell - 1$. Тогда $j_1 b_1 j_2 b_2 \ldots j_{\ell-1} b_{\ell-1} j_\ell$ является суммой элементов

$$\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa a b_{\ell-1} j_\ell = \tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa [a b_{\ell-1}, j_\ell] + \tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa j_\ell (a b_{\ell-1}).$$

Заметим, что в силу леммы 3.12 и тождества Якоби $[a b_{\ell-1}, j_\ell] \in J(A)$. Следовательно, достаточно рассматривать только второе слагаемое. Однако

$$\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa j_\ell (a b_{\ell-1}) = \tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j_\ell j'_1 j'_2 \ldots j'_\varkappa (a b_{\ell-1}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\varkappa} \tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \ldots \tilde{j}_\gamma j'_1 j'_2 \ldots j'_{i-1} [j'_i, j_\ell] j'_{i+1} \ldots j'_\varkappa (a b_{\ell-1}).$$

Поскольку $[j'_i, j_\ell] \in J(A)$ и $\mathrm{ht}_{\tilde{N}} [j'_i, j_\ell] \geqslant 1 + \mathrm{ht}_{\tilde{N}}\, j'_i$, все слагаемые имеют требуемый вид. Следовательно,

$$j_1 b_1 j_2 b_2 \ldots j_{s-1} b_{s-1} j_s \in \theta^{-1}(\tilde{N}_s) = \{0\},$$

$I^{s+p} = 0$ и

$$J(A) \subseteq J(A_1) + J(A) \subseteq I \subseteq J(A).$$

□

Нам также потребуется следующий вариант разложения Жордана:

Лемма 3.14. *Предположим, что для любой H-инвариантной ассоциативной подалгебры $A_1 \subseteq \mathrm{End}_F(V)$ существует H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева. Пусть $W = \langle a_1, \dots, a_t \rangle_F$ — некоторое подпространство разрешимого радикала R такое, что $\psi(W)$ является H-подмодулем H-модуля $\psi(R)$. Тогда для всех $1 \leqslant i \leqslant t$ существует разложение $\psi(a_i) = c_i + d_i$, где c_i и d_i являются ассоциативными многочленами от $\psi(a_j)$, $1 \leqslant j \leqslant t$, без свободного члена, c_i — коммутирующие диагонализуемые операторы на V, а $d_i \in J(A)$. Более того, $\langle c_1, \dots, c_t \rangle_F$ и $\langle d_1, \dots, d_t \rangle_F$ являются H-подмодулями алгебры $\mathrm{End}_F(V)$.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3.13, выберем такое вложение $\theta\colon A \hookrightarrow M_s(F)$, что $\theta(\psi(R)+J(A)) \subseteq \mathrm{UT}_s(F)$. Обозначим через A_1 ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(V)$, порождённую элементами $\psi(a_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant t$. Подалгебра A_1 является H-инвариантной, так как $\psi(W)$ — H-подмодуль в $\psi(R)$. Следовательно, A_1 — ассоциативная H-модульная алгебра. Согласно нашим предположениям радикал Джекобсона $J(A_1)$ является H-инвариантным идеалом и существует H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева $A_1 = \tilde{A}_1 \oplus J(A_1)$ (прямая сумма H-подмодулей), где $\tilde{A}_1$ — H-инвариантная полупростая подалгебра алгебры A_1. Поскольку $\theta(\psi(R)) \subseteq \mathfrak{t}_s(F)$, где $\mathfrak{t}_s(F)$ — алгебра Ли верхнетреугольных матриц $s \times s$, имеет место включение $\theta(A_1) \subseteq \mathrm{UT}_s(F)$. Воспользуемся разложением

$$\mathrm{UT}_s(F) = Fe_{11} \oplus Fe_{22} \oplus \ldots \oplus Fe_{ss} \oplus \tilde{N},$$

где

$$\tilde{N} := \langle e_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant s \rangle_F$$

— нильпотеный идеал. Отсюда алгебра A_1 не содержит подалгебр, изоморфных $M_2(F)$, и $\tilde{A}_1 = Fe_1 \oplus \ldots \oplus Fe_q$ для некоторых идемпотентов $e_i \in A_1$. Для всякого a_j обозначим через d_j его компоненту в $J(A_1)$, а через c_j его компоненту $Fe_1 \oplus \ldots \oplus Fe_q$. Заметим, что e_i — коммутирующие диагонализуемые операторы. Следовательно, для них существует базис в V, состоящий из общих собственных векторов, и c_i также являются коммутирующими диагонализуемыми операторами. Более того,

$$hc_j + hd_j = h\psi(a_j) \in \langle \psi(a_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant t \rangle_F \subseteq \langle c_i \mid 1 \leqslant i \leqslant t \rangle_F \oplus \langle d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant t \rangle_F \subseteq \tilde{A}_1 \oplus J(A_1)$$

для всех $h \in H$. Однако $\tilde{A}_1$ и $J(A_1)$ являются H-подмодулями, откуда $hc_j \in \tilde{A}_1$, а $hd_j \in J(A_1)$. Следовательно, $hc_j \in \langle c_1, \dots, c_t \rangle_F$ и $hd_j \in \langle d_1, \dots, d_t \rangle_F$. Отсюда $\langle c_1, \dots, c_t \rangle_F$ и $\langle d_1, \dots, d_t \rangle_F$ являются H-подмодулями алгебры $\mathrm{End}_F(V)$. В силу леммы 3.13 справедливы включения $J(A_1) \subseteq J(A)$ и $\langle d_1, \dots, d_t \rangle_F \subseteq J(A)$. □

Лемма 3.15. *Пусть V — конечномерный неприводимый (H, L)-модуль. Предположим, что для любой H-инвариантной ассоциативной подалгебры $A_1 \subseteq \mathrm{End}_F(V)$ существует H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева. Тогда*

1. *$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_q$ для некоторых L-подмодулей V_i;*
2. *на каждом V_i элементы разрешимого радикала R действуют скалярными операторами.*

Доказательство. Пусть $\psi(r_1),\ldots,\psi(r_t)$ — базис в $\psi(R)$. В силу леммы 3.14 существует разложение $\psi(r_i)=r_i'+r_i''$, где r_i' — коммутирующие диагонализуемые операторы на V, а $r_i''\in J(A)$. Заметим, что в силу теоремы плотности $A=\mathrm{End}_F(V)$. Следовательно, $J(A)=0$ и $\psi(r_i)=r_i'$. Отсюда для операторов $\psi(r_i)$ существует общий базис из собственных векторов, и мы можем выбрать подпространства V_i, где $1\leqslant i\leqslant q$, $q\in\mathbb{N}$, такие, что

$$V=V_1\oplus\ldots\oplus V_q,$$

и всякое V_i является пересечением собственных подпространств операторов $\psi(r_i)$. Заметим, что в силу леммы 3.12

$$[\psi(r_i),\psi(a)]\in J(a)=0 \text{ для всех } a\in L.$$

Следовательно, V_i являются L-подмодулями, и лемма доказана. □

Рассмотрим теперь случай, когда $H=FG$ для некоторой группы G.

Пусть L — алгебра Ли, на которой действует автоморфизмами некоторая группа G, а V — FG-модуль. Предположим, что гомоморфизм $\psi\colon L\to\mathfrak{gl}(V)$ задаёт на V структуру L-модуля. Будем говорить, что (V,ψ) является *(G,L)-модулем*, если $g(\psi(a)v)=\psi(ga)(gv)$ для всех $a\in L$, $g\in G$ и $v\in V$. Будем называть (G,L)-модуль (V,ψ) *неприводимым*, если он не содержит нетривиальных G-инвариантных L-подмодулей.

В случае действий групп лемма 3.15 допускает следующее уточнение:

Лемма 3.16. *Пусть V — конечномерный неприводимый (G,L)-модуль, а L — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой действует автоморфизмами некоторая группа G. Предположим, что для любой G-инвариантной ассоциативной подалгебры $A_1\subseteq\mathrm{End}_F(V)$ существует G-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева. (Это всегда выполнено, если, например, группа G конечна.) Тогда*

1. *$V=V_1\oplus\ldots\oplus V_q$ для некоторых L-подмодулей V_i;*
2. *на каждом V_i элементы разрешимого радикала R действуют скалярными операторами;*
3. *для любого $g\in G$ существует такое $1\leqslant j\leqslant q$, что $gV_i=V_j$, и это действие группы G на множестве $\{V_1,\ldots,V_q\}$ транзитивно.*

Доказательство. Предложения 1 и 2 являются следствиями предложений 1 и 2 леммы 3.15.

Докажем предложение 3. Для всякого V_i определим линейную функцию $\alpha_i\colon R\to F$ такую, что $\psi(r)v=\alpha_i(r)v$ для всех $r\in R$ и $v\in V$. Тогда $V_i=\bigcap_{r\in R}\ker(\psi(r)-\alpha_i(r)\,\mathrm{id}_V)$, а

$$gV_i=\bigcap_{r\in R}\ker(\psi(gr)-\alpha_i(r)\,\mathrm{id}_V)=\bigcap_{\tilde r\in R}\ker(\psi(\tilde r)-\alpha_i(g^{-1}\tilde r)\,\mathrm{id}_V),$$

где $\tilde r=gr$. Следовательно, подмодуль gV_i должен совпадать с одним из подмодулей V_j для некоторого $1\leqslant j\leqslant q$. Теперь транзитивность G-действия на множестве $\{V_1,\ldots,V_q\}$ следует из того, что (G,L)-модуль V неприводим. □

3.3 (H, L)-модули над H-комодульными алгебрами Ли L

Пусть L — H-комодульная алгебра Ли для некоторой алгебры Хопфа H, а $\psi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — её представление. Будем говорить, что (V, ψ) является *(H, L)-модулем*, если V является H-комодулем и

$$\rho_V(\psi(a)v) = \psi(a_{(0)})v_{(0)} \otimes a_{(1)}v_{(1)} \text{ для всех } a \in L,\ v \in V,$$

где $\rho_V\colon V \to V \otimes H$ — отображение, задающее на V структуру комодуля. Назовём (V, ψ) *симметрическим (H, L)-модулем*, если

$$\rho_V(\psi(a)v) = \psi(a_{(0)})v_{(0)} \otimes a_{(1)}v_{(1)} = \psi(a_{(0)})v_{(0)} \otimes v_{(1)}a_{(1)} \text{ для всех } a \in L,\ v \in V.$$

Пример 3.17. Если L — H-комодульная алгебра Ли, то присоединённое представление $\operatorname{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$ определяет на L структуру симметрического (H, L)-модуля, поскольку

$$\rho((\operatorname{ad} a)b) = \rho([a, b]) = -\rho([b, a]) = -[b_{(0)}, a_{(0)}] \otimes b_{(1)}a_{(1)} = (\operatorname{ad} a_{(0)})b_{(0)} \otimes b_{(1)}a_{(1)}$$

для всех $a, b \in L$.

Будем говорить, что (H, L)-модуль (V, ψ) *неприводим*, если он не содержит нетривиальных H-коинвариантных L-подмодулей.

Докажем результат, двойственный к лемме 3.11.

Лемма 3.18. *Пусть V — (H, L)-модуль для некоторой алгебры Хопфа H и H-комодульной алгебры Ли L над произвольным полем F, а $M \subseteq V$ — его H-подкомодуль. Тогда $\operatorname{Ann}_L(M)$ является H-подкомодулем алгебры Ли L. Если, кроме этого, M является ещё и L-подмодулем, то $\operatorname{Ann}_L(M)$ является H-коинвариантным идеалом алгебры Ли L.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для всех $h^* \in H^*$, $a \in \operatorname{Ann}_L(M)$, $m \in M$, справедливо равенство $h^*(a_{(1)})a_{(0)}m = 0$. Заметим, что

$$h^*(a_{(1)})a_{(0)}m = h^*(a_{(1)})a_{(0)}m = h^*(a_{(1)})a_{(0)}\varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = h^*(a_{(1)}\varepsilon(m_{(1)})1_H)a_{(0)}m_{(0)} =$$
$$= h^*(a_{(1)}m_{(1)}S(m_{(2)}))a_{(0)}m_{(0)} = h^*([a, m_{(0)}]_{(1)}S(m_{(1)}))(am_{(0)})_{(0)} = 0,$$

поскольку для каждого слагаемого $am_{(0)} = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ann}_L(M)$ является H-подкомодулем. Для доказательства второй части леммы достаточно повторить соответствующие рассуждения из доказательства леммы 3.18. □

3.4 H-(ко)инвариантное разложение полупростых алгебр

Докажем теперь аналоги известного разложения для полупростых (в обычном смысле, т.е. таких, что их разрешимый радикал равен нулю) H-модульных и H-комодульных алгебр Ли.

Теорема 3.19. *Пусть B — конечномерная полупростая H-модульная алгебра Ли, где H — произвольная алгебра Хопфа над полем характеристики* 0. *Тогда $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых H-модульных алгебр Ли B_i.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $\dim B$. Если алгебра B является H-простой, доказывать нечего. Предположим, что B содержит нетривиальные H-инвариантные идеалы. В силу классической теоремы о разложении полупростой алгебры Ли (см., например, [7, теорема 2.1.4])

$$B = \tilde{B}_1 \oplus \tilde{B}_2 \oplus \ldots \oplus \tilde{B}_q \text{ (прямая сумма идеалов)}$$

для некоторых простых алгебр Ли $\tilde{B}_j$. Фиксируем произвольный минимальный H-инвариантный идеал $B_1 \subset B$. Тогда $B_1 = \tilde{B}_{i_1} \oplus \tilde{B}_{i_2} \oplus \ldots \oplus \tilde{B}_{i_\ell}$ для некоторых i_k, а централизатор B_0 идеала $\tilde{B}$ в B состоит из прямой суммы остальных простых алгебр Ли $\tilde{B}_j$. В силу леммы 3.11 идеал B_0 является H-подмодулем. Теперь достаточно применить к B_0 предположение индукции и воспользоваться равенством $B = B_1 \oplus B_0$. □

Двойственный результат выглядит следующим образом:

Теорема 3.20. *Пусть B — конечномерная полупростая H-комодульная алгебра Ли, где H — произвольная алгебра Хопфа над полем характеристики* 0. *Тогда $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма H-коинвариантных идеалов) для некоторых H-простых H-комодульных алгебр Ли B_i.*

Доказательство. Повторим дословно доказательство теоремы 3.19, использовав вместо леммы 3.11 лемму 3.18. □

3.5 Когомологии алгебр Ли и (ко)инвариантное разложение Леви

Сперва напомним основные понятия когомологий алгебр Ли (см. [7, 18]).

Пусть $\psi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры Ли L на некотором векторном пространстве V над полем F. Обозначим через $C^k(L;V) \subseteq \operatorname{Hom}_F(L^{\otimes k}; V)$, где $k \in \mathbb{N}$, подпространство, состоящее из всех кососимметрических отображений. При этом считаем, что $C^0(L;V) := V$.

Напомним, что элементы пространства $C^k(L;V)$ называются *k-коцепями* с коэффициентами в V. *Кограничные операторы* $d \colon C^k(L;V) \to C^{k+1}(L;V)$ определяются на этих пространствах таким образом, чтобы было справедливо равенство $d^2 = 0$. Элементы подпространства

$$Z^k(L;\psi) := \ker(d \colon C^k(L;V) \to C^{k+1}(L;V)) \subseteq C^k(L;V)$$

называются *k-коциклами*, а элементы подпространства

$$B^k(L;\psi) := d(C^{k-1}(L;V)) \subseteq C^k(L;V)$$

называются *k-кограницами.* Пространство $H^k(L;\psi) := Z^k(L;\psi)/B^k(L;\psi)$ называется *k-й группой когомологий.*

Для доказательства колинейного аналога теоремы Леви нам потребуются колинейные коцепи с коэффициентами в (H, L)-модулях.

Пусть L — H-комодульная алгебра Ли для некоторой алгебры Хопфа H, а (V, ψ) — (H, L)-модуль. Обозначим через $\tilde{C}^k(L; V)$ подпространство H-*колинейных коцепей*, т.е. таких отображений $\omega \in C^k(L; V)$, что

$$\rho_V(\omega(a_1, a_2, \ldots, a_k)) = \omega(a_{1(0)}, a_{2(0)}, \ldots, a_{k(0)}) \otimes a_{1(1)} a_{2(1)} \ldots a_{k(1)} \text{ для всех } a_i \in L.$$

Если (V, ψ) — (H, L)-модуль и алгебра Хопфа H коммутативна, то, очевидно, кограница всякой H-колинейной коцепи снова является H-колинейной коцепью. Однако для 1-коцепей и симметрического (H, L)-модуля (V, ψ) это утверждение справедливо даже для некоммутативных алгебр Хопфа H:

Лемма 3.21. *Если (V, ψ) — симметрический (H, L)-модуль, тогда*

$$d(\tilde{C}^1(L; V)) \subseteq \tilde{C}^2(L; V).$$

Доказательство. Пусть $\omega \in \tilde{C}^1(L; V)$. Тогда

$$(d\omega)(x, y) := \psi(x)\omega(y) - \psi(y)\omega(x) - \omega([x, y])$$

и

$$\begin{aligned} &\rho_V((d\omega)(x, y)) = \\ &= \psi(x_{(0)})\omega(y)_{(0)} \otimes x_{(1)}\omega(y)_{(1)} - \psi(y_{(0)})\omega(x)_{(0)} \otimes \omega(x)_{(1)} y_{(1)} - \omega([x, y]_{(0)}) \otimes [x, y]_{(1)} = \\ &= \psi(x_{(0)})\omega(y_{(0)}) \otimes x_{(1)} y_{(1)} - \psi(y_{(0)})\omega(x_{(0)}) \otimes x_{(1)} y_{(1)} - \omega([x_{(0)}, y_{(0)}]) \otimes x_{(1)} y_{(1)} = \\ &= (d\omega)(x_{(0)}, y_{(0)}) \otimes x_{(1)} y_{(1)}. \end{aligned}$$

$\square$

Пусть $\tilde{Z}^2(L; \psi) := Z^2(L; \psi) \cap \tilde{C}^2(L; V)$ и $\tilde{B}^2(L; \psi) := d(\tilde{C}^1(L; V))$. Лемма 3.21 позволяет определить *вторую группу H-колинейных когомологий* $\tilde{H}^2(L; \psi) := \tilde{Z}^2(L; \psi)/\tilde{B}^2(L; \psi)$.

Пусть V и W — H-комодули для некоторой алгебры Хопфа H. Будем говорить, что F-линейное отображение $\varphi \colon V \to W$ является H-*колинейным*, если

$$\varphi(v)_{(0)} \otimes \varphi(v)_{(1)} = \varphi(v_{(0)}) \otimes v_{(1)} \text{ для всех } v \in V.$$

В [100] Э. Дж. Тафт использовал оригинальный приём Машке для того, чтобы превратить неинвариантное отображение в инвариантное. В [98] Д. Штефан и Ф. Ван Ойстайен использовали приём Машке, адаптированный для алгебр Хопфа с левым интегралом. Мы также воспользуемся последним приёмом:

Лемма 3.22. *Пусть $r \colon V \to W$ — F-линейное отображение, где V и W — H-комодули, а H — алгебра Хопфа над полем F. Пусть алгебра Хопфа H обладает левым интегралом $t \in H^*$. Тогда отображение $\tilde{r} \colon V \to W$, заданное равенством*

$$\tilde{r}(x) = t\big(r(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big) r(x_{(0)})_{(0)} \text{ при } x \in V$$

является H-колинейным. Если, кроме этого, $\pi r = \mathrm{id}_V$ для некоторого H-колинейного отображения $\pi \colon W \to V$ и $t(1) = 1$, то $\pi\tilde{r} = \mathrm{id}_V$.

Пример 3.23. Если G — группа, а $H = FG$, тогда $V = \bigoplus_{g\in G} V^{(g)}$ и $W = \bigoplus_{g\in G} W^{(g)}$ являются градуированными пространствами. Предположим, что левый интеграл t взят из примера 1.15. Тогда отображение $\tilde r$, заданное равенством $\tilde r(x) = \sum_{g\in G} p_{W,g}\, r(p_{V,g}x)$ при $x \in V$, является градуированным. Здесь $p_{V,g}$ — проектор пространства V на $V^{(g)}$ с ядром $\bigoplus_{\substack{h\in G,\\ h\neq g}} V^{(h)}$, а $p_{W,g}$ — проектор пространства W на $W^{(g)}$ с ядром $\bigoplus_{\substack{h\in G,\\ h\neq g}} W^{(h)}$.

Доказательство леммы 3.22. Заметим, что

$$\begin{aligned}\tilde r(x_{(0)}) \otimes x_{(1)} = t\big(r(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\ r(x_{(0)})_{(0)} \otimes x_{(2)} =\\ = r(x_{(0)})_{(0)} \otimes \Big(t\big(r(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)1\Big) x_{(2)} =\\ = r(x_{(0)})_{(0)} \otimes t\big(r(x_{(0)})_{(1)(2)} (Sx_{(1)})_{(2)}\big)\ r(x_{(0)})_{(1)(1)} (Sx_{(1)})_{(1)} x_{(2)} =\\ = r(x_{(0)})_{(0)} \otimes t\big(r(x_{(0)})_{(2)} S(x_{(1)})\big)\ r(x_{(0)})_{(1)} (Sx_{(2)}) x_{(3)} =\\ = t\big(r(x_{(0)})_{(2)} S(x_{(1)})\big)\ r(x_{(0)})_{(0)} \otimes r(x_{(0)})_{(1)} = \rho_W(\tilde r(x)).\end{aligned}$$

Тогда отображение $\tilde r$ является H-колинейным, и первая часть леммы доказана.

Предположим, что $\pi r = \mathrm{id}_V$ для некоторого H-колинейного отображения $\pi\colon W \to V$. Пусть $x \in V$. Тогда

$$\begin{aligned}(\pi\tilde r)(x) = t\big(r(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\ \pi\big(r(x_{(0)})_{(0)}\big) = t\big((\pi r)(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\ (\pi r)(x_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big(x_{(0)(1)} S(x_{(1)})\big)\ x_{(0)(0)} = t\big(x_{(1)} S(x_{(2)})\big)\ x_{(0)} = t(1)x = x.\end{aligned}$$

□

Лемма 3.24. *Пусть (V,ψ) — конечномерный симметрический (H,L)-модуль, где L — конечномерная H-комодульная полупростая алгебра Ли над полем F характеристики 0, а H — алгебра Хопфа с таким ad-инвариантным левым интегралом $t \in H^*$, что $t(1) = 1$. Тогда $\tilde H^2(L;\psi) = 0$.*

Доказательство. Напомним, что в силу второй леммы Уайтхеда (см., например, [7, упражнение 3.5] или [18, лекция 19, следствие 2]), $H^2(L;\psi) = 0$. Следовательно, если $\omega \in \tilde Z^2(L;\psi)$, то существует такая 1-коцепь $\nu \in C^1(L;V)$, что $\omega = d\nu$. Пусть $\tilde\nu$ — отображение, полученное из ν согласно лемме 3.22. Тогда $\tilde\nu \in \tilde C^1(L;V)$. Докажем, что $d\tilde\nu = \omega$.

Пусть $a, b \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}(d\tilde\nu)(a,b) = \psi(a)\tilde\nu(b) - \psi(b)\tilde\nu(a) - \tilde\nu([a,b]) = t(\nu(b_{(0)})_{(1)} S(b_{(1)}))\ \psi(a)\nu(b_{(0)})_{(0)} -\\ -t(\nu(a_{(0)})_{(1)} S(a_{(1)}))\ \psi(b)\nu(a_{(0)})_{(0)} - t(\nu([a,b]_{(0)})_{(1)} S([a,b]_{(1)}))\ \nu([a,b]_{(0)})_{(0)} =\\ = t(\nu(b_{(0)})_{(1)} S(b_{(1)}))\ \psi(\varepsilon(a_{(1)})a_{(0)})\nu(b_{(0)})_{(0)} -\\ -t(\nu(a_{(0)})_{(1)} S(a_{(1)}))\ \psi(\varepsilon(b_{(1)})b_{(0)})\nu(a_{(0)})_{(0)} - t(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)} S(a_{(1)}b_{(1)}))\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)} =\\ = \varepsilon(a_{(1)}) t\Big(\nu(b_{(0)})_{(1)} S(b_{(1)})\Big)\ \psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})_{(0)} -\\ -t\Big(\nu(a_{(0)})_{(1)} \varepsilon(b_{(1)}) S(a_{(1)})\Big)\ \psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})_{(0)} -\\ -t\Big(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)} S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)}.\end{aligned}$$

Поскольку t является ad-инвариантным, справедливо равенство

$$(d\tilde{\nu})(a,b) = t\Big(a_{(1)}\nu(b_{(0)})_{(1)}(Sb_{(1)})S(a_{(2)})\Big)\ \psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})_{(0)}-$$
$$-t\Big(\nu(a_{(0)})_{(1)}b_{(1)}(Sb_{(2)})S(a_{(1)})\Big)\ \psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})_{(0)}-$$
$$-t\Big(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)} =$$
$$= t\Big(\big(a_{(0)(1)}\nu(b_{(0)})_{(1)}\big)(Sb_{(1)})S(a_{(1)})\Big)\ \psi(a_{(0)(0)})\nu(b_{(0)})_{(0)}-$$
$$-t\Big(\big(\nu(a_{(0)})_{(1)}b_{(0)(1)}\big)(Sb_{(1)})S(a_{(1)})\Big)\ \psi(b_{(0)(0)})\nu(a_{(0)})_{(0)}-$$
$$-t\Big(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)}.$$

Поскольку (H,L)-модуль (V,ψ) симметрический, имеем

$$(d\tilde{\nu})(a,b) = t\Big(\big(\psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})\big)_{(1)}(Sb_{(1)})S(a_{(1)})\Big)\ \big(\psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})\big)_{(0)}-$$
$$-t\Big(\big(\psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})\big)_{(1)}(Sb_{(1)})S(a_{(1)})\Big)\ \big(\psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})\big)_{(0)}-$$
$$-t\Big(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)} =$$
$$= t\Big(\big(\psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})\big)_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \big(\psi(a_{(0)})\nu(b_{(0)})\big)_{(0)}-$$
$$-t\Big(\big(\psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})\big)_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \big(\psi(b_{(0)})\nu(a_{(0)})\big)_{(0)}-$$
$$-t\Big(\nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\Big)\ \nu([a_{(0)},b_{(0)}])_{(0)} =$$
$$= t\big(\omega(a_{(0)},b_{(0)})_{(1)}S(a_{(1)}b_{(1)})\big)\ \omega(a_{(0)},b_{(0)})_{(0)} = t\big(a_{(1)}b_{(1)}S(a_{(2)}b_{(2)})\big)\ \omega(a_{(0)},b_{(0)}) = \omega(a,b),$$

поскольку $\omega \in \tilde{Z}^2(L;\psi)$ и $t(1)=1$. Следовательно, $\tilde{Z}^2(L;\psi) = \tilde{B}^2(L;\psi)$ и $\tilde{H}^2(L;\psi)=0$. $\square$

Теорема 3.25 является H-комодульной версией теоремы Леви:

Теорема 3.25. *Пусть L — конечномерная H-комодульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, где H — алгебра Хопфа. Предположим, что разрешимый радикал R алгебры Ли L является H-подкомодулем и существует такой* ad*-инвариантный левый интеграл $t \in H^*$, что $t(1)=1$. Тогда существует такая H-коинвариантная максимальная полупростая подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-подкомодулей).*

Доказательство. Проведём доказательство по той же схеме, по которой доказывается обычная теорема Леви.

Сперва рассмотрим случай, когда разрешимый радикал R является абелевым идеалом. Пусть $\pi\colon L \to L/R$ — естественный сюръективный гомоморфизм. Заметим, что L/R — полупростая H-комодульная алгебра Ли, а π — H-колинейное отображение, поскольку R является H-подкомодулем. Рассмотрим произвольное F-линейное отображение $r\colon L/R \to L$ такое, что $\pi r = \mathrm{id}_{L/R}$. В силу леммы 3.22 можно считать, что отображение r является H-колинейным.

Введём обозначение

$$\Phi(x,y) := [r(x),r(y)] - r([x,y]).$$

Заметим, что $\pi(\Phi(a,b)) = [a,b]-[a,b] = 0$ для всех $a,b \in L/R$. Следовательно, $\Phi(a,b) \in R$. Пусть $\psi\colon L/R \to \mathfrak{gl}(R)$ — линейное отображение, заданное равенством $\psi(a)(v) = [r(a),v]$, где

$a \in L/R$, $v \in R$. При этом

$$\psi(a)\psi(b)(v) - \psi(b)\psi(a)(v) - \psi([a,b])(v) = [r(a),[r(b),v]] - [r(b),[r(a),v]] - [r([a,b]),v] = \\ = [[r(a),r(b)],v] - [r([a,b]),v] = [\Phi(a,b),v] = 0 \text{ для всех } a,b \in L/R,$$

поскольку $\Phi(a,b) \in R$ и $[R,R] = 0$. Следовательно, отображение ψ является представлением алгебры Ли L/R. Более того, (R,ψ) — симметрический $(H, L/R)$-модуль. Заметим, что $\Phi \in \tilde{Z}^2(L/R;\psi)$, поскольку $d\Phi = 0$. Следовательно, в силу леммы 3.24, $\Phi = d\omega$ для некоторой H-колинейной 1-коцепи $\omega \in \tilde{C}^1(L/R;R)$. Отсюда

$$[(r-\omega)(a),(r-\omega)(b)] - (r-\omega)([a,b]) = \\ = ([r(a),r(b)] - r([a,b])) - ([r(a),\omega(b)] - [r(b),\omega(a)] - \omega([a,b])) + [\omega(a),\omega(b)] = \\ = \Phi(a,b) - (d\omega)(a,b) + 0 = 0$$

для всех $a,b \in L/R$ и $\pi(r-\omega) = \pi r = \mathrm{id}_{L/R}$. Следовательно, $(r-\omega)$ является H-колинейным гомоморфным вложением алгебры Ли L/R в L, и $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-подкомодулей), где $B = (r-\omega)(L/R)$, т.е. в этом случае H-коинвариантная теорема Леви доказана.

Докажем теперь общий случай индукцией по $\dim R$. Теорема уже доказана в случае $[R,R] = 0$. Предположим, что $[R,R] \neq 0$. Заметим, что $[R,R] \neq R$, поскольку идеал R разрешим. Более того, $[R,R]$ является H-подкомодулем. Рассмотрим алгебру Ли $L/[R,R]$. Поскольку алгебра Ли $(L/[R,R])/(R/[R,R]) \cong L/R$ полупроста, идеал $R/[R,R]$ является разрешимым радикалом агебры Ли $L/[R,R]$. Применим теперь предположение индукции и получим, что $L/[R,R] = L_1/[R,R] \oplus R/[R,R]$ (прямая сумма H-подкомодулей) для некоторой H-коинвариантной подалгебры Ли $L_1 \subset L$, где $L_1/[R,R] \cong L/R$. Применим теперь предположение индкуции к L_1 и получим, что $L_1 = B \oplus [R,R]$ (прямая сумма H-подкомодулей), где $B \cong L_1/[R,R] \cong L/R$ — полупростая подалгебра. Следовательно, $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-подкомодулей), и теорема доказана. □

Получим теперь некоторые важные следствия из теоремы 3.25:

Теорема 3.26. *Пусть L — конечномерная H-(ко)модульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, где H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа. Тогда существует такая H-(ко)инвариантная максимальная полупростая подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-под(ко)модулей).*

Доказательство. Достаточно использовать двойственность между H-действиями и H^*-кодействиями, применить пример 1.14, следствие 3.4 и теорему 3.25. □

Д. Пагон, Д. Реповш и М. В. Зайцев [90] доказали градуированную версию теоремы Леви для конечной группы. Используя теорему 3.25 мы можем доказать это утверждение для любой группы:

Теорема 3.27. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, градуированная произвольной группой G. Тогда существует такая градуированная максимальная полупростая подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма градуированных подпространств).*

Доказательство. Воспользуемся примерами 1.15, 1.36, следствием 3.10 и теоремой 3.25. □

Применим теперь теорему 3.25 к алгебрам Ли с рациональным действием редуктивной аффинной алгебраической группы:

Теорема 3.28. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, а G — редуктивная аффинная алгебраическая группа над F. Предположим, что группа G рационально действует на L автоморфизмами. Тогда существует такая G-инвариантная подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма G-инвариантных подпространств).*

Доказательство. Нужно заметить, что разрешимый радикал R инвариантен относительно всех автоморфизмов и использовать примеры 1.16, 1.38 и теорему 3.25. □

Теорема 3.29. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями конечномерная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существует такая $\mathfrak{g}$-инвариантная подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма $\mathfrak{g}$-инвариантных подпространств).*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремами 2.27 и 3.28. □

Приведём теперь примеры H-модульных алгебр Ли, для которых H-инвариантное разложение Леви не существует.

Пример 3.30 (Ю. А. Бахтурин)**.** Пусть

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{cc} C & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; C \in \mathfrak{sl}_m(F), D \in M_m(F) \right\} \subseteq \mathfrak{sl}_{2m}(F),\ m \geqslant 2.$$

Тогда идеал

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; D \in M_m(F) \right\}$$

является разрешимым (и нильпотентным) идеалом алгебры Ли L. Определим $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$ по формуле

$$\varphi \left(\begin{array}{cc} C & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} C & C+D \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тогда группа $G = \langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z}$ действует на L автоморфизмами, т.е. L является FG-модульной алгеброй. Однако в L не существует такой FG-инвариантной полупростой подалгебры B, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма FG-подмодулей).

Доказательство. Пусть $a \in L$. Тогда $\varphi(a) - a \in R$. Предположим, что B — такое G-инвариантное подпространство, что $B \cap R = \{0\}$. Тогда $\varphi(b) - b = 0$ для всех $b \in B$ и $B \subseteq R$. Следовательно, $B = 0$ и FG-инвариантного разложения Леви не существует. □

Пример 3.31. Пусть L — та же алгебра Ли, что и в примере 3.30. Рассмотрим присоединённое представление алгебры Ли L на себе самой дифференцированиями. Тогда L оказывается $U(L)$-модульной алгеброй Ли (см. пример 1.33), и все $U(L)$-подмодули в L — это в точности идеалы алгебры Ли L. Однако в L не существует такой $U(L)$-инвариантной полупростой подалгебры B, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма $U(L)$-подмодулей).

Доказательство. Предположим, что $L = B \oplus R$, где B — некоторый $U(L)$-подмодуль. Тогда B является идеалом алгебры Ли L, а R — центром алгебры Ли L, поскольку $[R, R] = 0$. Получаем противоречие. Следовательно, $U(L)$-инвариантного разложения Леви для алгебры Ли L не существует. $\square$

3.6 H-(ко)инвариантный аналог теоремы Вейля

Прежде всего нам потребуется следующее дополнение к лемме 3.22.

Лемма 3.32. *Пусть $\pi\colon V \to W$ — гомоморфизм L-модулей, где (V, φ) и (W, ψ) являются (H, L)-модулями для H-комодульной алгебры Ли L и алгебры Хопфа H. Пусть $t \in H^*$ — ad-инвариантный левый интеграл на H. Тогда $\tilde\pi\colon V \to W$, где*

$$\tilde\pi(x) = t\big(\pi(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\pi(x_{(0)})_{(0)} \text{ при } x \in V,$$

является H-колинейным гомоморфизмом L-модулей. Более того, если $t(1) = 1$, $W \subseteq V$, а π является проектором V на W, то $\tilde\pi$ также является проектором (H, L)-модуля V на W.

Доказательство. Отображение $\tilde\pi$ является H-колинейным согласно лемме 3.22. Пусть $a \in L$, $x \in V$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde\pi(\varphi(a)x) = t\big(\pi((\varphi(a)x)_{(0)})_{(1)} S((\varphi(a)x)_{(1)})\big)\pi((\varphi(a)x)_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big(\pi(\varphi(a_{(0)})x_{(0)})_{(1)} S(a_{(1)}x_{(1)})\big)\pi(\varphi(a_{(0)})x_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big((\psi(a_{(0)})\pi(x_{(0)}))_{(1)} S(a_{(1)}x_{(1)})\big)(\psi(a_{(0)})\pi(x_{(0)}))_{(0)} =\\ = t\big(a_{(1)}\pi(x_{(0)})_{(1)} S(a_{(2)}x_{(1)})\big)\psi(a_{(0)})\pi(x_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big(a_{(1)}\pi(x_{(0)})_{(1)} (Sx_{(1)}) S(a_{(2)})\big)\psi(a_{(0)})\pi(x_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big(\pi(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\psi(a)\pi(x_{(0)})_{(0)} = \psi(a)\tilde\pi(x),\end{aligned}$$

поскольку t является ad-инвариантным левым интегралом. Следовательно, $\tilde\pi$ — H-колинейный гомоморфизм L-модулей.

Пусть $t(1) = 1$, $W \subseteq V$ и π является проектором (H, L)-модуля V на W. Рассмотрим произвольный элемент $x \in W$. Поскольку W является H-подкомодулем, $x_{(0)} \otimes x_{(1)} \in W \otimes H$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde\pi(x) = t\big(\pi(x_{(0)})_{(1)} S(x_{(1)})\big)\pi(x_{(0)})_{(0)} =\\ = t\big(x_{(0)(1)} S(x_{(1)})\big)x_{(0)(0)} = t\big(x_{(1)} S(x_{(2)})\big)x_{(0)} = t(1)x = x\end{aligned}$$

и $\tilde\pi$ также является проектором (H, L)-модуля V на W. $\square$

Теорема 3.33. *Пусть L — H-комодульная алгебра Ли над полем характеристики 0, а H — алгебра Хопфа, обладающая таким ad-инвариантным интегралом $t \in H^*$, что $t(1) = 1$. Пусть (V, ψ) — конечномерный (H, L)-модуль, который вполне приводим как обычный L-модуль (без учёта H-кодействия). Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$ для некоторых неприводимых (H, L)-подмодулей V_i.*

Доказательство. Снова воспользуемся приёмом Машке. Достаточно показать, что для любого H-коинвариантного L-подмодуля $W \subseteq V$ существует проектор $\tilde{\pi}\colon V \to W$, который является H-колинейным гомоморфизмом L-модулей. Тогда $W = V \oplus \ker \tilde{\pi}$, и можно воспользоваться индукцией по $\dim V$.

Поскольку V является вполне приводимым L-модулем, существует проектор $\pi\colon V \to W$, являющийся гомоморфизмом L-модулей. Теперь достаточно определить проектор $\tilde{\pi}$ в соответствии с леммой 3.32. Тогда $\tilde{\pi}$ является H-колинейным гомоморфизмом L-модулей. □

Теперь докажем аналог теоремы Вейля (см., например, [24, теорема 6.3]) для H-комодульных алгебр Ли.

Следствие 3.34. *Пусть L — конечномерная полупростая H-комодульная алгебра Ли над полем характеристики 0, а H — алгебра Хопфа, обладающая таким ad-инвариантным интегралом $t \in H^*$, что $t(1) = 1$. Пусть (V, ψ) — конечномерный (H, L)-модуль. Тогда $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$ для некоторых неприводимых (H, L)-подмодулей V_i.*

Доказательство. Нужно сперва заметить, что в силу обычной теоремы Вейля модуль V вполне приводим как L-модуль, а затем применить теорему 3.33. □

Точно так же, как и у теорем, доказанных ранее, у теоремы 3.33 имеются варианты для случая $H = FG$ и для случая конечномерной алгебры Хопфа H.

Пусть G — группа, $L = \bigoplus_{g \in G} L^{(g)}$ — G-градуированная алгебра Ли, а $V = \bigoplus_{g \in G} V^{(g)}$ — G-градуированное векторное пространство. Пусть $\psi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ — гомоморфизм, задающий на V структуру L-модуля. Будем говорить, что (V, ψ) — *градуированный L-модуль*, если $\psi(a^{(g)})v^{(h)} \in V^{(gh)}$ для всех $g, h \in G$, $a^{(g)} \in L^{(g)}$, $v^{(h)} \in V^{(h)}$. Будем называть градуированный L-модуль (V, ψ) *неприводимым*, если он не содержит нетривиальных градуированных L-подмодулей.

Теорема 3.35. *Пусть L — алгебра Ли над полем характеристики 0, градуированная произвольной группой, а (V, ψ) — конечномерный градуированный L-модуль, вполне приводимый как обычный L-модуль без учёта градуировки. Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых градуированных L-подмодулей V_i.

Доказательство. Воспользуемся примерами 1.15, 1.36 и теоремой 3.33. □

Следствие 3.36. *Пусть L — конечномерная полупростая алгебра Ли над полем характеристики 0, градуированная произвольной группой, а (V, ψ) — конечномерный градуированный L-модуль. Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых градуированных L-подмодулей V_i.

Теорема 3.37. *Пусть L — H-(ко)модульная алгебра Ли над полем характеристики 0, H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа, а (V, ψ) — конечномерный (H, L)-модуль, вполне приводимый как обычный L-модуль (без учёта H-(ко)действия). Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых (H, L)-подмодулей V_i.

Доказательство. Достаточно использовать двойственность между H-действиями и H^*-кодействиями, применить пример 1.14 и теорему 3.33. □

Следствие 3.38. *Пусть L — конечномерная полупростая H-(ко)модульная алгебра Ли над полем характеристики 0, H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа, а (V, ψ) — конечномерный (H, L)-модуль. Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых (H, L)-подмодулей V_i.

Теорема 3.39. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами редуктивная аффинная алгебраическая группа G. Пусть (V, ψ) — конечномерный (G, L)-модуль с рациональным G-действием, вполне приводимый как обычный L-модуль без учёта G-действия. Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых (G, L)-подмодулей V_i.

Доказательство. Воспользуемся примерами 1.16, 1.38 и теоремой 3.33. □

Следствие 3.40. *Пусть L — конечномерная полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами редуктивная аффинная алгебраическая группа G. Пусть (V, ψ) — конечномерный (G, L)-модуль с рациональным G-действием. Тогда*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

для некоторых неприводимых (G, L)-подмодулей V_i.

3.7 H-(ко)инвариантное разложение разрешимого радикала

Сперва рассмотрим случай, когда алгебра Хопфа H необязательно конечномерна.

Теорема 3.41. *Пусть L — конечномерная H-комодульная алгебра Ли над полем F характеристики 0, где H — алгебра Хопфа с* ad*-инвариантным левым интегралом $t \in H^*$, где $t(1) = 1$. Предположим, что нильпотентный радикал N и разрешимый радикал R являются H-подкомодулями. Обозначим через B такую H-коинвариантную максимальную полупростую подалгебру, что $L = B \oplus R$. Тогда существует такой H-подкомодуль Q, что $R = Q \oplus N$ и $[B, Q] = 0$. В частности, $L = B \oplus Q \oplus N$.*

Доказательство. Рассмотрим присоединённое представление подалгебры B на L. Тогда L является (H, B)-модулем. В силу следствия 3.38 этот (H, B)-модуль вполне приводим. Более того, идеалы N и R являются (H, B)-подмодулями (H, B)-модуля L. Отсюда существует такой (H, B)-подомодуль Q, что $R = Q \oplus N$. В частности, $[B, Q] \subseteq Q$. Однако в силу предложения 2.1.7 из [7] справедливо включение $[B, Q] \subseteq [L, R] \subseteq N$. Отсюда $[B, Q] = 0$. □

Используя двойственность между H-действиями и H^*-кодействиями и применяя пример 1.14, следствие 3.4 и теорему 3.41, получаем слудующий результат:

Теорема 3.42. *Пусть L — конечномерная полупростая H-(ко)модульная алгебра Ли над полем характеристики 0, а H — конечномерная (ко)полупростая алгебра Хопфа. Обозначим через N нильпотентный, а через R — разрешимый радикалы алгебры Ли L. Тогда существуюет такой H-под(ко)модуль Q, что $R = Q \oplus N$, $L = B \oplus Q \oplus N$ (прямая сумма H-под(ко)модулей) и $[B, Q] = 0$, где B — H-(ко)инвариантная максимальная полупростая подалгебра.*

Используя примеры 1.15, 1.36, следствие 3.10 и теорему 3.41, получаем:

Теорема 3.43. *Пусть L — конечномерная G-градуированная алгебра Ли над полем характеристики 0. Обозначим через N нильпотентный, а через R — разрешимый радикалы алгебры Ли L. Тогда существует такое градуированное подпространство Q, что $R = Q \oplus N$, $L = B \oplus Q \oplus N$ (прямая сумма градуированных подпространств) и $[B, Q] = 0$, где B — градуированная максимальная полупростая подалгебра.*

Также получаем следующую теорему:

Теорема 3.44. *Пусть редуктивная аффинная алгебраическая группа G рационально действует автоморфизмами на конечномерной алгебре Ли L над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Обозначим через N нильпотентный, а через R — разрешимый радикалы алгебры Ли L. Тогда существует такое G-инвариантное подпространство Q, что $R = Q \oplus N$, $L = B \oplus Q \oplus N$ (прямая сумма G-инвариантных подпространств) и $[B, Q] = 0$, где B — G-инвариантная максимальная полупростая подалгебра.*

Доказательство. Достаточно заметить, что R и N инвариантны относительно всех автоморфизмов, и использовать примеры 1.16, 1.38 и теорему 3.41. □

3.8 Полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли

Оставшаяся часть данной главы посвящена изучению конечномерных $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр Ли, где $H_{m^2}(\zeta)$ — алгебра Тафта. При этом тождество антикоммутативности, которое выполняется во всех алгебрах Ли, а также тот факт, что любая простая алгебра Ли неприводима как модуль над собой, накладывают по сравнению со случаем ассоциативных алгебр дополнительные ограничения. Если ассоциативные полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры параметризуются матрицами, а число минимальных идеалов в разложении может быть, вообще говоря, произвольным делителем числа m, то полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли параметризуются элементами основного поля, а число минимальных идеалов в разложении должно совпадать с m, если только, конечно, $v \in H_{m^2}(\zeta)$ не действует на алгебре Ли как нулевой оператор. Если ассоциативные неполупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры строятся на основе $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простых алгебр B, то неполупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли строятся на основе алгебр Ли B, простых в обычном смысле.

В этом параграфе классифицируются полупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли, которые не являются простыми в обычном смысле.

Напомним, что если на некоторой алгебре A действует алгебра Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, то циклическая группа $C_m := \langle c \rangle_m$, где $c \in H_{m^2}(\zeta)$, действует на A автоморфизмами. Существование C_m-действия эквивалентно наличию $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировки $A = \bigoplus_{k=0}^{m-1} A^{(k)}$, причём действие и градуировка связаны соотношением $ca = \zeta^k a$ для всех $a \in A^{(k)}$.

Пусть B — простая алгебра Ли над полем F. Предположим, что F содержит примитивный корень ζ степени m из единицы. Пусть $\alpha \in F$. Введём обозначение

$$L_\alpha(B) := \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{m} \text{ (прямая сумма идеалов)}$$

и определим действие элементов $c, v \in H_{m^2}(\zeta)$ на алгебре Ли $L_\alpha(B)$ при помощи формул

$$c(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m) = (a_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \tag{3.6}$$

и

$$v(a_1, \ldots, a_m) = \alpha \left(a_1 - a_m, \zeta(a_2 - a_1), \ldots, \zeta^{m-1}(a_m - a_{m-1})\right) \tag{3.7}$$

для всех $a_1, \ldots, a_m \in B$.

Аналогично тому, как это было сделано в лемме 2.56, для произвольных $a_1, \ldots, a_m \in B$ получаем

$$v^\ell(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

где

$$b_k = \alpha^\ell \zeta^{\ell(k-1)} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta^{-\frac{j(j-1)}{2}} \binom{\ell}{j}_{\zeta^{-1}} a_{k-j}$$

и $a_{-j} := a_{m-j}$ при $j \geqslant 0$. В доказательстве теоремы 2.52 было получено равенство $(-1)^m \zeta^{-\frac{m(m-1)}{2}} = -1$, из которого теперь следует, что $v^m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0$ для всех $a_i \in B$. Непосредственная проверка показывает, что формулы (3.6) и (3.7) задают $H_{m^2}(\zeta)$-действие на $L_\alpha(B)$ корректно. Поскольку коммутатор любого идеала алгебры Ли $L_\alpha(B)$ со любой копией алгебры Ли B либо равен 0, либо совпадает с этой копией, алгебра Ли $L_\alpha(B)$ является C_m-простой, а следовательно, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой и $H_{m^2}(\zeta)$-простой алгеброй Ли.

Другое описание алгебр Ли $L_\alpha(B)$ при $\alpha \neq 0$ будет дано ниже в теореме 3.51.

Теорема 3.45. *Пусть L — конечномерная полупростая $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики* 0. *Предположим, что L полупростая, но не простая алгебра Ли. Тогда L является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой алгеброй Ли. Если $vL \neq 0$, то $L \cong L_\alpha(B)$ для некоторой простой алгеброй Ли B и элемента $\alpha \in F$.*

Доказательство. В силу полупростоты алгебры L существует разложение $L = B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$ (прямая сумма идеалов), где B_i — простые алгебры Ли. Тогда для любого $1 \leqslant i \leqslant t$ существует такое число $1 \leqslant j(i) \leqslant t$, что $cB_i = B_{j(i)}$. Кроме того, $v[a,b] = [ca, vb] + [va, b] \in B_i \oplus B_{j(i)}$ для всех $a, b \in B_i$. Поскольку $[B_i, B_i] = B_i$, получаем $vB_i \subseteq B_i \oplus B_{j(i)}$. В частности, идеал $\sum_{k=0}^{m-1} c^k B_1$ инвариантен относительно действия обоих элементов c и v. В силу того, что L является $H_{m^2}(\zeta)$-простой алгеброй Ли, $\sum_{k=0}^{m-1} c^k B_1 = L$ и, очевидно, алгебра Ли L является C_m-простой и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой. Без ограничения общности можно считать, что $B_i = c^{i-1}B_1$. Тогда в силу единственности минимальных идеалов $c^t B_1 = B_1$.

Обозначим через $\pi_i \colon B \twoheadrightarrow B_i$ естественные сюръективные гомоморфизмы. Определим $\rho_i \colon B_i \to B_i$ и $\theta_i \colon B_i \to cB_i$ при помощи формул $\rho_i(a) = \pi_i(va)$ и $\theta_i(a) = \pi_{i+1}(va)$ для всех $a \in B_i$. (В доказательстве теоремы будем считать, что все нижние индексы определены по модулю t, например, $\pi_{t+1} := \pi_1$.) Тогда

$$\rho_i[a,b] = \pi_i(v[a,b]) = \pi_i([ca, vb] + [va, b]) = [\rho_i(a), b].$$

Аналогично,

$$\theta_i[a,b] = \pi_{i+1}(v[a,b]) = \pi_{i+1}([ca, vb] + [va, b]) = [ca, \theta_i(b)]$$

для всех $a, b \in B_i$. В частности, как ρ_i, так и θ_i являются гомоморфизмами B_i-модулей.

Поскольку B_i являются простыми алгебрами Ли, B_i неприводимы как B_i-модули. Отсюда в силу леммы Шура справедливы равенства $\rho_i = \alpha_i \,\mathrm{id}_{B_i}$ и $\theta_i = \beta_i \left(c\big|_{B_i}\right)$ для некоторых $\alpha_i, \beta_i \in F$. Поскольку $vc = \zeta cv$, получаем

$$\alpha_{i+1} ca = \rho_{i+1}(ca) = \zeta \pi_{i+1}(c(v(a))) = \zeta c(\rho_i(a)) = \zeta \alpha_i ca$$

и

$$\beta_{i+1} c^2 a = \theta_{i+1}(ca) = \zeta \pi_{i+2}(c(v(a))) = \zeta c(\theta_i(a)) = \zeta \beta_i c^2 a$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant t$ и $a \in B_i$. Следовательно, $\alpha_i = \zeta^{i-1}\alpha_1$ и $\beta_i = \zeta^{i-1}\beta_1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$. Более того, если хотя бы один из элементов α_1 и β_1 ненулевой, то $\zeta^t = 1$ и $t = m$.

Заметим, что для всех $1 \leqslant i \leqslant t$, $a \in B_i$ и $b \in B_{i+1}$ справедливо равенство

$$0 = v[a,b] = [ca, vb] + [va, b] = [ca, \rho_{i+1}(b)] + [\theta_i(a), b] = (\alpha_{i+1} + \beta_i)[ca, b].$$

Поскольку $[B_{i+1}, B_{i+1}] = B_{i+1}$, получаем $\beta_i = -\alpha_{i+1}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$.

Если $\alpha_1 = 0$, то $vL = 0$ и теорема доказана. Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $t = m$. Поскольку $B_i = c^{i-1}B_1$ и $va = \rho_i(a) + \theta_i(a)$ для всех $a \in B_i$, можно отождествить все B_i между собой и считать, что $L = \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{m}$ (прямая сумма идеалов) для простой алгебры Ли $B := B_1$, причём для $\alpha := \alpha_1$ справедливы равенства (3.6) и (3.7). $\square$

Замечание 3.46. Если $vL = 0$, то из доказательства теоремы 3.45 следует, что существуют такое число $t \in \mathbb{N}$, где $t \mid m$, и простая алгебра Ли B с действием циклической группы порядка $\frac{m}{t}$ с порождающим d, что

$$L \cong \underbrace{B \oplus \ldots \oplus B}_{t} \text{ (прямая сумма идеалов)},$$

$$c(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m) = (da_m, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$$

и

$$v(a_1, \ldots, a_m) = 0$$

для всех $a_1, \ldots, a_m \in B$.

В теореме 3.47, которую мы доказываем ниже, приводятся необходимые и достаточные условия для существования изоморфизма $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебр Ли $L_{\alpha_1}(B_1) \cong L_{\alpha_2}(B_2)$.

Теорема 3.47. *Пусть B_1, B_2 — простые алгебры Ли над полем F, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, а ζ — примитивный корень из единицы степени m. Пусть $\theta\colon L_{\alpha_1}(B_1) \xrightarrow{\sim} L_{\alpha_2}(B_2)$ — изоморфизм алгебр Ли и $H_{m^2}(\zeta)$-модулей. Тогда существует такое число $0 \leqslant k \leqslant m-1$ и изоморфизм алгебр Ли $\varphi\colon B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$, что*

$$\theta(b_1, \ldots, b_m) = (\varphi(b_{k+1}), \ldots, \varphi(b_m), \varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_k)) \tag{3.8}$$

для всех $b_i \in B_1$. Кроме того, $\alpha_2 = \zeta^k \alpha_1$. Обратно, если $B_1 \cong B_2$ как обычные алгебры Ли и $\alpha_2 = \zeta^k \alpha_1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то $L_{\alpha_1}(B_1) \cong L_{\alpha_2}(B_2)$ как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры Ли.

Доказательство. Заметим, что любой минимальный идеал алгебры $L_{\alpha_2}(B_2)$ совпадает с одной из копий алгебры B_2. Отсюда либо существует такое $1 \leqslant k \leqslant m-1$, что

$$\theta(B_1, 0, \ldots, 0) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}, B_2, 0, \ldots, 0),$$

либо

$$\theta(B_1, 0, \ldots, 0) = (B_2, 0, \ldots, 0).$$

В последнем случае полагаем $k := 0$.

Обозначим индуцированный изоморфизм $B_1 \xrightarrow{\sim} B_2$ через φ. Тогда

$$\theta(b, 0, \ldots, 0) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}, \varphi(b), 0, \ldots, 0)$$

для всех $b \in B$. Теперь (3.8) следует из (3.6) и равенства $\theta(ca) = c\theta(a)$, которое выполняется для всех $a \in L_{\alpha_1}(B_1)$. Используя (3.7) и то, что $\theta(va) = v\theta(a)$ для всех $a \in L_{\alpha_1}(B_1)$, получаем $\alpha_2 = \zeta^k \alpha_1$. Таким образом, прямое утверждение доказано. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Замечание 3.48. В частности, при $\alpha \neq 0$ все автоморфизмы $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры Ли $L_\alpha(B)$ индуцированы автоморфизмами обычной алгебры Ли B и соответствующие группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L_\alpha(B))$ и $\mathrm{Aut}(B)$ могут быть отождествлены друг с другом. Если $\alpha = 0$, то $\mathrm{Aut}(L_\alpha(B)) \cong \mathrm{Aut}(B) \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

3.9 Алгебры Ли $L(B, \gamma)$ и $H_{m^2}(\zeta)$-действия на простых алгебрах Ли

Следующим шагом в классификации конечномерных $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр Ли является изучение $H_{m^2}(\zeta)$-действий на простых алгебрах Ли. Как мы покажем ниже в теореме 3.59, во всех конечномерных простых алгебрах Ли, наделённых $H_{m^2}(\zeta)$-действием, справедливо равенство $va = 0$ для всех $a \in L$. Для того, чтобы доказать этот результат, определим $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли $L(B, \gamma)$.

Теорема 3.49. *Пусть B — простая алгебра Ли над полем F, а $\gamma \in F$ — некоторый элемент поля. Предположим, что F содержит примитивный корень ζ степени m из единицы. Рассмотрим векторные пространства $L^{(i)}$, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$, которые являются копиями векторного пространства $L^{(0)} := B$. Обозначим одной и той же буквой ψ соответствующие F-линейные биекции $L^{(i-1)} \xrightarrow{\sim} L^{(i)}$, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Пусть $\psi(L^{(m-1)}) := 0$. Рассмотрим $H_{m^2}(\zeta)$-модуль $L(B, \gamma) := \bigoplus_{i=0}^{m-1} L^{(i)}$ (прямая сумма подпространств), где $v\psi(a) := a$ для всех $a \in L^{(i)}$ и $0 \leqslant i \leqslant m-2$, $vB := 0$ и $ca^{(i)} := \zeta^i a^{(i)}$, $a^{(i)} \in L^{(i)}$. Определим лиевский коммутатор на $L(B, \gamma)$ по формуле*

$$[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] := \begin{cases} \binom{k+\ell}{k}_\zeta \ \psi^{k+\ell}[a, b] & \text{при} \quad k + \ell < m, \\ \gamma \frac{(k+\ell-m)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} \ \psi^{k+\ell-m}[a, b] & \text{при} \quad k + \ell \geqslant m \end{cases} \tag{3.9}$$

для всех $a, b \in B$ и $0 \leqslant k, \ell < m$. Тогда $L(B, \gamma)$ — $H_{m^2}(\zeta)$-простая алгебра Ли.

Доказательство. То, что приведённые выше формулы действительно задают на $L(B, \gamma)$ структуру $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры Ли, доказывается непосредственно. Проверим только, что $v[u, w] = [v_{(1)}u, v_{(2)}w]$ при $u, w \in L(B, \gamma)$.

Пусть $0 \leqslant k, \ell < m$, а $a, b \in B$. Если $k = \ell = 0$, то $v[a, b] = 0 = [ca, vb] + [va, b]$.

Если $k = 0$, $\ell > 0$, то

$$v[a, \psi^\ell(b)] = v\psi^\ell[a, b] = \psi^{\ell-1}[a, b] = [a, \psi^{\ell-1}(b)] = [ca, v\psi^\ell(b)] + [va, \psi^\ell(b)].$$

Если $k > 0$, $\ell = 0$, то

$$v[\psi^k(a), b] = v\psi^k[a, b] = \psi^{k-1}[a, b] = [\psi^{k-1}(a), b] = [c\psi^k(a), vb] + [v\psi^k(a), b].$$

Если $k, \ell > 0$, $k + \ell < m$, то

$$v[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] = \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell-1}[a,b] = \left(\zeta^k \binom{k+\ell-1}{k}_\zeta + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta\right) \psi^{k+\ell-1}[a,b] = \\ = [c\psi^k(a), \psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a), \psi^\ell(b)] = [c\psi^k(a), v\psi^\ell(b)] + [v\psi^k(a), \psi^\ell(b)],$$

поскольку

$$\zeta^k \binom{k+\ell-1}{k}_\zeta + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta = \frac{\zeta^k (k+\ell-1)!_\zeta}{k!_\zeta (\ell-1)!_\zeta} + \frac{(k+\ell-1)!_\zeta}{(k-1)!_\zeta \ell!_\zeta} = \\ = (\zeta^k \ell_\zeta + k_\zeta) \frac{(k+\ell-1)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} = (k+\ell)_\zeta \frac{(k+\ell-1)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} = \frac{(k+\ell)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} = \binom{k+\ell}{k}_\zeta. \tag{3.10}$$

Пусть $k + \ell \geqslant m$. Тогда $k, \ell > 0$. Если $k + \ell = m$, то $(k+\ell)_\zeta = m_\zeta = 0$ и

$$v[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] = \frac{\gamma}{k!_\zeta \ell!_\zeta}\ v[a,b] = 0 = \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell-1}[a,b] = \\ = \left(\zeta^k \binom{k+\ell-1}{k}_\zeta + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta\right) \psi^{k+\ell-1}[a,b] = [c\psi^k(a), \psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a), \psi^\ell(b)] = \\ = [c\psi^k(a), v\psi^\ell(b)] + [v\psi^k(a), \psi^\ell(b)].$$

Если $k + \ell > m$, то $(k+\ell)_\zeta = (k+\ell-m)_\zeta + \zeta^{k+\ell-m} m_\zeta = (k+\ell-m)_\zeta$ и

$$v[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] = \gamma \frac{(k+\ell-m)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta}\ \psi^{k+\ell-m-1}[a,b] = \\ = \gamma (k+\ell)_\zeta \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta}\ \psi^{k+\ell-m-1}[a,b] = \\ = \gamma \left(\zeta^k \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{k!_\zeta (\ell-1)!_\zeta} + \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{(k-1)!_\zeta \ell!_\zeta}\right) \psi^{k+\ell-m-1}[a,b] = \\ = [c\psi^k(a), \psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a), \psi^\ell(b)] = \\ = [c\psi^k(a), v\psi^\ell(b)] + [v\psi^k(a), \psi^\ell(b)].$$

Таким образом, были рассмотрены все возможные варианты при $0 \leqslant k, \ell < m$. Отсюда $v[u,w] = [v_{(1)}u, v_{(2)}w]$ для всех $u, w \in L(B,\gamma)$.

Предположим, что I — $H_{m^2}(\zeta)$-инвариантный идеал алгебры Ли L. Тогда $v^m I = 0$. Обозначим через $t \in \mathbb{Z}_+$ такое число, что $v^t I \ne 0$, а $v^{t+1} I = 0$. Тогда $0 \ne v^t I \subseteq I \cap \ker v$. Однако $\ker v = B$ — простая алгебра Ли. Следовательно, $I \cap \ker v = \ker v$ и $\ker v \subseteq I$. Поскольку

$$[\ker v, L^{(i)}] = [B, \psi^i(B)] = \psi^i[B,B] = \psi^i(B) = L^{(i)} \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

получаем, что $I = L(B,\gamma)$. Следовательно, $L(B,\gamma)$ является $H_{m^2}(\zeta)$-простой алгеброй Ли. $\square$

Замечание 3.50. Алгебра Ли $L(B,0)$ не является полупростой. Разрешимый радикал алгебры Ли $L(B,0)$ совпадает с нильпотентным радикалом и равен $\bigoplus_{i=1}^{m-1} L^{(i)}$.

Из теоремы 3.51, которая доказывается ниже, следует, что если поле F алгебраически замкнуто и $\gamma \ne 0$, то $L(B,\gamma)$ как $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли изоморфна одной из непростых $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простых $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебр Ли $L_\alpha(B)$, определённых в §3.8.

Теорема 3.51. *Пусть B — простая алгебра Ли над полем F. Предположим, что поле F содержит примитивный корень ζ степени m из единицы. Пусть $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Тогда $L(B, \frac{1}{\alpha^m(1-\zeta)^m}) \cong L_\alpha(B)$ как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебра Ли.*

Доказательство. Заметим, что

$$L_\alpha(B)^{(k)} = \left\{ \left(b, \zeta^{-k}b, \zeta^{-2k}b, \dots, \zeta^{-(m-1)k}b\right) \;\middle|\; b \in B \right\}$$

для всех $0 \leqslant k \leqslant m-1$. В частности, $L_\alpha(B)^{(0)} \cong B$. Положим

$$\psi(b, \zeta^{-k}b, \zeta^{-2k}b, \dots, \zeta^{-(m-1)k}b) := \frac{1}{\alpha(1-\zeta^{k+1})} \left(b, \zeta^{-(k+1)}b, \zeta^{-2(k+1)}b, \dots, \zeta^{-(m-1)(k+1)}b\right)$$

для всех $b \in B$ и $0 \leqslant k < m-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi^k(b, b, \dots, b) = \frac{1}{\alpha^k(1-\zeta)(1-\zeta^2)\dots(1-\zeta^k)}(b, \zeta^{-k}b, \zeta^{-2k}b, \dots, \zeta^{-(m-1)k}b) = \\ = \frac{1}{\alpha^k(1-\zeta)^k k!_\zeta}(b, \zeta^{-k}b, \zeta^{-2k}b, \dots, \zeta^{-(m-1)k}b). \end{aligned}$$

Заметим, что $L_\alpha(B)^{(k)} = \psi^k(L_\alpha(B)^{(0)})$ и $v\psi(a) = a$ для всех $a \in L_\alpha(B)^{(k)}$, где $0 \leqslant k < m-1$. Более того, элемент $[\psi^k(a), \psi^\ell(b)]$ может быть вычислен с использованием (3.9) при $\gamma = \frac{1}{\alpha^m(1-\zeta)^m}$ для всех $a, b \in L_\alpha(B)^{(0)}$ и $0 \leqslant k, \ell < m$. Отсюда $L_\alpha(B) \cong L(B, \frac{1}{\alpha^m(1-\zeta)^m})$ как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры Ли. □

Докажем теперь несколько лемм об $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебрах Ли.

Лемма 3.52. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F. Тогда*

$$(\zeta^k - 1)[a^{(k)}, vb^{(\ell)}] = (\zeta^\ell - 1)[va^{(k)}, b^{(\ell)}], \tag{3.11}$$

$$(\zeta^\ell - 1)v[a^{(k)}, b^{(\ell)}] = (\zeta^{k+\ell} - 1)[a^{(k)}, vb^{(\ell)}] \tag{3.12}$$

для всех $a^{(k)} \in L^{(k)}$, $b^{(\ell)} \in L^{(\ell)}$, где $L = \bigoplus_{k=0}^{m-1} L^{(k)}$ — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировка, индуцированная действием группы $C_m = \langle c \rangle_m$. Более того, если, будучи наделённой этой градуировкой, алгебра Ли L является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой алгеброй Ли, то $vL^{(0)} = 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$v[a^{(k)}, b^{(\ell)}] = [ca^{(k)}, vb^{(\ell)}] + [va^{(k)}, b^{(\ell)}] = \zeta^k[a^{(k)}, vb^{(\ell)}] + [va^{(k)}, b^{(\ell)}]$$

для всех $a^{(k)} \in L^{(k)}$ и $b^{(\ell)} \in L^{(\ell)}$. В то же время

$$\begin{aligned} v[a^{(k)}, b^{(\ell)}] = -v[b^{(\ell)}, a^{(k)}] = -[cb^{(\ell)}, va^{(k)}] - [vb^{(\ell)}, a^{(k)}] = \\ = -\zeta^\ell[b^{(\ell)}, va^{(k)}] - [vb^{(\ell)}, a^{(k)}] = [a^{(k)}, vb^{(\ell)}] + \zeta^\ell[va^{(k)}, b^{(\ell)}]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (3.11) и (3.12). Если $\ell \neq 0$, то мы также получаем

$$v[a^{(k)}, b^{(\ell)}] = \frac{\zeta^{k+\ell} - 1}{\zeta^\ell - 1}[a^{(k)}, vb^{(\ell)}].$$

В частности, $v[L^{(k)}, L^{(m-k)}] = 0$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$.

Предположим теперь, что L — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли. Если $L = L^{(0)}$, то элемент c действует как тождественный оператор и из $vc = \zeta cv$ следует $vL = 0$. Отсюда без ограничения общности можно считать, что $L \ne L^{(0)}$. Пусть $a \in L^{(k)}$, $k \ne 0$, $a \ne 0$. Поскольку алгебра Ли L является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой, а элемент a однороден, идеал, порождённый элементом a, совпадает с L. Следовательно, $L^{(0)}$ является F-линейной оболочкой элементов $[a, a_1, \dots, a_n]$, где $a_i \in L^{(k_i)}$, $0 \leqslant k_i \leqslant m-1$, $m \mid (k + k_1 + \ldots + k_n)$, $n \in \mathbb{N}$. (Здесь мы используем длинные коммутаторы $[x_1, \dots, x_n] := [[\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots], x_n]$.) Если $k_n \ne 0$, то из $[a, a_1, \dots, a_n] = [[a, a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$ следует, что $[a, a_1, \dots, a_n] \in [L^{(m-k_n)}, L^{(k_n)}]$ и $v[a, a_1, \dots, a_n] = 0$. В случае $k_n = 0$ применим тождество Якоби и перепишем $[a, a_1, \dots, a_n]$ как сумму элементов $[[a, a_n], a_1, \dots, a_{n-1}]$, $[a, [a_1, a_n], \dots, a_{n-1}]$ и $[a, a_1, \dots, [a_{n-1}, a_n]]$. Если $a_{n-1} \in L^{(0)}$, то мы продолжим эту процедуру. В конце концов мы придём к ситуации, когда элементы, стоящие в длинных коммутаторах на последних местах, принадлежат $L^{(k_i)}$, $k_i \ne 0$. Применяя тот же приём, что и выше, получим $v[a, a_1, \dots, a_n] = 0$. Таким образом, $vL^{(0)} = 0$. □

Лемма 3.53. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F характеристики $\operatorname{char} F \nmid m$, $\operatorname{char} F \ne 2$. Пусть $a^{(\ell)} \in L^{(\ell)}$, $b^{(k)} \in L^{(k)}$, $u^{(m-k)} \in L^{(m-k)}$ для некоторых $1 \leqslant k, \ell \leqslant m-1$. Тогда*

$$v[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, u^{(m-k)}]] = \frac{\zeta^\ell - 1}{\zeta^{m-k} - 1}[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]].$$

Доказательство. В силу (3.11), (3.12) и тождества Якоби

$$\begin{aligned}
[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] &= -\frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^k - 1}[a^{(\ell)}, [u^{(m-k)}, vb^{(k)}]] = \\
&= -\frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^k - 1}([[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}], vb^{(k)}] + [u^{(m-k)}, [a^{(\ell)}, vb^{(k)}]]) = \\
&= -\frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}, b^{(k)}] + \frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}[u^{(m-k)}, [b^{(k)}, va^{(\ell)}]] = \\
&= -\frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}, b^{(k)}] + \frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}([[u^{(m-k)}, b^{(k)}], va^{(\ell)}] + [b^{(k)}, [u^{(m-k)}, va^{(\ell)}]]) = \\
&= \frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v\left(-[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}, b^{(k)}] + [u^{(m-k)}, b^{(k)}, a^{(\ell)}]\right) - [b^{(k)}, [a^{(\ell)}, vu^{(m-k)}]] = \\
&= \frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v\left(-[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}, b^{(k)}] + [u^{(m-k)}, b^{(k)}, a^{(\ell)}]\right) - \\
&\quad -[[b^{(k)}, a^{(\ell)}], vu^{(m-k)}] - [a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] = \\
&= \frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v\left(-[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}, b^{(k)}] + [u^{(m-k)}, b^{(k)}, a^{(\ell)}] - [b^{(k)}, a^{(\ell)}, u^{(m-k)}]\right) - \\
&\quad -[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] = \\
&= 2\frac{\zeta^{m-k}-1}{\zeta^\ell - 1}v[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, u^{(m-k)}]] - [a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]].
\end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана. □

Лемма 3.54. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F характеристики* $\operatorname{char} F \nmid m$, $\operatorname{char} F \neq 2$. *Пусть $s \geqslant 2$, $0 \leqslant k_i \leqslant m-1$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $k_s > 0$, а $a_i^{(k_i)} \in L_i^{(k_i)}$ при $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда*

$$v[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},a_s^{(k_s)}]\ldots] = \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{k_s}-1}[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},va_s^{(k_s)}]\ldots]. \tag{3.13}$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по s. База $s=2$ является следствием равенства (3.12). Предположим, что $s>2$.

Если $m \nmid \sum_{i=2}^s k_i$, то в силу (3.12) и предположения индукции

$$v[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},a_s^{(k_s)}]\ldots] = \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{\sum_{i=2}^s k_i}-1}[a_1^{(k_1)},v[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},a_s^{(k_s)}]\ldots] =$$
$$= \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{k_s}-1}[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},va_s^{(k_s)}]\ldots]$$

и в этом случае лемма доказана.

Предположим, что $k_i = 0$ для некоторого $1 \leqslant i < s$. Тогда в силу тождества Якоби (символ $\widehat{a_i^{(k_i)}}$ обозначает пропуск элемента $a_i^{(k_i)}$ в выражении),

$$a := v[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},a_s^{(k_s)}]\ldots] =$$
$$= \sum_{j=i+1}^{s-1} v[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{j-1}^{(k_{j-1})},[[a_i^{(k_i)},a_j^{(k_j)}],[a_{j+1}^{(k_{j+1})},\ldots[a_{s-1}^{(k_{s-1})},a_s^{(k_s)}]\ldots]+$$
$$+v[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},[a_i^{(k_i)},a_s^{(k_s)}]]\ldots].$$

Поскольку $k_i = 0$, всякий элемент $[a_i^{(k_i)},a_j^{(k_j)}]$ снова имеет степень k_j в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировке. Будем рассматривать такой элемент $[a_i^{(k_i)},a_j^{(k_j)}]$ как единое целое. Применяя предположение индукции для $s-1$, получаем

$$a = \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{k_s}-1}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{j=i+1}^{s-1}[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{j-1}^{(k_{j-1})},[[a_i^{(k_i)},a_j^{(k_j)}],[a_{j+1}^{(k_{j+1})},\ldots[a_{s-1}^{(k_{s-1})},va_s^{(k_s)}]\ldots]+\right.$$
$$\left.+[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},v[a_i^{(k_i)},a_s^{(k_s)}]]\ldots]\right).$$

Из (3.12) и тождества Якоби следует, что

$$a = \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{k_s}-1}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{j=i+1}^{s-1}[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{j-1}^{(k_{j-1})},[[a_i^{(k_i)},a_j^{(k_j)}],[a_{j+1}^{(k_{j+1})},\ldots[a_{s-1}^{(k_{s-1})},va_s^{(k_s)}]\ldots]+\right.$$
$$\left.+[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[\widehat{a_i^{(k_i)}},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},[a_i^{(k_i)},va_s^{(k_s)}]]\ldots]\right) =$$
$$= \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^s k_i}-1}{\zeta^{k_s}-1}[a_1^{(k_1)},[a_2^{(k_2)},\ldots,[a_{s-1}^{(k_{s-1})},va_s^{(k_s)}]\ldots],$$

т.е. лемма доказана и в этом случае.

Единственный случай, который ещё остался неразобранным, — это когда $1 \leqslant k_i \leqslant m-1$ для всех i, а $m \mid \sum_{i=2}^{s} k_i$. Однако в этом случае $m \mid (k_2 + \sum_{i=3}^{s} k_i)$, и мы можем применить лемму 3.53:

$$v[a_1^{(k_1)}, [a_2^{(k_2)}, [a_3^{(k_3)} \ldots, [a_{s-1}^{(k_{s-1})}, a_s^{(k_s)}] \ldots] =$$
$$= \frac{\zeta^{\sum_{i=1}^{s} k_i} - 1}{\zeta^{\sum_{i=3}^{s} k_i} - 1}[a_1^{(k_1)}, [a_2^{(k_2)}, v\,[a_3^{(k_3)} \ldots, [a_{s-1}^{(k_{s-1})}, a_s^{(k_s)}] \ldots]]].$$

Теперь утверждение леммы следует из предположения индукции для $s-2$. $\square$

Лемма 3.55. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F характеристики $\operatorname{char} F \nmid m$, $\operatorname{char} F \neq 2$. Предположим, что L — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли, $vL \neq 0$. Тогда $\ker v = L^{(0)}$.*

Доказательство. В силу леммы 3.52 справедливо равенство $vL^{(0)} = 0$. Поскольку $vc = \zeta cv$, подпространство $\ker v$ является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированным. Предположим, что $\ker v \supsetneqq L^{(0)}$. Тогда существует такой элемент $a^{(k)} \subseteq L^{(k)}$, где $1 \leqslant k \leqslant m-1$, что $a^{(k)} \neq 0$, но $va^{(k)} = 0$. Поскольку алгебра Ли L является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой, а элемент $a^{(k)}$ однороден, справедливо равенство $L = \sum_{n \geqslant 0} \underbrace{[L, [L, \ldots [L,}_{n} Fa^{(k)}] \ldots]$. Теперь из леммы 3.54 следует, что $vL = 0$. $\square$

Лемма 3.56. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F характеристики $\operatorname{char} F \nmid m$, $\operatorname{char} F \neq 2$. Предположим, что L — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли, $vL \neq 0$. Тогда $vL^{(k)} = L^{(k-1)}$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$.*

Доказательство. Во-первых, докажем, что $L = vL + \sum_{k=1}^{m-1} [L^{(k)}, vL^{(m-k)}]$. Заметим, что

$$I = vL + \sum_{k=1}^{m-1} [L^{(k)}, vL^{(m-k)}]$$

— $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированное подпространство. Утверждается, что I является идеалом.

В силу (3.12) получаем $[L^{(\ell)}, vL^{(k)}] \subseteq vL$ для всех $0 \leqslant k, \ell < m$, таких что $m \nmid (k+\ell)$. Отсюда $[L, vL] \subseteq I$.

Теперь докажем, что $\left[L, \sum_{k=1}^{m-1} [L^{(k)}, vL^{(m-k)}]\right] \subseteq I$.

Во-первых, в силу тождества Якоби

$$[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] = [[a^{(\ell)}, b^{(k)}], vu^{(m-k)}] + [b^{(k)}, [a^{(\ell)}, vu^{(m-k)}]] \qquad (3.14)$$

для всех $0 \leqslant k, \ell < m$ и $a^{(\ell)} \in L^{(\ell)}$, $b^{(k)} \in L^{(k)}$, $u^{(m-k)} \in L^{(m-k)}$.

Если $\ell = 0$, то из (3.12) и (3.14) получаем

$$[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] = [[a^{(\ell)}, b^{(k)}], vu^{(m-k)}] + [b^{(k)}, v[a^{(\ell)}, u^{(m-k)}]] \in [L^{(k)}, vL^{(m-k)}].$$

Если $\ell \neq 0$ и $k \neq \ell$, то из (3.12) и (3.14) получаем

$$[a^{(\ell)}, [b^{(k)}, vu^{(m-k)}]] = [[a^{(\ell)}, b^{(k)}], vu^{(m-k)}] + [b^{(k)}, [a^{(\ell)}, vu^{(m-k)}]] =$$
$$= \frac{\zeta^{m-k} - 1}{\zeta^{\ell} - 1} v\left([[a^{(\ell)}, b^{(k)}], u^{(m-k)}] + [b^{(k)}, [a^{(\ell)}, u^{(m-k)}]]\right) \in vL.$$

Предположим, что $\ell \neq 0$ и $k = \ell$. В этом случае нужно доказать, что

$$[L^{(k)}, [L^{(k)}, vL^{(m-k)}]] \subseteq vL.$$

Если $m \neq 2k$, то $m - k \neq k$. Из (3.11), (3.12) и тождества Якоби следует, что

$$[L^{(k)}, [L^{(k)}, vL^{(m-k)}]] \subseteq [L^{(k)}, [L^{(m-k)}, vL^{(k)}]] \subseteq$$
$$\subseteq [[L^{(k)}, L^{(m-k)}], vL^{(k)}] + [L^{(m-k)}, [L^{(k)}, vL^{(k)}]] \subseteq vL.$$

Если $m = 2k$, то $\operatorname{char} F \neq 2$ и включение $[L^{(k)}, [L^{(k)}, vL^{(k)}]] \subseteq vL$ является следствием леммы 3.53.

Отсюда I действительно является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированным идеалом и

$$L = vL + \sum_{k\neq 0} [L^{(k)}, vL^{(m-k)}],$$

поскольку алгебра Ли L градуированно проста.

Поскольку $vc = \zeta cv$, справедливо включение $vL^{(k)} \subseteq L^{(k-1)}$, откуда

$$\sum_{k\neq 0} [L^{(k)}, vL^{(m-k)}] \subseteq L^{(m-1)}.$$

Следовательно, $\bigoplus_{k=0}^{m-2} L^{(k)} \subseteq vL$. В силу леммы 3.52 справедливо равенство $vL^{(0)} = 0$, откуда $vL \cap L^{(m-1)} = 0$ и $vL = \bigoplus_{k=0}^{m-2} L^{(k)}$. В частности, $vL^{(k)} = L^{(k-1)}$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$. $\square$

Лемма 3.57. *Пусть L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F характеристики $\operatorname{char} F \nmid m$, $\operatorname{char} F \neq 2$. Предположим, что L — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли, $vL \neq 0$. Определим отображения $\psi\colon L^{(k)} \to L^{(k+1)}$ (мы будем обозначать их одной и той же буквой) при помощи равенства $\psi(va) = a$, где $a \in L^{(k+1)}$, $0 \leqslant k \leqslant m-2$. Положим $\{a, b\} := (m-1)!_\zeta [\psi(a), \psi^{m-1}(b)]$. Тогда*

$$[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] := \begin{cases} \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}[a,b] & \text{при} \quad k+\ell < m, \\ \frac{(k+\ell-m)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} \psi^{k+\ell-m}\{a,b\} & \text{при} \quad k+\ell \geqslant m \end{cases} \tag{3.15}$$

для всех $a, b \in L^{(0)}$ и $0 \leqslant k, \ell < m$.

Доказательство. В силу лемм 3.55 и 3.56 отображение ψ определено корректно. Более того, $v\psi(a) = a$ для всех $a \in L^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant m-2$.

Если $k = \ell = 0$, то справедливость (3.15) очевидна. В силу леммы 3.52 для всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $a, b \in L^{(0)}$ справедливо равенство $v[\psi^k(a), b] = [\psi^{k-1}(a), b]$. Следовательно, $[\psi^k(a), b] = \psi^k[a, b]$ и в случае, когда одно из чисел k, ℓ равно нулю, равенство (3.15) также доказано.

В случае произвольных $k, \ell > 0$, где $k+\ell < m$, равенство (3.15) доказывается по индукции с использованием (3.10):

$$\begin{aligned}
[\psi^k(a),\psi^\ell(b)] = \psi\left(v[\psi^k(a),\psi^\ell(b)]\right) = \psi([c\psi^k(a),\psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a),\psi^\ell(b)]) =\\
= \psi\left([\zeta^k\psi^k(a),\psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a),\psi^\ell(b)]\right) =\\
= \psi\left(\zeta^k \binom{k+\ell-1}{k}_\zeta \psi^{k+\ell-1}[a,b] + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta \psi^{k+\ell-1}[a,b]\right) =\\
= \left(\zeta^k \binom{k+\ell-1}{k}_\zeta + \binom{k+\ell-1}{k-1}_\zeta\right) \psi^{k+\ell}[a,b] =\\
= \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}[a,b].
\end{aligned}$$

Предположим, что $k+\ell = m$. Докажем равенство (3.15) индукцией по k. Если $k=1$ и $\ell = m-1$, то (3.15) следует из определения операции $\{,\}$. Если $k>1$, то $\ell < m-1$. В силу (3.11) и предположения индукции при $k-1$ получаем

$$\begin{aligned}
[\psi^k(a),\psi^\ell(b)] = [\psi^k(a), v\psi^{\ell+1}(b)] = \frac{\zeta^{\ell+1}-1}{\zeta^k-1}[v\psi^k(a),\psi^{\ell+1}(b)] = \frac{\zeta^{\ell+1}-1}{\zeta^k-1}[\psi^{k-1}(a),\psi^{\ell+1}(b)] =\\
= \frac{\zeta^{\ell+1}-1}{(\zeta^k-1)(k-1)!_\zeta(\ell+1)!_\zeta}\{a,b\} = \frac{(\ell+1)_\zeta}{k_\zeta(k-1)!_\zeta(\ell+1)!_\zeta}\{a,b\} = \frac{1}{k!_\zeta \ell!_\zeta}\{a,b\}.
\end{aligned}$$

Если $k+\ell > m$, то мы воспользуемся индукцией по $(k+\ell)$:

$$\begin{aligned}
[\psi^k(a),\psi^\ell(b)] = \psi\left(v[\psi^k(a),\psi^\ell(b)]\right) = \psi([c\psi^k(a),\psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a),\psi^\ell(b)]) =\\
= \psi\left([\zeta^k\psi^k(a),\psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a),\psi^\ell(b)]\right) =\\
= \psi\left(\zeta^k \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{k!_\zeta(\ell-1)!_\zeta} \psi^{k+\ell-m-1}\{a,b\} + \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{(k-1)!_\zeta \ell!_\zeta} \psi^{k+\ell-m-1}\{a,b\}\right) =\\
= \left(\zeta^k \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{k!_\zeta(\ell-1)!_\zeta} + \frac{(k+\ell-m-1)!_\zeta}{(k-1)!_\zeta \ell!_\zeta}\right) \psi^{k+\ell-m}\{a,b\} =\\
= \frac{(k+\ell)_\zeta(k+\ell-m-1)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} \psi^{k+\ell-m}\{a,b\} = \frac{(k+\ell-m)!_\zeta}{k!_\zeta \ell!_\zeta} \psi^{k+\ell-m}\{a,b\},
\end{aligned}$$

поскольку $(k+\ell)_\zeta = (k+\ell-m)_\zeta$ при $m < k+\ell < 2m$. □

Лемма 3.58. *Пусть L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Предположим, что L — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли, $vL \ne 0$. Тогда $L^{(0)}$ — простая алгебра Ли и существует такое $\gamma \in F$, что $\gamma \ne 0$ и $\{a,b\} = \gamma[a,b]$ для всех $a,b \in L^{(0)}$. Другими словами, $L \cong L(L^{(0)},\gamma)$ как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры Ли.*

Доказательство. Заметим, что в силу тождества Якоби

$$[\psi^{m-1}(a),\psi(b),u] + [\psi(b),u,\psi^{m-1}(a)] + [u,\psi^{m-1}(a),\psi(b)] = 0$$

для всех $a,b,u \in L^{(0)}$. Теперь из леммы 3.57 следует, что

$$[\{a,b\},u] + \{[b,u],a\} + \{[u,a],b\} = 0. \tag{3.16}$$

Снова используя тождество Якоби, получаем

$$[\psi^{m-1}(a), \psi^{m-1}(b), \psi(u)] + [\psi^{m-1}(b), \psi(u), \psi^{m-1}(a)] + [\psi(u), \psi^{m-1}(a), \psi^{m-1}(b)] = 0$$

для всех $a, b, u \in L^{(0)}$. В силу леммы 3.57 отсюда следует, что

$$[\{a, b\}, u] + [\{b, u\}, a] + [\{u, a\}, b] = 0. \tag{3.17}$$

Меняя в (3.16) значения a, b, u местами, получаем

$$[\{b, u\}, a] + \{[u, a], b\} + \{[a, b], u\} = 0,$$

$$[\{u, a\}, b] + \{[a, b], u\} + \{[b, u], a\} = 0.$$

Складывая эти равенства с (3.16) и используя равенство (3.17), а также условие $\operatorname{char} F \neq 2$, получаем

$$\{[a, b], u\} + \{[b, u], a\} + \{[u, a], b\} = 0$$

для всех $a, b, u \in L^{(0)}$. В силу (3.16) отсюда следует, что

$$\{[a, b], u\} = [\{a, b\}, u]. \tag{3.18}$$

В силу леммы 3.57 справедливо равенство $\{a, b\} = -\{b, a\}$. Используя (3.17) и (3.18), получаем отсюда, что

$$\{[a, b], u\} = [\{a, u\}, b] + [a, \{b, u\}]$$

для всех $a, b, u \in L^{(0)}$. Другими словами, $\{\cdot, u\}$ является дифференцированием для всех $u \in L^{(0)}$.

Докажем теперь, что $L^{(0)}$ — простая алгебра Ли. Предположим сперва, что $I \neq 0$ — идеал алгебры Ли $L^{(0)}$ такой, что $\{I, u\} \subseteq I$ для всех $u \in L^{(0)}$. Тогда в силу леммы 3.57 подпространство $\bigoplus_{k=0}^{m-1} \psi^k(I)$ является ненулевым $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированным идеалом алгебры Ли L. Отсюда $L = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \psi^k(I)$ и $I = L^{(0)}$. В силу теоремы 7 из [8, глава III, §6] (это также следует из теоремы 3.3) разрешимый и нильпотентный радикалы алгебры $L^{(0)}$ инвариантны относительно всех дифференцирований. Отсюда алгебра Ли $L^{(0)}$ либо полупроста, либо нильпотентна.

Предположим, что алгебра Ли $L^{(0)}$ нильпотентна. Пусть

$$[a_1, \ldots, a_t] = 0 \tag{3.19}$$

для всех $a_1, \ldots, a_t \in L^{(0)}$. Докажем, что

$$[\psi^{s_1}(a_1), \ldots, \psi^{s_{m(t+1)}}(a_{m(t+1)})] = 0 \tag{3.20}$$

для всех $a_i \in L^{(0)}$ и $0 \leqslant s_i \leqslant m-1$, где $1 \leqslant i \leqslant m(t+1)$. Действительно, согласно лемме 3.57

$$[\psi^{s_1}(a_1), \ldots, \psi^{s_{m(t+1)}}(a_{m(t+1)})] = \alpha \psi^{s_1 + \ldots + s_{m(t+1)} - \ell m}(b),$$

где $\alpha \in F$, число $\ell \in \mathbb{Z}_+$ подобрано таким образом, чтобы обеспечить справедливость неравенства

$$0 \leqslant s_1 + \ldots + s_{m(t+1)} - \ell m \leqslant m - 1,$$

а b является смешанным коммутатором длины $m(t+1)$, являющимся композицией $m(t+1) - \ell - 1$ операций $[\cdot,\cdot]$ и ℓ операций $\{\cdot,\cdot\}$. При этом

$$m(t+1) - \ell - 1 \geqslant m(t+1) - \frac{s_1 + \ldots + s_{m(t+1)}}{m} - 1 \geqslant m(t+1) - \frac{m(t+1)(m-1)}{m} - 1 \geqslant t.$$

Учитывая, что в силу (3.18) мы можем менять операции $[\cdot,\cdot]$ и $\{\cdot,\cdot\}$ местами, без ограничения общности можно считать, что в выражении b подряд идёт не менее t коммутаторов $[\cdot,\cdot]$, откуда $b = 0$ в силу (3.19). Следовательно, справедливо равенство (3.20) и алгебра Ли L нильпотентна. Получаем противоречие с $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-простотой алгебры Ли L.

Итак, алгебра Ли $L^{(0)}$ полупроста. Если алгебра Ли $L^{(0)}$ не является простой, то $L^{(0)} = I_1 \oplus I_2$ для некоторых ненулевых идеалов I_1 и I_2. Пусть δ — дифференцирование алгебры Ли $L^{(0)}$. Тогда $\delta(I_i) = \delta[I_i, I_i] \subseteq [\delta(I_i), I_i] + [I_i, \delta(I_i)] \subseteq I_i$. Другими словами, идеалы I_i, где $i = 1, 2$, инвариантны относительно всех дифференцирований, откуда $L^{(0)} = I_1 = I_2$, т.е. мы получаем противоречие. Отсюда $L^{(0)}$ — простая алгебра Ли.

Поскольку алгебра Ли $L^{(0)}$ проста, все её дифференцирования внутренние (см., например, [24, теорема 5.3]). Следовательно, существует такое F-линейное отображение $\theta\colon L^{(0)} \to L^{(0)}$, что $\{a,b\} = [a, \theta(b)]$ для всех $a, b \in L^{(0)}$. Теперь из (3.18) следует, что

$$[\theta[a,b], u] = \{[a,b], u\} = [\{a,b\}, u] = [[a, \theta(b)], u]$$

для всех $a, b, u \in L^{(0)}$. Поскольку центр алгебры Ли $L^{(0)}$ нулевой, справедливо равенство $\theta[a,b] = [a, \theta(b)]$ для всех $a, b \in L^{(0)}$. Другими словами, $\theta\colon L^{(0)} \to L^{(0)}$ — гомоморфизм $L^{(0)}$-модулей. Поскольку $L^{(0)}$ — неприводимый $L^{(0)}$-модуль, в силу леммы Шура θ является скалярным отображением, т.е. $\{a,b\} = \gamma[a,b]$ для некоторого $\gamma \in F$. Из леммы 3.57 теперь следует, что L как $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли $L(L^{(0)}, \gamma)$. Поскольку L является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой, а следовательно, и полупростой, выполнено условие $\gamma \neq 0$. $\square$

Ниже в теореме 3.59 показывается, что всякая конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли, простая в обычном смысле, является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли с тривиальным v-действием.

Теорема 3.59. *Пусть L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Предположим, что L — простая (в обычном смысле) алгебра Ли. Тогда $vL = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $vL \neq 0$. Тогда в силу леммы 3.58 существует изоморфизм $H_{m^2}(\zeta)$-модульных алгебр Ли $L \cong L(L^{(0)}, \gamma)$ для некоторого $\gamma \neq 0$. Согласно теореме 3.51 алгебра Ли $L(L^{(0)}, \gamma)$ изоморфна алгебре Ли $L_\alpha(L^{(0)})$, где $\alpha = \frac{(1-\zeta)^{-1}}{\sqrt[m]{\gamma}}$. Однако $L_\alpha(L^{(0)})$ не проста как обычная алгебра Ли. Отсюда получаем противоречие и $vL = 0$. $\square$

3.10 Неполупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли

В данном параграфе доказывается, что все конечномерные неполупростые $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли изоморфны алгебрам Ли из теоремы 3.49 при $\gamma = 0$.

Теорема 3.60. *Пусть L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, причём разрешимый радикал алгебры Ли L не равен 0. Тогда L изоморфна как $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли алгебре Ли $L(B, 0)$ для некоторой конечномерной простой алгебры Ли B.*

Для того, чтобы доказать теорему 3.60, нам потребуется несколько лемм.

Пусть M_1, M_2 — два $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированных модуля над $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли L. Будем говорить, что F-линейная биекция $\psi\colon M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ является *c-изоморфизмом* из M_1 в M_2, если существует такое число $r \in \mathbb{Z}$, что $c\psi(b) = \zeta^{-r}\psi(cb)$ и $\psi(ab) = a\psi(b)$ для всех $b \in M_1$, $a \in L$.

Напомним, что для любой конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики 0 справедливо включение $[L, R] \subseteq N$ (см., например, [7, предложение 2.1.7]), где R, N — соответственно, разрешимый и нильпотентный радикалы. Отсюда, если $N = 0$, то $R \subseteq Z(L) \subseteq N = 0$, где $Z(L)$ — центр алгебры Ли L. Напомним также, что если L — $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли, то R и N являются $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированными идеалами. Например, это следует из того, что R и N инвариантны относительно всех автоморфизмов алгебры Ли L и, в частности, относительно c-действия.

Лемма 3.61. *Пусть L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над полем F, причём разрешимый радикал R алгебры Ли L не равен 0. Определим число $\ell \in \mathbb{N}$ при помощи условий $N^\ell = 0$, $N^{\ell-1} \neq 0$. Выберем минимальный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированный идеал $\tilde N \subseteq N^{\ell-1}$ алгебры Ли L. Тогда для любого k подпространство $N_k := \sum_{i=0}^{i=k} v^i \tilde N$ является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированным идеалом алгебры Ли L, причём $L = \bigoplus_{i=0}^{t} v^i \tilde N$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированных подпространств) для некоторого $1 \leqslant t \leqslant m-1$. Более того, для всех $0 \leqslant k \leqslant t$ пространства N_k/N_{k-1} являются неприводимыми $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированными L-модулями, c-изоморфными друг другу. (Здесь $N_{-1} := 0$.)*

Доказательство. Поскольку для любых $a \in \tilde N$ и $b \in L$ элемент

$$[v^k a, b] = v[v^{k-1}a, b] - [cv^{k-1}a, vb]$$

мождет быть представлен в виде F-линейной комбинации элементов $v^i[c^{k-i}a, v^{k-i}b]$, всякое подпространство $N_k := \sum_{i=0}^{i=k} v^i \tilde N$ является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированным идеалом алгебры Ли L.

Напомним, что $v^m = 0$. Следовательно, N_{m-1} является $H_{m^2}(\zeta)$-инвариантным идеалом алгебры Ли L, откуда $L = N_{m-1}$.

Пусть $\theta_k\colon N_k/N_{k-1} \twoheadrightarrow N_{k+1}/N_k$, где $0 \leqslant k \leqslant m-2$, — отображения, заданные равенствами

$$\theta_k(b + N_{k-1}) := vb + N_k.$$

Введём обозначение $\bar b := b + N_{k-1}$. Тогда $c\theta_k(\bar b) = \zeta^{-1}\theta_k(c\bar b)$,

$$\begin{aligned}\theta_k(a\bar b) &= v[a,b] + N_k = -v[b,a] + N_k = -[cb, va] - [vb, a] + N_k = \\ &= -[vb,a] + N_k = [a, vb] + N_k = a\theta_k(\bar b) \text{ для всех } a \in L,\ b \in N_k.\end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde N = N_0/N_{-1}$ — неприводимый $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированный L-модуль. Следовательно, для всех $0 \leqslant k < m-1$ пространства $N_{k+1}/N_k = \theta_k(N_k/N_{k-1})$ либо также являются неприводимыми $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированными L-модулями, либо равны 0. Следовательно, если $L = N_t$, $L \ne N_{t-1}$, то $\dim N_t = (t+1)\dim \tilde N$ и $L = \bigoplus_{i=0}^t v^i \tilde N$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированных подпространств). □

Лемма 3.62. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.61. Кроме того, предположим, что основное поле F алгебраически замкнуто характеристики 0. Тогда $R = N = N_{t-1}$, $L^{(i)} = v^{t-i}\tilde N$ для всех $0 \leqslant i \leqslant t$ и $L^{(0)} \cong L/R$ является простой алгеброй Ли. Более того, $\dim(N_k/N_{k-1}) = \dim(L/R)$ для всех $0 \leqslant k \leqslant t$. Также $\ker v = L^{(0)}$.*

Доказательство. Сперва заметим, что $[L, L]$ — $H_{m^2}(\zeta)$-инвариантный идеал. Следовательно, $L = [L, L]$ и $L \ne R$.

В силу, например, теоремы 3.27, существует максимальная $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированная полупростая подалгебра $B \subseteq L$ такая, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированных подпространств), а $B \cong L/R$. Заметим, что N аннулирует все неприводимые $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированные L-модули, которые являются факторами присоединённого представления алгебры Ли L. Кроме того, $[L, R] \subseteq N$ (см., например, [7, предложение 2.1.7]). Отсюда L/N — редуктивная $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли, а $\tilde N$ — неприводимый $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированный L/N-модуль.

В силу леммы 3.16 существует такой L-подмодуль $M \subseteq \tilde N$, что $\tilde N = \bigoplus_{i=0}^s c^i M$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$ и разрешимый радикал R действует на M скалярными операторами. Поскольку $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированный идеал $\tilde N$ минимален, L-подмодуль M можно считать неприводимым. Все B-подмодули в M являются L-подмодулями, так как R действует на M скалярными операторами. Следовательно, M — неприводимый B-модуль.

Поскольку $\tilde N = N_0/N_{-1}$, все N_k/N_{k-1} c-изоморфны друг другу и алгебра Ли B полупроста, алгебра Ли L является прямой суммой неприводимых B-подмодулей, изоморфных $c^j M$, где $j \in \mathbb{Z}$. Заметим, что B-действие на M и, следовательно, на всяком $c^j M$ ненулевое, поскольку алгебра Ли B сама является B-подмодулем алгебры Ли L с ненулевым B-действием. С другой стороны, существует такой B-подмодуль $Q \subseteq R$, что $R = N \oplus Q$. В силу того, что $[L, R] \subseteq N$, справедливо включение $[B, Q] \subseteq N \cap Q = 0$, т.е. $Q \subseteq L$ является подмодулем с нулевым B-действием. Следовательно, $Q = 0$ и $R = N$. Учитывая, что $[N, N_k] \subseteq N_{k-1}$, все N_k/N_{k-1} являются неприводимыми $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированными B-модулями, c-изоморфными друг другу. Однако $B \subseteq L$ — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированный B-подмодуль. Если алгебра Ли B не была бы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простой алгеброй Ли, то B была бы прямой суммой своих идеалов, являющихся $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простыми алгебрами Ли (это следует, например, из теоремы 3.20), которые не c-изоморфны как B-модули. Следовательно, B —

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированно простая алгебра Ли и все N_k/N_{k-1} c-изоморфны модулю B как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированные B-модули. Определим число $q \in \mathbb{Z}_+$ при помощи условий $B \subseteq N_q$, $B \subsetneqq N_{q-1}$. Если $q < t$, то $[B, N_t] \subseteq N_{t-1}$ и $B\,(N_t/N_{t-1}) = 0$. Получаем противоречие с тем, что все N_k/N_{k-1} c-изоморфны друг другу. Отсюда $B \cap N_{t-1} = 0$, $L = B \oplus N_{t-1}$ (прямая сумма подпространств) и $B \cong L/N_{t-1}$.

Докажем, что $ca = a$ для всех $a \in B$ и, следовательно, B проста как обычная алгебра Ли. В лемме 3.61 было доказано, что $\theta_k(a\bar{b}) = a\theta_k(\bar{b})$ для всех $0 \leqslant k \leqslant m-2$, $a \in L$ и $b \in N_k$. Аналогично доказывается, что

$$\theta_k(a\bar{b}) = v[a,b] + N_k = [ca, vb] + [va, b] + N_k = [ca, vb] + N_k = (ca)\theta_k(\bar{b}).$$

Другими словами, $((ca)-a)$ действует как нулевой оператор 0 на всех пространствах N_k/N_{k-1} для любого $a \in B$. В частности, элемент $((ca)-a)$ принадлежит центру алгебры Ли B. Поскольку алгебра Ли B полупроста, получаем $ca = a$ для всех $a \in B$, откуда алгебра Ли $B \subseteq L^{(0)}$ имеет тривиальную градуировку и проста как обычная алгебра Ли.

Заметим, что $B \cong L/N_{t-1} \cong v^t\tilde{N}$ как $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированные пространства. Следовательно, $v^t\tilde{N} \subseteq L^{(0)}$. Используя $vc = \zeta cv$, получаем $v^i\tilde{N} \subseteq L^{(t-i)}$. Поскольку $L = \bigoplus_{i=0}^{m-1} L^{(i)} = \bigoplus_{i=0}^{t} v^i\tilde{N}$, при $0 \leqslant i \leqslant t$ справедливо равенство $L^{(i)} = v^{t-i}\tilde{N}$, а при $t+1 \leqslant i \leqslant m-1$ подпространство $L^{(i)}$ нулевое. В частности, $B = L^{(0)} = v^t\tilde{N}$.

Напомним, что всякое подпространство $N_j = \bigoplus_{i=0}^{j} v^i\tilde{N} = \bigoplus_{i=t-j}^{t} L^{(i)}$ является идеалом. Следовательно, при всех $0 \leqslant j \leqslant t$ и $0 \leqslant i \leqslant m-1$ справедливо неравенство $0 \leqslant t-j+i < t-j+m$ и включения

$$[L^{(i)}, L^{(t-j)}] \subseteq N_j \cap L^{(t-j+i)} \subseteq N_{j-i}$$

и $[L^{(i)}, N_k] \subseteq N_{k-i}$. (Считаем, что $N_k := 0$ при $k < 0$.) В частности, идеал N_{t-1} нильпотентен и $R = N = N_{t-1}$.

Если $t = m-1$, то $vL^{(0)} = v^m\tilde{N} = 0$. Поскольку $N_{t-1} \cap (\ker v) = 0$, получаем $\ker v = L^{(0)}$. Если $t < m-1$, то $vL^{(0)} \subseteq L^{(m-1)} = 0$. Снова получаем, что $\ker v = L^{(0)}$. $\square$

Лемма 3.63. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.62. Определим F-линейное отображение $\psi\colon L \to L$ при помощи равенства $\psi(v^k a) = v^{k-1}a$ для всех $a \in \tilde{N}$, $1 \leqslant k \leqslant t$, $\psi(\tilde{N}) = 0$. Тогда*

$$[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] = \binom{k+\ell}{k}_\zeta \psi^{k+\ell}[a,b] \text{ для всех } a, b \in L^{(0)} \text{ и } 0 \leqslant k, \ell \leqslant t. \tag{3.21}$$

Доказательство. Заметим, что $\psi(va) = a$ для всех $a \in N_{t-1}$. Следовательно, для всех $b \in L^{(0)}$ и $a = vu$, где $u \in N_{t-1}$, справедливы равенства

$$c\psi(a) = c\psi(vu) = cu = \psi(vcu) = \zeta\psi(cvu) = \zeta\psi(ca),$$

$$\psi[a,b] = \psi[vu, b] = \psi(v[u,b] - [cu, vb]) = [u,b] = [\psi(a), b].$$

Поскольку $\psi(\tilde{N}) = 0$, $L = vN_{t-1} \oplus \tilde{N}$ (прямая сумма $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированных подпространств), а $\tilde{N}$ является идеалом, получаем равенства $c\psi(a) = \zeta\psi(ca)$ и $\psi[a,b] = [\psi(a), b]$ для всех $a \in L$, $b \in L^{(0)}$. Этим (3.21) доказано в случае, когда либо $k = 0$, либо $\ell = 0$.

В случае $k, \ell \geqslant 1$ формула (3.21) доказывается по индукции с использованием равенства

$$[\psi^k(a), \psi^\ell(b)] = \psi\left(v[\psi^k(a), \psi^\ell(b)]\right) = \psi([c\psi^k(a), \psi^{\ell-1}(b)] + [\psi^{k-1}(a), \psi^\ell(b)])$$

точно так же, как это было сделано выше в лемме 3.57. $\square$

Доказательство теоремы 3.60. В силу леммы 3.62 алгебра Ли $L^{(0)}$ является простой. Возьмём произвольные элементы $a, b \in L^{(0)}$ такие, что $[a, b] \neq 0$. Тогда $\psi^t[a, b] \neq 0$. В то же время $[\psi^t(a), \psi(b)] = \binom{t+1}{t}_\zeta \psi^{t+1}[a, b] = 0$. Однако

$$\begin{gathered} 0 = v[\psi^t(a), \psi(b)] = [v\psi^t(a), \psi(b)] + [c\psi^t(a), v\psi(b)] = \\ = \left(\binom{t}{t-1}_\zeta + \zeta^t\right) \psi^t[a, b] = (t+1)_\zeta\ \psi^t[a, b]. \end{gathered}$$

Следовательно, $(t+1)_\zeta = 0$ и $m = t + 1$. Теперь утверждение теоремы следует из (3.21) и леммы 3.62. $\square$

Замечание 3.64. Поскольку максимальная полупростая подалгебра $\ker v$ определена однозначно, любые две такие $H_{m^2}(\zeta)$-простые алгебры Ли L изоморфны как $H_{m^2}(\zeta)$-модульные алгебры Ли, если и только если их подалгебры Ли $\ker v$ изоморфны как обычные алгебры Ли. Более того, все автоморфизмы алгебры Ли L как $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры Ли индуцируются автоморфизмами алгебры Ли $\ker v$ как обычной алгебры Ли. Действительно, пусть $\theta \colon L \xrightarrow{\sim} L$ — произвольный автоморфизм алгебры Ли L как $H_{m^2}(\zeta)$-модульной алгебры Ли. Поскольку $\tilde{N} = N^{m-1}$, получаем $\theta(\tilde{N}) = \tilde{N}$ и $\theta(v^k \tilde{N}) = v^k \tilde{N}$ для всех $0 \leqslant k < m$. Теперь из $v^k \theta(\psi^k(a)) = \theta(a)$ для всех $a \in \ker v$ следует, что $\theta(\psi^k(a)) = \psi^k(\theta(a))$ и θ однозначно определено своим ограничением на $\ker v$.

Глава 4

Ассоциативные алгебры, градуированные полугруппами

В данной главе рассматриваются структурные вопросы теории ассоциативных алгебр, градуированных полугруппами.

Результаты §4.1–4.3 касаются градуированности радикала Джекобсона и градуированных вариантов теорем Веддербёрна — Артина и Веддербёрна — Мальцева, при этом основное внимание уделено алгебрам, градуированным полугруппами из двух элементов и лентами левых и правых нулей. Эти результаты были опубликованы в работе [116].

Результаты §4.4–4.7 были получены автором диссертации совместно с Э. Йесперсом и Дж. Янссенсом и опубликованы в [118]. Они посвящены классификации градуированно простых алгебр, градуированных конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами.

Доказанные утверждения будут затем использованы в главе 9 при изучении градуированных полиномиальных тождеств.

4.1 Полугруппы, состоящие из двух элементов

Как будет показано в следующих параграфах, для многих интересных примеров достаточно полугрупп, состоящих из двух элементов. Докажем, что таких попарно неизоморфных полугрупп существует ровно пять.

Обозначим через $Q_1 = (\{0, 1\}, \cdot)$ мультипликативную полугруппу поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пусть $Q_2 = (\{0, v\}, \cdot)$ — полугруппа, заданная соотношениями $v^2 = 0^2 = 0 \cdot v = v \cdot 0 = 0$.

Полугруппа T называется *лентой левых нулей*, если $t_1 t_2 = t_1$ для всех $t_1, t_2 \in T$ и *лентой правых нулей*, если $t_1 t_2 = t_2$ для всех $t_1, t_2 \in T$.

Обозначим через Q_3 ленту правых нулей, состоящую из двух элементов.

Предложение 4.1. *Пусть T — полугруппа, состоящая из двух элементов. Тогда T изоморфна одной из полугрупп из списка $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_3^{\mathrm{op}}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)\}$ и любые две полугруппы из этого списка неизоморфны. (Здесь через Q_3^{op} обозначена полугруппа, антиизоморфная полугруппе Q_3.)*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда $T = \{a, a^2\}$ для некоторого $a \in T$. Тогда если $a^3 = a$, то $a^4 = a^2$ и элемент a^2 является единицей полугруппы T, т.е. $T \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Если $a^3 = a^2$, то $a^4 = a^3 = a^2$ и элемент a^2 является нулём полугруппы T, т.е. $T \cong Q_2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $T \neq \{a, a^2\}$ ни для какого элемента $a \in T$. Тогда $T = \{a, b\}$, $a^2 = a$, $b^2 = b$. Если $ab = ba$, то $T \cong Q_1$. Если $ab \neq ba$, то $T \cong Q_3$ при $ab = b$, $ba = a$ и $T \cong Q_3^{\mathrm{op}}$ при $ab = a$, $ba = b$. □

4.2 Градуированность радикала Джекобсона

Алгебры, градуированные полугруппой Q_1, — это в точности алгебры с фиксированным разложением в прямую сумму двустороннего идеала и подалгебры. Если T — лента правых нулей, то T-градуированные алгебры — это в точности алгебры, разложенные в прямую сумму левых идеалов, проиндексированных элементами полугруппы T.

Известно (см., например, [77, пример 4.2]), что в алгебрах, градуированных полугруппами, радикал Джекобсона необязательно является градуированным идеалом. (См. обзор достаточных условий градуированности в [77, §4.4].) В данном параграфе мы приведём примеры и докажем результаты, касающиеся полугрупп из двух элементов и лент правых и левых нулей.

В алгебре $M_k(F)$ всех квадратных матриц размера $k \times k$ зафиксируем базис, состоящий из матричных единиц $e_{i\ell}$, где $1 \leqslant i, \ell \leqslant k$.

Пример 4.2. Пусть $A = M_k(F) \oplus \mathrm{UT}_k(F)$ (прямая сумма идеалов), где F — некоторое поле, а $k \geqslant 2$. Определим Q_1-градуировку на A при помощи формул $A^{(0)} = (M_k(F), 0)$, $A^{(1)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in \mathrm{UT}_k(F)\}$, где $\varphi\colon \mathrm{UT}_k(F) \hookrightarrow M_k(F)$ — естественное вложение. Тогда

$$J(A) = \{(0, e_{ij}) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\} \subset (0, \mathrm{UT}_k(F)),$$

$J(A) \cap A^{(0)} = J(A) \cap A^{(1)} = 0$ и $J(A)$ не является градуированным идеалом.

Пример 4.3. Пусть $A = M_k(F) \oplus V$ (прямая сумма идеалов), где $V \cong M_k(F)$ как векторные пространства, $k \in \mathbb{N}$, $V^2 = 0$, а F — некоторое поле. Обозначим через $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} M_k(F)$ соответствующую биекцию. Определим Q_2-градуировку на A при помощи формул $A^{(0)} = (M_k(F), 0)$, $A^{(v)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in V\}$. Тогда

$$J(A) = (0, V),\ J(A) \cap A^{(0)} = J(A) \cap A^{(v)} = 0$$

и $J(A)$ не является градуированным идеалом.

Пример 4.4. Пусть $A = M_k(F) \oplus V$ (прямая сумма левых идеалов), где $V \cong M_k(F)$ как левые $M_k(F)$-модули, $k \in \mathbb{N}$, $V^2 = VM_k(F) = 0$, а F — поле. Обозначим через $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} M_k(F)$ соответствующий изоморфизм. Определим Q_3-градуировку на A при помощи формул $A^{(e_1)} = (M_k(F), 0)$,

$$A^{(e_2)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in V\}.$$

Тогда

$$J(A) = (0, V),\ J(A) \cap A^{(e_1)} = J(A) \cap A^{(e_2)} = 0$$

и $J(A)$ не является градуированным идеалом.

Замечание 4.5. Рассматривая вместо A алгебру A^{op}, получим пример Q_3^{op}-градуированной алгебры, радикал Джекобсона которой не является градуированным.

Однако если Q_3- или Q_3^{op}-градуированная алгебра содержит единицу, то её радикал Джекобсона градуирован. В действительности справедлив более общий результат:

Предложение 4.6. *Пусть A — T-градуированная ассоциативная алгебра с* 1 *над полем F для некоторой ленты T левых или правых нулей. Тогда любой двусторонний идеал алгебры A градуированный.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $t_1 t_2 = t_2$ для всех $t_1, t_2 \in T$. (Случай ленты левых нулей рассматривается аналогично.) Тогда все $A^{(t)}$, где $t \in T$, являются левыми идеалами алгебры A и $1 = \sum_{t \in T} e_t$ для некоторых $e_t \in A^{(t)}$. Пусть I — произвольный идеал алгебры A. Тогда для любого $a \in I$ имеет место разложение $a = \sum_{t\in T} ae_t$, где $ae_t \in I \cap A^{(t)}$ для любого $t \in T$. Следовательно, идеал $I = \bigoplus_{t \in T} I \cap A^{(t)}$ градуированный. □

4.3 Градуированные аналоги теорем Веддербёрна и T-градуированная простота

Теперь исследуем справедливость градуированных аналогов теорем Веддербёрна в T-градуированных алгебрах, где T — полугруппа.

Пример 4.7. Пусть $B = M_k(F) \oplus M_k(F)$ (прямая сумма идеалов), $k \in \mathbb{N}$, а F — поле. Определим Q_1-градуировку на A при помощи равенств

$$A^{(0)} = (M_k(F), 0), \qquad A^{(1)} = \{(a, a) \mid a \in M_k(F)\}.$$

Тогда B нельзя представить в виде прямой суммы Q_1-градуированных идеалов, которые являлись бы Q_1-градуированно простыми алгебрами, т.е. Q_1-градуированный аналог теоремы Веддербёрна — Артина неверен.

Доказательство. Достаточно заметить, что у полупростой алгебры B только четыре идеала: 0, B, $(0, M_k(F))$ и $(M_k(F), 0)$. Три из них, а именно 0, B и $(M_k(F), 0)$, Q_1-градуированы, и только $(M_k(F), 0)$ является Q_1-градуированно простой алгеброй. □

Замечание 4.8. Поскольку компонента $B^{(0)}$ всегда является градуированным идеалом, всякая Q_1-градуированно простая алгебра B имеет тривиальную градуировку, т.е. $B = B^{(0)}$. Следовательно, всякая Q_1-градуированно простая алгебра является простой.

Предложение 4.9. *Пусть B — конечномерная полупростая ассоциативная Q_2-градуированная алгебра над полем F. Тогда $B = B^{(0)}$ и в силу обычной теоремы Веддербёрна — Артина алгебра B является прямой суммой Q_2-градуированных идеалов, являющихся простыми алгебрами (с тривиальной градуировкой). Более того, всякая Q_2-градуированно простая алгебра проста. В частности, справедлив Q_2-градуированный аналог теоремы Веддербёрна — Артина.*

Доказательство. Предположим, что $B \neq B^{(0)}$. Учитывая, что $B^{(0)}$ — идеал, из обычной теоремы Веддербёрна — Артина следует, что $B = B^{(0)} \oplus I$ некоторого полупростого идеала I алгебры B. Однако $(B/B^{(0)})^2 = 0$, поскольку $(B^{(1)})^2 \subseteq B^{(0)}$ и алгебра $I \cong B/B^{(0)}$ не может быть полупростой. Отсюда $B = B^{(0)}$, Q_2-градуировка на алгебре B является тривиальной и к B можно применить обычную теорему Веддербёрна — Артина. □

Предложение 4.10. *Пусть B — конечномерная полупростая ассоциативная T-градуированная алгебра над полем F для некоторой ленты T левых или правых нулей. Тогда B раскладывается в прямую сумму T-градуированных идеалов, являющихся простыми алгебрами. В частности, справедлив T-градуированный аналог теоремы Веддербёрна — Артина, и любая конечномерная полупростая T-градуированно простая алгебра является простой.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда T является лентой правых нулей. (Случай ленты левых нулей разбирается аналогично.)

В силу обычной теоремы Веддербёрна — Артина

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s \text{ (прямая сумма идеалов)}$$

для некоторых простых алгебр B_i. Теперь утверждение теоремы следует из того, что в силу теоремы 4.6 каждый из идеалов B_i является T-градуированным. □

Здесь нужно отметить, что существуют неполупростые градуированно простые алгебры над лентами левых и правых нулей. (См. теорему 4.30 ниже.)

В силу предложения 4.6 радикал Джекобсона (точно так же, как и все остальные идеалы) любой T-градуированной алгебры с единицей, где T — лента левых или правых нулей, является градуированным. Поэтому естественным образом возникает вопрос о справедливости T-градуированного аналога теоремы Веддербёрна — Мальцева. Оказывается, T-градуированный аналог этой теоремы действительно справедлив.

Теорема 4.11. *Пусть A — конечномерная ассоциативная T-градуированная алгебра с единицей над полем F, где T — лента левых или правых нулей, а алгебра $A/J(A)$ сепарабельна. (Например, поле F совершенно.) Тогда существует такая максимальная полупростая подалгебра B, что $A = B \oplus J$ (прямая сумма градуированных подпространств), где $J := J(A)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что T — лента правых нулей. Рассмотрим сперва случай $J^2 = 0$.

Заметим, что $1_A = \sum_{t\in T} e_t$ для некоторых $e_t \in A^{(t)}$. Более того, поскольку $e_r 1_A = \sum_{t\in T} e_r e_t$ и $e_r e_t \in A^{(t)}$ для всех $t \in T$, для всех $r \neq t$ выполняются равенства $e_r e_t = 0$ и $e_r^2 = e_r$.

Используя обычную теорему Веддербёрна — Мальцева, выберем максимальную полупростую подалгебру B такую, что $A = B \oplus J$ (прямая сумма подпространств). Пусть $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J$ — естественный сюръективный гомоморфизм, который является градуированным, поскольку идеал J градуированный. Пусть $\varphi\colon A/J \hookrightarrow A$ — такое гомоморфное вложение, что $\varphi(A/J) = B$ и $\pi\varphi = \mathrm{id}_{A/J}$. Заметим, что $\pi(1_A) = \sum_{t\in T} \pi(e_t)$ — единица алгебры A/J. Кроме того, $1_A = 1_B = \varphi\pi(1_A)$.

В силу того, что алгебра конечномерна, носитель градуировки также конечен. Поскольку любое подмножество ленты правых нулей является подполугруппой, можно считать, что полугруппа T конечна. Пусть $T = \{t_1, \dots, t_s\}$. Если $\varphi\pi(e_{t_i}) = e_{t_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$, то $Be_{t_i} \subseteq B$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$, $B = \bigoplus_{t\in T} Be_t$ является градуированной подалгеброй и теорема доказана.

Предположим, что $\varphi\pi(e_{t_i}) \neq e_{t_i}$ по крайней мере для одного $1 \leqslant i \leqslant s$. Выберем $0 \leqslant k \leqslant s-1$ такое, что $\varphi\pi(e_{t_i}) = e_{t_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\varphi\pi(e_{t_{k+1}}) \neq e_{t_{k+1}}$. Заметим, что $\pi(\varphi\pi(e_{t_{k+1}}) - e_{t_{k+1}}) = 0$, т.е. $\varphi\pi(e_{t_{k+1}}) = e_{t_{k+1}} + j$ для некоторого $j \in J$. Кроме того,

$$je_{t_i} = (\varphi\pi(e_{t_{k+1}}) - e_{t_{k+1}})e_{t_i} = \varphi\pi(e_{t_{k+1}}e_{t_i}) - e_{t_{k+1}}e_{t_i} = 0 \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Аналогично, $e_{t_i}j = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Более того, из $(e_{t_{k+1}} + j)^2 = e_{t_{k+1}} + j$ следует, что $j = e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}$ и $e_{t_{k+1}}je_{t_{k+1}} = 0$.

Пусть $\tilde\varphi\colon A/J \hookrightarrow A$ — гомоморфное вложение, заданное равенством

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(a) = (1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})\varphi(a)(1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})^{-1} &= \\ = (1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})\varphi(a)(1_A - e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}).&\end{aligned}$$

Заметим, что $\pi\tilde\varphi = \mathrm{id}_{A/J}$ и

$$\tilde\varphi\pi(e_{t_i}) = (1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})e_{t_i}(1_A - e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}) = e_{t_i} \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Более того,

$$\begin{aligned}\tilde\varphi\pi(e_{t_{k+1}}) = (1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})\varphi\pi(e_{t_{k+1}})(1_A - e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}) &= \\ = (1_A + e_{t_{k+1}}j - je_{t_{k+1}})(e_{t_{k+1}} + j)(1_A - e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}) &= \\ = (e_{t_{k+1}} + j - je_{t_{k+1}})(1_A - e_{t_{k+1}}j + je_{t_{k+1}}) &= \\ = e_{t_{k+1}} + j - je_{t_{k+1}} - e_{t_{k+1}}j = e_{t_{k+1}}.&\end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde B = \tilde\varphi(A/J)$ является максимальной полупростой подалгеброй такой, что $A = \tilde B \oplus J$ (прямая сумма подпространств) и $\tilde\varphi\pi(e_{t_i}) = e_{t_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

Рассуждая по индукции, можно считать, что $e_t = \tilde\varphi\pi(e_t) \in \tilde B$ для всех $t \in T$. Следовательно, $\tilde B = \bigoplus_{t\in T} \tilde B e_t$ — градуированная подалгебра алгебры A.

В случае $J^2 = 0$ теорема доказана. Общий случай доказывается индукцией по $\dim A$. Предположим, что $J^2 \neq 0$. Тогда $A/J^2 = B_0 \oplus J/J^2$ (прямая сумма градуированных подпространств) для некоторой градуированной максимальной полупростой подалгебры B_0 алгебры A/J^2. Заметим, что $1_{A/J^2} \in B_0$. Рассмотрим прообраз B_1 алгебры B_0 в A относительно естественного сюръективного гомоморфизма $\pi_1 \colon A \twoheadrightarrow A/J^2$. Тогда $1_A \in B_1$. Поскольку алгебра $B_0 \cong A/J$ полупроста, справедливо равенство $J(B_1) = J^2$. Более того, $\dim B_1 < \dim A$ и в силу предположения индукции $B_1 = B \oplus J^2$ (прямая сумма градуированных подпространств) для некоторой градуированной максимальной полупростой подалгебры B алгебры A. Следовательно, $A = B \oplus J$ (прямая сумма градуированных подпространств) и теорема доказана. $\square$

Полугруппа T называется *полугруппой с сокращениями*, если для всех $a, b, c \in T$ из любого из равенств $ac = bc$ или $ca = cb$ следует, что $a = b$.

Предложение 4.12. *Пусть B — конечномерная полупростая ассоциативная T-градуированная алгебра над полем F для некоторой полугруппы T с сокращениями. Тогда B является прямой суммой T-градуированных идеалов, являющихся T-градуированно простыми алгебрами. Иными словами, справедлив T-градуированный аналог теоремы Веддербёрна — Артина.*

Доказательство. В силу обычной теоремы Веддербёрна — Артина $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма идеалов) для некоторых простых алгебр B_i. Пусть I — минимальный T-градуированный идеал алгебры B. Тогда $I = B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_k}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_k$. Введём обозначение $N := \bigoplus_{i \in \{1,\ldots,s\} \setminus \{i_1,\ldots,i_k\}} B_i$. Поскольку все идеалы B_i полупросты, справедливо равенство $N = \{b \in B \mid ba = 0 \text{ для всех } a \in I\}$. В силу того, что полугруппа T с сокращениями, а идеал I градуированный, идеал N также является градуированным. Следовательно, $B = I \oplus N$ (прямая сумма градуированных идеалов), где I — T-градуированно простая алгебра. Для завершения доказательства достаточно применить к N индукционные рассуждения. $\square$

4.4 Кольца, градуированные конечными полугруппами

Оставшаяся часть главы посвящена изучению градуированно простых колец и алгебр.

До этого момента в работе использовалось только понятие градуированной алгебры над полем. Аналогичным образом вводится понятие градуированного кольца.

Пусть T — полугруппа, а R — ассоциативное кольцо. Разложение $\Gamma \colon R = \bigoplus_{t \in T} R^{(t)}$ кольца R в прямую сумму аддитивных подгрупп $R^{(t)}$, где $t \in T$, называется *T-градуировкой*, если $R^{(s)} R^{(t)} \subseteq R^{(st)}$ для всех $s, t \in T$. Подгруппа P аддитивной группы кольца R называется *однородной* или *градуированной*, если $P = \bigoplus_{t \in T} (R^{(t)} \cap P)$. Говорят, что кольцо R является *T-градуированно простым*, если $R^2 \neq 0$ и 0 и R являются единственными градуированными идеалами кольца R. Полугруппу T всегда можно заменить на подполугруппу, порождённую *носителем* $\operatorname{supp} \Gamma = \{t \in T \mid R^{(t)} \neq 0\}$ градуировки Γ.

Заметим, что если полугруппа T содержит нулевой элемент 0, то компонента $R^{(0)}$ является градуированным идеалом кольца R, т.е. если $R^{(0)} \neq 0$ и кольцо R градуированно простое, то $R^{(0)} = R$ и $\operatorname{supp}\Gamma = \{0\}$, т.е. градуировка Γ тривиальна. Отсюда при изучении градуированно простых колец можно без ограничения общности считать, что если $0 \in T$, то $R^{(0)} = 0$. Заменяя, если нужно, T на $T^0 := T \cup \{0\}$, мы можем считать, что T всегда содержит нулевой элемент, $R^{(0)} = 0$ и $T = \langle \operatorname{supp}\Gamma \rangle \cup \{0\}$.

Предположим теперь, что кольцо R является T-градуированно простым и $T = \langle \operatorname{supp}\Gamma \rangle \cup \{0\}$. Заметим, что если I — *идеал* полугруппы T, т.е. $st, ts \in I$ для всех $t \in T$, $s \in I$, то подмножество $R_I := \bigoplus_{t\in I} R^{(t)}$ является идеалом кольца R. Следовательно, в силу градуированной простоты кольца R либо $R_I = 0$, либо $R_I = R$. Из последнего следует, что $I = T$. Отсюда если I — нетривиальный идеал полугруппы T, то $I \cap \operatorname{supp}\Gamma = \varnothing$. В этом случае полугруппу T можно заменить на *факторполугруппу Риса* T/I, т.е. на полугруппу T, в которой подмножество элементов I заменено единственным элементом, являющимся нулём по умножению. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что полугруппа T не содержит идеалов, отличных от 0 и T и $T^2 \neq 0$. Такая полугруппа T называется 0-*простой*. Отсюда если T-градуированное кольцо R является T-градуированно простым, тогда без ограничения общности мы можем считать, что полугруппа T является 0-простой. Разумеется, те же допущения можно сделать и при изучении градуированных полугруппами градуированно простых алгебр над полями.

Пусть G — группа, I, J — множества, а $P = (p_{ji})$ — матрица размера $J \times I$ с элементами из множества $G^0 := G \cup \{0\}$. Обозначим через $\mathcal{M}(G^0; I, J; P)$ множество $\{(g, i, j) \mid i \in I,\ j \in J,\ g \in G^0\}$, в котором все элементы $(0, i, j)$ отождествлены с нулевым элементом 0. Определим на $\mathcal{M}(G^0; I, J; P)$ ассоциативное умножение следующим образом: $(g, i, j)(h, k, \ell) := (g p_{jk} h, i, \ell)$. Полугруппа $\mathcal{M}(G^0; I, J; P)$ называется *полугруппой Риса матричного типа над группой с нулём* G^0 *с сэндвич-матрицей* P.

Всякая конечная 0-простая полугруппа T является *вполне* 0-*простой*, т.е. содержит ненулевой примитивный идемпотент (см. [11, §2.7]). Отсюда в силу теоремы Риса [11, теорема 3.5] полугруппа T изоморфна $\mathcal{M}(G^0; I, J; P)$ для некоторой максимальной подгруппы G полугруппы T, множеств I, J и матрицы P, в каждой строчке и каждом столбце которой находится как минимум один ненулевой элемент.

Таким образом, если градуированно простое кольцо R градуировано конечной полугруппой T, без ограничения общности можно считать, что

$$T = \mathcal{M}(G^0, m, n; P) = \{(g, i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ g \in G^0\},$$

где G — группа, $m, n \in \mathbb{N}$, P — матрица размера $n \times m$ с элементами из множества G^0. Заметим, что кольцо R градуировано также полугруппой $T' = \mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P')$, где $e^2 = e$, а матрица P' задана следующим условием: элемент, стоящий на месте (i, j), равен e, если $p_{ij} \neq 0$, и нулю в противном случае.

Пример 4.13. Если T — лента правых нулей, $|T| = n$, то $T^0 \cong \mathcal{M}(\{e\}^0, 1, n; P)$, где $p_{i1} = e$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

В данной главе мы классифицируем все T-градуированно простые кольца и алгебры над полями, градуированные конечными 0-простыми полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами. Напомним, что Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев и С. К. Сегал в своих работах [4, 37] классифицировали градуированно простые конечномерные алгебры над алгебраически замкнутыми полями, градуированные группами. Таким образом, комбинирование результатов данной главы с результатами Ю. А. Бахтурина, М. В. Зайцева и С. К. Сегала может привести к решению общей проблемы классификации градуированно простых колец и алгебр, градуированных конечными полугруппами с необязательно тривиальными подгруппами.

Покажем теперь, что разница между понятиями простого и T-градуированно простого кольца для таких полугрупп T заключается в нетривиальности левых и правых аннуляторов.

Будем называть кольцо *точным*, если его левый и правый аннуляторы тривиальны, т.е. из $aR = 0$ или $Ra = 0$ для некоторого $a \in R$ следует, что $a = 0$.

Предложение 4.14. *Пусть R — кольцо, градуированное конечной 0-простой полугруппой T с тривиальными максимальными подгруппами. Тогда кольцо R простое, если и только если R является точным T-градуированно простым кольцом.*

Доказательство. Необходимость условий предложения очевидна, так как левый и правый аннуляторы являются двухсторонними аннуляторами.

Предположим теперь, что кольцо R является точным и T-градуированно простым. Поскольку T — конечная 0-простая полугруппа с тривиальными максимальными подгруппами, существует изоморфизм $T \cong \mathcal{M}(\{e\}^0; I, J; P)$. Если I — ненулевой идеал кольца R, то RIR является T-градуированным идеалом. В силу точности кольца R идеал I ненулевой, откуда $RIR = R$ и $RIR \subseteq I = R$, т.е. кольцо R действительно является простым. $\square$

Следующий несложный пример показывает, что условие точности кольца не может быть опущено.

Пусть $T = \{e, f\}$ — лента правых нулей, состоящая из двух элементов. Нетрудно видеть, что конечная полугруппа T^0 является 0-простой, а полугрупповая алгебра FT, где F — произвольное поле, градуированно проста. Однако эта алгебра не является простой, поскольку она содержит собственный двухсторонний идеал $F(e - f)$. Заметим, что $(e - f)FT = 0$, т.е. алгебра FT не точна.

Покажем теперь, что если $R \neq J(R)$ и кольцо R является T-градуированно простым для некоторой полугруппы T, то радикал Джекобсона $J(R)$ не содержит никакой особой информации не только о T-градуировке, но и о структуре кольца R.

Начнём с того, что докажем, что никакой нетривиальный идеал не может содержать ненулевые однородные элементы.

Лемма 4.15. *Пусть $I \neq R$ — двухсторонний идеал T-градуированно простого кольца $R = \bigoplus_{t \in T} R^{(t)}$ для некоторой полугруппы T. Тогда $R^{(t)} \cap I = 0$ для всех $t \in T$.*

Доказательство. Предположим, что $r \in R^{(t)} \cap I$ для некоторого $t \in T$. Тогда наименьший двухсторонний идеал I_0, содержащий r, градуирован. Поскольку $I_0 \subseteq I \subsetneqq R$, получаем

$I_0 = 0$ и $r = 0$. $\square$

Напомним, что гомоморфизм T-градуированных колец $\varphi\colon R_1 \to R_2$ называется *строго градуированным*, если $\varphi\left(R_1^{(t)}\right) \subseteq R_2^{(t)}$ для всех $t \in T$. Два T-градуированных кольца R_1 и R_2 называются *градуированно изоморфными*, если существует строго градуированный изоморфизм $R_1 \overset{\sim}{\to} R_2$.

Теорема 4.16, которая доказывается ниже, оказывается особенно полезной в случае, когда кольцо $R/J(R)$ просто.

Теорема 4.16. *Пусть T — полугруппа, а $R_i = \bigoplus_{t\in T} R_i^{(t)}$, где $i = 1, 2$, — T-градуированно простые кольца, $R_i \neq J(R_i)$. Если существует изоморфизм колец $\bar\varphi\colon R_1/J(R_1) \overset{\sim}{\to} R_2/J(R_2)$ такой, что $\bar\varphi\left(\pi_1\left(R_1^{(t)}\right)\right) = \pi_2\left(R_2^{(t)}\right)$ для всех $t \in T$, где $\pi_i\colon R_i \twoheadrightarrow R_i/J(R_i)$, $i = 1, 2$, — естественные сюръективные гомоморфизмы, тогда существует изоморфизм $\varphi\colon R_1 \overset{\sim}{\to} R_2$ градуированных колец такой, что $\pi_2\varphi = \bar\varphi\pi_1$.*

Обратно, если $\varphi\colon R_1 \overset{\sim}{\to} R_2$ — изоморфизм градуированных колец, мы всегда можем определить изоморфизм колец $\bar\varphi\colon R_1/J(R_1) \overset{\sim}{\to} R_2/J(R_2)$ при помощи равенств $\bar\varphi(\pi_1(a)) = \pi_2\varphi(a)$ для всех $a \in R_1$. При этом $\bar\varphi\left(\pi_1\left(R_1^{(t)}\right)\right) = \pi_2\left(R_2^{(t)}\right)$ для любого $t \in T$.

Доказательство. Предположим, что существует изоморфизм $\bar\varphi$. Из леммы 4.15 следует, что
$$\pi_i\big|_{R_i^{(t)}}\colon R_i^{(t)} \to \pi_i\left(R_i^{(t)}\right)$$
является изоморфизмом аддитивных групп для любого $t \in T$ и $i = 1, 2$. Определим $\varphi\colon R_1 \to R_2$ по формуле
$$\varphi(r) := \left(\pi_2\big|_{R_2^{(t)}}\right)^{-1} \bar\varphi\pi_1(r) \text{ при } r \in R_1^{(t)} \text{ и } t \in T,$$
продолжив этот гомоморфизм по аддитивности. Ясно, что $\varphi\left(R_1^{(t)}\right) = R_2^{(t)}$ и φ — градуированный сюръективный гомоморфизм аддитивных групп. Более того, справедливо равенство $\pi_2\varphi = \bar\varphi\pi_1$.

Предположим, что $\varphi\left(\sum_{t\in T} r^{(t)}\right) = 0$ для некоторых $r^{(t)} \in R_1^{(t)}$, где $t \in T$. Поскольку гомоморфизм φ градуированный, $\varphi\left(r^{(t)}\right) = 0$ для всех $t \in T$. Отсюда $\pi_1\left(r^{(t)}\right) = 0$ и $r^{(t)} = 0$, так как согласно лемме 4.15 для каждого $t \in T$ справедливо равенство $R_1^{(t)} \cap J(R_1) = 0$. Следовательно, φ — биекция.

Докажем теперь, что φ — изоморфизм колец. Для этого достаточно показать, что φ сохраняет умножение. Пусть $r^{(s)} \in R_1^{(s)}$ и $r^{(t)} \in R_1^{(t)}$. Тогда
$$\pi_2\varphi\left(r^{(s)}r^{(t)}\right) = \bar\varphi\pi_1\left(r^{(s)}r^{(t)}\right) = \bar\varphi\pi_1\left(r^{(s)}\right)\bar\varphi\pi_1\left(r^{(t)}\right) = \pi_2\left(\varphi\left(r^{(s)}\right)\varphi\left(r^{(t)}\right)\right).$$
Поскольку и $\varphi\left(r^{(s)}r^{(t)}\right)$, и $\varphi\left(r^{(s)}\right)\varphi\left(r^{(t)}\right)$ принадлежат одной и той же компоненте $R_2^{(st)}$, а $\pi_2\big|_{R_2^{(st)}}$ — изоморфизм, получаем отсюда, что
$$\varphi\left(r^{(s)}r^{(t)}\right) = \varphi\left(r^{(s)}\right)\varphi\left(r^{(t)}\right) \text{ для всех } r^{(s)} \in R_1^{(s)} \text{ и } r^{(t)} \in R_1^{(t)},$$
и первое утверждение доказано.

Второе утверждение очевидно, поскольку радикал Джекобсона под действием изоморфизма переходит в радикал Джекобсона. $\square$

Замечание 4.17. Очевидно, что теорема 4.16 справедлива не только для радикала Джекобсона, но и для любого радикала. (См. общее определение, например, в [21, глава IV, §6] или в [77, §4.5].)

4.5 Односторонние идеалы матричных алгебр

В данном параграфе доказываются утверждения, которые будут затем использованы при работе с конечномерными градуированно простыми алгебрами.

Лемма 4.18. *Пусть F — поле, а $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим естественное $M_k(F)$-действие на арифметическом векторном пространстве F^k линейными операторами. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между левыми идеалами I алгебры $M_k(F)$ и подпространствами $W \subseteq F^k$ такими, что*

$$I = \operatorname{Ann} W := \{a \in M_k(F) \mid aW = 0\}, \qquad W = \bigcap_{a \in I} \ker a \tag{4.1}$$

и $\dim I = k(k - \dim W)$. Кроме того, если $I_1 = \operatorname{Ann} W_1$ и $I_2 = \operatorname{Ann} W_2$, то $I_1 + I_2 = \operatorname{Ann}(W_1 \cap W_2)$ и $I_1 \cap I_2 = \operatorname{Ann}(W_1 + W_2)$.

Доказательство. Пусть W — подпространство пространства F^k. Выберем некоторый базис $w_{k+1-\dim W}, \ldots, w_k$ в W, а также такие элементы $w_1, \ldots, w_{k-\dim W} \in F^k$, что $w_1, \ldots, w_k$ является базисом в F^k. Тогда $\operatorname{Ann} W$ состоит из всех таких операторов $a \in M_k(F)$, последние $\dim W$ столбцов матриц которых в базисе $w_1, \ldots, w_k$ состоят из нулей. Заметим, что $\bigcap_{a \in \operatorname{Ann} W} \ker a = W$ и $\dim \operatorname{Ann} W = k(k - \dim W)$.

Пусть $I \subseteq M_k(F)$ — левый идеал. Поскольку I — левый идеал в полупростой артиновой алгебре $M_k(F)$, в силу теоремы 1.4.2 из [26] существует такой идемпотент $e \in I$, что $I = M_k(F)e$. Отсюда $I(\ker e) = 0$. Заметим, что e действует на пространстве F^k как проектор. Следовательно, $F^k = \ker e \oplus \operatorname{im} e$. Выберем в F^k базис, который является объединением базисов пространств $\operatorname{im} e$ и $\ker e$. Тогда оператор e имеет в этом базисе матрицу $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, и левый идеал I состоит из всех операторов с нулевыми последними $\dim \ker e$ столбцами. Следовательно, $\bigcap_{a \in I} \ker a = \ker e$ и $\operatorname{Ann} \ker e = I$. Теперь из первого абзаца доказательства получаем, что (4.1) действительно является взаимно однозначным соответствием.

Предположим, что $I_1 = \operatorname{Ann} W_1$ и $I_2 = \operatorname{Ann} W_2$. Тогда

$$I_1 \cap I_2 = \operatorname{Ann} W_1 \cap \operatorname{Ann} W_2 = \operatorname{Ann}(W_1 + W_2).$$

Более того, $(I_1 + I_2)(W_1 \cap W_2) = 0$ и $I_1 + I_2 \subseteq \operatorname{Ann}(W_1 \cap W_2)$. Теперь утверждение леммы следует из равенств

$$\begin{aligned} \dim(I_1 + I_2) = \dim I_1 + \dim I_2 - \dim(I_1 \cap I_2) = \\ = k(2k - \dim W_1 - \dim W_2) - k(k - \dim(W_1 + W_2)) = \\ = k(k - (\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2))) = \dim \operatorname{Ann}(W_1 \cap W_2). \end{aligned}$$

□

Теорема 4.19. *Пусть $k, s \in \mathbb{N}$, F — поле и заданы такие левые идеалы I_i алгебры $M_k(F)$, что $M_k(F) = \bigoplus_{i=1}^s I_i$, причём $\dim I_i = n_i k$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует такая матрица $P \in \mathrm{GL}_k(F)$, что левый идеал $P^{-1} I_i P$ состоит из всех матриц $(\alpha_{k\ell})$, у которых $\alpha_{k\ell} = 0$ при $\ell \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} n_j$ и при $\ell > \sum_{j=1}^{i} n_j$.*

Доказательство. Рассмотрим стандартное действие алгебры $M_k(F)$ на арифметическом векторном пространстве F^k. В силу леммы 4.18 для некоторого $V_i \subseteq F^k$ справедливо равенство $I_i = \operatorname{Ann} V_i$. Применяя двойственность из леммы 4.18 к $M_k(F) = \bigoplus_{i=1}^s I_i$, получаем, что $\bigcap_{i=1}^s V_i = 0$ и

$$V_i + \bigcap_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{s} V_j = F^k \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Введём обозначение $W_i := \bigcap\limits_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{s} V_j$. Тогда

$$F^k = V_i \oplus W_i. \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ann} W_i = \bigoplus_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{s} I_j.$$

Поскольку $\bigcap\limits_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{s} \operatorname{Ann} W_j = I_i$, получаем, что $V_i = \sum\limits_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{s} W_j$ и $F^k = \sum\limits_{j=1}^{s} W_j$. В силу (4.2) сумма $F^k = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} W_j$ прямая.

Теперь выберем в F^k базис, который является объединением базисов в W_i. Обозначим через $P \in \mathrm{GL}_k(F)$ матрицу перехода от стандартного базиса в F^k к данному базису. Тогда каждый идеал $P^{-1} I_i P$ состоит из всех матриц, у которых все столбцы нулевые, за исключением, быть может, тех столбцов, которые соответствуют подпространству W_i. □

Лемма 4.20. *Пусть I — минимальный левый идеал алгебры $M_k(F)$, где $k \in \mathbb{N}$, а F — некоторое поле. Тогда существуют такие фиксированные элементы $\mu_j \in F$, где $1 \leqslant j \leqslant k$, что* $I = \left\langle \sum\limits_{j=1}^{k} \mu_j e_{ij} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant k \right\rangle_F$.

Доказательство. Пусть $a = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \mu_{ij} e_{ij} \in I \backslash \{0\}$. В силу того, что $\sum_{\ell=1}^k e_{\ell\ell} a = a$, справедливо равенство $e_{\ell\ell} a \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Обозначим $\mu_j := \mu_{\ell j}$ для всех $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда

$$\langle e_{i\ell} a \mid 1 \leqslant i \leqslant k \rangle_F = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \mu_j e_{ij} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant k \right\rangle_F$$

является ненулевым левым идеалом, содержащимся в I. Теперь утверждение леммы следует из минимальности левого идеала I. □

Лемма 4.21. *Пусть D — конечномерная алгебра с делением над полем F, а $k \in \mathbb{N}$. Пусть I и V — соответственно, левый и правый идеалы алгебры $M_k(D)$. Тогда $\dim_F(VI) = \frac{\dim_F V \dim_F I}{k^2 \dim D}$.*

Доказательство. Заметим, что

$$I \cong \underbrace{M_k(D)e_{11} \oplus \ldots \oplus M_k(D)e_{11}}_{\dim_F I/(k \dim_F D)} \quad \text{и} \quad V \cong \underbrace{e_{11}M_k(D) \oplus \ldots \oplus e_{11}M_k(D)}_{\dim_F V/(k \dim_F D)}$$

как, соответственно, левый и правый $M_k(D)$-модули. Следовательно

$$\dim_F(VI) = \frac{\dim_F I}{k \dim_F D} \dim_F(VM_k(D)e_{11}) =$$
$$= \frac{\dim_F V \dim_F I}{k^2 (\dim_F D)^2} \dim_F(e_{11}M_k(D)e_{11}) = \frac{\dim_F V \dim_F I}{k^2 \dim D}.$$

□

4.6 Структура градуированно простых алгебр

В данном параграфе через A обозначается некоторая T-градуированная алгебра над полем F, где $T = \mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P)$ — произвольная конечная 0-простая полугруппа с тривиальными максимальными подгруппами.

Обозначим однородную компоненту алгебры A, отвечающую элементу (e, i, j), через A_{ij}. Тогда

$$A = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} A_{ij}$$

и

$$A_{ij} A_{k\ell} \subseteq A_{i\ell}.$$

В частности, любая однородная компонента A_{ij} является подалгеброй алгебры A. Пусть $P = (p_{jk})_{j,k}$. Тогда $A_{ij}A_{k\ell} = 0$ для всех таких $1 \leqslant i, k \leqslant m$ и $1 \leqslant j, \ell \leqslant n$, что $p_{jk} = 0$.

Заметим, что A — $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P)$-градуированно простая алгебра для некоторой матрицы P, если и только если A — $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P')$–градуированно простая алгебра для матрицы P', все элементы которой равны e.

Сделаем несколько предварительных замечаний:

Лемма 4.22. *В произвольной T-градуированно простой алгебре A выполнены следующие свойства:*

1. *$A_{ij} \cap J(A) = 0$ для всех i, j;*

2. *если $I \subseteq A$ — произвольное подмножество, то подмножество AIA является градуированным идеалом, откуда AIA равно либо 0, либо A;*

3. *$AJ(A)A = 0$.*

Доказательство. Предложение 1 является непосредственным следствием леммы 4.15. Предложение 2 очевидно, а предложение 3 немедленно следует из предложения 2. $\square$

Определим левые идеалы $L_j := \bigoplus_{k=1}^m A_{kj}$ и правые идеалы $R_i := \bigoplus_{k=1}^n A_{ik}$. Тогда $L_j \cap R_i = A_{ij}$.

Следующая теорема является градуированной версией теоремы Веддербёрна — Мальцева. В ней доказывается существование ортогональных столбцовых и строчных идемпотентов, которые задают полупростое дополнение к радикалу. Этот результат — первый шаг в классификации T-градуированно простых алгебр.

Теорема 4.23. *Пусть $A = \bigoplus_{i,j} A_{ij}$ — конечномерная T-градуированная алгебра над полем F такая, что $AJ(A)A = 0$. Тогда существуют такие ортогональные идемпотенты $f_1, \ldots, f_n$ и такие ортогональные идемпотенты $f'_1, \ldots, f'_m$ (некоторые из них могут быть нулевыми), что*

$$B = \bigoplus_{i,j} f'_i A f_j = \bigoplus_{i,j} (B \cap A_{ij})$$

— T-градуированная максимальная полупростая подалгебра алгебры A, $f'_i \in B \cap R_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $f_j \in B \cap L_j$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{i=1}^m f'_i = \sum_{j=1}^n f_j = 1_B$ и $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма подпространств).

Доказательство. Через $\bar{X}$ мы будем обозначать образ подмножества X алгебры A в факторалгебре $A/J(A)$ под действием естественного сюръективного гомоморфизма $A \to A/J(A)$.

Заметим, что $\bar{A} = \sum_{j=1}^n \bar{L}_j$. Поскольку алгебра $\bar{A} = A/J(A)$ полупроста и вполне приводима как левый $A/J(A)$-модуль, существуют левые идеалы $\tilde{L}_i \subseteq \bar{L}_i$, которые дополняют $\bar{L}_i \bigcap \sum\limits_{j=1}^{i-1} \bar{L}_j$ до $\bar{L}_i$. Ясно, что $\bar{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \tilde{L}_i$. Компоненты $\bar{\omega}_i \in \tilde{L}_i$ разложения $1_{\bar{A}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\omega}_i$ единицы алгебры $\bar{A}$ являются ортогональными идемпотентами. Идемпотенты $\bar{\omega}_i$ являются образами некоторых идемпотентов $\omega_i \in L_i$ алгебры A под действием естественных сюръективных гомоморфизмов $\pi\big|_{L_i} \colon L_i \to L_i / L_i \cap J(A)$, поскольку идеал $J(A)$ нильпотентен. Идемпотенты $\omega_1, \ldots, \omega_m$ также ортогональны, так как $\omega_i \omega_j = \omega_i (\omega_i \omega_j) \omega_j \in AJ(A)A = 0$.

Аналогичным образом получаем такие ортогональные идемпотенты $\omega'_1, \ldots, \omega'_m \in A$, где $\omega'_i \in R_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, что $\sum_{i=1}^m \bar{f}'_i = 1_{\bar{A}}$. Пусть теперь $B := \bigoplus\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \omega'_i A \omega_j$. Заметим, что $\omega'_i A \omega_j \subseteq L_j \cap R_i = A_{ij}$, т.е. B является T-градуированной подалгеброй алгебры A. Пусть $a = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \omega'_i a_{ij} \omega_j \in J(A)$ для некоторых $a_{ij} \in A$. Тогда из $AJ(A)A = 0$ следует, что $\omega'_i a_{ij} \omega_j = \omega'_i a \omega_j = 0$ для всех i, j. Отсюда $a = 0$ и $J(A) \cap B = 0$. Более того, $\bar{B} = 1_{\bar{A}} \bar{A} 1_{\bar{A}} = \bar{A}$. Следовательно, B — T-градуированная максимальная полупростая подалгебра алгебры A и $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма подпространств).

Раскладывая 1_B по левым идеалам $\bigoplus_{i=1}^n \omega'_i A \omega_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, и по правым идеалам $\bigoplus_{j=1}^m \omega'_i A \omega_j$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, получаем такие ортогональные идемпотенты $f_i \in B \cap L_i$, где

$1 \leqslant i \leqslant m$, и ортогональные идемпотенты $f'_j \in B \cap R_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, что

$$\sum_{i=1}^{m} f'_i = \sum_{j=1}^{n} f_j = 1_B.$$

При этом

$$B = 1_B B 1_B = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m,\\ 1 \leqslant j \leqslant n}} f'_i B f_j = \bigoplus_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m,\\ 1 \leqslant j \leqslant n}} f'_i A f_j,$$

поскольку $A = B \oplus J(A)$ и $AJ(A)A = 0$. □

Пример 4.24 показывает, что градуировки на разных подалгебрах B из теоремы 4.23 могут быть неэквивалентны.

Пример 4.24. Пусть F — поле, I — левый $M_2(F)$-модуль, изоморфный $\langle e_{12}, e_{22} \rangle_F$, а $\varphi \colon I \xrightarrow{\sim} \langle e_{12}, e_{22} \rangle_F$ — соответствующий изоморфизм. Пусть $A = M_2(F) \oplus I$ (прямая сумма $M_2(F)$-модулей), где $IM_2(F) = I^2 = 0$. Зададим на A следующую Q_3-градуировку: $A^{(e_1)} = (M_2(F), 0)$ и $A^{(e_2)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in I\}$. Тогда алгебра A является Q_3-градуированно простой и обе алгебры $B_1 = A^{(e_1)}$ и $B_2 = \langle (e_{11}, 0), (e_{21}, 0) \rangle_F \oplus A^{(e_2)}$ являются градуированными максимальными полупростыми подалгебрами алгебры A. Однако градуировки на B_1 и B_2 неэквивалентны. Тем более B_1 и B_2 неизоморфны как градуированные алгебры.

Построим теперь пример конечномерной T-градуированной алгебры, которая не является градуированно простой и у которой не существует T-градуированных максимальных полупростых подалгебр, которые дополняют радикал до всей алгебры. Из этого примера будет видно, что условие $AJ(A)A = 0$ в теореме 4.23 является существенным.

Пример 4.25. Пусть $R = F[X]/(X^2)$, а $A = M_2(R)$. Положим

$$v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), w_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & X \end{smallmatrix}\right), w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Рассмотрим следующие F-подпространства в A:

$$A_{11} = Rv_1w_1 = R\left(\begin{smallmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad A_{12} = Rv_1w_2 = R\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

$$A_{21} = Rv_2w_1 = R\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & X \end{smallmatrix}\right), \quad A_{22} = Rv_2w_2 = R\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Тогда разложение

$$A = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22}$$

является T-градуировкой, где $T = \mathcal{M}\left(\{e\}^0, 2, 2, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$. При этом в A не существует T-градуированной максимальной полупростой подалгебры B такой, что $A = B \oplus J(A)$.

Доказательство. Сперва заметим, что разложение $A = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22}$ действительно является T-градуировкой, поскольку $(a\, v_i w_j)(b\, v_\ell w_k) = ab(w_j v_\ell)\, v_i w_k$ для всех $a, b \in R$ и $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant 2$, а $w_j v_\ell$ — матрица размера 1×1, которая может быть отождествлена с соответствующим элементом поля F.

Ясно, что $J(A) = \left(\begin{smallmatrix} (X) & (X) \\ (X) & (X) \end{smallmatrix}\right)$ и $A/J(A) \cong M_2(F)$. При этом $\left(\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = X\left(\begin{smallmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in A_{11}$ и $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{smallmatrix}\right) = X\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & X \end{smallmatrix}\right) \in A_{21}$, т.е. радикал Джекобсона $J(A)$ является градуированным идеалом, а $A/J(A) \cong M_2(F)$ — градуированной алгеброй.

Предположим, что существует такая T-градуированно простая максимальная подалгебра $B = \bigoplus_{1\leqslant i,j\leqslant 2} B_{ij}$, что $A = B \oplus J(A)$ и $B_{ij} \subseteq A_{ij}$. Тогда ограничение на B естественного сюръективного гомоморфизма $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J(A)$ является градуированным изоморфизмом алгебр B и $A/J(A)$. В частности, $B_{ii} = \langle b_{ii}\rangle_F$, где $\pi(b_{ii}) = e_{ii}$ при $i = 1, 2$. Следовательно, $b_{11} = (1 + \alpha X)\left(\begin{smallmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ для некоторого $\alpha \in F$, а $b_{22} = (1 + \beta X)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ для некоторого $\beta \in F$. Тогда

$$b_{11}b_{22} = (1 + (\alpha + \beta)X)\left(\begin{smallmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in J(A),$$

и мы получаем противоречие. □

Теорема 4.23 описывает полупростую часть T-градуированно простой алгебры. Ниже изучается строение радикала, что завершает исследование всей T-градуированно простой алгебры. В §4.7 будет показано, что полученное описание действительно является полной классификацией T-градуированно простых алгебр.

Для любого $r \in A$ будем обозначать элемент $x - xr$ (соответственно, $x - rx$) через $x(1-r)$ (соответственно, через $(1-r)x$). Если алгебра A без единицы, под символом 1 можно понимать присоединённую единицу алгебры $A^+ := F1 \oplus A$.

Лемма 4.26. *Пусть A — конечномерная T-градуированно простая алгебра, а $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма подпространств) — разложение из теоремы 4.23. Тогда выполняются следующие свойства:*

1. $J(A)^2 A = AJ(A)^2 = 0$;
2. *B — простая подалгебра;*
3. $A = A1_B A$;
4. $J(A) = (1 - 1_B)A1_B \oplus 1_B A(1 - 1_B) \oplus J(A)^2$ *(прямая сумма подпространств);*
5. $J(A)^2 = (1 - 1_B)A1_B A(1 - 1_B) = (1 - 1_B)A(1 - 1_B)$.

Доказательство. Предложение 3 является немедленно следует из предложения 2 леммы 4.22.

Пусть f — примитивный центральный идемпотент алгебры B. Тогда $A = AfA$ и в силу предложения 3 леммы 4.22

$$B = 1_B(B \oplus J(A))1_B = 1_B A1_B = 1_B AfA1_B = 1_B A1_B f1_B A1_B = BfB = Bf = fB.$$

Следовательно, $f = 1_B$. Отсюда алгебра B проста, и мы получаем предложение 2.

Заметим, что $A(1 - 1_B)$, $(1 - 1_B)A \subseteq J(A)$, так как оба подпространства переходят в нуль при естественном сюръективном гомоморфизме $A \twoheadrightarrow A/J(A)$. Используя равенство $B = 1_B A1_B$ и разложение Пирса по отношению к идемпотенту 1_B, получаем

$$J(A) = (1 - 1_B)A1_B \oplus 1_B A(1 - 1_B) \oplus (1 - 1_B)A(1 - 1_B) \text{ (прямая сумма подпространств).}$$

Из предложения 3 теперь следует, что

$$(1-1_B)A(1-1_B)=(1-1_B)A1_BA(1-1_B)\subseteq J(A)^2.$$

Отсюда

$$(1-1_B)A(1-1_B)J(A),\quad J(A)(1-1_B)A(1-1_B)\subseteq J(A)^3=0.$$

Поскольку

$$A(1-1_B)A=A1_BA(1-1_B)A\subseteq AJ(A)A=0,$$

получаем, что $J(A)^2\subseteq(1-1_B)A(1-1_B)$, откуда и следуют предложения 1, 4 и 5. □

Заметим, что если матрица в определении полугруппы T состоит всего лишь из одной строки, все A_{1j} являются левыми идеалами, откуда $a-1_Ba\subseteq J(A)\cap A_{1j}=0$ для всех $a\in A_{1j}$ и $1\leqslant j\leqslant n$. В этом случае элемент 1_B действует как левая единица на радикале $J(A)$.

Докажем теперь, что справедливость условия 1 леммы 4.22 и условия 2 леммы 4.26 вместе с равенством $A^2=A$ эквивалентны градуированной T-простоте.

Предложение 4.27. *Предположим, что основное поле F совершенно, конечномерная алгебра $A/J(A)$ проста, $A^2=A$ и $A_{ij}\cap J(A)=0$ для всех $1\leqslant i\leqslant m$ и $1\leqslant j\leqslant n$. Тогда алгебра A является T-градуированно простой.*

Доказательство. Пусть I — ненулевой двухсторонний градуированный идеал алгебры A. Обозначим через $\pi\colon A\twoheadrightarrow A/J(A)$ естественный сюръективный гомоморфизм. Тогда $\pi(I)\neq 0$. Поскольку алгебра $A/J(A)$ проста, справедливы $\pi(I)=A/J(A)$ и $A=I+J(A)$. В силу обычной теоремы Веддербёрна — Мальцева существует максимальная полупростая подалгебра $B\subseteq I$ такая, что $I=B\oplus J(I)$ (прямая сумма подпространств). Напомним, что $J(I)=J(A)\cap I$. Отсюда $A=B\oplus J(A)$ и $\pi(A(1-1_B)A)=0$. Следовательно, $A(1-1_B)A\subseteq J(A)$. Поскольку идеал $A(1-1_B)A$ градуированный, получаем $A(1-1_B)A=0$ и $ab=a1_Bb\in I$ для всех $a,b\in A$. Отсюда $A=A^2\subseteq I$ и $I=A$. □

Из леммы 4.26 следует, что

$$J(A)=1_BA(1-1_B)\oplus(1-1_B)A1_B\oplus J(A)^2=\sum_{j=1}^{n}1_BL_j(1-1_B)\oplus\sum_{i=1}^{m}(1-1_B)R_i1_B\oplus J(A)^2.$$

Для $1\leqslant i\leqslant m$ и $1\leqslant j\leqslant n$ положим

$$J_{ij}^{10}:=f_i'L_j(1-1_B)\quad\text{и}\quad J_{ij}^{01}:=(1-1_B)R_if_j.$$

Кроме того, введём обозначение

$$J_{*j}^{10}:=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m}J_{ij}^{10}=1_BL_j(1-1_B)\quad\text{и}\quad J_{i*}^{01}:=\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant n}J_{ij}^{01}=(1-1_B)R_i1_B.$$

(Суммы являются прямыми в силу ортогональности соответствующих идемпотентов.)

Ясно, что каждое подпространство J_{*j}^{10} является левым B-подмодулем радикала $J(A)$, а каждое каждое подпространство J_{i*}^{01} является правым B-подмодулем радикала $J(A)$.

Покажем, что подмодули J^{01}_{i*} и J^{10}_{*j} являются компонентами, из которых строится радикал Джекобсона $J(A)$. Для начала определим отображение φ из этих подмодулей в B, которое, как мы увидим ниже в теореме 4.28, будет биективным отображением каждого из подмодулей на соответствующий односторонний идеал алгебры B.

Для всякого элемента $a \in J^{01}_{ij}$ или $a \in J^{10}_{ij}$ обозначим через $\varphi(a)$ проекцию на B с ядром $J(A)$ однородной A_{ij}-компоненты элемента a. Иными словами,

$$a = (\varphi(a) + v) + w, \quad \text{где } \varphi(a) \in B,\ v \in J(A),\ \varphi(a) + v \in A_{ij},\ w \in \bigoplus_{\substack{r\neq i \\ \text{или} \\ \ell\neq j}} A_{r\ell}.$$

Теорема 4.28. *Пусть A — конечномерная T-градуированно простая алгебра над полем F, а B и $f_1,\dots,f_m$, $f'_1,\dots,f'_n$ — соответственно, градуированная подалгебра и системы ортогональных идемпотентов из теоремы 4.23. Тогда*

$$J(A) = \bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j} \oplus J(A)^2 \quad \text{и} \quad J(A)^2 = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n} J^{01}_{i*} J^{10}_{*j}$$

(прямые суммы подпространств), а если продолжить отображение φ по F-линейности до отображения $\bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j} \to B$, то оказывается, что $\varphi\big|_{\bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j}}$ — гомоморфизм левых B-модулей,

$$J^{10}_{*j} \cap \ker\varphi = 0, \qquad \varphi(J^{10}_{*j}) \cap Bf_j = \varphi(J^{10}_{*j})f_j = 0 \quad \text{для всех } 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4.3}$$

$\varphi\big|_{\bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*}}$ — гомоморфизм правых B-модулей,

$$J^{01}_{i*} \cap \ker\varphi = 0, \qquad \varphi(J^{01}_{i*}) \cap f'_i B = f'_i\varphi(J^{01}_{i*}) = 0 \quad \text{для всех } 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.4}$$

Более того,

$$\begin{aligned} A_{ij} = f'_i B f_j \oplus \left\{\varphi(v) + v \mid v \in J^{10}_{ij} \oplus J^{01}_{ij}\right\} \oplus \\ \oplus \left\langle \varphi(v)\varphi(w) + v\varphi(w) + \varphi(v)w + vw \mid v \in J^{01}_{i*},\ w \in J^{10}_{*j}\right\rangle_F \end{aligned} \tag{4.5}$$

(прямая сумма подпространств) для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если $s \in \mathbb{N}$, $v_\ell \in J^{01}_{i*}$ и $w_\ell \in J^{10}_{*j}$ для всех $1 \leqslant \ell \leqslant s$, то $\sum_{\ell=1}^{s} v_\ell w_\ell = 0$, если только если $\sum_{\ell=1}^{s} \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) = 0$.

Наконец, $B \cong M_k(D)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и алгебры с делением D, причём

$$\dim_F \bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*} \leqslant (m-1)\dim_F B = (m-1)k^2 \dim_F D, \tag{4.6}$$

$$\dim_F \bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j} \leqslant (n-1)\dim_F B = (n-1)k^2 \dim_F D, \tag{4.7}$$

$$\dim_F J(A) \leqslant (nm-1)\dim_F B = (|T|-1)\dim_F B = (|T|-1)k^2 \dim_F D. \tag{4.8}$$

Доказательство. В силу леммы 4.26

$$J(A) = 1_B A(1-1_B) \oplus (1-1_B)A1_B \oplus J(A)^2 = \sum_{j=1}^{n} 1_B L_j (1-1_B) \oplus \sum_{i=1}^{m} (1-1_B) R_i 1_B \oplus J(A)^2.$$

Заметим, что если $\sum_{j=1}^n 1_B a_j(1-1_B)=0$ для некоторых $a_j\in L_j$, то $\sum_{j=1}^n 1_B a_j 1_B=\sum_{j=1}^n 1_B a_j$. Так как $1_B A 1_B = B$ является градуированной подалгеброй, получаем, что $1_B a_j \in B\cap L_j$, $1_B a_j 1_B = 1_B a_j$ и все $1_B a_j(1-1_B)=0$. Следовательно, сумма $\bigoplus_{j=1}^n 1_B L_j(1-1_B)$ является прямой. Аналогично, прямой является и сумма $\bigoplus_{i=1}^m (1-1_B)R_i 1_B$, причём

$$J(A)=\bigoplus_{j=1}^n 1_B L_j(1-1_B)\oplus\bigoplus_{i=1}^m (1-1_B)R_i 1_B\oplus J(A)^2=\bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j}\oplus\bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*}\oplus J(A)^2.$$

Используя предложение 5 из леммы 4.26, получаем

$$J(A)^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n (1-1_B)R_i 1_B 1_B L_j(1-1_B)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n J^{01}_{i*}J^{10}_{*j}. \tag{4.9}$$

Докажем теперь формулы

$$\varphi(a(1-1_B))=a(1_B-f_j)\text{ для всех } a\in 1_B L_j \tag{4.10}$$

и

$$\varphi((1-1_B)a)=(1_B-f'_i)a\text{ для всех } a\in R_i 1_B. \tag{4.11}$$

Из формул (4.10) и (4.11) будет немедленно следовать, что $\varphi\big|_{\bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j}}$ — гомоморфизм левых B-модулей, а $\varphi\big|_{\bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*}}$ — гомоморфизм правых B-модулей.

В силу линейности по a достаточно доказать формулу (4.10) для любого $a\in f'_i L_j$, а формулу (4.11) — для любого $a\in R_i f_j$.

Итак, пусть для определённости $a\in f'_i L_j$. Тогда $a-af_j\in A_{ij}$, $a(1_B-f_j)\in B$, $a(1-1_B)\in J(A)$, $\sum\limits_{\ell\ne j} af_\ell\in\bigoplus\limits_{\ell\ne j} A_{i\ell}$. Таким образом,

$$a(1-1_B)=(a-af_j)-\sum_{\ell\ne j} af_\ell=\big(a(1_B-f_j)+a(1-1_B)\big)-\sum_{\ell\ne j} af_\ell$$

и формула (4.10) доказана. Формула (4.11) доказывается аналогично.

Предположим, что $\varphi(1_B a(1-1_B))=0$ для некоторого $a\in L_j$. В силу (4.10) это означает, что $1_B a(1_B-f_j)=0$, т.е. $1_B af_j=1_B a 1_B$ и $f'_i af_j=f'_i a 1_B$ для всех $1\leqslant i\leqslant m$. Отсюда

$$f'_i a(1-1_B)=f'_i a-f'_i af_j\in A_{ij}\cap J(A)=0.$$

Следовательно, $1_B a(1-1_B)=0$ и

$$1_B L_j(1-1_B)\cap\ker\varphi=J^{10}_{*j}\cap\ker\varphi=0.$$

Аналогично,

$$(1-1_B)R_i 1_B\cap\ker\varphi=J^{01}_{i*}\cap\ker\varphi=0.$$

Более того,

$$\varphi(J^{10}_{*j})\cap Bf_j=\varphi(1_B L_j(1-1_B))\cap Bf_j\subseteq\varphi(1_B L_j(1-1_B))f_j=1_B L_j(1_B-f_j)f_j=0$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, и равенство (4.3) доказано. Аналогично,

$$\varphi(J^{01}_{i*}) \cap f'_i B = \varphi((1-1_B)R_i 1_B) \cap f'_i B \subseteq f'_i \varphi((1-1_B)R_i 1_B) = f'_i(1_B - f'_i)R_i 1_B = 0$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, и равенство (4.4) также доказано.

В силу предложения 2 леммы 4.26 существует изоморфизм $B \cong M_k(D)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и алгебры с делением D. Отсюда

$$\begin{gathered}\dim_F \bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*} = \sum_{i=1}^{m} \dim_F \varphi(J^{01}_{i*}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (\dim_F B - \dim_F f'_i B) = \\ = (m-1)\dim_F B = (m-1)k^2 \dim_F D\end{gathered}$$

и равенство (4.6) доказано. Равенство (4.7) доказывается аналогично.

Докажем теперь равенство (4.5). Пусть

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{ij} = \left(f'_i B f_j \oplus \left\{\varphi(v) + v \mid v \in J^{10}_{ij} \oplus J^{01}_{ij}\right\}\right) + \\ + \left\langle \varphi(v)\varphi(w) + v\varphi(w) + \varphi(v)w + vw \mid v \in J^{01}_{i*},\ w \in J^{10}_{*j} \right\rangle_F.\end{gathered}$$

Сперва покажем, что $\tilde{A}_{ij} = A_{ij}$. Для этого заметим, что если $a \in f'_i L_j$, то

$$\varphi(a(1-1_B)) + a(1-1_B) = a(1_B - f_j) + a(1-1_B) = a - af_j \in A_{ij}.$$

Следовательно, $\varphi(w)+w \in A_{ij}$ для всех $w \in J^{10}_{ij}$. Аналогично, $\varphi(v)+v \in A_{ij}$ для всех $v \in J^{01}_{ij}$. Отсюда $\tilde{A}_{ij} \subseteq A_{ij}$.

Очевидно, что

$$1_B \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}\right) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}$$

и

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}\right) 1_B \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}.$$

Отсюда в силу леммы 4.26 справедливы равенства

$$1_B \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}\right) (1-1_B) = \bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j}$$

и

$$(1-1_B)\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}\right) 1_B = \bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*}.$$

Следовательно,

$$\bigoplus_{i=1}^{m} J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} J^{10}_{*j} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}.$$

Кроме того, из (4.9) следует, что

$$(1-1_B)\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ij}\right)(1-1_B) = J^2(A)$$

и $J(A)^2 \subseteq \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n \tilde{A}_{ij}$. Отсюда $\bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n \tilde{A}_{ij} = A$ и $\tilde{A}_{ij} = A_{ij}$. Теперь для завершения доказательства справедливости равенства (4.5) достаточно показать, что сумма в определении пространства $\tilde{A}_{ij}$ является прямой.

Пусть $v_\ell \in J^{01}_{i*}$ и $w_\ell \in J^{10}_{*j}$, где $1 \leqslant \ell \leqslant s$, $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) = 0$. Поскольку $\varphi\big|_{\bigoplus_{j=1}^n J^{01}_{i*}}$ — гомоморфизм правых B-модулей, справедливо равенство $\varphi\left(\sum_{\ell=1}^s v_\ell \varphi(w_\ell)\right) = 0$, откуда в силу предложения 3 получаем, что $\sum_{\ell=1}^s v_\ell\varphi(w_\ell) = 0$. Аналогично, $\sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)w_\ell = 0$. Следовательно,

$$\sum_{\ell=1}^s v_\ell w_\ell = \sum_{\ell=1}^s (\varphi(v_\ell) + v_\ell)(\varphi(w_\ell) + w_\ell) \in A_{ij} \cap J(A) = 0.$$

Обратно, предположим, что $\sum_{\ell=1}^s v_\ell w_\ell = 0$ для некоторых $v_\ell \in J^{01}_{i*}$ и $w_\ell \in J^{10}_{*j}$, где $1 \leqslant \ell \leqslant s$, $s \in \mathbb{N}$. Пусть $a = \sum_{\ell=1}^s (\varphi(v_\ell) + v_\ell)(\varphi(w_\ell) + w_\ell)$,

$$b = \sum_{\ell=1}^s (\varphi(\varphi(v_\ell)w_\ell) + \varphi(v_\ell)w_\ell) + \sum_{\ell=1}^s (\varphi(v_\ell\varphi(w_\ell)) + v_\ell\varphi(w_\ell)) - \sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell).$$

Тогда $a - b = \sum_{\ell=1}^s v_\ell w_\ell = 0$. Отсюда $b = a \in A_{ij}$. Однако

$$b = \sum_{q=1}^m \sum_{\ell=1}^s (f'_q\varphi(\varphi(v_\ell)w_\ell) + f'_q\varphi(v_\ell)w_\ell) +$$
$$+ \sum_{r=1}^n \sum_{\ell=1}^s (\varphi(v_\ell\varphi(w_\ell))f_r + v_\ell\varphi(w_\ell)f_r) - \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^n \sum_{\ell=1}^s f'_q\varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell)f_r.$$

Рассматривая однородную компоненту элемента b, принадлежащую подпространству A_{ij}, т.е. слагаемое с $q = i$ и $r = j$, получаем, что $a = b = 0$, поскольку в силу (4.3) и (4.4) справедливы равенства

$$f'_i\varphi(v_\ell) = \varphi(w_\ell)f_j = 0.$$

Проектируя элемент a на B с ядром $J(A)$, получаем $\sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) = \sum_{\ell=1}^s v_\ell\varphi(w_\ell) = \sum_{\ell=1}^s \varphi(v_\ell)w_\ell = 0.$$

Теперь всё готово для того, чтобы доказать, что сумма в определении подпространства $\tilde{A}_{ij}$ прямая.

Предположим, что

$$\sum_{\ell=1}^s \left(\varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) + v_\ell\varphi(w_\ell) + \varphi(v_\ell)w_\ell + v_\ell w_\ell\right) \in$$
$$\in f'_iBf_j \oplus \left\{\varphi(v) + v \mid v \in J^{10}_{ij} \oplus J^{01}_{ij}\right\} \subseteq B \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \oplus \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*}$$

для некоторых $v_\ell \in J^{01}_{i*}$ и $w_\ell \in J^{10}_{*j}$. В силу того, что $\sum_{\ell=1}^s v_\ell w_\ell \in J(A)^2$, а

$$\sum_{\ell=1}^s \left(\varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) + v_\ell\varphi(w_\ell) + \varphi(v_\ell)w_\ell\right) \in B \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \oplus \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*},$$

справедливо равенство $\sum_{\ell=1}^{s} v_\ell w_\ell = 0$. В силу замечаний, сделанных выше,

$$\sum_{\ell=1}^{s} \varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) = \sum_{\ell=1}^{s} v_\ell \varphi(w_\ell) = \sum_{\ell=1}^{s} \varphi(v_\ell) w_\ell = 0,$$

а значит, и $\sum_{\ell=1}^{s} \left(\varphi(v_\ell)\varphi(w_\ell) + v_\ell\varphi(w_\ell) + \varphi(v_\ell)w_\ell + v_\ell w_\ell\right) = 0$.

В частности, сумма в определении подпространства $\tilde{A}_{ij}$ прямая, и равенство (4.5) доказано.

Докажем теперь, что сумма $J(A)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} J_{i*}^{01} J_{*j}^{10}$ также является прямой. Действительно, предположим, что $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 0$ для некоторых $u_{ij} \in J_{i*}^{01} J_{*j}^{10}$. В силу (4.5) существует разложение $u_{ij} = a_{ij} - v_{ij}$, где $a_{ij} \in A_{ij}$, а v_{ij} является линейной комбинацией однородных элементов из B и однородных элементов из $\left\{\varphi(v) + v \mid v \in J_{i*}^{01} \oplus J_{*j}^{10}\right\}$. Сгруппировав в $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - v_{ij}) = 0$ элементы по однородным компонентам, получаем, что всякий элемент a_{ij} является линейной комбинацией элементов из $f_i' B f_j$ и элементов из $\left\{\varphi(v) + v \mid v \in J_{ij}^{01} \oplus J_{ij}^{10}\right\}$. Отсюда

$$u_{ij} = (1 - 1_B)u_{ij}(1 - 1_B) = (1 - 1_B)(a_{ij} - v_{ij})(1 - 1_B) = 0,$$

и сумма $J(A)^2 = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n} J_{i*}^{01} J_{*j}^{10}$ действительно является прямой.

Осталось доказать только неравенство (4.8). Однако это неравенство следует из леммы 4.21 и неравенств (4.6) и (4.7):

$$\begin{aligned}
\dim_F J(A)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \dim_F J_{i*}^{01} J_{*j}^{10} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \dim_F \varphi(J_{i*}^{01})\varphi(J_{*j}^{10}) = \\
= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\dim_F \varphi(J_{i*}^{01}) \dim_F \varphi(J_{*j}^{10})}{k^2 \dim_F D} \leqslant \\
\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{(\dim_F B - \dim_F f_i' B)(\dim_F B - \dim_F B f_j)}{k^2 \dim_F D} = \\
= \frac{(\dim_F B)^2 (n-1)(m-1)}{k^2 \dim_F D} = \\
= (n-1)(m-1)\dim_F B.
\end{aligned}$$

□

4.7 Теоремы существования для градуированно простых алгебр

В теоремах 4.23 и 4.28 было получено описание T-градуированно простых алгебр A. Было показано, что для A существует разложение Веддербёрна — Мальцева $B \oplus J(A)$, в котором подалгебра B градуирована, и что $J(A)$ является, грубо говоря, прямой суммой левых и правых B-модулей, изоморфных некоторым левым и правым идеалам алгебры B, которые, кроме этого, удовлетворяют некоторым другим ограничениям. Для того, чтобы завершить классификацию, докажем теперь, что любой такой набор левых и правых идеалов конечномерной простой алгебры B задаёт T-градуированно простую алгебру A с градуированной максимальной подалгеброй B.

Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, а D — тело. Предположим, что $B \cong M_k(D)$, а $f_1, \dots, f_n \in B$ и $f'_1, \dots, f'_n \in B$ — два набора идемпотентов (некоторые из которых могут быть равны) таких, что $\sum_{i=1}^m f'_i = \sum_{j=1}^n f_j = 1_B$ и в каждом наборе идемпотенты попарно ортогональны.

Пусть $J^{10}_{*1}, \dots, J^{10}_{*m}$ и $J^{01}_{1*}, \dots, J^{01}_{n*}$ — соответственно, левые и правые B-модули такие, что существуют вложения

$$\varphi\colon J^{10}_{*j} \hookrightarrow B \quad \text{и} \quad \varphi\colon J^{01}_{i*} \hookrightarrow B,$$

которые являются гомоморфизмами, соответственно, левых и правых B-модулей, причём

$$\varphi(J^{10}_{*j}) f_j = 0 \quad \text{и} \quad f'_i \varphi(J^{01}_{i*}) = 0.$$

(Для удобства будем обозначать оба отображения одной и той же буквой φ, а также считать, что $\mathbb{Z}$-линейное отображение φ определено на аддитивной группе $\bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j}$.) Определим аддитивные группы J_{ij} как изоморфные копии групп $\varphi(J^{01}_{i*})\varphi(J^{10}_{*j}) \subseteq B$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть

$$\Theta_{ij}\colon \varphi(J^{01}_{i*})\varphi(J^{10}_{*j}) \xrightarrow{\sim} J_{ij}$$

— соответствующие изоморфизмы, а

$$\mu\colon J^{01}_{i*} \times J^{10}_{*j} \to J_{ij}$$

— $\mathbb{Z}$-билинейное отображение, заданное равенством

$$\mu(v, w) := \Theta_{ij}(\varphi(v)\varphi(w))$$

при $v \in J^{01}_{i*}$ и $w \in J^{10}_{*j}$. Продолжим μ по $\mathbb{Z}$-линейности до отображения

$$\mu\colon \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \times \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \to \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij}.$$

Обозначим через Q матрицу размера $n \times m$, в каждой клетке которой стоит формальная единица e.

Теорема 4.29. *Зададим на аддитивной группе*

$$A = B \oplus \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \oplus \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij}$$

умножение

$$(b_1, v_1, w_1, u_1)(b_2, v_2, w_2, u_2) = (b_1 b_2, v_1 b_2, b_1 w_2, \mu(v_1, w_2))$$

для всех $b_1, b_2 \in B$, $v_1, v_2 \in \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*}$, $w_1, w_2 \in \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j}$, $u_1, u_2 \in \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij}$ *и* $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; Q)$*-градуировку*

$$A_{ij} = (f'_i B f_j, 0, 0, 0) \oplus \left\{(\varphi(v), v, 0, 0) \mid v \in J^{01}_{i*} f_j\right\} \oplus \left\{(\varphi(w), 0, w, 0) \mid w \in f'_i J^{10}_{*j}\right\} \oplus$$
$$\oplus \left\langle (\varphi(v)\varphi(w), v\varphi(w), \varphi(v)w, \mu(v, w)) \mid v \in J^{01}_{i*},\ w \in J^{10}_{*j} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Тогда A является $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; Q)$-градуированно простым кольцом.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что $A = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n A_{ij}$ и что A действительно является $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; Q)$-градуированным кольцом.

Ясно, что $J(A) = (0, \bigoplus_{i=1}^m J_{i*}^{01}, \bigoplus_{j=1}^n J_{*j}^{10}, \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij})$, поскольку третья степень правой части равенства нулевая.

Заметим, что для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$

$$1_B(f_i' B f_j, 0, 0, 0)1_B = (f_i' B f_j, 0, 0, 0)\,,$$

$$1_B \left\{(\varphi(v), v, 0, 0) \mid v \in J_{i*}^{01} f_j\right\} 1_B \subseteq \left(\bigoplus_{\ell \neq i} f_\ell' B f_j, 0, 0, 0 \right),$$

$$1_B \left\{(\varphi(w), 0, w, 0) \mid w \in f_i' J_{*j}^{10}\right\} 1_B \subseteq \left(\bigoplus_{r \neq j} f_i' B f_r, 0, 0, 0 \right),$$

$$1_B \left\langle (\varphi(v)\varphi(w), v\varphi(w), \varphi(v)w, \mu(v,w)) \mid v \in J_{i*}^{01},\ w \in J_{*j}^{10} \right\rangle_{\mathbb{Z}} 1_B \subseteq \left(\bigoplus_{\substack{\ell \neq i,\\ r \neq j}} f_\ell' B f_r, 0, 0, 0 \right).$$

Таким образом, образы разных слагаемых прямой суммы из определения пространства A_{ij} лежат в разных градуированных компонентах алгебры B. Учитывая, что ограничения φ на J_{*j}^{10} и J_{i*}^{01} являются инъекциями, получаем, что если $1_B a 1_B = 0$ для некоторого $a \in A_{ij}$, то $a = 0$. Из того, что $1_B J(A) 1_B = 0$, теперь следует, что $A_{ij} \cap J(A) = 0$.

Предположим, что I — градуированный двухсторонний идеал алгебры A. Пусть $a \in I$, где $a \neq 0$, — однородный элемент. В силу вышесказанного $a = (b, u, v, w)$, где $b \neq 0$. Отсюда $(1_B, 0, 0, 0)a(1_B, 0, 0, 0) = (b, 0, 0, 0) \in I$. Поскольку кольцо B простое, справедливо включение $(B, 0, 0, 0) \subseteq I$. Тогда $(1_B, 0, 0, 0)A \subseteq I$ и $A(1_B, 0, 0, 0) \subseteq I$. Поскольку

$$A = (B, 0, 0, 0) + (1_B, 0, 0, 0)A + A(1_B, 0, 0, 0) + (1_B, 0, 0, 0)A^2(1_B, 0, 0, 0),$$

получаем, что $I = R$, т.е кольцо A градуированно простое. $\square$

В случае, когда тело D является алгеброй над полем F, все указанные модули являются модулями над F-алгеброй B, а участвующие в определении отображения F-линейны, конструкция из теоремы 4.29 приводит к T-градуированно простой алгебре. Если алгебра B конечномерна, вложение левых B-модулей $\varphi\colon J_{*j}^{10} \to \bigoplus\limits_{\substack{r=1,\\ r\neq j}}^{n} B f_r$ существует, если и только если $\dim_F J_{*j}^{10} \leqslant \dim_F B - \dim_F(B f_j)$. Вложение правых B-модулей

$$\varphi\colon J_{*i}^{01} \to \bigoplus_{\ell \neq i} f_\ell' B$$

существует, если и только если

$$\dim_F J_{i*}^{01} \leqslant \dim_F B - \dim_F(f_i' B).$$

Из теоремы 4.16 следует, что градуировка на алгебре A полностью определена образами её компонент в алгебре $A/J(A)$. Покажем теперь, что всякое такой набор образов задаёт некоторую T-градуировку.

Теорема 4.30. *Пусть D — алгебра с делением над полем F, а $B \cong M_k(D)$. Предположим, что $B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{ij}$, где B_{ij} — некоторые такие подпространства алгебры B, что $B_{ij}B_{\ell r} \subseteq B_{ir}$ для всех $1 \leqslant i, \ell \leqslant m$ и $1 \leqslant j, r \leqslant n$. Пусть $P = (p_{ij})_{i,j}$ — такая матрица размера $n \times m$, где $p_{ij} \in \{0, e\}$, что $B_{ij}B_{\ell r} = 0$ для всех (j, ℓ) с $p_{j\ell} = 0$. Тогда существует такая $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P)$-градуированно простая алгебра $A = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n A_{ij}$ и такой сюръективный гомоморфизм алгебр $\psi \colon A \to B$, что $\ker \psi = J(A)$ и $\psi(A_{ij}) = B_{ij}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $\bar{L}_j := \bigoplus_{i=1}^m B_{ij}$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ и $\bar{R}_i := \bigoplus_{j=1}^n B_{ij}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_n$ — левые идеалы, а $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_m$ — правые идеалы. Более того, поскольку алгебра $B \cong M_k(D)$ полупроста, алгебра B вполне приводима как левый и правый B-модуль. Определим $\tilde{L}_j$ как левый B-подмодуль, дополняющий $\bar{L}_j \cap \sum_{\ell=1}^{j-1} \bar{L}_\ell$ до $\bar{L}_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Аналогично, определим $\tilde{R}_i$ как правый B-подмодуль, дополняющий $\bar{R}_i \cap \sum_{\ell=1}^{i-1} \bar{R}_\ell$ до $\bar{R}_i$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $\bigoplus_{\ell=1}^i \tilde{R}_\ell = \sum_{\ell=1}^i \bar{R}_\ell$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $\bigoplus_{\ell=1}^j \tilde{L}_\ell = \sum_{\ell=1}^j \bar{L}_\ell$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$. В частности, $B = \bigoplus_{i=1}^m \tilde{R}_i = \bigoplus_{j=1}^n \tilde{L}_j$. Раскладывая 1_B в сумму элементов, соответственно, подпространств $\tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_m$ и $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_n$, получаем два множества ортогональных идемпотентов $f_1, \ldots, f_m$ и $f'_1, \ldots, f'_n$ таких, что $\tilde{L}_j = Bf_j$, $\tilde{R}_i = Bf'_i$, $\sum_{i=1}^m f'_i = \sum_{j=1}^n f_j = 1_B$.

Пусть $W^{10}_{*j} := \bar{L}_j(1_B - f_j) \subseteq \bar{L}_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $W^{01}_{i*} := (1_B - f'_i)\bar{R}_i \subseteq \bar{R}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $\bar{L}_j = \bar{L}_j f_j \oplus W^{10}_{*j}$ и $\bar{R}_i = f'_i \bar{R}_i \oplus W^{01}_{i*}$ (прямые суммы, соответственно, левых и правых идеалов). Обозначим через J^{10}_{*j} изоморфную копию модуля W^{10}_{*j}, а через J^{01}_{i*} — изоморфную копию модуля W^{01}_{i*}. Обозначим соответствующие изоморфизмы $\varphi \colon J^{10}_{*j} \xrightarrow{\sim} W^{10}_{*j}$ левых B-модулей и $\varphi \colon J^{01}_{i*} \xrightarrow{\sim} W^{01}_{i*}$ правых B-модулей одной и той же буквой φ. Теперь продолжим φ до F-линейного отображения

$$\varphi \colon \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \to \sum_{i=1}^m W^{01}_{i*} + \sum_{j=1}^n W^{10}_{*j} \subseteq B.$$

Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n A_{ij}$ — кольцо, построенное в теореме 4.29, которое в силу замечания после теоремы является алгеброй над F. Докажем, что алгебра A удовлетворяет всем условиям теоремы 4.30. Действительно, определим ψ как проекцию алгебры

$$A = B \oplus \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \oplus \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij}$$

на пространство B с ядром

$$J(A) = \bigoplus_{i=1}^m J^{01}_{i*} \oplus \bigoplus_{j=1}^n J^{10}_{*j} \oplus \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n J_{ij}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(A_{ij}) = f'_i B f'_j + \varphi(J^{01}_{i*} f_j) + \varphi(f'_i J^{10}_{*j}) + \varphi(J^{01}_{i*})\varphi(J^{10}_{*j}) = \\ = f'_i B f_j + (1 - f'_i)\bar{R}_i f_j + f'_i \bar{L}_j (1 - f_j) + (1 - f'_i)\bar{R}_i \bar{L}_j (1 - f_j) = \\ = f'_i \bar{R}_i f_j + (1 - f'_i)\bar{R}_i f_j + f'_i \bar{R}_i \bar{L}_j (1 - f_j) + (1 - f'_i)\bar{R}_i \bar{L}_j (1 - f_j) = \\ = \bar{R}_i f_j + \bar{R}_i \bar{L}_j (1 - f_j) = \bar{R}_i \bar{L}_j f_j + \bar{R}_i \bar{L}_j (1 - f_j) = \bar{R}_i \bar{L}_j. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Поскольку алгебра B полупроста, существуют идемпотенты e'_i и e_j такие, что $\bar R_i = e'_i B$ и $\bar L_j = Be_j$. Следовательно,

$$B_{ij} \subseteq \bar R_i \cap \bar L_j = e'_i B e_j = \bar R_i \bar L_j \subseteq B_{ij}, \tag{4.13}$$

откуда

$$\bar R_i \cap \bar L_j = \bar R_i \bar L_j = B_{ij}. \tag{4.14}$$

Из (4.12) и (4.14) теперь следует, что $\psi(A_{ij}) = \bar R_i \bar L_j = B_{ij}$. Более того, при $p_{j\ell} = 0$ справедливы равенства $B_{ij}B_{\ell r} = 0$, $\psi(A_{ij}A_{\ell r}) = 0$ и $A_{ij}A_{\ell r} = 0$. Последнее равенство следует из того, что $(\ker\psi) \cap A_{ir} = J(A) \cap A_{ir} = 0$. ◻

В силу равенств (4.14), всякое разложение алгебры $B = M_k(D)$ в сумму компонент B_{ij}, удовлетворяющих условиям теоремы 4.30, однозначно задаётся таким набором левых идеалов $\bar L_1, \ldots, \bar L_n$ и таким набором правых идеалов $\bar R_1, \ldots, \bar R_m$ алгебры B, что $B = \sum_{i=1}^m \bar R_i = \sum_{j=1}^n \bar L_j$. Обратно, любые такие наборы левых и правых идеалов задают подпространства $B_{ij} := \overline{R}_i \cap \overline{L}_j$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.30 для некоторой матрицы P. В частности, получается следующее утверждение, дополняющее критерий изоморфности градуированно простых алгебр, доказанный в теореме 4.16:

Теорема 4.31. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n A_{ij}$ и $A' = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{j=1}^n A'_{ij}$ — конечномерные $\mathcal{M}(\{e\}^0, m, n; P)$-градуированно простые алгебры над полем F для некоторой матрицы P. Введём обозначения*

$$L_j := \bigoplus_{k=1}^m A_{kj},\ L'_j := \bigoplus_{k=1}^m A'_{kj},\ R_i := \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \text{ и } R'_i := \bigoplus_{k=1}^n A'_{ik}.$$

Тогда если существует такой изоморфизм алгебр $\bar\varphi\colon A/J(A) \xrightarrow{\sim} A'/J(A')$, что $\bar\varphi\left(\pi\left(R_i\right)\right) = \pi'\left(R'_i\right)$ и $\bar\varphi\left(\pi\left(L_j\right)\right) = \pi'\left(L'_j\right)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J(A)$ и $\pi'\colon A' \twoheadrightarrow A'/J(A')$ — естественные сюръективные гомоморфизмы, то существует изоморфизм $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} A'$ градуированных алгебр такой, что $\pi'\varphi = \bar\varphi\pi$.

Обратно, если $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} A'$ — изоморфизм градуированных алгебр, мы всегда можем определить изоморфизм алгебр $\bar\varphi\colon A/J(A) \xrightarrow{\sim} A'/J(A')$ при помощи равенств $\bar\varphi(\pi(a)) = \pi'\varphi(a)$ для всех $a \in A$. При этом $\bar\varphi\left(\pi\left(R_i\right)\right) = \pi'\left(R'_i\right)$ и $\bar\varphi\left(\pi\left(L_j\right)\right) = \pi'\left(L'_j\right)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 4.16, леммой 4.26 и равенствами $\pi(A_{ij}) = \pi(R_i) \cap \pi(L_j)$ и $\pi'(A'_{ij}) = \pi'(R'_i) \cap \pi'(L'_j)$, которые следуют из (4.14). ◻

Глава 5

Алгебры с обобщённым H-действием

К сожалению, не все важные дополнительные структуры на алгебрах можно представить в виде (ко)модульных структур над алгебрами Хопфа. С другой стороны, например, при изучении полиномиальных тождеств в алгебрах для многих построений можно не требовать, чтобы алгебра была модульной над некоторой алгеброй Хопфа, достаточно выполнения более слабых условий, сформулированных ниже. Соответствующие действия мы будем называть обобщёнными H-действиями, где H — это ассоциативная алгебра с единицей, действующая на заданной алгебре. В случае, когда алгебра над полем F градуирована некоторой бесконечной группой G и эта градуировка имеет конечный носитель, при работе с градуированными тождествами удобно бывает заменить градуировку на действие алгебры $(FG)^*$, которое также является обобщённым. (См. пример 5.4 ниже.)

5.1 Обобщённые H-действия

Пусть H — произвольная ассоциативная алгебра с 1 над полем F. Будем говорить, что (необязательно ассоциативная) алгебра A является алгеброй с *обобщённым H-действием*, если A является левым H-модулем и для любого $h \in H$ существует такое $k \in \mathbb{N}$ и такие $h'_i, h''_i, h'''_i, h''''_i \in H$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, что

$$h(ab) = \sum_{i=1}^{k} \big((h'_i a)(h''_i b) + (h'''_i b)(h''''_i a)\big) \text{ для всех } a, b \in A. \tag{5.1}$$

Эквивалентным условием является существование линейных отображений $\Delta, \Theta\colon H \to H \otimes H$ (необязательно коассоциативных) таких, что

$$h(ab) = \sum \big((h_{(1)}a)(h_{(2)}b) + (h_{[1]}b)(h_{[2]}a)\big) \text{ для всех } a, b \in A.$$

(Здесь мы используем обозначения $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ и $\Theta(h) = \sum h_{[1]} \otimes h_{[2]}$.)

Замечание 5.1. Одна и та же алгебра H может действовать на разных алгебрах A. При этом отображения Δ и Θ также могут быть разными для разных алгебр A.

Пример 5.2. Если A — H-модульная алгебра, где H — некоторая биалгебра, то A — алгебра с обобщённым H-действием.

Напомним, что линейное отображение $\varphi\colon A \to A$ называется *антиэндоморфизмом* алгебры A, если $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$ для всех $a, b \in A$. Если моноид T действует на A только эндоморфизмами, т.е. $t(ab) = (ta)(tb)$ для всех $a, b \in A$, то алгебра A является FT-модульной, где FT — полугрупповая биалгебра моноида T (см. примеры 1.8 и 1.32). Однако если T действует ещё и антиэндоморфизмами, то A уже не будет FT-модульной алгеброй в классическом смысле:

Пример 5.3. Пусть A — алгебра над полем F. Если моноид T действует на алгебре A эндоморфизмами и антиэндоморфизмами, то A является алгеброй с обобщённым FT-действием.

Другим классом алгебр, для которых понятие обобщённого H-действия оказывается особенно полезным, являются градуированные алгебры с конечным носителем градуировки:

Пример 5.4. Пусть $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — алгебра над полем F, градуированная множеством T, т.е. для всех $s, t \in T$ существует такое $r \in T$, что $A^{(s)}A^{(t)} \subseteq A^{(r)}$. Обозначим эту градуировку через Γ. Рассмотрим алгебру F^T всех функций из T в F с поточечными операциями. Тогда F^T естественным образом действует на A: $qa = q(t)a$ для всех $a \in A^{(t)}$ и $q \in F^T$, причём при таком действии T-градуированные подпространства в A являются в точности F^T-подмодулями. Обозначим через $\zeta\colon F^T \to \operatorname{End}_F(A)$ соответствующий гомоморфизм. Заметим, что градуировка Γ при помощи равенства $s \star t := r$ задаёт на множестве T частичную операцию $\star$ с областью определения $T_0 := \{(s,t) \mid A^{(s)}A^{(t)} \neq 0\}$. Пусть $q_t(s) := \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ при } s=t, \\ 0 \text{ при } s\neq t. \end{smallmatrix}\right.$ Если носитель

$$\operatorname{supp}\Gamma := \{t \in T \mid A^{(t)} \neq 0\}$$

градуировки Γ конечен, множество T_0 также конечно и справедливы равенства

$$q_r(ab) = \sum_{\substack{(s,t)\in T_0,\\ r=s\star t}} q_s(a)q_t(b). \tag{5.2}$$

(Поскольку обе части равенства линейны по a и b, достаточно проверить это равенство только для однородных элементов a, b.) В силу того, что алгебра F^T является по модулю $\ker\zeta$ линейной оболочкой множества $(q_t)_{t\in\operatorname{supp}\Gamma}$, из (5.2) следует (5.1) для всех $h \in F^T$. Отсюда в случае, когда носитель градуировки конечен, A является алгеброй с обобщённым F^T-действием.

Пример 5.5. Если в предыдущем примере T — группа, то $F^T \cong (FT)^*$. Если группа T конечна, то $(FT)^*$ является алгеброй Хопфа и структура алгебры с обобщённым F^T-действием на A, введённая выше, совпадает со структурой $(FT)^*$-модульной алгебры на A.

Пример 5.6. Если A — конечномерная B-комодульная алгебра, где B — некоторая биалгебра, то на A также можно ввести структуру алгебры с обобщённым B^*-действием. Достаточно применить лемму 2.6, взяв в качестве $H_1 \subseteq B$ любое такое конечномерное подпространство, что $\rho(A) \subseteq A \otimes H_1$. (Здесь, как обычно, $\rho\colon A \to A \otimes B$ — линейное отображение, задающее на A структуру B-комодуля.)

Пример 5.7. Пусть A — ассоциативная алгебра, а $A^+ := A + F \cdot 1$. Тогда A является алгеброй с обобщённым $A^+ \otimes (A^+)^{\mathrm{op}}$-действием, где

$$(b \otimes c)a := bac \text{ для всех } a \in A,\ b \in A^+ \text{ и } c \in \left(A^+\right)^{\mathrm{op}}.$$

Действительно,

$$(b \otimes c)(a_1 a_2) := \big((b \otimes 1)a_1\big)\big((1 \otimes c)a_2\big) \text{ для всех } a_1, a_2 \in A,\ b \in A^+ \text{ и } c \in \left(A^+\right)^{\mathrm{op}}.$$

Пусть A — алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей 1 над полем F. Как и в случае модульных алгебр, подпространство $V \subseteq A$ называется *инвариантным относительно H-действия*, если $HV = V$, т.е. если V является H-подмодулем. Если $A^2 \neq 0$ и алгебра A не содержит нетривиальных H-инвариантных двусторонних идеалов, то A называется *H-простой* алгеброй.

5.2 Обобщённые действия, согласованные с градуировками

В ряде случаев алгебра A над полем F бывает наделена, с одной стороны, градуировкой некоторым множеством T, а с другой стороны, обобщённым H-действием некоторой ассоциативной алгебры H с 1, причём H-действие сохраняет компоненты градуировки. Будем называть такое обобщённое H-действие *согласованным* с T-градуировкой.

Пример 5.8. Пусть $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ — некоторая $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная алгебра. Линейное отображение $\star\colon A \to A$ называется *суперинволюцией* (см. [91]), если $\left(A^{(k)}\right)^\star = A^{(k)}$ при $k = 0, 1$, $a^{\star\star} = a$ для всех $a \in A$, $(ab)^\star = (-1)^{k\ell} b^\star a^\star$ для всех $a \in A^{(k)}$, $b \in A^{(\ell)}$, где $k, \ell \in \{0, 1\}$. На всякой алгебре с суперинволюцией задано естественное действие групповой алгебры циклической группы второго порядка, согласованное с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой.

Пример 5.9. Пусть $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ — некоторая $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная алгебра. Линейное отображение $\star\colon A \to A$ называется *псевдоинволюцией* (см. [84]), если $\left(A^{(k)}\right)^\star = A^{(k)}$ при $k = 0, 1$, $a^{\star\star} = (-1)^k a$, $(ab)^\star = (-1)^{k\ell} b^\star a^\star$ для всех $a \in A^{(k)}$, $b \in A^{(\ell)}$, где $k, \ell \in \{0, 1\}$. На всякой алгебре с псевдоинволюцией задано естественное действие групповой алгебры циклической группы четвертого порядка, согласованное с $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой.

Как было впервые отмечено Р. Б. дос Сантосом [53], всякая алгебра с суперинволюцией является алгеброй с обобщённым H-действием. Подобное утверждение справедливо и в общем случае:

Теорема 5.10. *Пусть $\Gamma\colon A = \bigoplus_{t \in T} A^{(t)}$ — T-градуировка на алгебре A над полем F, где T — некоторое множество, причём на A также заданное такое обобщённое H-действие, что H — ассоциативная алгебра с 1, $HA^{(t)} \subseteq A^{(t)}$ для всех $t \in T$, а носитель* $\operatorname{supp}\Gamma$ *градуировки Γ конечен. Тогда формула*

$$(q \otimes h)a := q(t)(ha) \text{ при } a \in A^{(t)},\ t \in T,\ q \in F^T,\ h \in H$$

задаёт на A обобщённое $F^T \otimes H$-действие, причём T-градуированные H-подмодули в A являются при таком действии в точности $F^T \otimes H$-подмодулями.

Доказательство. Как и в примере 5.4, определим элементы $q_t \in F^T$ при $t \in T$ по формуле $q_t(s) := \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ при } s=t, \\ 0 \text{ при } s\ne t \end{smallmatrix}\right.$ и зададим на множестве T частичную операцию $\star$ с областью определения $T_0 := \{(s,t) \mid A^{(s)}A^{(t)} \ne 0\}$ при помощи равенства $s \star t := r$, где $A^{(s)}A^{(t)} \subseteq A^{(r)}$. Рассмотрим алгебру F^T всех функций из T в F с поточечными операциями.

Тогда из условия (5.1) для обобщённого H-действия следует, что для любого $h \in H$ существует такое $k \in \mathbb{N}$ и такие $h'_i, h''_i, h'''_i, h''''_i \in H$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, что

$$(q_r \otimes h)(ab) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{(s,t)\in T_0,\\ r=s\star t}} \Big(\big((q_s \otimes h'_i)a\big)\big((q_t \otimes h''_i)b\big) + \big((q_t \otimes h'''_i)b\big)\big((q_s \otimes h''''_i)a\big) \Big) \tag{5.3}$$

для всех $r \in T$ и $a, b \in A$. (В силу линейности обеих частей равенства (5.3) по a и b его достаточно проверить для однородных элементов a и b.) Теперь (5.1) для $F^T \otimes H$-действия следует из того, что $F^T \otimes H$ является по модулю ядра действия $F^T \otimes H \to \operatorname{End}_F(A)$ линейной оболочкой элементов $q_r \otimes h$, где $r \in \operatorname{supp}\Gamma$, а $h \in H$. $\square$

Понятно, что когда носитель градуировки состоит из одного элемента, такое обобщённое $F^T \otimes H$-действие сводится просто к обобщённому H-действию для той же самой алгебры H. Отсюда примеры обобщённых H-действий на конечномерных ассоциативных алгебрах с не H-инвариантными радикалами Джекобсона (см. примеры 4.2–4.4) показывают, что в алгебрах, в которых T-градуировка согласована с обобщённым H-действием, радикал Джекобсона не обязан быть $F^T \otimes H$-подмодулем.

Сформулируем теперь достаточные условия инвариантности радикала Джекобсона. Для этого, отталкиваясь от примеров 5.8 и 5.9, рассмотрим следующий достаточно общий случай.

Определение 5.11. Пусть G и T — группы, а A — алгебра над полем F. Будем говорить, что A наделена *T-градуированным G-действием*, если на A задана групповая градуировка $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$, гомоморфизм групп $G \to \mathrm{GL}(A)$ и функции $\alpha, \beta \colon G \times T \times T \to F$ такие, что $gA^{(t)} \subseteq A^{(t)}$ и

$$g(ab) = \alpha(g,s,t)(ga)(gb) + \beta(g,s,t)(gb)(ga) \tag{5.4}$$

для всех $g \in G$, $s, t \in T$, $a \in A^{(s)}$ и $b \in A^{(t)}$.

Замечание 5.12. Из (5.4) следует, что $\beta(g,s,t) = 0$ для всех $g \in G$ и $s, t \in T$ таких, что $A^{(t)}A^{(s)} \ne 0$ и $st \ne ts$.

В силу теоремы 5.10 всякое T-градуированное G-действие сводится к обобщённому $(FT)^* \otimes FG$-действию.

Докажем теперь, что радикал Джекобсона конечномерной ассоциативной алгебры инвариантен относительно такого действия.

Для начала покажем, что всякий двусторонний градуированный идеал переходит под градуированным действием группы в некий двусторонний градуированный идеал, причём если этот идеал был нильпотентным, его образ также будет нильпотентным идеалом:

Лемма 5.13. *Пусть $\Gamma \colon A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — T-градуировка на алгебре A над полем F, причём на A также задано T-градуированное G-действие, где T и G — произвольные группы.*

Тогда для всякого $g \in G$ и двустороннего градуированного идеала $I \subseteq A$ пространство gI также является двусторонним градуированным идеалом, причём если идеал I нильпотентен, идеал gI также нильпотентен.

Доказательство. Всякий элемент $a \in I$ можно представить в виде суммы его однородных компонент, причём в силу градуированности идеала I все эти компоненты принадлежат идеалу I. Применяя к a произвольный элемент $g \in G$ и учитывая, что группа G сохраняет компоненты градуировки, получаем, что ga является суммой однородных элементов, каждый из которых принадлежит пространству gI. Отсюда пространство gI градуированное.

В силу градуированности пространства gI для того, чтобы доказать, что gI — двусторонний идеал, достаточно показать, что $ab, ba \in gI$ для всех $a \in A^{(s)}$, $b \in (gI) \cap A^{(t)}$, где $s, t \in T$. Из (5.4) следует, что

$$g^{-1}(ab) = \alpha(g^{-1}, s, t)(g^{-1}a)(g^{-1}b) + \beta(g^{-1}, s, t)(g^{-1}b)(g^{-1}a) \in I$$

и

$$g^{-1}(ba) = \alpha(g^{-1}, t, s)(g^{-1}b)(g^{-1}a) + \beta(g^{-1}, t, s)(g^{-1}a)(g^{-1}b) \in I.$$

Отсюда gI — градуированный двухсторонний идеал.

Пусть теперь любое произведение из n элементов идеала I с любой расстановкой скобок равно 0. Докажем, что идеал gI обладает тем же свойством. Действительно, пусть $a_1, \ldots, a_n \in gI$ — однородные элементы. Рассматривая элемент $g^{-1}(a_1 \ldots a_n)$, где на произведении $a_1 \ldots a_n$ задана произвольная расстановка скобок, и применяя $(n-1)$ раз формулу (5.4), получаем, что $g^{-1}(a_1 \ldots a_n)$ является линейной комбинацией произведений элементов $g^{-1}a_i$ взятых в произвольном порядке. Поскольку $g^{-1}a_i \in I$ для всех $i = 1, \ldots, n$, а число множителей равно n, все такие произведения равны нулю и $g^{-1}(a_1 \ldots a_n) = 0$, откуда $a_1 \ldots a_n = 0$. Следовательно, в этом случае идеал gI также нильпотентен. $\square$

Теперь выведем отсюда инвариантность радикала Джекобсона:

Теорема 5.14. *Пусть $\Gamma \colon A = \bigoplus_{t \in T} A^{(t)}$ — T-градуировка на конечномерной ассоциативной алгебре A над полем F, причём на A также задано T-градуированное G-действие, где T и G — произвольные группы, и либо $\operatorname{char} F = 0$, либо $\operatorname{char} F > \dim_F A$. Тогда*

$$\big((FT)^* \otimes FG\big) J(A) \subseteq J(A).$$

Доказательство. В силу следствия 2.5 идеал $J(A)$ является градуированным и, следовательно, $(FT)^*$-инвариантным идеалом. Инвариантность идеала $J(A)$ относительно действия группы G теперь следует из леммы 5.13. $\square$

Для того, чтобы доказать инвариантный аналог теоремы Веддербёрна — Артина, нам потребуется следующая лемма:

Лемма 5.15. *Пусть $\Gamma \colon A = \bigoplus_{t \in T} A^{(t)}$ — T-градуировка на ассоциативной алгебре A над полем F, причём на A также задано T-градуированное G-действие, где T и G — произвольные группы. Пусть $M \subseteq A$ — G-инвариантное T-градуированное подпространство. Тогда*

$$\operatorname{Ann}_{\mathrm{lr}}(M) := \{a \in A \mid ab = ba = 0 \textit{ для всех } b \in M\}$$

также является G-инвариантным T-градуированным подпространством.

Доказательство. В силу леммы 2.15 подпространство $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$ является T-градуированным. Докажем теперь, что оно G-инвариантно.

Пусть $a \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M) \cap A^{(s)}$, $b \in M \cap A^{(t)}$, $s, t \in T$, $g \in G$. Тогда

$$g^{-1}\big((ga)b\big) = \alpha(g^{-1}, s, t)a(g^{-1}b) + \beta(g^{-1}, s, t)(g^{-1}b)a = 0,$$

откуда $(ga)b = 0$.

Аналогично,

$$g^{-1}(b(ga)) = \alpha(g^{-1}, t, s)(g^{-1}b)a + \beta(g^{-1}, t, s)a(g^{-1}b) = 0,$$

откуда $b(ga) = 0$.

В силу линейности равенств

$$(ga)b = b(ga) = 0 \tag{5.5}$$

по a и b и градуированности подпространств M и $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$ равенства (5.5) справедливы для всех $a \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$, $b \in M$. Таким образом, $ga \in \mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$, откуда $\mathrm{Ann}_{\mathrm{lr}}(M)$ является G-инвариантным подпространством. □

Теорема 5.16. *Пусть $\Gamma\colon B = \bigoplus_{t\in T} B^{(t)}$ — T-градуировка на конечномерной полупростой ассоциативной алгебре B над полем F, причём на B также задано T-градуированное G-действие, где T и G — произвольные группы. Тогда*

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$$

(прямая сумма T-градуированных G-инвариантных идеалов) для некоторых алгебр B_i с T-градуированным G-действием, каждая из которых проста в соответствующем смысле, т.е. не содержит нетривиальных T-градуированных G-инвариантных идеалов.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство теоремы 2.16, использовав вместо леммы 2.14 лемму 5.15. □

5.3 Слабое разложение Веддербёрна — Мальцева

Аналогично тому, как это было сделано в случае H-модульных алгебр (см. §2.3), определим *H-радикал* $J^H(A)$ конечномерной ассоциативной алгебры A с обобщённым H-действием как максимальный нильпотентный H-инвариантный идеал алгебры A.

H-инвариантный аналог теоремы Веддербёрна — Мальцева можно было бы сформулировать следующим образом: если A — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием над полем характеристики 0, то существует такой гомоморфизм $\varkappa\colon A/J^H(A) \hookrightarrow A$ алгебр и H-модулей, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J^H(A)}$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J^H(A)$ — естественный сюръективный гомоморфизм. К сожалению, в такой формулировке теорема неверна даже для H-модульных алгебр, см. примеры 2.25 и 2.29.

Докажем слабый вариант теоремы Веддербёрна — Мальцева, а именно, что существует такое F-линейное отображение $\varkappa\colon A/J^H(A) \hookrightarrow A$, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J^H(A)}$ и $\varkappa$ является гомоморфизмом (B,B)-бимодулей для некоторой максимальной полупростой подалгебры $B \subseteq A/J^H(A)$. Этот вариант теоремы Веддербёрна — Мальцева будет затем использоваться в доказательстве аналога гипотезы Амицура для алгебр с обобщённым H-действием (см. главу 7).

Теорема 5.17 ([119, лемма 2.6])**.** *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над алгебраически замкнутым полем F. Обозначим через π естественный сюръективный гомоморфизм $A \twoheadrightarrow A/J^H(A)$. Тогда существует такое F-линейное вложение $\varkappa\colon A/J^H(A) \hookrightarrow A$ и такая полупростая (в обычном смысле) подалгебра $B \subseteq A/J^H(A)$, что*

1. $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J^H(A)}$*;*
2. $A/J^H(A) = B \oplus J(A/J^H(A))$ *(прямая сумма подпространств);*
3. *справедливы равенства $\varkappa(ba) = \varkappa(b)\varkappa(a)$ и $\varkappa(ab) = \varkappa(a)\varkappa(b)$ для всех $a \in A/J^H(A)$ и $b \in B$.*

Доказательство. В силу обычной теоремы Веддербёрна — Артина существует такая максимальная полупростая подалгебра $B_0 \subseteq A$, что $A = B_0 \oplus J(A)$ (прямая сумма подпространств). Будем рассматривать A как (B_0, B_0)-бимодуль. Докажем, что A является прямой суммой неприводимых (B_0, B_0)-подбимодулей.

Действительно, поскольку B_0 — конечномерная полупростая алгебра над алгебраически замкнутым полем F, она изоморфна прямой сумме полных матричных алгебр над F, т.е. алгебра $B_0 \otimes B_0^{\mathrm{op}}$ также является полупростой, а A — вполне приводимый левый $B_0 \otimes B_0^{\mathrm{op}}$-модуль, где алгебра B_0^{op} антиизоморфна алгебре B_0, а $(b_1 \otimes b_2)a := b_1 a b_2$ для всех $b_1 \otimes b_2 \in B_0 \otimes B_0^{\mathrm{op}}$ и $a \in A$. Поскольку мы не требуем от алгебры A наличия единицы, отсюда пока только следует полная приводимость (B_0, B_0)-бимодуля $1_{B_0} A\, 1_{B_0}$.

Рассмотрим разложение Пирса

$$A = (1 - 1_{B_0})A(1 - 1_{B_0}) \oplus 1_{B_0}A(1 - 1_{B_0}) \oplus (1 - 1_{B_0})A\, 1_{B_0} \oplus 1_{B_0}A\, 1_{B_0}$$

(прямая сумма (B_0, B_0)-подбимодулей), где 1 — формальная (или присоединённая) единица. Здесь $1_{B_0}A(1 - 1_{B_0})$ — вполне приводимый левый B_0-модуль, $(1 - 1_{B_0})A\, 1_{B_0}$ — вполне приводимый правый B_0-модуль, а $(1 - 1_{B_0})A(1 - 1_{B_0})$ — векторное пространство с нулевым (B_0, B_0)-действием. Отсюда A — прямая сумма неприводимых (B_0, B_0)-бимодулей. Следовательно, существует такой (B_0, B_0)-подбимодуль $N \subseteq A$, что $J(A) = N \oplus J^H(A)$. Заметим, что отображение

$$\pi\big|_{(B_0 \oplus N)}\colon (B_0 \oplus N) \xrightarrow{\sim} A/J^H(A)$$

является F-линейной биекцией. Введём обозначения $\varkappa := \left(\pi\big|_{(B_0 \oplus N)}\right)^{-1}$ и $B := \pi(B_0)$. Тогда

$$A/J^H(A) = \pi(B_0) \oplus \pi(J(A)) = B \oplus J(A/J^H(A)).$$

Рассмотрим произвольные элементы $a \in A/J^H(A)$ и $b \in B$. Тогда

$$\pi(\varkappa(ab)) = ab = \pi\varkappa(a)\pi\varkappa(b) = \pi(\varkappa(a)\varkappa(b)).$$

Поскольку $\varkappa(ab), \varkappa(a)\varkappa(b) \in B_0 \oplus N$, отсюда следует, что $\varkappa(ab) = \varkappa(a)\varkappa(b)$. Аналогично, $\varkappa(ba) = \varkappa(b)\varkappa(a)$. $\square$

Глава 6

Свободные алгебры, полиномиальные тождества и их коразмерности

В данной главе вводится понятие полиномиального H-тождества и градуированного тождества (в самой общей формулировке), рассматриваются пары сопряжённых функторов, отвечающие соответствующим свободным алгебрам, доказываются оценки для коразмерностей тождеств, а также существование H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой алгебры и градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой алгебры.

В определениях из §6.1–6.3 мы отталкиваемся от работ А. Берела [43], Ю. А. Бахтурина и В. В. Линченко [35] и монографии А. Джамбруно и М. В. Зайцева [66].

Результаты главы были опубликованы в работах [116, 122].

6.1 Полиномиальные H-тождества

Обозначим через $F\{X\}$ *(абсолютно) свободную неассоциативную алгебру* на множестве X, т.е. алгебру всевозможных неассоциативных многочленов от переменных из множества X с коэффициентами из поля F. Тогда $F\{X\} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F\{X\}^{(n)}$, где $F\{X\}^{(n)}$ — линейная оболочка одночленов, имеющих суммарную степень n по всем буквам.

Пусть H — ассоциативная алгебра с единицей. Обозначим через $F\{X|H\}$ алгебру, которая как векторное пространство совпадает с

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} F\{X\}^{(n)} \otimes H^{\otimes n},$$

а умножение задаётся формулой $(v_1 \otimes w_1)(v_2 \otimes w_2) := (v_1)(v_2) \otimes w_1 \otimes w_2$ для $v_1 \in F\{X\}^{(k)}$, $v_2 \in F\{X\}^{(\ell)}$, $w_1 \in H^{\otimes k}$, $w_2 \in H^{\otimes \ell}$, $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Введём обозначение $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} := x_1 \dots x_n \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n$ для всех $x_1, \dots, x_n \in X$ и $h_1, \dots, h_n \in H$, где расстановка скобок на одночленах $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$ и $x_1 \dots x_n$ совпадает.

Пусть $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ — базис алгебры H. Тогда $F\{X|H\}$ как алгебра изоморфна свободной неассоциативной алгебре на множестве $\{x^{h_\alpha} \mid x \in X,\ \alpha \in \Lambda\}$.

Замечание 6.1. В случае, когда H — это просто ассоциативная алгебра с единицей, мы не рассматриваем на алгебре $F\{X|H\}$ никакого действия.

Отождествим X с подмножеством

$$\{x^1 \mid x \in X\} \subseteq F\{X|H\}.$$

Обозначим через $\iota\colon X \to F\{X|H\}$ соответствующее вложение. Тогда $F\{X|H\}$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого отображения $\varphi\colon X \to A$, где A — алгебра с обобщённым H-действием, существует единственный гомоморфизм алгебр $\bar{\varphi}\colon F\{X|H\} \to A$ такой, что для всех $h \in H$ и $x \in X$ справедливо равенство $\bar{\varphi}(x^h) = h\bar{\varphi}(x)$ и диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F\{X|H\} \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Для всякого $f \in F\{X|H\}$ назовём элемент $\bar{\varphi}(f) \in A$ *результатом подстановки* элементов $\varphi(x) \in A$ в f вместо переменных $x \in X$.

Будем называть алгебру $F\{X|H\}$ *свободной неассоциативной алгеброй на множестве X с символами операторов из алгебры H*. Элементы алгебры $F\{X|H\}$ называются *неассоциативными H-многочленами* от переменных из множества X.

Если A — алгебра с обобщённым H-действием, то пересечение $\mathrm{Id}^H(A)$ ядер всевозможных гомоморфизмов алгебр $\varphi\colon F\{X|H\} \to A$, удовлетворяющих условию $\varphi(x^h) = h\varphi(x)$ для всех $x \in X$ и $h \in H$, называется множеством *полиномиальных H-тождеств алгебры A*. Учитывая универсальное свойство алгебры $F\{X|H\}$, легко видеть, что множество $\mathrm{Id}^H(A)$ состоит из всех H-многочленов, которые обращаются в нуль при подстановке элементов алгебры A вместо своих переменных.

Является ли конкретный неассоциативный H-многочлен H-тождеством или нет, не зависит от того, какими буквами мы обозначаем переменные этого многочлена. Так как любой многочлен зависит лишь от конечного числа переменных, для описания всех полиномиальных H-тождеств достаточно рассматривать алгебру $F\{X|H\}$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — счётный набор букв, что мы и делаем ниже. Этим соглашением устраняется неопределённость, которая заключалась в том, что идеал $\mathrm{Id}^H(A)$, заданный выше, зависел от множества X.

Пример 6.2. Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку на алгебре $M_2(F)$, заданную равенствами $M_2(F)^{(\bar{0})} = \{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\}$ и $M_2(F)^{(\bar{1})} = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, и соответствующее $(F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^*$-действие. Тогда

$$x^{h_0}y^{h_0} - y^{h_0}x^{h_0} \in \mathrm{Id}^{(F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^*}(M_2(F)),$$

где $h_0 \in (F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^*$, $h_0(\bar{0}) = 1$ и $h_0(\bar{1}) = 0$.

Пусть $Q \subseteq F\{X|H\}$ — некоторое множество H-многочленов. *Многообразием* $\mathbf{Var}(Q)$ *алгебр с обобщённым H-действием, заданным множеством Q,* называется класс всех алгебр с обобщённым H-действием, в которых выполняются все тождества из множества Q.

Идеалом H-тождеств $\mathrm{Id}^H(\mathcal{V})$ *многообразия* $\mathcal{V}$ называется пересечение всех идеалов $\mathrm{Id}^H(A)$ для всех алгебр $A \in \mathcal{V}$. Элементы множества $\mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q))$ называются *следствиями* из H-многочленов множества Q. Если для двух подмножеств $Q_1, Q_2 \subseteq F\{X|H\}$ выполнено условие $\mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q_1)) = \mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q_2))$, то множества Q_1 и Q_2 называются *эквивалентными*. Легко видеть, что для любых $Q \subseteq F\{X|H\}$ и $f \in Q$ идеал $\mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q))$ включает в себя все многочлены, полученные из f линейными заменами $x_i \mapsto \alpha_{i1}x_{j_{i1}}^{h_{i1}} + \ldots \alpha_{ik}x_{j_{ik}}^{h_{ik}}$, где $\alpha_{i\ell} \in F$, $h_{i\ell} \in H$, $j_{i\ell} \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $i, k \in \mathbb{N}$. Если H — это просто ассоциативная алгебра с единицей, то про нелинейные замены ничего сказать нельзя, так как их результат в $F\{X|H\}$ не определён. Разумеется, используя условие (5.1), результат любой подстановки $x_i \mapsto f_i$, где $f_i \in F\{X|H\}$, в переменные любого H-многочлена снова переписывается в виде некоторого H-многочлена g (это будет многократно использоваться в последующих главах), однако H-многочлен g, вообще говоря, зависит от алгебры A.

Даже в случае обычных полиномиальных тождеств (когда $H = F$) классификация всевозможных многообразий алгебр в зависимости от идеалов их полиномиальных тождеств представляется неподъёмной задачей. Поэтому многообразия зачастую классифицируются в зависимости от роста их числовых характеристик. Одной из важнейших числовых последовательностей, связанных с полиномиальными тождествами, является последовательность их коразмерностей.

Пусть
$$W_n^H := \langle x_{\sigma(1)}^{h_1} x_{\sigma(2)}^{h_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{h_n} \mid \sigma \in S_n,\ h_i \in H \rangle_F \subset F\{X|H\},$$
где S_n — n-я группа подстановок, $n \in \mathbb{N}$ и на одночленах рассматриваются всевозможные расстановки скобок. Элементы пространств W_n^H называются *полилинейными неассоциативными H-многочленами*, а элементы пространств $W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)$ называются *полилинейными H-тождествами* алгебры A.

Используя процесс линеаризации [66, § 1.3], нетрудно доказать, что над полем характеристики 0 всякое полиномиальное H-тождество алгебры A с обобщённым H-действием эквивалентно конечному набору полилинейных H-тождеств алгебры A. Следовательно, в этом случае пространства $W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)$, где $n \in \mathbb{N}$, содержат всю информацию о полиномиальных H-тождествах алгебры A. Число $c_n^H(A) := \dim\left(\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)}\right)$, где $n \in \mathbb{N}$, называется *n-й коразмерностью полиномиальных H-тождеств* или *n-й H-коразмерностью* алгебры A.

Предел $\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$ (если он существует) называется *экспонентой роста полиномиальных H-тождеств* или *H-PI-экспонентой* алгебры A.

Симметрическая группа S_n действует на пространстве $\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)}$ перестановками переменных. Характер $\chi_n^H(A)$ этого представления называется n-м *кохарактером* полиномиальных H-тождеств алгебры A. В случае, когда $\operatorname{char} F = 0$, n-й кохарактер можно представить в виде суммы
$$\chi_n^H(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m(A, H, \lambda)\chi(\lambda)$$
неприводимых характеров $\chi(\lambda)$. Иными словами, $m(A, H, \lambda)$ — это кратности неприводимых

подмодулей $M(\lambda)$ в разложении FS_n-модуля $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$. Число $\ell_n^H(A) := \sum_{\lambda\vdash n} m(A,H,\lambda)$ называется n-й *кодлиной* полиномиальных H-тождеств алгебры A.

Замечание 6.3. Если A — обычная алгебра над полем F, то её *обычные полиномиальные тождества*, *коразмерности* и *кохарактеры* можно определить как, соответственно, H-тождества, H-коразмерности и H-кохарактеры алгебры A с тривиальным действием алгебры $H = F$. Иными словами, $W_n := W_n^F$, $\mathrm{Id}(A) := \mathrm{Id}^F(A)$, $c_n(A) := c_n^F(A)$, $\mathrm{PIexp}(A) := \mathrm{PIexp}^F(A)$, $\chi_n(A) := \chi_n^F(A)$, $m(A,\lambda) := m(A,F,\lambda)$, $\ell_n(A) := \ell_n^F(A)$.

Замечание 6.4. Если A — алгебра над полем F с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами, то из примера 5.3 следует, что A — алгебра с обобщённым FG-действием. Её *полиномиальные G-тождества*, *G-коразмерности* и *G-кохарактеры* определяются как, соответственно, FG-тождества, FG-коразмерности и FG-кохарактеры. Иными словами, $W_n^G := W_n^{FG}$, $\mathrm{Id}^G(A) := \mathrm{Id}^{FG}(A)$, $c_n^G(A) := c_n^{FG}(A)$, $\mathrm{PIexp}^G(A) := \mathrm{PIexp}^{FG}(A)$, $\chi_n^G(A) := \chi_n^{FG}(A)$, $m(A,G,\lambda) := m(A,FG,\lambda)$, $\ell_n^G(A) := \ell_n^{FG}(A)$.

Замечание 6.5. Если A — алгебра над полем F с действием некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями, то из примера 1.33 следует, что A — $U(\mathfrak{g})$-модульная алгебра. Её *дифференциальные тождества*, *дифференциальные коразмерности* и *дифференциальные кохарактеры* определяются как, соответственно, её $U(\mathfrak{g})$-тождества, $U(\mathfrak{g})$-коразмерности и $U(\mathfrak{g})$-кохарактеры.

Замечание 6.6. Истинная важность условия (5.1) кроется в том факте, что при помощи (5.1) можно естественным образом определить структуру левого H-модуля на векторном пространстве $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$. Это делается следующим образом. Всякий полилинейный H-многочлен может рассматриваться как полилинейная функция на алгебре A, принимающая значения в A. При этом подпространство $W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)$ является ядром соответствующего гомоморфизма FS_n-модулей $W_n^H \to \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$, где группа S_n действует перестановками аргументов. Отсюда получаем вложение $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)} \subseteq \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$. Пространство $\mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$ является левым H-модулем, причём операторы из алгебры H коммутируют с операторами из группы S_n: $(hg)(a_1,\ldots,a_n) := hg(a_1,\ldots,a_n)$ при $h \in H$, $g \in \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$ и $a_1,\ldots,a_n \in A$. Если $f \in W_n^H$ и $h \in H$, мы можем, применив несколько раз равенство (5.1), переписать функцию $h\bar f$, где $\bar f$ — образ f в $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$, в виде линейной комбинации таких произведений переменных x_i, в которых операторы из H применяются только к самим переменным x_i, но не к их произведениям. Другими словами, функция $h\bar f$ на A может быть представлена (необязательно однозначно) как функция, соответствующая H-многочлену из W_n^H. Следовательно, $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$ является H-подмодулем H-модуля $\mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$. Обозначим через f^h любой из таких H-многочленов, что $\overline{f^h} = h\bar f$. Если $\mathrm{char}\, F = 0$, $f^h \notin \mathrm{Id}^H(A)$ и $FS_n\bar f \cong M(\lambda)$ для некоторого $\lambda \vdash n$, то $FS_n h\bar f$ является ненулевым гомоморфным образом неприводимого FS_n-модуля $M(\lambda)$. Отсюда и $FS_n h\bar f \cong M(\lambda)$. Это свойство будет использовано ниже в §6.9 и последующих главах.

Приведём пример такой бесконечномерной H-модульной ассоциативной алгебры A для бесконечномерной алгебры Хопфа H, что H-коразмерности $c_n^H(A)$ бесконечны:

Пример 6.7. Пусть F — некоторое поле. Обозначим через $C = \langle c \rangle$ бесконечную циклическую группу, а через $(G, \cdot)$ — группу $(\mathbb{Q}, +)$, записанную в мультипликативной форме. При этом через g^α, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, условимся обозначать элемент группы G, соответствующий числу $\alpha \in \mathbb{Q}$. Зафиксируем некоторое число $m \in \mathbb{N}$, где $m \geqslant 2$. Определим действие группы C на групповой алгебре $A := FG$ автоморфизмами при помощи формулы $cg^\alpha := g^{m\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$. Покажем, что, несмотря на то, что алгебра A коммутативна, справедливо равенство $c_n^{FC}(A) = +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим полилинейные FC-многочлены

$$f_k(x_1, \dots, x_n) := x_1^{c^k} x_2 \dots x_n, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

(Поскольку алгебра A ассоциативна, расстановка скобок на одночленах неважна. Можно для определённости считать одночлены левонормированными.) Тогда

$$f_k(g, g, \dots, g) = (c^k g) g \dots g = g^{m^k + (n-1)},$$

т.е. FC-многочлены f_k линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}^{FC}(A)$.

Пример 6.7 показывает, что при изучении H-коразмерностей имеет смысл ограничиться случаем, когда одна из двух алгебр A и H конечномерна.

Докажем теперь оценку сверху для коразмерностей полиномиальных H-тождеств конечномерных алгебр:

Предложение 6.8. *Пусть A — конечномерная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей над произвольным полем F. Тогда $c_n^H(A) \leqslant (\dim A)^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Снова рассмотрим H-многочлены как n-линейные отображения из A в A. Из вложения $\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)} \subseteq \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$ следует неравенство

$$c_n^H(A) = \dim \left(\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)} \right) \leqslant \dim \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A) = (\dim A)^{n+1}.$$

$\square$

Следствие 6.9. *Пусть A — конечномерная алгебра над произвольным полем F с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда $c_n^G(A) \leqslant (\dim A)^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Предложение ниже устанавливает связь между обычными и H-коразмерностями:

Предложение 6.10. *Пусть A — алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей над произвольным полем F, а $\zeta \colon H \to \mathrm{End}_F(A)$ — гомоморфизм, задающий это H-действие. Тогда*

$$c_n(A) \leqslant c_n^H(A) \leqslant (\dim \zeta(H))^n c_n(A) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Снова рассмотрим многочлены как n-линейные отображения из A в A и отождествим $\frac{W_n}{W_n\cap \mathrm{Id}(A)}$ и $\frac{W^H_n}{W^H_n\cap \mathrm{Id}^H(A)}$ с соответствующими подпространствами в $\mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$. Тогда

$$\frac{W_n}{W_n\cap \mathrm{Id}(A)} \subseteq \frac{W^H_n}{W^H_n\cap \mathrm{Id}^H(A)} \subseteq \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A),$$

откуда и следует оценка снизу.

Выберем такие $f_1,\ldots,f_t \in W_n$, что их образы являются базисом пространства $\frac{W_n}{W_n\cap \mathrm{Id}(A)}$. Тогда для любого одночлена $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$ (с некоторой фиксированной расстановкой скобок Ξ), где $\sigma\in S_n$, существуют такие коэффициенты $\alpha_{i,\sigma,\Xi}\in F$, что

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)} - \sum_{i=1}^{t} \alpha_{i,\sigma,\Xi} f_i(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Id}(A). \tag{6.1}$$

В случае, когда $\dim \zeta(H) = +\infty$, оценка сверху становится тривиальной, поэтому без ограничения общности можно считать, что пространство $\zeta(H)$ конечномерно. Пусть $\big(\zeta(\gamma_j)\big)_{j=1}^m$, где $\gamma_j \in H$,— базис пространства $\zeta(H)$. Тогда для любого $h\in H$ существуют такие $\alpha_j\in F$, что $\zeta(h)=\sum_{j=1}^m \alpha_j\zeta(\gamma_j)$ и

$$x^h - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^{\gamma_j} \in \mathrm{Id}^H(A). \tag{6.2}$$

Отсюда линейная оболочка H-многочленов $x^{\gamma_{i_1}}_{\sigma(1)}x^{\gamma_{i_2}}_{\sigma(2)}\ldots x^{\gamma_{i_n}}_{\sigma(n)}$, где $\sigma\in S_n$, $1\leqslant i_j\leqslant m$, со всевозможными расстановками скобок, совпадает по модулю $\mathrm{Id}^H(A)$ с W^H_n. При этом из (6.1) следует, что в случае, когда на одночлене $x^{\gamma_{i_1}}_{\sigma(1)}x^{\gamma_{i_2}}_{\sigma(2)}\ldots x^{\gamma_{i_n}}_{\sigma(n)}$ фиксирована расстановка скобок Ξ, выполняется условие

$$x^{\gamma_{i_1}}_{\sigma(1)}x^{\gamma_{i_2}}_{\sigma(2)}\ldots x^{\gamma_{i_n}}_{\sigma(n)} - \sum_{i=1}^{t} \alpha_{i,\sigma,\Xi} f_i(x_1^{\gamma_{i_1}},\ldots,x_n^{\gamma_{i_n}}) \in \mathrm{Id}^H(A).$$

Отсюда любой H-многочлен из W^H_n может быть представлен по модулю $\mathrm{Id}^H(A)$ в виде линейной комбинации H-многочленов $f_i(x_1^{\gamma_{i_1}},\ldots,x_n^{\gamma_{i_n}})$. Число таких H-многочленов равно $m^n t = (\dim\zeta(H))^n c_n(A)$, что и завершает доказательство оценки сверху. □

Выше понятие полиномиального H-тождества было введено для необязательно ассоциативной алгебры с обобщённым H-действием. Однако при работе с ассоциативными алгебрами вместо неассоциативных свободных алгебр, как правило, используются ассоциативные свободные алгебры. Как мы увидим в конце параграфа, числовые характеристики полиномиальных H-тождеств при этом подходе остаются прежними.

Пусть X — множество, а F — поле. Тогда свободная ассоциативная алгебра $F\langle X\rangle$ без единицы раскладывается в прямую сумму подпространств $\bigoplus_{n=1}^\infty F\langle X\rangle^{(n)}$, где $F\langle X\rangle^{(n)}$ — линейная оболочка одночленов, имеющих суммарную степень n по всем буквам.

Пусть H — ассоциативная алгебра с единицей. Обозначим через $F\langle X|H\rangle$ алгебру, которая как векторное пространство совпадает с

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} F\langle X\rangle^{(n)} \otimes H^{\otimes n},$$

а умножение задаётся формулой $(v_1 \otimes w_1)(v_2 \otimes w_2) := v_1 v_2 \otimes w_1 \otimes w_2$ для $v_1 \in F\langle X\rangle^{(k)}$, $v_2 \in F\langle X\rangle^{(\ell)}$, $w_1 \in H^{\otimes k}$, $w_2 \in H^{\otimes \ell}$, $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Как и в случае неассоциативных многочленов, будем использовать обозначение $x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} := x_1 \dots x_n \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n$ для всех $x_1, \dots, x_n \in X$ и $h_1, \dots, h_n \in H$.

Пусть $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ — базис алгебры H. Тогда $F\langle X|H\rangle$ как алгебра изоморфна свободной ассоциативной алгебре без единицы на множестве $\{x^{h_\alpha} \mid x \in X,\ \alpha \in \Lambda\}$.

Отождествим X с подмножеством

$$\{x^1 \mid x \in X\} \subseteq F\langle X|H\rangle.$$

Обозначим через $\iota_0 \colon X \to F\langle X|H\rangle$ соответствующее вложение. Тогда $F\langle X|H\rangle$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого отображения $\varphi \colon X \to A$, где A — ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием, существует единственный гомоморфизм алгебр $\bar{\varphi} \colon F\langle X|H\rangle \to A$ такой, что для всех $h \in H$ и $x \in X$ справедливо равенство $\bar{\varphi}(x^h) = h\bar{\varphi}(x)$ и диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F\langle X|H\rangle \arrow[d, dashed, "\bar{\varphi}"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Будем называть алгебру $F\langle X|H\rangle$ *свободной ассоциативной алгеброй без единицы на множестве X с символами операторов из алгебры H.*

Элементы алгебры $F\langle X|H\rangle$ называются *ассоциативными H-многочленами* от переменных из множества X. Если A — ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием, то пересечение $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)$ ядер всевозможных гомоморфизмов алгебр $\varphi \colon F\langle X|H\rangle \to A$, удовлетворяющих условию $\varphi(x^h) = h\varphi(x)$ для всех $x \in X$ и $h \in H$, называется множеством *ассоциативных полиномиальных H-тождеств алгебры A*. Учитывая универсальное свойство алгебры $F\langle X|H\rangle$, легко видеть, что множество $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)$ состоит из всех ассоциативных H-многочленов, которые обращаются в нуль при подстановке элементов алгебры A вместо своих переменных.

Как и в случае неассоциативных тождеств, можно считать, что $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Пусть

$$P_n^H := \langle x^{h_1}_{\sigma(1)} x^{h_2}_{\sigma(2)} \dots x^{h_n}_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ h_i \in H\rangle_F \subset F\langle X|H\rangle.$$

Элементы пространств P_n^H называются *полилинейными ассоциативными H-многочленами*, а элементы пространств $P_n^H \cap \mathrm{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)$ называются *полилинейными ассоциативными H-тождествами* алгебры A.

Как мы видим, определение полиномиального H-тождества в ассоциативной алгебре A существенно зависит от того, рассматриваем ли мы алгебру A как ассоциативную или как необязательно ассоциативную. Однако как всякому неассоциативному, так и всякому ассоциативному H-многочлену можно поставить в соответствие функцию, которая сопоставляет набору элементов алгебры A значение H-многочлена на этом наборе элементов. При этом нулевые функции будут соответствовать полиномиальным H-тождествам. Отсюда соответствие $x_i^h \mapsto x_i^h$, $i \in \mathbb{N}$, $h \in H$, индуцирует изоморфизм $F\{X|H\}/\operatorname{Id}^H(A) \cong F\langle X|H\rangle/\operatorname{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)$ алгебр и изоморфизм H- и FS_n-модулей $\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \operatorname{Id}^H(A)} \cong \frac{P_n^H}{P_n^H \cap \operatorname{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)}$. Это означает, что можно отождествить ассоциативные и неассоциативные «нетождества».

Следовательно, при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $c_n^H(A) = \dim\left(\frac{P_n^H}{P_n^H \cap \operatorname{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)}\right)$, и определение n-й коразмерности, n-го кохарактера и n-й кодлины полиномиальных H-тождеств ассоциативной алгебры A не зависит от того, используем ли мы алгебру $F\{X|H\}$ или алгебру $F\langle X|H\rangle$.

Ниже при работе с ассоциативными алгебрами идеал $\operatorname{Id}^H_{\mathrm{assoc}}(A)$ для краткости также обозначается через $\operatorname{Id}^H(A)$, а полиномиальные H-многочлены берутся из алгебры $F\langle X|H\rangle$.

6.2 H-тождества H-модульных алгебр

Рассмотрим конструкции предыдущего параграфа в случае модульных алгебр над алгебрами Хопфа.

Итак, пусть H — алгебра Хопфа, а X — некоторое множество. Тогда алгебра $F\{X|H\}$ является левой H-модульной алгеброй, где действие алгебры H задаётся формулой

$$h \cdot (v \otimes h_1 \otimes \ldots \otimes h_n) := v \otimes h_{(1)}h_1 \otimes \ldots \otimes h_{(n)}h_n \text{ для } v \in F\{X\}^{(n)} \text{ и } h_i \in H.$$

Для H-модульных алгебр универсальное свойство алгебры H записывается следующим образом: для любого отображения $\varphi\colon X \to A$, где A — необязательно ассоциативная H-модульная алгебра, существует единственный гомоморфизм H-модульных алгебр $\bar\varphi\colon F\{X|H\} \to A$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F\{X|H\} \arrow[d, dashed, "\bar\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Иными словами, алгебра $F\{X|H\}$ является в этом случае *свободной неассоциативной H-модульной алгеброй*, а $F\{-|H\}$ оказывается левым сопряжённым функтором к забывающему функтору из категории необязательно ассоциативных H-модульных алгебр в категорию множеств. Действительно, пусть $\mathbf{NAAlg}({}_H\mathcal{M})$ — категория, объектами которой являются необязательно ассоциативные H-модульные алгебры, а морфизмами — всевозможные гомоморфизмы H-модульных алгебр. Если обозначить через $U\colon \mathbf{NAAlg}({}_H\mathcal{M}) \to \mathbf{Sets}$ забывающий функтор, то мы получаем биекцию

$$\mathbf{NAAlg}({}_H\mathcal{M})(F\{X|H\}, A) \cong \mathbf{Sets}(X, UA),$$

естественную по множеству X и алгебре A, существование которой и говорит о том, что функторы $F\{-|H\}$ и U являются сопряжёнными.

Если A — H-модульная алгебра, то идеал её H-тождеств $\operatorname{Id}^H(A)$ является таким H-инвариантным идеалом алгебры $F\{X|H\}$, что $\psi(\operatorname{Id}^H(A)) \subseteq \operatorname{Id}^H(A)$ для любого эндоморфизма $\psi\colon F\{X|H\} \to F\{X|H\}$, сохраняющего на $F\{X|H\}$ структуру алгебры и H-модуля.

Обратно, если I — идеал алгебры $F\{X|H\}$, инвариантный относительно действия алгебры H и эндоморфизмов H-модульной алгебры $F\{X|H\}$, то $\mathrm{Id}^H(F\{X|H\}/I) = I$.

В случае, когда H — алгебра Хопфа, мы будем рассматривать многообразия, содержащие лишь H-модульные алгебры. В частности, если $Q \subseteq F\{X|H\}$, символом $\mathbf{Var}(Q)$ мы будем обозначать *многообразие H-модульных алгебр, заданное множеством Q,* т.е. класс H-модульных алгебр A таких, что $Q \subseteq \mathrm{Id}^H(A)$.

Идеалом H-тождеств $\mathrm{Id}^H(\mathcal{V})$ *многообразия* $\mathcal{V}$ называется пересечение всех идеалов $\mathrm{Id}^H(A)$ для всех алгебр $A \in \mathcal{V}$. Элементы множества $\mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q))$ называются *следствиями* из H-многочленов множества Q. Если для двух подмножеств $Q_1, Q_2 \subseteq F\{X|H\}$ выполнено условие $\mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q_1)) = \mathrm{Id}^H(\mathbf{Var}(Q_2))$, то множества Q_1 и Q_2 называются *эквивалентными.*

Определения следствия из множества H-тождеств и эквивалентных множеств H-тождеств, данные выше, являются дословным повторением аналогичных определений, сформулированных в предыдущем параграфе для алгебр с обобщённым H-действием. Однако благодаря тому, что теперь мы рассматриваем многообразия лишь H-модульных алгебр, эти определения, вообще говоря, неэквивалентны определениям, данным в предыдущем параграфе. В силу того, что теперь алгебра $F\{X|H\}$ сама является H-модульной, вместо переменных любого H-многочлена допускается подставлять любые H-многочлены. Отсюда следствиями конкретного H-многочлена f являются в точности H-многочлены, принадлежащие H-инвариантному идеалу алгебры $F\{X|H\}$, порождённому результатами всевозможных подстановок H-многочленов вместо переменных H-многочлена f.

Если $\mathcal{V}$ — некоторое многообразие необязательно ассоциативных H-модульных алгебр, то $F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V})$ называется *относительно свободной H-модульной алгеброй многообразия* $\mathcal{V}$. Легко видеть, что для любой H-модульной алгебры $A \in \mathcal{V}$ и для любого отображения $\varphi\colon X \to A$ существует единственный гомоморфизм H-модульных алгебр $\bar\varphi\colon F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V}) \to A$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V}) \arrow[d, dashed, "\bar\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(Здесь через $\bar\iota$ обозначено отображение, являющееся композицией отображения $\iota\colon X \to F\{X|H\}$ и гомоморфизма $F\{X|H\} \twoheadrightarrow F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V})$.)

Если рассматривать $\mathcal{V}$ как полную подкатегорию категории $\mathbf{NAAlg}({}_H\mathcal{M})$, объектами которой являются элементы класса $\mathcal{V}$ и обозначить через $U : \mathcal{V} \to \mathbf{Sets}$ забывающий функтор, то мы получаем биекцию

$$\mathcal{V}(F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V}), A) \cong \mathbf{Sets}(X, UA),$$

естественную по множеству X и алгебре $A \in \mathcal{V}$, существование которой говорит о том, что функторы $F\{-|H\}/\mathrm{Id}^H(\mathcal{V})$ и U являются сопряжёнными.

Как и в случае ассоциативных алгебр с обобщённым H-действием, в случае ассоциативных H-модульных алгебр вместо алгебры $F\{X|H\}$ можно использовать алгебру $F\langle X|H\rangle$, которая оказывается *свободной ассоциативной H-модульной алгеброй без единицы.*

Обратимся теперь к случаю алгебр Ли. Фиксируем множество X и обозначим через I идеал алгебры $F\{X\}$ порождённый элементами $(ab)c + (bc)a + (ca)b$ и aa для всех $a, b, c \in F\{X\}$. Очевидно, алгебра $L(X) := F\{X\}/I$ является алгеброй Ли. Алгебра $L(X)$ называется *свободной алгеброй Ли* на множестве X, поскольку для любой алгебры L и для любого отображения $\varphi\colon X \to L$ существует единственный гомоморфизм алгебр Ли $\bar\varphi\colon L(X) \to L$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\varphi"'] & L(X) \arrow[d, dashed, "\bar\varphi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

(Здесь через ι_1 обозначено отображение, являющееся композицией вложения $X \hookrightarrow F\{X\}$ и гомоморфизма $F\{X\} \twoheadrightarrow L(X)$.)

Пусть H — алгебра Хопфа. Обозначим через I_0 пересечение H-инвариантных идеалов алгебры $F\{X|H\}$, содержащих элементы $(ab)c + (bc)a + (ca)b$ и aa для всех $a, b, c \in F\{X|H\}$. Тогда алгебра $L(X|H) := F\{X|H\}/I_0$ называется *свободной H-модульной алгеброй Ли* на множестве X, поскольку для любой H-модульной алгебры L и для любого отображения $\varphi\colon X \to L$ существует единственный гомоморфизм H-модульных алгебр Ли $\bar\varphi\colon L(X|H) \to L$ такой, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[dr, "\varphi"'] & L(X|H) \arrow[d, dashed, "\bar\varphi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

(Здесь через ι_2 обозначено отображение, являющееся композицией вложения $X \hookrightarrow F\{X|H\}$ и гомоморфизма $F\{X|H\} \twoheadrightarrow L(X|H)$.)

Для обозначения умножения в алгебре $L(X|H)$ также, как и в других алгебрах Ли, используется символ коммутатора: $[f, g] := fg$.

Замечание 6.11. Обозначим через I_1 идеал алгебры $F\{X|H\}$, порождённый элементами $(ab)c+(bc)a+(ca)b$ и $ab+ba$ для всех $a, b, c \in F\{X|H\}$. Если алгебра Хопфа H кокоммутативна, т.е. $h_{(1)} \otimes h_{(2)} = h_{(2)} \otimes h_{(1)}$ для всех $h \in H$, то идеал I_1 является H-подмодулем. Если $\operatorname{char} F \neq 2$, то тождества $[x, x] \equiv 0$ и $[x, y]+[y, x] \equiv 0$ эквивалентны, т.е. $I_1 = I_0$. В этом случае $L(X|H)$ как алгебра Ли изоморфна свободной алгебре Ли на множестве $\{x^{h_\alpha} \mid x \in X,\ \alpha \in \Lambda\}$, где $(h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ — базис алгебры H. Однако, если $h_{(1)} \otimes h_{(2)} \neq h_{(2)} \otimes h_{(1)}$ для некоторого $h \in H$, мы по-прежнему имеем

$$[x^{h_{(1)}}, y^{h_{(2)}}] = h[x, y] = -h[y, x] = -[y^{h_{(1)}}, x^{h_{(2)}}] = [x^{h_{(2)}}, y^{h_{(1)}}]$$

в $L(X|H)$ для всех $x, y \in X$, т.е. в случае, когда множество X состоит более чем из одного элемента и $h_{(1)} \otimes h_{(2)} \neq h_{(2)} \otimes h_{(1)}$, алгебра Ли $L(X|H)$ не является свободной в качестве обычной алгебры Ли.

Элементы алгебры $L(X|H)$ называются *лиевскими H-многочленами* от переменных из множества X. Если L — H-модульная алгебра, то пересечение $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ ядер всевозможных гомоморфизмов H-модульных алгебр Ли $\varphi\colon L(X|H) \to L$ называется множеством *лиевских полиномиальных H-тождеств алгебры* L. Учитывая универсальное свойство алгебры $L(X|H)$, легко видеть, что множество $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ состоит из всех лиевских H-многочленов, которые обращаются в нуль при подстановке элементов алгебры L вместо своих переменных. Множество $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ является таким H-инвариантным идеалом алгебры $L(X|H)$, что $\psi(\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)) \subseteq \mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ для любого эндоморфизма $\psi\colon L(X|H) \to L(X|H)$, сохраняющего на $L(X|H)$ структуру алгебры Ли и H-модуля. Обратно, если I — идеал алгебры Ли $L(X|H)$, инвариантный относительно действия алгебры H и эндоморфизмов H-модульной алгебры Ли $L(X|H)$, то $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L(X|H)/I) = I$.

Как и выше, для описания всех лиевских полиномиальных H-тождеств достаточно положить $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Пусть
$$V^H_n := \langle [x^{h_1}_{\sigma(1)}, x^{h_2}_{\sigma(2)}, \ldots, x^{h_n}_{\sigma(n)}] \mid \sigma \in S_n,\ h_i \in H\rangle_F \subset L(X|H).$$
Элементы пространств V^H_n называются *полилинейными лиевскими H-многочленами*, а элементы пространств $V^H_n \cap \mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ называются *полилинейными лиевскими H-тождествами* алгебры L.

Если рассмотреть функции на алгебре L со значениями в алгебре L, соответствующие неассоциативным и лиевским H-многочленам, то соответствие $x^h_i \mapsto x^h_i$, $i \in \mathbb{N}$, $h \in H$, индуцирует изоморфизм $F\{X|H\}/\mathrm{Id}^H(L) \cong L(X|H)/\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ алгебр Ли и изоморфизм H- и FS_n-модулей $\frac{W^H_n}{W^H_n \cap \mathrm{Id}^H(L)} \cong \frac{V^H_n}{V^H_n \cap \mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)}$. Это означает, что для алгебры Ли можно отождествить неассоциативные и лиевские «нетождества».

Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $c^H_n(L) = \dim \left(\frac{V^H_n}{V^H_n \cap \mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)}\right)$ и определение n-й коразмерности, n-го кохарактера и n-й кодлины полиномиальных H-тождеств алгебры Ли L не зависит от того, используем ли мы алгебру $F\{X|H\}$ или алгебру $L(X|H)$.

Ниже при работе с алгебрами Ли идеал $\mathrm{Id}^H_{\mathrm{Lie}}(L)$ для краткости также обозначается через $\mathrm{Id}^H(L)$, а H-многочлены берутся из алгебры $L(X|H)$.

6.3 Градуированные полиномиальные тождества

Пусть T — множество, а F — поле.

Рассмотрим (абсолютно) свободную неассоциативную алгебру $F\{X^{T\text{-gr}}\}$ на объединении
$$X^{T\text{-gr}} := \bigsqcup_{t \in T} X^{(t)}$$
непересекающихся множеств $X^{(t)} = \{x^{(t)}_1, x^{(t)}_2, \ldots\}$

Говорят, что $f = f(x^{(t_1)}_{i_1}, \ldots, x^{(t_s)}_{i_s})$ — *градуированное полиномиальное тождество* для T-градуированной алгебры $A = \bigoplus_{t \in T} A^{(t)}$ и пишут $f \equiv 0$, если $f(a^{(t_1)}_1, \ldots, a^{(t_s)}_s) = 0$ для всех $a^{(t_j)}_j \in A^{(t_j)}$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Множество $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$ градуированных полиномиальных тождеств алгебры A является идеалом алгебры $F\{X^{T\text{-gr}}\}$.

Замечание 6.12. Если множество T не наделено структурой (полу)группы, мы не рассматриваем никакой градуировки на самой алгебре $F\{X^{T\text{-gr}}\}$. Если T — полугруппа, то алгебра $F\{X^{T\text{-gr}}\}$ также является T-градуированной, где T-степень всякого одночлена является произведением T-степеней множителей. В этом случае всякая подстановка однородных элементов алгебры A вместо переменных соответствующих T-степеней индуцирует (строго) градуированный гомоморфизм $F\{X^{T\text{-gr}}\} \to A$.

Пример 6.13. Рассмотрим полугруппу $T = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ по умножению и T-градуировку $\mathrm{UT}_2(F) = \mathrm{UT}_2(F)^{(\bar{0})} \oplus \mathrm{UT}_2(F)^{(\bar{1})}$ на алгебре $\mathrm{UT}_2(F)$ верхнетреугольных матриц 2×2 над полем F, заданную равенствами $\mathrm{UT}_2(F)^{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ и $\mathrm{UT}_2(F)^{(\bar{0})} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$[x^{(\bar{1})}, y^{(\bar{1})}] := x^{(\bar{1})}y^{(\bar{1})} - y^{(\bar{1})}x^{(\bar{1})} \in \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(\mathrm{UT}_2(F))$$

и $x^{(\bar{0})}y^{(\bar{0})} \in \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(\mathrm{UT}_2(F))$.

Пусть

$$W_n^{T\text{-gr}} := \langle x^{(t_1)}_{\sigma(1)} x^{(t_2)}_{\sigma(2)} \dots x^{(t_n)}_{\sigma(n)} \mid t_i \in T, \sigma \in S_n \rangle_F \subset F\{X^{T\text{-gr}}\}$$

(на одночленах рассматриваются всевозможные расстановки скобок), $n \in \mathbb{N}$. Элементы пространства $W_n^{T\text{-gr}}$ называются *полилинейными T-градуированными многочленами степени n.*[1] Число

$$c_n^{T\text{-gr}}(A) := \dim \left(\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)} \right)$$

называется n-й *коразмерностью градуированных полиномиальных тождеств* или n-й *градуированной коразмерностью* алгебры A.

Предел $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)}$ (если он существует) называется *экспонентой роста T-градуированных тождеств* или *T-градуированной PI-экспонентой* алгебры A.

Симметрическая группа S_n действует на пространстве $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$ перестановками переменных внутри каждого множества $X^{(t)}$:

$$\sigma x^{(t_1)}_{i_1} \dots x^{(t_n)}_{i_n} := x^{(t_1)}_{\sigma(i_1)} \dots x^{(t_n)}_{\sigma(i_n)}$$

при $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$, $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Характер $\chi_n^{T\text{-gr}}(A)$ представления группы S_n на пространстве $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$ называется n-м *кохарактером* градуированных полиномиальных тождеств алгебры A. Если $\operatorname{char} F = 0$, n-й кохарактер представляется в виде суммы

$$\chi_n^{T\text{-gr}}(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m(A, T\text{-gr}, \lambda)\chi(\lambda)$$

неприводимых характеров $\chi(\lambda)$. Число $\ell_n^{T\text{-gr}}(A) := \sum_{\lambda \vdash n} m(A, T\text{-gr}, \lambda)$ называется n-й *кодлиной* градуированных полиномиальных тождеств алгебры A.

[1] Элементы пространств $W_n^{T\text{-gr}}$, названные нами полилинейными многочленами, конечно же, таковыми не являются, если их рассматривать как многочлены от переменных $x_i^{(t)}$. Однако они являются полилинейными функциями от переменных x_i, если рассматривать $x_i^{(t)}$ как t-компоненту переменной x_i (см. ниже).

При изучении тождеств в ассоциативных алгебрах и алгебрах Ли вместо свободных неассоциативных алгебр можно использовать, соответственно, свободные ассоциативные алгебры и свободные алгебры Ли.

В случае T-градуированных ассоциативных алгебр градуированные многочлены являются элементами свободной ассоциативной алгебры $F\langle X^{T\text{-gr}}\rangle$ на множестве $X^{T\text{-gr}}$, причём в случае, когда T — полугруппа, алгебра $F\langle X^{T\text{-gr}}\rangle$ сама оказывается T градуированной. Вводятся пространства $P_n^{T\text{-gr}} \subset F\langle X^{T\text{-gr}}\rangle$ полилинейных ассоциативных T-градуированных многочленов степени n. Множество $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{assoc}}(A)$ ассоциативных градуированных полиномиальных тождеств T-градуированной ассоциативной алгебры A является идеалом алгебры $F\langle X^{T\text{-gr}}\rangle$.

В случае градуировок алгебр Ли можно, с одной стороны, использовать свободную алгебру Ли $L(X^{T\text{-gr}})$ на множестве $X^{T\text{-gr}}$. С другой стороны, в случае, когда T — полугруппа, можно, кроме этого, использовать алгебру $L(X)^{T\text{-gr}}$, которая по определению является факторалгеброй алгебры $F\{X^{T\text{-gr}}\}$ по градуированному идеалу, порождённому тождеством Якоби и тождеством антикоммутативности. Если $\operatorname{char} F \neq 2$, то из тождества антикоммутативности следует, что $L(X)^{T\text{-gr}} \cong L(X^{T\text{-gr}})$, если и только если (полу)группа T коммутативна. Обозначим через $V_n^{T\text{-gr}}$ подпространство полилинейных лиевских T-градуированных многочленов степени n одной из этих двух алгебр. Пусть $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{Lie}}(L)$ — идеал лиевских градуированных полиномиальных тождеств T-градуированной алгебры Ли L.

Точно так же, как и в случае H-тождеств (см. предыдущие два параграфа), коразмерности и кохарактеры не зависят от того, какую свободную алгебру мы используем. Отождествление происходит следующим образом: всякий T-градуированный многочлен f (вне зависимости от свободной алгебры, элементом которой он является) можно рассматривать как функцию на T-градуированной алгебре A со значениями в A. Пусть задан счётный набор $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов алгебры A. Обозначим через $a_n^{(t)}$ однородные компоненты этих элементов: $a_n = \sum_{t\in T} a_n^{(t)}$, где $a_n^{(t)} \in A^{(t)}$ и для всякого n лишь конечное число элементов $a_n^{(t)}$ ненулевые. Тогда значение многочлена f на наборе $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ определяется как результат подстановки $x_n^{(t)} \mapsto a_n^{(t)}$. При этом оказывается, что функции с тождественно нулевыми значениями соответствуют градуированным полиномиальным тождествам. Для ассоциативной T-градуированной алгебры A соответствие $x_i^{(t)} \mapsto x_i^{(t)}$, $i \in \mathbb{N}$, $t \in T$, индуцирует изоморфизм $F\{X^{T\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(A) \cong F\langle X^{T\text{-gr}}\rangle/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{assoc}}(A)$ алгебр и изоморфизм FS_n-модулей $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)} \cong \frac{P_n^{T\text{-gr}}}{P_n^{T\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{assoc}}(A)}$. Для T-градуированной алгебры Ли L это же соответствие индуцирует изоморфизм $F\{X^{T\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(L) \cong L(X^{T\text{-gr}})/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{Lie}}(L)$ алгебр Ли и изоморфизм FS_n-модулей $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(L)} \cong \frac{V_n^{T\text{-gr}}}{V_n^{T\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{Lie}}(L)}$, причём аналогичные изоморфизмы имеют место и в случае, когда вместо алгебры Ли $L(X^{T\text{-gr}})$ рассматривается алгебра Ли $L(X)^{T\text{-gr}}$.

В силу выше сделанных замечаний при изучении градуированных «нетождеств», коразмерностей и кохарактеров оказывается несущественным, какие свободные алгебры использовать. В связи с этим далее идеалы $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{assoc}}(A)$ и $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}_{\mathrm{Lie}}(L)$ также будут обозначаться, соответственно, через $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$ и $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(L)$.

Предложение ниже устанавливает связь между обычными и градуированными коразмерностями:

Предложение 6.14. *Пусть A — алгебра над полем F, градуированная некоторым множеством T (необязательно конечным). Тогда $c_n(A) \leqslant c_n^{T\text{-gr}}(A)$. Кроме того, если множество T конечно, то $c_n^{T\text{-gr}}(A) \leqslant |T|^n c_n(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $t_1, \ldots, t_n \in T$. Обозначим через $W_{t_1,\ldots,t_n}$ пространство полилинейных неассоциативных многочленов от переменных $x_1^{(t_1)}, \ldots, x_n^{(t_n)}$ с коэффициентами из поля F. Тогда $W_n^{T\text{-gr}} = \bigoplus_{t_1,\ldots,t_n \in T} W_{t_1,\ldots,t_n}$. Более того,

$$\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)} \cong \bigoplus_{t_1,\ldots,t_n \in T} \frac{W_{t_1,\ldots,t_n}}{W_{t_1,\ldots,t_n} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}, \tag{6.3}$$

поскольку компонента любого градуированного тождества, отвечающая подпространству $W_{t_1,\ldots,t_n}$ выделяется подстановкой $x_i^{(t)} = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ и $t \neq t_i$. Отметим, что изоморфизм (6.3) существует для любой характеристики поля F.

Пусть $f_1, \ldots, f_{c_n(A)} \in W_n$ такие многочлены, что $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_{c_n(A)}$ — базис пространства $\frac{W_n}{W_n \cap \mathrm{Id}(A)}$. Тогда для любого одночлена $w = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ (с любой расстановкой скобок), $\sigma \in S_n$, существуют $\alpha_{w,i} \in F$ такие, что

$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} - \sum_{i=1}^{c_n(A)} \alpha_{w,i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A).$$

Заменяя для каждого набора элементов $t_1, \ldots, t_n \in T$ переменные x_i на $x_i^{(t_i)}$, получим

$$x_{\sigma(1)}^{\left(t_{\sigma(1)}\right)} \ldots x_{\sigma(n)}^{\left(t_{\sigma(n)}\right)} - \sum_{i=1}^{c_n(A)} \alpha_{w,i} f_i\left(x_1^{(t_1)}, \ldots, x_n^{(t_n)}\right) \in \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$$

и

$$\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)} = \left\langle \bar{f}_i\left(x_1^{(t_1)}, \ldots, x_n^{(t_n)}\right) \,\middle|\, 1 \leqslant i \leqslant c_n(A),\ t_1, \ldots, t_n \in T \right\rangle_F.$$

Отсюда получаем оценку сверху для $c_n^{T\text{-gr}}(A)$ в случае, когда множество T конечно.

Для того, чтобы получить нижнюю оценку для $c_n^{T\text{-gr}}(A)$, для заданного набора $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$ рассмотрим отображение $\varphi_{t_1,\ldots,t_n} \colon W_n \to \frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$, где $\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(f)$ — образ многочлена $f\left(x_1^{(t_1)}, \ldots, x_n^{(t_n)}\right)$ в $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$ при $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in W_n$. Из полилинейности многочлена f следует, что $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ является обычным тождеством, если и только если

$$f\left(x_1^{(t_1)}, \ldots, x_n^{(t_n)}\right) \equiv 0$$

является градуированным полиномиальным тождеством для всех $t_1, \ldots, t_n \in T$. Другими словами, $W_n \cap \mathrm{Id}(A) = \bigcap_{(t_1,\ldots,t_n) \in T^n} \ker \varphi_{t_1,\ldots,t_n}$. Поскольку пространство W_n конечномерно, существует конечное подмножество $\Lambda \subseteq T^n$ такое, что $W_n \cap \mathrm{Id}(A) = \bigcap_{(t_1,\ldots,t_n) \in \Lambda} \ker \varphi_{t_1,\ldots,t_n}$.

Рассмотрим вложение

$$W_n \hookrightarrow W_n^{T\text{-gr}} = \bigoplus_{t_1,\ldots,t_n \in T} W_{t_1,\ldots,t_n},$$

где образ многочлена $f(x_1,\dots,x_n) \in W_n$ равен $\sum_{(t_1,\dots,t_n)\in\Lambda} f\left(x_1^{(t_1)},\dots,x_n^{(t_n)}\right)$. Тогда из (6.3) и нашего выбора множества Λ следует, что индуцированное отображение $\frac{W_n}{W_n\cap \mathrm{Id}(A)} \hookrightarrow \frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$ является вложением, откуда и следует оценка снизу. $\square$

Выше в примере 5.4 мы показали, что любая T-градуированная алгебра A с конечным носителем градуировки является алгеброй с обобщённым F^T-действием. Покажем, что изучение градуированных коразмерностей и кохарактеров такой алгебры A можно свести к изучению коразмерностей и кохарактеров её полиномиальных F^T-тождеств.

Предложение 6.15. *Пусть* $\Gamma\colon A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ *— градуировка алгебры* A *над полем* F *множеством* T *с конечным носителем* $\operatorname{supp}\Gamma$. *Тогда* $c_n^{T\text{-gr}}(A) = c_n^{F^T}(A)$ *и* $\chi_n^{T\text{-gr}}(A) = \chi_n^{F^T}(A)$ *для всех* $n\in\mathbb{N}$. *Если, кроме того,* $\operatorname{char} F = 0$, *то* $\ell_n^{T\text{-gr}}(A) = \ell_n^{F^T}(A)$.

Доказательство. Пусть $\xi\colon F\{X|F^T\} \to F\{X^{T\text{-gr}}\}$ — гомоморфизм алгебр, заданный равенствами $\xi(x_i^q) = \sum\limits_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)x_i^{(t)}$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и $q\in F^T$. Пусть $f\in \mathrm{Id}^{F^T}(A)$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\psi\colon F\{X^{T\text{-gr}}\}\to A$ такой, что $\psi(x_i^{(t)}) \in A^{(t)}$ для всех $t\in T$ и $i\in\mathbb{N}$. Тогда гомоморфизм алгебр $\psi\xi\colon F\{X|F^T\}\to A$ удовлетворяет условию

$$\psi\xi(x_i^q) = \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\psi\left(x_i^{(t)}\right) = q\left(\sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma}\psi\left(x_i^{(t)}\right)\right) = q\,\psi\xi(x_i).$$

Следовательно, для всякого такого гомоморфизма ψ справедливо равенство $\psi\xi(f)=0$. Отсюда $\xi(f)\in\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$ и $\xi\left(\mathrm{Id}^{F^T}(A)\right)\subseteq \mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$. Обозначим через

$$\tilde\xi\colon F\{X|F^T\}/\,\mathrm{Id}^{F^T}(A) \to F\{X^{T\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$$

гомоморфизм, индуцированный ξ.

Пусть $\eta\colon F\{X^{T\text{-gr}}\} \to F\{X|F^T\}$ — гомоморфизм алгебр, заданный равенствами $\eta\left(x_i^{(t)}\right) = x_i^{q_t}$ при $i\in\mathbb{N}$ и $t\in T$, где $q_t(s) := \left\{\begin{smallmatrix} 1 & \text{при } s=t,\\ 0 & \text{при } s\neq t.\end{smallmatrix}\right.$ Рассмотрим произвольное градуированное полиномиальное тождество $f\in\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$. Пусть $\psi\colon F\{X|F^T\}\to A$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условию $\psi(x_i^q) = q\psi(x_i)$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и $q\in F^T$. Тогда для всех $i\in\mathbb{N}$ и $g,t\in T$ справедливы равенства

$$q_g\psi\eta\left(x_i^{(t)}\right) = q_g\psi(x_i^{q_t}) = q_gq_t\psi(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при}\quad g\neq t,\\ \psi\eta\left(x_i^{(t)}\right) & \text{при}\quad g=t.\end{cases}$$

Следовательно, $\psi\eta\left(x_i^{(t)}\right)\in A^{(t)}$. Отсюда $\psi\eta(f)=0$ и $\eta(\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A))\subseteq\mathrm{Id}^{F^T}(A)$. Обозначим через $\tilde\eta\colon F\{X^{T\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)\to F\{X|F^T\}/\,\mathrm{Id}^{F^T}(A)$ индуцированный гомоморфизм.

Ниже используются обозначения $\bar f = f + \mathrm{Id}^{F^T}(A) \in F\{X|F^T\}/\,\mathrm{Id}^{F^T}(A)$ для $f\in F\{X|F^T\}$ и $\bar f = f+\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)\in F\{X^{T\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$ для $f\in F\{X^{T\text{-gr}}\}$. Заметим, что

$$x_i^q - \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)x_i^{q_t} \in \mathrm{Id}^{F^T}(A)$$

для всех $q\in F^T$ и $i\in\mathbb{N}$. Следовательно,

$$\tilde\eta\tilde\xi\left(\bar x_i^q\right) = \tilde\eta\left(\sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\bar x_i^{(t)}\right) = \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\bar x_i^{q_t} = \bar x_i^q$$

для всех $q \in F^T$ и $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что $\tilde{\eta}\tilde{\xi} = \mathrm{id}_{F\{X|F^T\}/\operatorname{Id}^{F^T}(A)}$, поскольку алгебра $F\{X|F^T\}/\operatorname{Id}^{F^T}(A)$ порождена элементами $\bar{x}_i^q$, где $q \in F^T$ и $i \in \mathbb{N}$. Более того, $\tilde{\xi}\tilde{\eta}\left(\bar{x}_i^{(t)}\right) = \tilde{\xi}\left(\bar{x}_i^{q_t}\right) = \bar{x}_i^{(t)}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma$ и $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\tilde{\xi}\tilde{\eta} = \mathrm{id}_{F\{X^{T\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$ и $F\{X^{T\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(A) \cong F\{X|F^T\}/\operatorname{Id}^{F^T}(A)$ как алгебры. Ограничение изоморфизма $\tilde{\xi}$ является изоморфизмом FS_n-модулей $\frac{W_n^{F^T}}{W_n^{F^T}\cap\operatorname{Id}^{F^T}(A)}$ и $\frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}}\cap\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(A)}$. Следовательно,

$$c_n^{F^T}(A) = \dim \frac{W_n^{F^T}}{W_n^{F^T}\cap\operatorname{Id}^{F^T}(A)} = \dim \frac{W_n^{T\text{-gr}}}{W_n^{T\text{-gr}}\cap\operatorname{Id}^{T\text{-gr}}(A)} = c_n^{T\text{-gr}}(A)$$

и $\chi_n^{T\text{-gr}}(A) = \chi_n^{F^T}(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, $\operatorname{char} F = 0$, тогда выполнены и равенства $\ell_n^{T\text{-gr}}(A) = \ell_n^{F^T}(A)$. □

Следствие 6.16. *Пусть A — конечномерная алгебра над произвольным полем, градуированная произвольным множеством T. Тогда $c_n^{T\text{-gr}}(A) \leqslant (\dim A)^{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу конечномерности алгебры A носитель градуировки конечен, поэтому достаточно применить предложения 6.8 и 6.15. □

При работе с градуированными тождествами в алгебрах Ли нам будет удобно использовать также действие группы линейных характеров градуирующей группы.

Результат леммы 6.17 не является новым, однако для удобства читателя мы приведём его доказательство:

Лемма 6.17. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, G — конечнопорождённая абелева группа, а $\hat{G} := \operatorname{Hom}(G, F^\times)$ — группа гомоморфизмов из G в мультипликативную группу $F^\times$ поля F. Рассмотрим элементы групповой алгебры $F\hat{G}$ как функции на G. Тогда для всех попарно различных элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in G$ существуют такие элементы $h_1, \dots, h_m \in F\hat{G}$, что $h_i(\gamma_j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$*

Доказательство. В случае, когда группа G конечна, из соотношений ортогональности для характеров следует, что пространство всех функций на G со значениями из F является линейной оболочкой группы $\hat{G}$. Отсюда такие функции h_i всегда можно найти.

Теперь рассмотрим случай, когда $G = \langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа, достаточно определить элемент $\chi \in \hat{G}$ через $\chi(g^k) = \lambda^k$, где $\lambda \in F^\times$ — фиксированный элемент бесконечного порядка. Тогда из невырожденности матрицы Вандермонда следует, что элементы $1, \chi, \chi^2, \dots, \chi^{m-1}$ линейно независимы как функции от $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и требуемые $h_1, \dots, h_m$ можно найти и в этом случае.

В общем случае в силу теоремы о строении конечнопорождённых абелевых групп $G = G_1 \times \mathbb{Z}^s$, где G_1 — конечная группа. Следовательно, $\hat{G} = \hat{G}_1 \times (F^\times)^s$, где $\hat{G}_1$ — группа линейных характеров группы G_1. Выберем теперь свои элементы для каждой компоненты прямого произведения, рассмотрим их произведения и получим соответствующие элементы $h_1, \dots, h_m \in F\hat{G}$. □

Для любой группы G на любом G-градуированном пространстве $V = \bigoplus_{g \in G} V^{(g)}$ можно задать структуру $F\hat{G}$-модуля:

$$\chi v = \chi(g)v \text{ для всех } \chi \in \hat{G},\ g \in G \text{ и } v \in V^{(g)}.$$

При этом всякая G-градуированная алгебра A оказывается алгеброй с действием группы $\hat{G}$ автоморфизмами, причём в силу леммы 6.17 градуированные подпространства являются в точности $F\hat{G}$-подмодулями.

Замечание 6.18. Можно доказать, что для всякой конечнопорождённой абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 алгебра Хопфа FG не содержит ненулевых нильпотентных элементов, откуда будет следовать, что $FG = \mathcal{O}(\hat{G})$, где $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, F^{\times}) = \mathbf{Alg}(FG, F)$ — множество максимальных идеалов алгебры Хопфа FG, которое наделено естественной структурой аффинной алгебраической группы, причём групповая операция на $\hat{G}$, единица и взятие обратного являются двойственными операциями к, соответственно, коумножению, коединице и антиподу алгебры Хопфа FG. (См. [27, §4.2.1].) Конечномерные FG-комодули, т.е. конечномерные G-градуированные пространства, будут являться в точности рациональными представлениями группы $\hat{G}$. Поскольку группа $\hat{G}$ является прямым произведением конечной абелевой группы на тор, любое такое конечномерное представление раскладывается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств, т.е. является вполне приводимым, откуда группа $\hat{G}$ редуктивна.

Оказывается, что $\hat{G}$-коразмерности совпадают с G-градуированными коразмерностями:

Предложение 6.19. *Пусть $\Gamma \colon A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ — необязательно ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, градуированная конечнопорождённой абелевой группой G, причём носитель градуировки $\operatorname{supp} \Gamma$ конечен. Рассмотрим на A действие группы $F\hat{G}$ автоморфизмами, заданное выше. Тогда $c_n^{G\text{-gr}}(A) = c^{F\hat{G}}(A)$, $\chi_n^{G\text{-gr}}(A) = \chi_n^{F\hat{G}}(A)$ и $\ell_n^{G\text{-gr}}(A) = \ell_n^{F\hat{G}}(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} := \operatorname{supp} \Gamma$. Теперь достаточно выбрать элементы $h_1, \ldots, h_m \in F\hat{G}$ в соответствии с леммой 6.17 и дословно повторить доказательство предложения 6.15, используя вместо q_t элемент h_i при $t = \gamma_i$ и элемент 0 при $t \notin \operatorname{supp} \Gamma$. □

6.4 Градуированные H-тождества

Для алгебры, на которой задано обобщённое H-действие, согласованное с некоторой T-градуировкой, можно ввести понятие градуированного H-тождества

Пусть H — ассоциативная алгебра с единицей над полем F, а T — некоторое множество. Рассмотрим свободную неассоциативную алгебру $F\{X^{T\text{-gr}}|H\}$ на множестве $X^{T\text{-gr}}$ с символами операторов из алгебры H (см. §6.1), где $X^{T\text{-gr}} := \bigsqcup_{t \in T} X^{(t)}$ — объединение непересекающихся множеств $X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots\}$.

Будем говорить, что $f = f(x_{i_1}^{(t_1)}, \ldots, x_{i_s}^{(t_s)}) \in F\{X^{T\text{-gr}}|H\}$ — *градуированное полиномиальное H-тождество* для T-градуированной алгебры $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ с согласованным обобщённым H-действием и писать $f \equiv 0$, если $f(a_1^{(t_1)}, \ldots, a_s^{(t_s)}) = 0$ для всех $a_j^{(t_j)} \in A^{(t_j)}$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Множество $\mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$ градуированных полиномиальных H-тождеств алгебры A является идеалом алгебры $F\{X^{T\text{-gr}}|H\}$.

Пусть

$$W_n^{T\text{-gr},H} := \left\langle \left(x_{\sigma(1)}^{(t_1)}\right)^{h_1} \left(x_{\sigma(2)}^{(t_2)}\right)^{h_2} \ldots \left(x_{\sigma(n)}^{(t_n)}\right)^{h_n} \;\middle|\; \sigma \in S_n,\ t_i \in T,\ h_i \in H \right\rangle_F \subset F\{X|H\},$$

где S_n — n-я группа подстановок, $n \in \mathbb{N}$ и на одночленах рассматриваются всевозможные расстановки скобок. Элементы пространств $W_n^{T\text{-gr},H}$ называются *полилинейными неассоциативными T-градуированными H-многочленами*, а элементы пространств $W_n^{T\text{-gr},H} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$ называются *полилинейными градуированными H-тождествами* алгебры A.

Число $c_n^{T\text{-gr},H}(A) := \dim\left(\frac{W_n^{T\text{-gr},H}}{W_n^{T\text{-gr},H} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)}\right)$, где $n \in \mathbb{N}$, называется *n-й коразмерностью T-градуированных полиномиальных H-тождеств* или *n-й T-градуированной H-коразмерностью* алгебры A.

Предел $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr},H}(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr},H}(A)}$ (если он существует) называется *экспонентой роста T-градуированных полиномиальных H-тождеств* или *T-градуированной H-PI-экспонентой* алгебры A.

Симметрическая группа S_n действует на пространстве $\frac{W_n^{T\text{-gr},H}}{W_n^{T\text{-gr},H} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)}$ перестановками переменных внутри каждого множества $X^{(t)}$:

$$\sigma \left(x_{i_1}^{(t_1)}\right)^{h_1} \ldots \left(x_{i_n}^{(t_n)}\right)^{h_n} := \left(x_{\sigma(i_1)}^{(t_1)}\right)^{h_1} \ldots \left(x_{\sigma(i_n)}^{(t_n)}\right)^{h_n}$$

при $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$, $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Характер $\chi_n^{T\text{-gr},H}(A)$ представления группы S_n на пространстве $\frac{W_n^{T\text{-gr},H}}{W_n^{T\text{-gr},H} \cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)}$ называется n-м *кохарактером* градуированных полиномиальных H-тождеств алгебры A. Если $\operatorname{char} F = 0$, n-й кохарактер представляется в виде суммы

$$\chi_n^{T\text{-gr},H}(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m(A, T\text{-gr}, H, \lambda)\chi(\lambda)$$

неприводимых характеров $\chi(\lambda)$. Число $\ell_n^{T\text{-gr},H}(A) := \sum_{\lambda\vdash n} m(A, T\text{-gr}, H, \lambda)$ называется n-й *кодлиной* градуированных полиномиальных H-тождеств алгебры A.

По аналогии с градуированными тождествами и H-тождествами можно ввести лиевские и ассоциативные свободные алгебры $L(X^{T\text{-gr}}|H)$ и $F\langle X^{T\text{-gr}}|H\rangle$, определить соответствующие градуированные полиномиальные H-тождества и показать, что коразмерности, кодлины и кохарактеры не зависят от того, из какой свободной алгебры берутся градуированные H-многочлены.

В теореме 5.10 было доказано, что любое обобщённое H-действие, согласованное с некоторой T-градуировкой сводится к обобщённому $F^T \otimes H$-действию. По аналогии с предложением 6.15 покажем, что коразмерности соответствующих тождеств также совпадают.

Предложение 6.20. *Пусть $\Gamma\colon A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — T-градуировка на алгебре A над полем F, где T — некоторое множество, причём на A также заданное такое обобщённое*

H-действие, что H — ассоциативная алгебра с 1, $HA^{(t)} \subseteq A^{(t)}$ для всех $t \in T$, а носитель $\operatorname{supp}\Gamma$ *градуировки* Γ *конечен. Тогда*

$$c_n^{T\text{-gr},H}(A) = c_n^{F^T\otimes H}(A) \quad \text{и} \quad \chi_n^{T\text{-gr},H}(A) = \chi_n^{F^T\otimes H}(A) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Если, кроме того, $\operatorname{char} F = 0$, *то* $\ell_n^{T\text{-gr},H}(A) = \ell_n^{F^T\otimes H}(A)$.

Доказательство. Пусть $\xi\colon F\{X|F^T\otimes H\} \to F\{X^{T\text{-gr}}|H\}$ — гомоморфизм алгебр, заданный равенствами $\xi(x_i^{q\otimes h}) = \sum\limits_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\left(x_i^{(t)}\right)^h$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $q \in F^T$, $h \in H$. Пусть $f \in \operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\psi\colon F\{X^{T\text{-gr}}|H\} \to A$ такой, что $\psi(x_i^{(t)}) \in A^{(t)}$ и $\psi\left(\left(x_i^{(t)}\right)^h\right) = h\psi(x_i^{(t)})$ для всех $t \in T$, $i \in \mathbb{N}$ и $h \in H$. Тогда гомоморфизм алгебр $\psi\xi\colon F\{X|F^T\otimes H\} \to A$ удовлетворяет условию

$$\psi\xi(x_i^{q\otimes h}) = \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\psi\left(\left(x_i^{(t)}\right)^h\right) = (q\otimes h)\sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma}\psi\left(x_i^{(t)}\right) = (q\otimes h)\,\psi\xi(x_i).$$

Следовательно, для всякого такого гомоморфизма ψ справедливо равенство $\psi\xi(f) = 0$. Отсюда $\xi(f) \in \operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$ и $\xi\left(\operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)\right) \subseteq \operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$. Обозначим через

$$\tilde\xi\colon F\{X|F^T\otimes H\}/\operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A) \to F\{X^{T\text{-gr}}|H\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$$

гомоморфизм, индуцированный ξ.

Пусть $\eta\colon F\{X^{T\text{-gr}}|H\} \to F\{X|F^T\otimes H\}$ — гомоморфизм алгебр, заданный равенствами $\eta\left(\left(x_i^{(t)}\right)^h\right) = x_i^{q_t\otimes h}$ при $i \in \mathbb{N}$ и $t \in T$. Рассмотрим произвольное градуированное полиномиальное H-тождество $f \in \operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$. Пусть $\psi\colon F\{X|F^T\otimes H\} \to A$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условию $\psi(x_i^{q\otimes h}) = (q\otimes h)\psi(x_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $q \in F^T$ и $h \in H$. Тогда для всех $i \in \mathbb{N}$ и $g, t \in T$ справедливы равенства

$$q_g\psi\eta\left(x_i^{(t)}\right) = q_g\psi\left(x_i^{q_t\otimes 1}\right) = q_g q_t\psi(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad g \ne t, \\ \psi\eta\left(x_i^{(t)}\right) & \text{при} \quad g = t. \end{cases}$$

Следовательно, $\psi\eta\left(x_i^{(t)}\right) \in A^{(t)}$. Кроме того,

$$\psi\eta\left(\left(x_i^{(t)}\right)^h\right) = \psi\left(x_i^{q_t\otimes h}\right) = h\,\psi\left(x_i^{q_t\otimes 1}\right) = h\,\psi\eta\left(x_i^{(t)}\right).$$

Отсюда $\psi\eta(f) = 0$ и $\eta(\operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)) \subseteq \operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)$. Обозначим через

$$\tilde\eta\colon F\{X^{T\text{-gr}}|H\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A) \to F\{X|F^T\otimes H\}/\operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)$$

индуцированный гомоморфизм.

Ниже используются обозначения $\bar f = f + \operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A) \in F\{X|F^T\otimes H\}/\operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)$ для $f \in F\{X|F^T\otimes H\}$ и $\bar{\bar f} = f + \operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A) \in F\{X^{T\text{-gr}}|H\}/\operatorname{Id}^{T\text{-gr},H}(A)$ для $f \in F\{X^{T\text{-gr}}|H\}$. Заметим, что

$$x_i^{q\otimes h} - \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)x_i^{q_t\otimes h} \in \operatorname{Id}^{F^T\otimes H}(A)$$

для всех $q \in F^T$, $h \in H$ и $i \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\tilde{\eta}\tilde{\xi}\left(\overline{x_i^{q\otimes h}}\right) = \tilde{\eta}\left(\sum_{t \in \operatorname{supp}\Gamma} q(t)\overline{\left(x_i^{(t)}\right)^h}\right) = \sum_{t\in\operatorname{supp}\Gamma} q(t)\overline{x_i^{q_t\otimes h}} = \overline{x_i^{q\otimes h}}$$

для всех $q \in F^T$, $h \in H$ и $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что

$$\tilde{\eta}\tilde{\xi} = \mathrm{id}_{F\{X|F^T\otimes H\}/\,\mathrm{Id}^{F^T\otimes H}(A)},$$

поскольку алгебра $F\{X|F^T\otimes H\}/\,\mathrm{Id}^{F^T\otimes H}(A)$ порождена элементами $\overline{x_i^{q\otimes h}}$, где $q \in F^T$, $h \in H$ и $i \in \mathbb{N}$. Более того, $\tilde{\xi}\tilde{\eta}\left(\overline{\left(x_i^{(t)}\right)^h}\right) = \tilde{\xi}\left(\overline{x_i^{q_t\otimes h}}\right) = \overline{\left(x_i^{(t)}\right)^h}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma$, $h \in H$ и $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\tilde{\xi}\tilde{\eta} = \mathrm{id}_{F\{X^{T\text{-gr}}|H\}/\,\mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)}$ и

$$F\{X^{T\text{-gr}}|H\}/\,\mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A) \cong F\{X|F^T\otimes H\}/\,\mathrm{Id}^{F^T\otimes H}(A)$$

как алгебры. Ограничение изоморфизма $\tilde{\xi}$ является изоморфизмом FS_n-модулей $\frac{W_n^{F^T\otimes H}}{W_n^{F^T\otimes H}\cap \mathrm{Id}^{F^T\otimes H}(A)}$ и $\frac{W_n^{T\text{-gr},H}}{W_n^{T\text{-gr},H}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)}$. Следовательно,

$$c_n^{F^T\otimes H}(A) = \dim \frac{W_n^{F^T\otimes H}}{W_n^{F^T\otimes H}\cap \mathrm{Id}^{F^T\otimes H}(A)} = \dim \frac{W_n^{T\text{-gr},H}}{W_n^{T\text{-gr},H}\cap \mathrm{Id}^{T\text{-gr},H}(A)} = c_n^{T\text{-gr},H}(A)$$

и $\chi_n^{T\text{-gr},H}(A) = \chi_n^{F^T\otimes H}(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, $\operatorname{char} F = 0$, тогда выполнены и равенства $\ell_n^{T\text{-gr},H}(A) = \ell_n^{F^T\otimes H}(A)$. □

6.5 Гипотеза Амицура и её аналоги

Напомним, что ассоциативная алгебра называется *PI-алгеброй*, если в ней выполняется хотя бы одно нетривиальное тождество, т.е. такое тождество, которое справедливо не во всех ассоциативных алгебрах.

В 1980-х годах Ш. Амицур выдвинул следующую гипотезу:

Гипотеза (Ш. Амицур)**.** *Пусть A — ассоциативная PI-алгебра над полем характеристики* 0*, а $c_n(A)$ — последовательность коразмерностей ее полиномиальных тождеств. Тогда существует* $\mathrm{PIexp}(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$*.*

Гипотеза Амицура была доказана М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [66, теорема 6.5.2] в 1999 году для всех ассоциативных алгебр. Кроме того, в 2002 году М. В. Зайцев [10] доказал аналог гипотезы Амицура для коразмерностей полиномиальных тождеств конечномерных алгебр Ли.

Для полиномиальных H-тождеств H-модульных ассоциативных алгебр аналог гипотезы Амицура может быть сформулирован в следующей форме, которая принадлежит Ю. А. Бахтурину:

Гипотеза (Ш. Амицур — Ю. А. Бахтурин)**.** *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра, где H — алгебра Хопфа на полем характеристики* 0*. Тогда существует предел* $\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$*, который является целым числом.*

В теоремах 7.13 и 7.14 гипотеза Амицура — Бахтурина доказывается для всех конечномерных H-модульных ассоциативных алгебр A, где H — алгебра Хопфа над полем характеристики 0 и либо радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем, либо H получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа кософримитивными элементами. В теореме 7.29 гипотеза Амицура — Бахтурина доказывается для всех H-модульных структур с единицей на алгебре двойных чисел $F[x]/(x^2)$. В общем же случае вопрос о справедливости гипотезы Амицура — Бахтурина остаётся открытым.

Вообще, под справедливостью аналога гипотезы Амицура для полиномиальных тождеств с дополнительной структурой (H- и G-тождеств, дифференциальных, градуированных, ...) будем понимать существование целой экспоненты роста коразмерностей соответствующих типов тождеств. Главы 7 и 8, а также часть главы 9 посвящены доказательству аналогов гипотезы Амицура для широкого класса ассоциативных алгебр и алгебр Ли с дополнительной структурой. Кроме этого, в главе 9 приводятся примеры конечномерных ассоциативных алгебр, градуированных полугруппами, с нецелой градуированной PI-экспонентой.

6.6 Совпадение H-коразмерностей для эквивалентных H-модульных структур

Понятие эквивалентности модульных структур существенно уменьшает число случаев, которые необходимо рассматривать при доказательстве аналога гипотезы Амицура, поскольку H-коразмерности эквивалентных H-модульных структур совпадают.

Другим приложением понятия эквивалентности модульных структур является возможность замены рационального действия связной аффинной алгебраической группы автоморфизмами на действие её алгебры Ли дифференцированиями и наоборот, основанная на теореме 2.36.

Лемма 6.21. *Пусть $\zeta_1\colon H_1 \to \operatorname{End}_F(A_1)$ и $\zeta_2\colon H_2 \to \operatorname{End}_F(A_2)$ — гомоморфизмы алгебр, отвечающие эквивалентным модульным структурам на (необязательно ассоциативных) алгебрах A_1 и A_2. Тогда существует изоморфизм алгебр*

$$F\{X|H_1\}/\operatorname{Id}^{H_1}(A_1) \mathrel{\widetilde{\to}} F\{X|H_2\}/\operatorname{Id}^{H_2}(A_2),$$

который при всяком $n \in \mathbb{N}$ сужается до изоморфизма FS_n-модулей

$$\frac{W_n^{H_1}}{W_n^{H_1} \cap \operatorname{Id}^{H_1}(A_1)} \mathrel{\widetilde{\to}} \frac{W_n^{H_2}}{W_n^{H_2} \cap \operatorname{Id}^{H_2}(A_2)}.$$

В частности, $c_n^{H_1}(A_1) = c_n^{H_2}(A_2)$ и $\chi_n^{H_1}(A) = \chi_n^{H_2}(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, $\operatorname{char} F = 0$, то $\ell_n^{H_1}(A) = \ell_n^{H_2}(A)$.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon A_1 \mathrel{\widetilde{\to}} A_2$ — эквивалентность H_1- и H_2-модульных структур, отвечающих гомоморфизмам ζ_1 и ζ_2, и пусть $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{End}_F(A_1) \mathrel{\widetilde{\to}} \operatorname{End}_F(A_2)$ — соответствующий изоморфизм алгебр линейных операторов. Согласно нашим предположениям,

$\tilde{\varphi}(\zeta_1(H_1)) = \zeta_2(H_2)$. Следовательно, существуют F-линейные отображения $\xi\colon H_1 \to H_2$ и $\theta\colon H_2 \to H_1$ (которые необязательно являются гомоморфизмами), такие что диаграмма ниже коммутирует в обоих направлениях:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, shift left, "\xi"] \arrow[d, "\zeta_1"'] & H_2 \arrow[l, shift left, "\theta"] \arrow[d, "\zeta_2"] \\ \operatorname{End}_F(A_1) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \operatorname{End}_F(A_2) \end{tikzcd}$$

Тогда

$$\xi(h)\varphi(a) = \varphi(ha) \text{ для всех } h \in H_1 \text{ и } a \in A_1 \tag{6.4}$$

и

$$\varphi(\theta(h)a) = h\varphi(a) \text{ для всех } h \in H_2 \text{ и } a \in A_1. \tag{6.5}$$

Определим гомоморфизмы алгебр $\tilde{\xi}\colon F\{X|H_1\} \to F\{X|H_2\}$ и $\tilde{\theta}\colon F\{X|H_2\} \to F\{X|H_1\}$ при помощи равенств $\tilde{\xi}\left(x_k^h\right) := x_k^{\xi(h)}$ для всех $h \in H_1$, $k \in \mathbb{N}$ и $\tilde{\theta}\left(x_k^h\right) := x_k^{\theta(h)}$ для всех $h \in H_2$, $k \in \mathbb{N}$. Из равенств (6.4) и (6.5) следует, что $\tilde{\xi}\left(\operatorname{Id}^{H_1}(A_1)\right) \subseteq \operatorname{Id}^{H_2}(A_2)$ и $\tilde{\theta}\left(\operatorname{Id}^{H_2}(A_2)\right) \subseteq \operatorname{Id}^{H_1}(A_1)$. Отсюда $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\theta}$ индуцируют гомоморфизмы $\bar{\xi}\colon F\{X|H_1\}/\operatorname{Id}^{H_1}(A_1) \to F\{X|H_2\}/\operatorname{Id}^{H_2}(A_2)$ и $\bar{\theta}\colon F\{X|H_2\}/\operatorname{Id}^{H_2}(A_2) \to F\{X|H_1\}/\operatorname{Id}^{H_1}(A_1)$. Заметим, что из (6.4) и (6.5) также следует, что $\theta(\xi(h))a = ha$ для всех $a \in A_1$ и $h \in H_1$ и $\xi(\theta(h))a = ha$ для всех $a \in A_2$ и $h \in H_2$. Следовательно $x^h - x^{\theta(\xi(h))} \in \operatorname{Id}^{H_1}(A_1)$ и $x^h - x^{\xi(\theta(h))} \in \operatorname{Id}^{H_2}(A_2)$. Отсюда $\bar{\theta}\bar{\xi} = \mathrm{id}_{F\{X|H_1\}/\operatorname{Id}^{H_1}(A_1)}$ и $\bar{\xi}\bar{\theta} = \mathrm{id}_{F\{X|H_2\}/\operatorname{Id}^{H_2}(A_2)}$, т.е. мы получаем требуемый изоморфизм.

Сравнивая степени H-многочленов, получаем, что $\bar{\xi}\left(\frac{W_n^{H_1}}{W_n^{H_1}\cap \operatorname{Id}^{H_1}(A_1)}\right) \subseteq \frac{W_n^{H_2}}{W_n^{H_2}\cap \operatorname{Id}^{H_2}(A_2)}$ и $\bar{\theta}\left(\frac{W_n^{H_2}}{W_n^{H_2}\cap \operatorname{Id}^{H_2}(A_2)}\right) \subseteq \frac{W_n^{H_1}}{W_n^{H_1}\cap \operatorname{Id}^{H_1}(A_1)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда и следует изоморфизм факторпространств и равенство коразмерностей. □

Лемма 6.21 будет использована ниже в §7.6.

Докажем теперь вариант этой леммы для эквивалентных градуировок:

Лемма 6.22. *Пусть $\Gamma_1\colon A_1 = \bigoplus_{t\in T_1} A_1^{(t)}$ и $\Gamma_2\colon A_2 = \bigoplus_{t\in T_2} A_2^{(t)}$ — групповые градуировки, а $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — изоморфизм алгебр над полем, являющийся эквивалентностью градуировок Γ_1 и Γ_2. Тогда существует изоморфизм алгебр*

$$F\{X^{T_1\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1) \xrightarrow{\sim} F\{X^{T_2\text{-gr}}\}/\operatorname{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2),$$

который при всяком $n \in \mathbb{N}$ сужается до изоморфизма FS_n-модулей

$$\frac{W_n^{T_1\text{-gr}}}{W_n^{T_1\text{-gr}} \cap \operatorname{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)} \xrightarrow{\sim} \frac{W_n^{T_2\text{-gr}}}{W_n^{T_2\text{-gr}} \cap \operatorname{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)}.$$

В частности, $c_n^{T_1\text{-gr}}(A_1) = c_n^{T_2\text{-gr}}(A_2)$ и $\chi_n^{T_1\text{-gr}}(A) = \chi_n^{T_2\text{-gr}}(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, $\operatorname{char} F = 0$, то $\ell_n^{T_1\text{-gr}}(A) = \ell_n^{T_2\text{-gr}}(A)$.

Доказательство. Эквивалентность φ индуцирует биекцию $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{supp}\Gamma_2$, где $\varphi\left(A_1^{(t)}\right) = A_2^{\left(\psi(t)\right)}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma_1$.

Определим гомоморфизмы алгебр $\xi\colon F\{X^{T_1\text{-gr}}\} \to F\{X^{T_2\text{-gr}}\}$ и $\theta\colon F\{X^{T_2\text{-gr}}\} \to F\{X^{T_1\text{-gr}}\}$ при помощи равенств

$$\xi\left(x_k^{(t)}\right) := \begin{cases} x_k^{\left(\psi(t)\right)} & \text{при} \quad t \in \operatorname{supp}\Gamma_1, \\ 0 & \text{при} \quad t \notin \operatorname{supp}\Gamma_1 \end{cases}$$

и

$$\theta\left(x_k^{(t)}\right) := \begin{cases} x_k^{\left(\psi^{-1}(t)\right)} & \text{при} \quad t \in \operatorname{supp}\Gamma_2, \\ 0 & \text{при} \quad t \notin \operatorname{supp}\Gamma_2, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$. Из определения биекции ψ следует, что $\xi\left(\mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)\right) \subseteq \mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)$ и $\theta\left(\mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)\right) \subseteq \mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)$. Отсюда ξ и θ индуцируют гомоморфизмы

$$\bar\xi\colon F\{X^{T_1\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1) \to F\{X^{T_2\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)$$

и

$$\bar\theta\colon F\{X^{T_2\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2) \to F\{X^{T_1\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1).$$

Заметим, что $\theta\left(\xi\left(x_k^{(t)}\right)\right) = x_k^{(t)}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma_1$, а $\xi\left(\theta\left(x_k^{(t)}\right)\right) = x_k^{(t)}$ для всех $t \in \operatorname{supp}\Gamma_2$ и $k \in \mathbb{N}$. Отсюда $\bar\theta\bar\xi = \mathrm{id}_{F\{X^{T_1\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)}$ и $\bar\xi\bar\theta = \mathrm{id}_{F\{X^{T_2\text{-gr}}\}/\,\mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)}$, т.е. мы получаем требуемый изоморфизм.

Сравнивая степени градуированных многочленов, получаем, что $\bar\xi\left(\frac{W_n^{T_1\text{-gr}}}{W_n^{T_1\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)}\right) \subseteq \frac{W_n^{T_2\text{-gr}}}{W_n^{T_2\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)}$ и $\bar\theta\left(\frac{W_n^{T_2\text{-gr}}}{W_n^{T_2\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T_2\text{-gr}}(A_2)}\right) \subseteq \frac{W_n^{T_1\text{-gr}}}{W_n^{T_1\text{-gr}}\cap \mathrm{Id}^{T_1\text{-gr}}(A_1)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда и следует изоморфизм факторпространств и равенство коразмерностей и кохарактеров. □

6.7 Оценка сверху для H-кодлин

В теореме 1 из работы [60] А. Джамбруно, М. В. Зайцев и С. П. Мищенко доказали, что

$$\ell_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m(A,\lambda) \leqslant (\dim A)(n+1)^{(\dim A)^2+\dim A}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

В теореме 6.27 ниже мы по аналогии доказываем такую же оценку сверху для H-кодлин конечномерных алгебр с обобщённым H-действием.

Пусть A — некоторая (необязательно ассоциативная) конечномерная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0.

Лемма 6.23. *Пусть C — коммутативная ассоциативная F-алгебра с единицей. Определим на $A \otimes C$ структуру алгебры с обобщённым H-действием при помощи равенств $h(a\otimes c) := ha \otimes c$, где $a \in A$ и $c \in C$. Тогда $\mathrm{Id}^H(A\otimes C) = \mathrm{Id}^H(A)$.*

Доказательство. Поскольку алгебра C с единицей, алгебра $A \otimes C$ содержит H-инвариантную подалгебру, изоморфную A, откуда $\mathrm{Id}^H(A\otimes C) \subseteq \mathrm{Id}^H(A)$. Доказательство обратного включения аналогично доказательству соответствующего включения для ассоциативных алгебр, не наделённых никаким действием, см. лемму 1.4.2 в [66]. $\square$

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — базис в алгебре A. Выберем некототрое число $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k]$ алгебру коммутативных ассоциативных многочленов от переменных ξ_{ij} со свободными членами и с коэффициентами из поля F. Алгебра

$$A \otimes F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k]$$

является алгеброй с обобщённым H-действием, заданным равенством

$$h(a \otimes f) := ha \otimes f \text{ при } a \in A \text{ и } f \in F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k].$$

Обозначим через $\tilde{A}_k$ пересечение всех H-инвариантных подалгебр алгебры $A \otimes F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k]$, содержащих элементы

$$\xi_j := \sum_{i=1}^{s} a_i \otimes \xi_{ij}, \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant k.$$

(Буквы ξ_j символизируют «элементы общего вида» алгебры A.)

Лемма 6.24. *Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in F\{X|H\}$. Тогда $f \in \mathrm{Id}^H(A)$, если и только если $f(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$ (как элемент алгебры $\tilde{A}_k$).*

Доказательство. Из леммы 6.23 следует, что

$$\mathrm{Id}^H(A) = \mathrm{Id}^H(A \otimes F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k]) \subseteq \mathrm{Id}^H(\tilde{A}_k).$$

В частности, если $f \in \mathrm{Id}^H(A)$, то $f(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$.

Обратно, предположим, что $f(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$. Докажем, что $f(b_1, \ldots, b_k) = 0$ для всех $b_j \in A$. Действительно, $b_j = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} a_i$ для некоторых $\alpha_{ij} \in F$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi \colon A \otimes F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k] \to A$$

H-модульных алгебр, заданный условием $a \otimes \xi_{ij} \mapsto \alpha_{ij} a$ для всех $a \in A$. Тогда

$$f(b_1, \ldots, b_k) = f(\varphi(\xi_1), \ldots, \varphi(\xi_k)) = \varphi(f(\xi_1, \ldots, \xi_k)) = 0$$

и $f \in \mathrm{Id}^H(A)$. $\square$

Лемма 6.25. *Обозначим через R_{kn} линейную оболочку в $\tilde{A}_k$ всевозможных произведений $(h_1 \xi_{i_1}) \ldots (h_n \xi_{i_n})$, где $h_j \in H$ и $1 \leqslant i_j \leqslant k$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда*

$$\dim R_{kn} \leqslant (\dim A)(n+1)^{k \dim A} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пространство $R_{kn} \subseteq A \otimes F[\xi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant k]$ является подпространством линейной оболочки элементов $a_\ell \otimes \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s,\\ 1 \leqslant j \leqslant k}} \xi_{ij}^{s_{ij}}$, где $1 \leqslant \ell \leqslant s = \dim A$, $s_{ij} \in \mathbb{Z}_+$,

$\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant s,\\ 1\leqslant j\leqslant k}} s_{ij} = n$. Число таких элементов не превосходит $(\dim A)(n+1)^{k\dim A}$, откуда и следует требуемая оценка сверху для $\dim R_{kn}$. $\square$

Теперь докажем, что все неприводимые FS_n-подмодули, которые возникают в разложении модуля $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$ с ненулевыми кратностями, отвечают диаграммам Юнга высоты равной или меньшей, чем $\dim A$.

Лемма 6.26. *Пусть $\lambda\vdash n$, где $n\in\mathbb{N}$, причём $\lambda_{(\dim A)+1}>0$. Тогда $m(A,H,\lambda)=0$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.45 достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f\in \mathrm{Id}^H(A)$ для всех $f\in W_n^H$. Выберем в A некоторый базис. Поскольку многочлены полилинейны, для проверки того, что они являются тождествами, достаточно подставлять в них только базисные элементы. Заметим, что $e^*_{T_\lambda}=b_{T_\lambda}a_{T_\lambda}$, где оператор b_{T_λ} делает многочлены кососимметричными по переменным каждого столбца таблицы Юнга T_λ. Следовательно, если после некоторой подстановки элементов алгебры A многочлен $e^*_{T_\lambda} f$ не обращается в нуль, то это означает, что вместо переменных каждого столбца таблицы Юнга T_λ подставляются разные элементы. Однако если $\lambda_{(\dim A)+1}>0$, то высота первого столбца больше, чем $\dim A$. Отсюда $e^*_{T_\lambda} f\in \mathrm{Id}^H(A)$. $\square$

Докажем теперь главный результат данного параграфа:

Теорема 6.27. *Пусть A — некоторая (необязательно ассоциативная) конечномерная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0. Тогда*

$$\ell_n^H(A)\leqslant (\dim A)(n+1)^{(\dim A)^2+\dim A}$$

для всех $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Для всякого разбиения $\lambda\vdash n$ фиксируем таблицу Юнга T_λ формы λ. Тогда в силу теоремы 1.45 кратность $m(A,H,\lambda)$ неприводимого подмодуля $M(\lambda)=FS_n e_{T_\lambda}$ в разложении FS_n-модуля $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$ равна $\dim e_{T_\lambda}\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$. Другими словами, число $m(A,H,\lambda)$ равно максимальному числу m таких H-многочленов $f_1,\ldots,f_m\in W_n^H$, что из равенства

$$g=\alpha_1 e_{T_\lambda} f_1+\ldots+\alpha_m e_{T_\lambda} f_m\in \mathrm{Id}^H(A)$$

для некоторых $\alpha_\ell\in F$ всегда следует, что $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0$. Обозначим через k_{ij} число в клетке (i,j) таблицы T_λ. Тогда для любого фиксированного i каждый многочлен $e_{T_\lambda} f_\ell$ симметричен по переменным $x_{k_{i1}},\ldots,x_{k_{i\lambda_i}}$. Используя процесс линеаризации (см., например, [66, §1.3]), получаем, что H-многочлен g является полиномиальным H-тождеством, если и только если $\tilde g$ является полиномиальным H-тождеством, где H-многочлен $\tilde g$ получен из g подстановкой $x_{k_{ij}}\mapsto x_i$ для всех i и j. Обозначим число строк в таблице Юнга T_λ через k. В силу леммы 6.26 можно считать, что $k\leqslant \dim A$. Тогда H-многочлен $\tilde g$ зависит от переменных $x_1,\ldots,x_k$ и из леммы 6.24 следует, что $\tilde g\in \mathrm{Id}^H(A)$ если и только $\tilde g(\xi_1,\ldots,\xi_k)=0$ как элемент алгебры $\tilde A_k$. Заметим, что $\tilde g(\xi_1,\ldots,\xi_k)=\alpha_1 u_1+\ldots+\alpha_m u_m$, где u_ℓ — значение H-многочлена

$e_{T_\lambda} f_\ell$ при подстановке $x_{k_{ij}} \mapsto \xi_i$, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant \lambda_i$. Следовательно, все $u_i \in R_{kn}$, и если $m > (\dim A)(n+1)^{k \dim A}$, то согласно лемме 6.25 для любого выбора H-многочленов f_i элементы u_i линейно зависимы и $\tilde{g}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$ для некоторых нетривиальных коэффициентов α_i. В частности, $\alpha_1 e_{T_\lambda} f_1 + \ldots \alpha_m e_{T_\lambda} f_m \in \operatorname{Id}^H(A)$ и $m(A, H, \lambda) < m$. Следовательно, для всех $\lambda \vdash n$ справедливо неравенство

$$m(A, H, \lambda) \leqslant (\dim A)(n+1)^{k \dim A} \leqslant (\dim A)(n+1)^{(\dim A)^2}.$$

Поскольку число всех разбиений $\lambda \vdash n$, высота которых не больше $\dim A$, не превосходит $(n+1)^{\dim A}$, мы получаем требуемую верхнюю оценку для $\ell_n^H(A)$. □

Если конечномерная алгебра A градуирована некоторым множеством T, то в силу предложения 6.15 кодлины $\ell_n^{T\text{-gr}, H}(A)$ градуированных полиномиальных тождеств алгебры A равны её F^T-кодлинам $\ell_n^{F^T}(A)$. Отсюда получаем следующее следствие из теоремы 6.27:

Следствие 6.28. *Пусть A — конечномерная алгебра над полем характеристики 0, градуированная некоторым множеством T. Тогда*

$$\ell_n^{T\text{-gr}}(A) \leqslant (\dim A)(n+1)^{(\dim A)^2 + \dim A}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

6.8 Разбиения, ограниченные выпуклыми многогранниками

В данном параграфе мы применим идеи из [5] для того, чтобы доказать лемму 6.30, которая будет затем использована при исследовании алгебр с необязательно целой PI-экспонентой.

Для начала нам понадобится следующая лемма о выпуклых многогранниках:

Лемма 6.29. *Пусть P — непустой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, заданный системой линейных неравенств $f_i \leqslant 0$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что расстояние от любой точки многогранника*

$$P_\delta = \{x \mid f_i(x) \leqslant \delta \text{ для всех } 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

до P меньше либо равно, чем ε.

Доказательство. Для произвольного подмножества $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ введём обозначение $\pi_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \text{ для всех } i \in I\}$.

Если для какого-то $1 \leqslant i \leqslant m$ пересечение $P \cap \pi_{\{i\}}$ пусто, это означает, что неравенство $f_i(x) \leqslant 0$ в определении многоугольника P лишнее и его можно исключить. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $P \cap \pi_{\{i\}} \neq \varnothing$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

В силу линейности функций f_i можно выбрать такую общую константу $M_1 > 0$, что

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant M_1 \rho(x, y)$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $x, y \in \mathbb{R}^n$, где $\rho(x,y) = \sqrt{(x^1-y^1)^2+\ldots+(x^n-y^n)^2}$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$.

Используя формулу расстояния от точки до гиперплоскости, выберем такое $M_2 > 0$, что для всех $I \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$ и всех $1 \leqslant j \leqslant m$ таких, что функция f_j непостоянна на π_I, расстояние от произвольной точки $x \in \pi_I$ до плоскости $\pi_{I\cup\{j\}}$ меньше либо равно $M_2|f_j(x)|$.

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{M_2\sum_{j=1}^m(1+M_1M_2)^{j-1}}$ и рассмотрим произвольную точку $x_0 \in P_\delta$. Если для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ справедливо неравенство $f_i(x_0) \leqslant 0$, то $x_0 \in P$ и доказывать нечего. Предположим, что $f_i(x_0) > 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть x_1 — ближайшая к x_0 точка гиперплоскости $\pi_{\{i\}}$. Тогда $\rho(x_0,x_1) \leqslant M_2|f_i(x_0)| \leqslant M_2\delta$. При этом $x_1 \in P_{(1+M_1M_2)\delta}$. Теперь рассмотрим вместо x_0 точку x_1, вместо $\mathbb{R}^n$ — гиперплоскость $\pi_{\{i\}}$, а вместо P — выпуклый многогранник $P\cap\pi_{\{i\}}$ и повторим рассуждения, построив точку $x_2 \in P_{(1+M_1M_2)^2\delta}$, и т.д. На каждом шаге размерность пространства и число неравенств будут убывать, и в концев концов мы прийдём к случаю, когда очередная точка x_k, где $0 \leqslant k \leqslant m$, окажется внутри многогранника. Тогда

$$\rho(x_0,x_k) \leqslant \sum_{j=1}^k \rho(x_{j-1},x_j) \leqslant M_2\sum_{j=1}^k (1+M_1M_2)^{j-1}\delta \leqslant \varepsilon.$$

□

Покажем теперь, что если для алгебры A с обобщённым H-действием все разбиения $\lambda \vdash n$, которые отвечают неприводимым FS_n-модулям, встречающимся с ненулевыми кратностями $m(A,H,\lambda)$ в разложении FS_n-модуля $\frac{W_n^H}{W_n^H\cap \mathrm{Id}^H(A)}$, принадлежат некоторому выпуклому многограннику Ω_n, то число $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n^H(A)}$ ограниченно сверху максимумом некоторой функции Φ на «непрерывной» версии Ω этого многогранника. (По сути данный результат носит сугубо комбинаторный характер, поскольку, как это будет видно из доказательства, он справедлив для размерностей любой последовательности FS_n-модулей, у которых кратности неприводимых подмодулей ограничены сверху полиномиальной функцией от n.)

Пусть $q \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\Phi(x_1,\ldots,x_q) := \frac{1}{x_1^{x_1}\ldots x_s^{x_q}}$ при $x_1,\ldots,x_q > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$, без ограничения общности можно считать, что Φ является непрерывной функцией на множестве $\{(x_1,\ldots,x_q) \mid x_i \geqslant 0\}$.

Для фиксированных чисел $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leqslant j \leqslant q$, определим множество

$$\Omega := \left\{ (\alpha_1,\ldots,\alpha_q) \in \mathbb{R}^q \;\middle|\; \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1,\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_q \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^q \gamma_{ij}\alpha_j \geqslant 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m \right\}.$$

Пусть также заданы числа $\theta_k \in \mathbb{N}$, где $q < k \leqslant r$, а $r \in \mathbb{Z}_+$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\Omega_n := \left\{ \lambda \vdash n \;\middle|\; \sum_{j=1}^q \gamma_{ij}\lambda_j + \gamma_{i0} \geqslant 0 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant m,\ \lambda_i \leqslant \theta_i \text{ при } q < i \leqslant r,\ \lambda_{r+1} = 0 \right\}.$$

В дальнейшем будем относиться к Ω и Ω_n как к, соответственно, «непрерывной» и «дискретной» версиям одного и того же многогранника.

Обозначим через d максимум функции Φ на компактном множестве Ω, которое предполагаем непустым.

Лемма 6.30. *Пусть A — некоторая (необязательно ассоциативная) конечномерная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0, причём $m(A,H,\lambda)=0$ для всех $\lambda \vdash n$, где $\lambda \notin \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \leqslant d$.*

Доказательство. Рассмотрим такое разбиение $\lambda \vdash n$, что $m(A,H,\lambda) \neq 0$. В силу формулы крюков $\dim M(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$, где h_{ij} — длина крюка с вершиной в клетке (i,j) диаграммы Юнга D_λ. Следовательно, $\dim M(\lambda) \leqslant \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_r!}$. Теперь заметим, что $(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$ и функция x^x убывает при $x \leqslant \frac{1}{e}$. В силу формулы Стирлинга при некоторых $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, которые не зависят от λ_i, и всех достаточно больших n справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\dim M(\lambda) \leqslant \frac{C_1 n^{r_1}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\lambda_1}{e}\right)^{\lambda_1}\dots\left(\frac{\lambda_r}{e}\right)^{\lambda_r}} = C_1 n^{r_1}\left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{\frac{\lambda_1}{n}}\dots\left(\frac{\lambda_r}{n}\right)^{\frac{\lambda_r}{n}}}\right)^n \leqslant \\ \leqslant C_1 n^{r_1}\left(\Phi\left(\frac{\lambda_1}{n},\dots,\frac{\lambda_q}{n}\right)\right)^n \frac{n^{\theta_{q+1}+\dots+\theta_r}}{\theta_{q+1}^{\theta_{q+1}}\dots\theta_r^{\theta_r}} = C_2 n^{r_2}\left(\Phi\left(\frac{\lambda_1}{n},\dots,\frac{\lambda_q}{n}\right)\right)^n.\end{gathered} \tag{6.6}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку функция Φ непрерывна на компакте $[0;1]^q \supseteq \Omega$, она равномерно непрывна на нём и существует такое $\delta > 0$, что для всех x из $[0;1]^q$ таких, что расстояние между x и Ω меньше, чем δ, справедливо неравенство $\Phi(x) < d + \varepsilon$.

Следовательно, в силу (6.6) и леммы 6.29 существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ и $\lambda \vdash n$ таких, что $m(A,H,\lambda) \neq 0$, справедливо неравенство $\dim M(\lambda) \leqslant C_2 n^{r_2}(d+\varepsilon)^n$.

Согласно теореме 6.27 существуют такие $C_3 > 0$ и $r_3 \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\sum_{\lambda\vdash n} m(A,H,\lambda) \leqslant C_3 n^{r_3} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$c_n^H(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m(A,H,\lambda)\dim M(\lambda) \leqslant C_2 C_3 n^{r_2+r_3}(d+\varepsilon)^n$$

и $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \leqslant d+\varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольным, утверждение леммы доказано. □

6.9 Существование H-PI-экспоненты у H-простых алгебр

Оказывается, что у всякой конечномерной H-простой алгебры существует H-PI-экспонента.

Теорема 6.31. *Пусть A — конечномерная H-простая (необязательно ассоциативная) алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0, $\dim A = s$. Введём обозначение*

$$d(A) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{\substack{\lambda\vdash n,\\ m(A,H,\lambda)\neq 0}} \Phi\left(\frac{\lambda_1}{n},\dots,\frac{\lambda_s}{n}\right).$$

Тогда существует (необязательно целая)

$$\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} = d(A).$$

Теорема 6.31 будет доказана ниже.

Снова используя предложение 6.15, получаем из теоремы 6.31 следствие для градуированных тождеств:

Следствие 6.32. *Пусть A — конечномерная алгебра над полем характеристики 0, градуированная некоторым множеством T таким образом, что A является T-градуированно простой, т.е. не содержит нетривиальных градуированных идеалов. Тогда существует* $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)}$.

Докажем сперва, что последовательность H-коразмерностей не убывает для любой H-простой алгебры.

Лемма 6.33. *Пусть A — H-простая алгебра для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над произвольным полем F. Тогда $c_n^H(A) \leqslant c_{n+1}^H(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $\ldots$, $f_{c_n^H(A)}(x_1,\ldots,x_n)$ — такие H-многочлены, что их образы являются базисом пространства $\frac{W_n^H}{W_n^H \cap \mathrm{Id}^H(A)}$. Предположим, что H-многочлены

$$f_1(x_1,\ldots,x_n x_{n+1}),\ldots,f_{c_n^H(A)}(x_1,\ldots,x_n x_{n+1}) \tag{6.7}$$

линейно зависимы по модулю $\mathrm{Id}^H(A)$. Тогда существуют такие $\alpha_1,\ldots,\alpha_{c_n^H(A)} \in F$, что

$$\alpha_1 f_1(a_1,\ldots,a_n a_{n+1}) + \ldots + \alpha_{c_n^H(A)} f_{c_n^H(A)}(a_1,\ldots,a_n a_{n+1}) = 0$$

для всех $a_i \in A$. Поскольку алгебра A является H-простой, справедливо равенство $AA = A$ и

$$\alpha_1 f_1(a_1,\ldots,a_n) + \ldots + \alpha_{c_n^H(A)} f_{c_n^H(A)}(a_1,\ldots,a_n) = 0$$

для всех $a_i \in A$. Однако

$$f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{c_n^H(A)}(x_1,\ldots,x_n)$$

линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}^H(A)$. Отсюда

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{c_n^H(A)} = 0,$$

H-многочлены (6.7) линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}^H(A)$ и $c_n^H(A) \leqslant c_{n+1}^H(A)$. □

Теперь докажем для $c_n^H(A)$ оценку сверху:

Теорема 6.34. *Пусть A — конечномерная H-простая (необязательно ассоциативная) алгебра для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0,* $\dim A = s$. *Тогда существуют такие $C > 0$ и $r \in \mathbb{R}$, что*

$$c_n^H(A) \leqslant C n^r \left(\max_{\substack{\lambda\vdash n,\\ m(A,H,\lambda)\neq 0}} \Phi\left(\frac{\lambda_1}{n},\ldots,\frac{\lambda_s}{n}\right)\right)^n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \vdash n$ — такое разбиение, что $m(A,H,\lambda) \neq 0$. Согласно формуле крюков $\dim M(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$, где h_{ij} — длина крюка с вершиной в клетке (i,j) диаграммы Юнга D_λ. Отсюда $\dim M(\lambda) \leqslant \frac{n!}{\lambda_1!\dots\lambda_s!}$. В силу формулы Стирлинга для всех достаточно больших n справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\dim M(\lambda) \leqslant \frac{C_1 n^{r_1}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\lambda_1}{e}\right)^{\lambda_1}\dots\left(\frac{\lambda_s}{e}\right)^{\lambda_s}} = C_1 n^{r_1}\left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{\frac{\lambda_1}{n}}\dots\left(\frac{\lambda_s}{n}\right)^{\frac{\lambda_s}{n}}}\right)^n \leqslant \\ \leqslant C_1 n^{r_1}\left(\Phi\left(\frac{\lambda_1}{n},\dots,\frac{\lambda_s}{n}\right)\right)^n\end{aligned} \tag{6.8}$$

при некоторых $C_1 > 0$ и $r_1 \in \mathbb{R}$, которые не зависят от λ_i. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 6.27. $\square$

До конца параграфа считаем выполненными предположения теоремы 6.31.

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$, $FS_n\bar{f}_1 \cong M(\lambda)$ и $FS_m\bar{f}_2 \cong M(\mu)$ для некоторых $m,n \in \mathbb{N}$, $f_1 \in W_n^H$ и $f_2 \in W_m^H$. Тогда образ H-многочлена $f_1(x_1,\dots,x_n)f_2(x_{n+1},\dots,x_{m+n})$ порождает FS_{m+n}-подмодуль в $\frac{W^H_{m+n}}{W^H_{m+n}\cap \mathrm{Id}^H(A)}$, являющийся гомоморфным образом FS_{m+n}-модуля

$$M(\lambda)\mathbin{\widehat{\otimes}} M(\mu) := (M(\lambda)\otimes M(\mu))\uparrow S_{m+n} := FS_{m+n}\otimes_{F(S_n\times S_m)}(M(\lambda)\otimes M(\mu)).$$

В силу правила Литтлвуда — Ричардсона все неприводимые компоненты в разложении модуля $M(\lambda)\mathbin{\widehat{\otimes}} M(\mu)$ отвечают диаграммам Юнга D_ν, полученным из $D_{\lambda+\mu}$ перемещением некоторых клеток вниз. Согласно нашим предположениям высота диаграммы D_ν не может быть больше, чем $s = \dim A$. Другое замечание, которое здесь нужно сделать, заключается в том, что при перемещении клеток диаграммы D_ν вниз значение функции $\Phi\left(\frac{\nu_1}{n},\frac{\nu_2}{n},\dots,\frac{\nu_s}{n}\right)$ не убывает, поскольку функция $\frac{1}{x^x(\xi-x)^{\xi-x}}$ возрастает на интервале $x \in \left(0;\frac{\xi}{2}\right)$ при фиксированном $0<\xi\leqslant 1$.

Лемма 6.35. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $t \in \mathbb{N}$, такие натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, где $n_{i+1} - n_i \leqslant t$, и такие разбиения $\lambda^{(i)} \vdash n_i$, где $m\left(A,H,\lambda^{(i)}\right) \neq 0$, что $\Phi\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i},\dots,\frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}\right) \geqslant d(A) - \varepsilon$ для всех $i \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Обозначим через B подалгебру ассоциативной алгебры $\mathrm{End}_F(A)$, порождённую всеми операторами левого и правого умножения на элементы алгебры A и образами элементов алгебры H, которые рассматриваются как операторы на A. Поскольку A является H-простой алгеброй, алгебра A — неприводимый левый B-модуль. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех таких операторов $u \in B$, что для некоторых $a_1,\dots,a_m,\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{\tilde{m}} \in A$, $m,\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$, $h \in H$ и некоторой расстановки скобок оператор u представляется в виде $ua = a_1\dots a_m(ha)\tilde{a}_1\dots\tilde{a}_{\tilde{m}}$ для всех $a \in A$. Используя условие (5.1), можно включить операторы H-действия внутрь операторов левого и правого умножения на элементы алгебры A и представить любой оператор из B как линейную комбинацию операторов из $\mathcal{B}$. Поскольку алгебра $\mathrm{End}_F(A)$ конечномерна, можно выбрать некоторый конечный базис $u_1,\dots,u_{\dim B} \in \mathcal{B}$ пространства B. Обозначим через N максимальное из всех чисел $2(m+\tilde{m})$, соответствующих элементам u_i.

Поскольку алгебра A является H-простой, $A^2 \neq 0$ и для всех $a, b \in A$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, справедливы равенство $A = Ba = Bb$ и неравенство $(Ba)(Bb) \neq 0$. В силу выбора числа N существуют такие $a_1, \ldots, a_m, \tilde a_1, \ldots, \tilde a_{\tilde m}, b_1, \ldots, b_k, \tilde b_1, \ldots, \tilde b_{\tilde k} \in A$, $k, \tilde k, m, \tilde m \in \mathbb{Z}_+$, $h_1, h_2 \in H$, что для некоторой расстановки скобок

$$(a_1 \ldots a_m (h_1 a) \tilde a_1 \ldots \tilde a_{\tilde m})(b_1 \ldots b_k (h_2 b) \tilde b_1 \ldots \tilde b_{\tilde k}) \neq 0,$$

а $k + \tilde k + m + \tilde m \leqslant N$.

Будем теперь выбирать такое $q \in \mathbb{N}$, что $\Phi\left(\frac{\mu_1}{q}, \ldots, \frac{\mu_s}{q}\right) \geqslant d(A) - \varepsilon/2$ и $m(A, H, \mu) \neq 0$ для некоторого $\mu \vdash q$. Напомним, что функция Φ является непрерывной на множестве $[0;1]^s$ и, следовательно, равномерно непрерывна на $[0;1]^s$, поскольку множество $[0;1]^s$ компактно. Отсюда значение Φ мало изменяется при малых изменениях значений аргумента.

В силу того, что число q можно брать сколь угодно большим, мы можем также считать, что $\frac{\sum_{j=1}^i d_j}{iq}$ будет мало при любом $i \in \mathbb{N}$ и любом выборе значений $0 \leqslant d_i \leqslant N$. Следовательно, существуют такие q и $\mu \vdash q$, что

$$\begin{gathered} \Phi\left(\frac{i\mu_1 + \sum_{j=1}^i d_j}{iq + \sum_{j=1}^i d_j}, \frac{i\mu_2}{iq + \sum_{j=1}^i d_j}, \ldots, \frac{i\mu_s}{iq + \sum_{j=1}^i d_j}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{\frac{\mu_1}{q} + \frac{\sum_{j=1}^i d_j}{iq}}{1 + \frac{\sum_{j=1}^i d_j}{iq}}, \frac{\left(\frac{\mu_2}{q}\right)}{1 + \frac{\sum_{j=1}^i d_j}{iq}}, \ldots, \frac{\left(\frac{\mu_s}{q}\right)}{1 + \frac{\sum_{j=1}^i d_j}{iq}}\right) \geqslant d(A) - \varepsilon \end{gathered} \tag{6.9}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$ и всех $0 \leqslant d_i \leqslant N$.

Положим $t := N + q$.

Выберем такой H-многочлен $\tilde f \in W^H_q \backslash \operatorname{Id}^H(A)$, что $FS_q \tilde f \cong M(\mu)$. Тогда для некоторой расстановки скобок, некоторых $h_1, h_2 \in H$ и некоторых $k, \tilde k, m, \tilde m \geqslant 0$ таких, что $d_1 := k + \tilde k + m + \tilde m \leqslant N$, выполнено условие

$$f_1 := \left(y_1 \ldots y_k \tilde f^{h_1}(x_1, \ldots, x_q) \tilde y_1 \ldots \tilde y_{\tilde k}\right)\left(z_1 \ldots z_m \tilde f^{h_2}(\tilde x_1, \ldots, \tilde x_q) \tilde z_1 \ldots \tilde z_{\tilde m}\right) \notin \operatorname{Id}^H(A).$$

(Обозначение f^h было введено в замечании 6.6 выше.)

Рассмотрим $FS_{q+k+\tilde k}$-подмодуль M модуля $\frac{W^H_{q+k+\tilde k}}{W^H_{q+k+\tilde k} \cap \operatorname{Id}^H(A)}$ порождённый образом H-многочлена

$$y_1 \ldots y_k \tilde f^{h_1}(x_1, \ldots, x_q) \tilde y_1 \ldots \tilde y_{\tilde k}.$$

В силу замечания 6.6 образ H-многочлена $\tilde f^{h_1}(x_1, \ldots, x_q)$ порождает FS_q-подмодуль, изоморфный $M(\mu)$, откуда M является гомоморфным образом модуля

$$M(\mu) \mathbin{\widehat{\otimes}} FS_{k+\tilde k} := (M(\mu) \otimes FS_{k+\tilde k}) \uparrow FS_{q+k+\tilde k}.$$

Поскольку все диаграммы Юнга, отвечающие разбиениям числа $k + \tilde k$, получены из строки длиной $k + \tilde k$ перемещением некоторых клеток, в силу правила Литтлвуда — Ричардсона все диаграммы Юнга, отвечающие неприводимым модулям, встречающимся в разложении модуля M, получены из диаграммы Юнга, отвечающей разбиению $(\mu_1 + k + \tilde k, \mu_2, \ldots, \mu_s)$ перемещением некоторых клеток вниз. Те же самые аргументы можно применить к H-многочлену $z_1 \ldots z_m \tilde f^{h_2}(\tilde x_1, \ldots, \tilde x_q) \tilde z_1 \ldots \tilde z_{\tilde m}$.

Пусть $n_1 := 2q+d_1$, а $\lambda^{(1)}$ — одно из разбиений, отвечающих неприводимым компонентам в разложении модуля $FS_{n_1}\bar{f}_1$. Тогда в силу (6.9) и замечаний, сделанных выше и перед леммой, справедливо неравенство $\Phi\left(\frac{\lambda_1^{(1)}}{n_1}, \ldots, \frac{\lambda_s^{(1)}}{n_s}\right) \geqslant d(A) - \varepsilon$.

Снова получаем, что

$$f_2 := \left(y_1 \ldots y_k f_1^{h_1}(x_1, \ldots, x_q)\tilde{y}_1 \ldots \tilde{y}_{\tilde{k}}\right)\left(z_1 \ldots z_m \tilde{f}^{h_2}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_q)\tilde{z}_1 \ldots \tilde{z}_{\tilde{m}}\right) \notin \mathrm{Id}^H(A)$$

для некоторой расстановки скобок, некоторых элементов $h_1, h_2 \in H$ и некоторых чисел $k, \tilde{k}, m, \tilde{m} \geqslant 0$ (которые могут отличными от тех, что использовались в f_1), таких что $d_2 := k+\tilde{k}+m+\tilde{m} \leqslant N$. Как и в случае с n_1, определим n_2 по формуле $n_2 := 3q+d_1+d_2$. Обозначим через $\lambda^{(2)}$ одно из разбиений, отвечающих неприводимым компонентам в разложении модуля $FS_{n_2}\bar{f}_2$. Продолжение данной процедуры до бесконечности завершает доказательство леммы. □

Доказательство теоремы 6.31. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмём $n_i \in \mathbb{N}$ и $\lambda^{(i)} \vdash n_i$ из леммы 6.35. Тогда

$$\begin{aligned} c^H_{n_i}(A) \geqslant \dim M(\lambda^{(i)}) = \frac{n_i!}{\prod_{j,k} h_{jk}} \geqslant \frac{n_i!}{(\lambda_1^{(i)} + s - 1)! \ldots (\lambda_s^{(i)} + s - 1)!} \geqslant \\ \geqslant \frac{n_i!}{n_i^{s(s-1)} \lambda_1^{(i)}! \ldots \lambda_s^{(i)}!} \geqslant \frac{C_1 n_i^{r_1} \left(\frac{n_i}{e}\right)^{n_i}}{\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{e}\right)^{\lambda_1^{(i)}} \ldots \left(\frac{\lambda_s^{(i)}}{e}\right)^{\lambda_s^{(i)}}} \geqslant \\ \geqslant C_1 n_i^{r_1} \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i}\right)^{\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i}} \ldots \left(\frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}\right)^{\frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}}} \right)^{n_i} = C_1 n_i^{r_1} \left(\Phi\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i}, \ldots, \frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}\right)\right)^{n_i} \end{aligned} \tag{6.10}$$

для некоторых $C_1 > 0$ и $r_1 \leqslant 0$, которые не зависят от i.

Пусть $n \geqslant n_1$. Тогда $n_i \leqslant n < n_{i+1}$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Используя (6.10), лемму 6.33 и тот факт, что $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_s) \geqslant 1$ при $0 \leqslant x_1, \ldots, x_s \leqslant 1$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \geqslant \sqrt[n]{c_{n_i}^H(A)} \geqslant \sqrt[n]{C_1 n_i^{r_1}} \left(\Phi\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i}, \ldots, \frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}\right)\right)^{\frac{n_i}{n}} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[n]{C_1 n^{r_1}} \left(\Phi\left(\frac{\lambda_1^{(i)}}{n_i}, \ldots, \frac{\lambda_s^{(i)}}{n_i}\right)\right)^{\frac{n-t}{n}} \geqslant \sqrt[n]{C_1 n^{r_1}}\, (d(A) - \varepsilon)^{\frac{n-t}{n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \geqslant d(A) - \varepsilon.$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ было произвольным, получаем, что $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \geqslant d(A)$. Теперь из теоремы 6.34 следует, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} = d(A)$. □

Глава 7

Рост коразмерностей полиномиальных H-тождеств в ассоциативных алгебрах с (обобщённым) H-действием

В данной главе аналог гипотезы Амицура (существование целочисленной экспоненты) доказывается для достаточно широкого класса конечномерных ассоциативных алгебр с обобщённым H-действием, включающего в себя H-модульные алгебры с H-инвариантным радикалом, алгебры с действием произвольной группы автоморфизмами и антиавтоморфизмами, алгебры с действием произвольной алгебры Ли дифференцированиями, алгебры, градуированные произвольными группами, и алгебры с действием (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами.

Результаты главы были опубликованы в работах [107, 110, 112, 114, 115, 117, 119].

7.1 Кососимметрические многочлены

Оценка снизу для коразмерностей H-тождеств, которая будет получена в §7.4–7.5, опирается на существование H-многочленов, кососимметричных по большому числу наборов переменных. В доказательстве существования таких многочленов мы будем увеличивать число наборов кососимметричных переменных при помощи формы следа. По всей видимости, впервые эта идея была использована Ю. П. Размысловым [19, §14].

Пусть B — конечномерная полупростая (в обычном смысле) H-простая ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с обобщённым действием некоторой ассоциативной алгебры H с 1.

Обозначим через $\varphi\colon B \to \mathrm{End}_F(B)$ левое регулярное представление алгебры B, т.е. $\varphi(a)b = ab$ для всех $a, b \in B$, а через $\psi\colon B \to \mathrm{End}_F(B)$ — правое регулярное представление алгебры B, т.е. $\psi(a)b = ba$ для всех $a, b \in B$. Через ρ обозначим действие $H \to \mathrm{End}_F(B)$.

Из (5.1) следует, что

$$\rho(h)\varphi(a) = \sum_i \Big(\varphi(h'_i a)\rho(h''_i) + \psi(h''''_i a)\rho(h'''_i)\Big), \tag{7.1}$$

$$\rho(h)\psi(a)=\sum_i\Big(\psi(h_i''a)\rho(h_i')+\varphi(h_i'''a)\rho(h_i'''')\Big), \tag{7.2}$$

$$\varphi(a)\psi(b)=\psi(b)\varphi(a) \tag{7.3}$$

для всех $a,b\in B$.

Лемма 7.1. *Билинейная форма* $\mathrm{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ *невырождена на* B.

Доказательство. Напомним, что алгебра B полупроста. Следовательно, в силу теоремы Веддербёрна — Артина

$$B\cong M_{k_1}(F)\oplus M_{k_2}(F)\oplus\ldots\oplus M_{k_s}(F)$$

для некоторых $k_i\in\mathbb{N}$, где $M_{k_i}(F)$ — алгебры все матриц размера $k_i\times k_i$.

Фиксируем в B базис, состоящий из матричных единиц $e^{(i)}_{\alpha\beta}$ алгебр $M_{k_i}(F)$. Заметим, что

$$\mathrm{tr}(\varphi(e^{(i)}_{\alpha\beta}))=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \alpha\neq\beta,\\ k_i, & \text{если}\quad \alpha=\beta.\end{cases}$$

Следовательно, $\mathrm{tr}(\varphi(e^{(i)}_{\alpha\beta})\varphi(b))\neq 0$ для некоторого базисного элемента b, если и только если $b=e^{(i)}_{\beta\alpha}$. Следовательно, матрица билинейной формы $\mathrm{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ невырождена. □

Замечание 7.2. По определению пространство P^H_n состоит из всех полилинейных ассоциативных H-многочленов от переменных $x_1,\ldots,x_n$. Однако для удобства в качестве переменных многочленов $f\in P^H_n$ мы будем использовать и другие буквы, например, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i и т.д., считая последние буквы просто другими обозначениями для x_j.

Лемма 7.3 является аналогом леммы 1 из работы [63]:

Лемма 7.3. *Пусть* $b_1,\ldots,b_\ell$ *— базис алгебры* B*. Тогда для некоторого* $T\in\mathbb{N}$ *существует* H*-многочлен*

$$f=f(x_1,\ldots,x_\ell,y_1,\ldots,y_\ell,z_1,\ldots,z_T,z)\in P^H_{2\ell+T+1},$$

кососимметричный по переменным $\{x_1,\ldots,x_\ell\}$ *и по переменным* $\{y_1,\ldots,y_\ell\}$*, где* $\ell=\dim B$*, удовлетворяющий следующему условию: существуют такие* $\bar z_1,\ldots,\bar z_T\in B$*, что для любого* $\bar z\in B$ *справедливо равенство* $f(b_1,\ldots,b_\ell,b_1,\ldots,b_\ell,\bar z_1,\ldots,\bar z_T,\bar z)=\bar z$.

Доказательство. Поскольку алгебра B является H-простой, в силу теоремы плотности алгебра $\mathrm{End}_F(B)\cong M_\ell(F)$ порождена операторами из подпространств $\rho(H)$, $\varphi(B)$ и $\psi(B)$. Из (7.1)–(7.3) следует, что

$$\mathrm{End}_F(B)=\langle\varphi(a)\psi(b)\rho(h)\mid a,b\in B,h\in H\rangle_F. \tag{7.4}$$

Рассмотрим многочлен Регева

$$f_\ell(x_1,\ldots,x_{\ell^2};y_1,\ldots,y_{\ell^2})=\sum_{\substack{\sigma\in S_\ell,\\ \tau\in S_\ell}}(\mathrm{sign}(\sigma\tau))x_{\sigma(1)}\ y_{\tau(1)}\ x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}\ y_{\tau(2)}y_{\tau(3)}y_{\tau(4)}\ldots$$

$$x_{\sigma(\ell^2-2\ell+2)} \dots x_{\sigma(\ell^2)}\ y_{\tau(\ell^2-2\ell+2)} \dots y_{\tau(\ell^2)}.$$

Этот многочлен является центральным (см., например, [66, теорема 5.7.4]) для алгебры $M_\ell(F)$, т.е. f_ℓ не является полиномиальным тождеством для алгебры $M_\ell(F)$ и все значения многочлена f_ℓ принадлежат центру алгебры $M_\ell(F)$. В силу кососимметричности многочлена f_ℓ по $x_1, \dots, x_{\ell^2}$ и $y_1, \dots, y_{\ell^2}$ этот многочлен не обращается в нуль, если только если в переменные каждого набора подставляются линейно независимые элементы.

Заметим, что $\ker \varphi = 0$, поскольку алгебра B полупроста и, следовательно, с единицей. Отсюда отображение φ является инъективным. В силу (7.4) в $\mathrm{End}_F(B)$ можно выбрать базис, состоящий из элементов

$$\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_\ell), \quad \varphi(b_{i_1})\psi(b_{k_1})\rho(h_1), \quad \dots, \quad \varphi(b_{i_s})\psi(b_{k_s})\rho(h_s)$$

для подходящих $i_t, k_t \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, $h_t \in H$. Заменим в функции f_ℓ переменные x_i на $\varphi(x_i)$, а переменные y_i — на $\varphi(y_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Кроме того, заменим $x_{\ell+j}$ на $\varphi(z_j)\psi(u_j)\rho(h_j)$, а $y_{\ell+j}$ — на $\varphi(v_j)\psi(w_j)\rho(h_j)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant s$. Теперь x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i — переменные, принимающие значения в B. Обозначим получившуюся функцию через $\tilde{f}_\ell$. Если подставить $z_t = v_t = b_{i_t}$, $u_t = w_t = b_{k_t}$ при $1 \leqslant t \leqslant s$ и $x_i = y_i = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant \ell$, тогда $\tilde{f}_\ell$ скалярным оператором $(\mu\, \mathrm{id}_B)$ на B, где $\mu \in F$, $\mu \neq 0$. Введём теперь новую переменную z. Пользуясь (7.1)–(7.3), переместим в выражении $\tilde{f}_\ell \cdot z$ все $\rho(h_i)$ вправо и перепишем $\varphi(\dots)$ и $\psi(\dots)$ как операторы левого и правого умножения. Тогда $f := \mu^{-1}\tilde{f}_\ell \cdot z$ станет H-многочленом, принадлежащим пространству P_n^H для подходящего $n \in \mathbb{N}$. Пусть $T := 4s$. Переименуем переменные u_i, v_i, w_i в z_j для $s+1 \leqslant j \leqslant T$. Тогда f удовлетворяет всем условиям леммы. □

Пусть $k\ell \leqslant n$ для некоторых $k, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $Q_{\ell,k,n}^H \subseteq P_n^H$ подпространство, состоящее из всех многочленов, кососимметричных по каждому из k попарно непересекающихся наборов переменных $\{x_1^i, \dots, x_\ell^i\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема 7.4 является аналогом теоремы 1 из [63].

Теорема 7.4. *Пусть B — конечномерная полупростая (в обычном смысле) H-простая ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1, а $b_1, \dots, b_\ell$ — базис алгебры B. Тогда существуют такие $T \in \mathbb{Z}_+$ и $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_T \in B$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой H-многочлен*

$$f = f(x_1^1, \dots, x_\ell^1; \dots; x_1^{2k}, \dots, x_\ell^{2k};\ z_1, \dots, z_T;\ z) \in Q_{\ell,2k,2k\ell+T+1}^H,$$

что для любого $\bar{z} \in B$ справедливо равенство $f(b_1, \dots, b_\ell; \dots; b_1, \dots, b_\ell; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_T; \bar{z}) = \bar{z}$.

Доказательство. Пусть $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z)$ — H-многочлен из леммы 7.3, кососимметричный по $x_1, \dots, x_\ell$ и по $y_1, \dots, y_\ell$. В силу того, что f_1 удовлетворяет всем условиям теоремы при $k = 1$, можно считать, что $k > 1$. Заметим, что

$$f_1^{(1)}(u_1, v_1, x_1, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z) :=$$
$$= \sum_{i=1}^{\ell} f_1(x_1, \dots, u_1 v_1 x_i, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z)$$

также кососимметричен по $x_1, \dots, x_\ell$ и по $y_1, \dots, y_\ell$. Кроме того,

$$f_1^{(1)}(\bar u_1, \bar v_1, \bar x_1, \dots, \bar x_\ell,\ \bar y_1, \dots, \bar y_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \\ = \operatorname{tr}(\varphi(\bar u_1)\varphi(\bar v_1)) f_1(\bar x_1, \bar x_2, \dots, \bar x_\ell,\ \bar y_1, \dots, \bar y_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z)$$

для любой подстановки элементов из B вместо своих переменных, поскольку без ограничения общности мы можем считать, что $\bar x_1, \dots, \bar x_\ell$ — различные элементы базиса.

Положим

$$f_1^{(j)}(u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_j, x_1, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z) := \\ = \sum_{i=1}^{\ell} f_1^{(j-1)}(u_1, \dots, u_{j-1}, v_1, \dots, v_{j-1}, x_1, \dots, u_j v_j x_i, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z)$$

для всех $2 \leqslant j \leqslant \ell$. Снова

$$f_1^{(j)}(\bar u_1, \dots, \bar u_j, \bar v_1, \dots, \bar v_j, \bar x_1, \dots, \bar x_\ell,\ \bar y_1, \dots, \bar y_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \\ = \operatorname{tr}(\varphi(\bar u_1)\varphi(\bar v_1)) \operatorname{tr}(\varphi(\bar u_2)\varphi(\bar v_2)) \dots \operatorname{tr}(\varphi(\bar u_j)\varphi(\bar v_j)) \cdot \\ \cdot f_1(\bar x_1, \bar x_2, \dots, \bar x_\ell,\ \bar y_1, \dots, \bar y_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z). \tag{7.5}$$

Заметим, что $\det(\operatorname{tr}(\varphi(b_i)\varphi(b_j)))_{i,j=1}^{\ell} \neq 0$, поскольку форма $\operatorname{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ в силу леммы 7.1 невырожденная. Положим

$$f_2(u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_\ell, x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z) := \\ = \frac{1}{\ell! \det(\operatorname{tr}(\varphi(b_i)\varphi(b_j)))_{i,j=1}^{\ell}} \sum_{\sigma,\tau \in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma\tau) f_1^{(\ell)}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(\ell)}, v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(\ell)}, \\ x_1, \dots, x_\ell,\ y_1, \dots, y_\ell, z_1, \dots, z_T, z).$$

Тогда $f_2 \in Q^H_{\ell,4,4\ell+T+1}$. Подставим $x_i = y_i = u_i = v_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$. Выберем также значения $z_j = \bar z_j$, где $1 \leqslant j \leqslant T$, таким образом, чтобы

$$f_1(b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \bar z \quad \text{для всех} \quad \bar z \in B.$$

Докажем, что

$$f_2(b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \bar z.$$

Действительно,

$$f_2(b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \\ = \frac{1}{\ell! \det(\operatorname{tr}(\varphi(b_i)\varphi(b_j)))_{i,j=1}^{\ell}} \sum_{\sigma,\tau \in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma\tau) f_1^{(\ell)}(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(\ell)}, b_{\tau(1)}, \dots, b_{\tau(\ell)}, \\ b_1, \dots, b_\ell,\ b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z).$$

Используя (7.5), получаем

$$f_2(b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z) = \\ = \frac{1}{\ell! \det(\operatorname{tr}(\varphi(b_i)\varphi(b_j)))_{i,j=1}^{\ell}} \sum_{\sigma,\tau \in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma\tau) \operatorname{tr}(\varphi(b_{\sigma(1)})\varphi(b_{\tau(1)})) \dots \operatorname{tr}(\varphi(b_{\sigma(\ell)})\varphi(b_{\tau(\ell)})) \cdot \\ \cdot f_1(b_1, \dots, b_\ell,\ b_1, \dots, b_\ell, \bar z_1, \dots, \bar z_T, \bar z).$$

Заметим, что

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma\tau)\operatorname{tr}(\varphi(b_{\sigma(1)})\varphi(b_{\tau(1)}))\dots\operatorname{tr}(\varphi(b_{\sigma(\ell)})\varphi(b_{\tau(\ell)})) =$$

$$= \sum_{\sigma,\tau\in S_\ell} \operatorname{sign}(\sigma\tau)\operatorname{tr}(\varphi(b_1)\varphi(b_{\tau\sigma^{-1}(1)}))\dots\operatorname{tr}(\varphi(b_\ell)\varphi(b_{\tau\sigma^{-1}(\ell)})) \overset{(\tau'=\tau\sigma^{-1})}{=}$$

$$= \sum_{\sigma,\tau'\in S_\ell} \operatorname{sign}(\tau')\operatorname{tr}(\varphi(b_1)\varphi(b_{\tau'(1)}))\dots\operatorname{tr}(\varphi(b_\ell)\varphi(b_{\tau'(\ell)})) =$$

$$= \ell!\det(\operatorname{tr}(\varphi(b_i)\varphi(b_j)))_{i,j=1}^{\ell}.$$

Следовательно,

$$f_2(b_1,\dots,b_\ell,b_1,\dots,b_\ell,b_1,\dots,b_\ell,b_1,\dots,b_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T,\bar z) = \bar z.$$

Заметим, что если H-многочлен f_1 был кососимметричен по каким-то из переменных $z_1,\dots,z_T$, то H-многочлен f_2 также кососимметричен по этим переменным. Поэтому применяя вышеизложенную процедуру к f_2 вместо f_1, получаем $f_3 \in Q^H_{\ell,6,6\ell+T+1}$. Аналогичным образом H-многочлен f_4 определяется с использованием H-многочлена f_3, H-многочлен f_5 — с использованием H-многочлена f_4 и т.д. В конце концов получается требуемый H-многочлен $f := f_k \in Q^H_{\ell,2k,2k\ell+T+1}$. □

7.2 Свойство (*)

Для того, чтобы сформулировать предположения, при которых будет справедлив основной результат главы, дадим следующее определение:

(*) Пусть B — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей над полем F. Пусть $b_1,\dots,b_\ell$ — базис алгебры B. Будем говорить, что для алгебры B выполняется свойство (*), если B — алгебра с единицей и существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует полилинейный H-многочлен

$$f = f(x_1^{(1)},\dots,x_\ell^{(1)};\dots;x_1^{(2k)},\dots,x_\ell^{(2k)};\ z_1,\dots,z_{n_1})$$

и такие элементы $\bar z_i \in B$, где $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $0 \leqslant n_1 \leqslant n_0$, что H-многочлен f кососимметричен по $x_1^{(i)},\dots,x_\ell^{(i)}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant 2k$ и $f(b_1,\dots,b_\ell;\dots;b_1,\dots,b_\ell;\bar z_1,\dots,\bar z_{n_1}) \neq 0$.

Пример 7.5. Если B — конечномерная полупростая H-простая алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с единицей над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то в силу теоремы 7.4 для алгебры B выполнено свойство (*).

Пример 7.6. Если B — конечномерная H-простая H-модульная алгебра для конечномерной полупростой алгебры Хопфа H над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, то в силу следствия 2.3 и примера 7.5 для алгебры B выполнено свойство (*).

Покажем теперь, что свойство (*) для конечномерных H-простых алгебр наследуется при расширениях Оре алгебры Хопфа H косопримитивными элементами:

Теорема 7.7. *Пусть H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, порождённая как алгебра подалгеброй Хопфа $\tilde H$ и косопримитивным элементом $v \in H$, где $\Delta v = g_1 \otimes v + v \otimes g_2$ для некоторых $g_1, g_2 \in G(\tilde H)$. Кроме того, предположим, что существует такой автоморфизм алгебры $\varphi \colon \tilde H \to \tilde H$, что $vh - \varphi(h)v \in \tilde H$ для всех $h \in \tilde H$. Допустим, что для всех конечномерных $\tilde H$-простых алгебр Хопфа выполнено свойство (*). Тогда для всех конечномерных H-простых алгебр Хопфа также выполнено свойство (*).*

Следствие 7.8. *Если B — конечномерная H-простая H-модульная алгебра для такой алгебры Хопфа H над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, что H получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами, то для алгебры B выполнено свойство (*).*

Следствие 7.9. *Если B — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 для алгебры Тафта $H_{m^2}(\zeta)$, то для алгебры B выполнено свойство (*).*

Доказательство теоремы 7.7. Пусть A — конечномерная H-простая алгебра. В силу леммы 2.19 алгебра A обладает единицей.

Если A является $\tilde H$-простой, то согласно предположениям теоремы алгебра A удовлетворяет свойству (*). Поэтому в силу леммы 2.42 можно без ограничения общности считать, что $J^{\tilde H}(A) \ne 0$. Из теоремы 2.43 следует, что существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $A = \bigoplus_{k=0}^{m-1} v^k \tilde J$, а $J^{\tilde H}(A) = \bigoplus_{k=0}^{m-2} v^k \tilde J$. Более того, $A/J^{\tilde H}(A)$ — $\tilde H$-простая алгебра. Согласно предположениям теоремы 7.7 для алгебры $A/J^{\tilde H}(A)$ выполнено свойство (*). Пусть $a_1, \ldots, a_\ell$ — базис идеала $\tilde J$. Тогда образы $b_1, \ldots, b_\ell$ элементов $v^{m-1}a_1, \ldots, v^{m-1}a_\ell$ в $A/J^{\tilde H}(A)$ являются базисом алгебры $A/J^{\tilde H}(A)$.

В силу свойства (*) существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует полилинейный $\tilde H$-многочлен

$$\tilde f = \tilde f(x_1^{(1)}, \ldots, x_\ell^{(1)}; \ldots; x_1^{(2k)}, \ldots, x_\ell^{(2k)};\ z_1, \ldots, z_{n_1})$$

и элементы $\bar z_i \in A/J^{\tilde H}(A)$, где $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $0 \leqslant n_1 \leqslant n_0$, что $\tilde f$ кососимметричен по $x_1^{(i)}, \ldots, x_\ell^{(i)}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant 2k$, а

$$b := \tilde f(b_1, \ldots, b_\ell; \ldots; b_1, \ldots, b_\ell; \bar z_1, \ldots, \bar z_{n_1}) \ne 0.$$

Поскольку $\tilde H$-инвариантный идеал, порождённый элементом b совпадает с $A/J^{\tilde H}(A)$, а $\left(A/J^{\tilde H}(A)\right)^2 = A/J^{\tilde H}(A)$, существуют такие $h_1, \ldots, h_m \in \tilde H$ и $\bar w_1, \ldots, \bar w_{m-1} \in A/J^{\tilde H}(A)$, что

$$(h_1 b)\bar w_1 (h_2 b)\bar w_2 \ldots (h_{m-1} b)\bar w_{m-1} (h_m b) \ne 0.$$

Определим следующие полилинейные функции, которые с учётом замечания 6.6 реализуются как, соответственно, $\tilde{H}$- и H-многочлены:

$$\tilde{f}_0 := \left(\tilde{f}(x_{11}^{(1)}, \ldots, x_{1\ell}^{(1)}; \ldots; x_{11}^{(2k)}, \ldots, x_{1\ell}^{(2k)};\ z_{11}, \ldots, z_{1n_1})\right)^{h_1} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=2}^{m} w_{i-1} \left(\tilde{f}(x_{i1}^{(1)}, \ldots, x_{i\ell}^{(1)}; \ldots; x_{i1}^{(2k)}, \ldots, x_{i\ell}^{(2k)};\ z_{i1}, \ldots, z_{in_1})\right)^{h_i}$$

и

$$f_0 := \left(\tilde{f}(x_{11}^{(1)}, \ldots, x_{1\ell}^{(1)}; \ldots; x_{11}^{(2k)}, \ldots, x_{1\ell}^{(2k)};\ z_{11}, \ldots, z_{1n_1})\right)^{h_1} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=2}^{m} w_{i-1} \left(\tilde{f}\left(\left(x_{i1}^{(1)}\right)^{v^{i-1}}, \ldots, \left(x_{i\ell}^{(1)}\right)^{v^{i-1}}; \ldots; \left(x_{i1}^{(2k)}\right)^{v^{i-1}}, \ldots, \left(x_{i\ell}^{(2k)}\right)^{v^{i-1}};\ z_{i1}, \ldots, z_{in_1}\right)\right)^{h_i}.$$

Тогда $\tilde{f}_0$ не обращается в нуль при следующей подстановке:

1. $x_{ij}^{(t)} = b_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, $1 \leqslant t \leqslant 2k$;
2. $z_{ij} = \bar{z}_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_1$;
3. $w_i = \bar{w}_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Рассматривая некоторые прообразы u_i элементов $\bar{w}_i$ и q_i элементов $\bar{z}_i$ в A, получаем, что значение многочлена f_0 при подстановке

1. $x_{ij}^{(t)} = v^{m-i} a_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant \ell$, $1 \leqslant t \leqslant 2k$;
2. $z_{ij} = q_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n_1$;
3. $w_i = u_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$

не принадлежит идеалу $J^{\tilde{H}}(A)$.

Обозначим последнюю подстановку через Ξ, а значение H-многочлена f_0 при подстановке Ξ — через a.

Пусть $f := \mathrm{Alt}_1 \ldots \mathrm{Alt}_{2k} f_0$, где Alt_t — оператор альтернирования по переменным $x_{ij}^{(t)}$, $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant \ell$. Рассмотрим образ значения многочлена f при подстановке Ξ в $A/J^{\tilde{H}}(A)$. Если альтернирование заменяет $x_{ij}^{(t)}$ на $x_{i'j'}^{(t)}$, где $i < i'$, то значение выражения $(x_{i'j'}^{(t)})^{v^{i-1}}$ при подстановке Ξ равно $v^{m-1+(i-i')}a_{j'} \in J^{\tilde{H}}(A)$, т.е. образ всего одночлена в $A/J^{\tilde{H}}(A)$ равен нулю. Следовательно, по модулю $J^{\tilde{H}}(A)$ можно считать, что альтернирования заменяют $x_{ij}^{(t)}$ на $x_{ij'}^{(t)}$ для тех же самых i, t. Учитывая, что $\tilde{f}$ кососимметричен по $x_1^{(i)}, \ldots, x_\ell^{(i)}$ для любого $1 \leqslant i \leqslant 2k$, получаем, что значение многочлена f при подстановке Ξ принадлежит классу $(\ell!)^{2km}a + J^{\tilde{H}}(A)$, т.е. не равно нулю.

H-многочлен f удовлетворяет всем требованиям свойства (*) для алгебры H. Следовательно, для всех конечномерных H-простых алгебр выполняется свойство (*). $\square$

7.3 Основная теорема и её следствия

Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать основную теорему данной главы и важнейшие её следствия. Напомним, что через $J^H(A)$ обозначается максимальный нильпотентный H-инвариантный идеал алгебры A.

Теорема 7.10. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0. Предположим, что $A/J^H(A) = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых алгебр B_i, удовлетворяющих свойству (*), причём для некоторого обычного разложения Веддербёрна — Мальцева*

$$A/J^H(A) = B \oplus J\big(A/J^H(A)\big) \text{ (прямая сумма подпространств)}$$

существует такое вложение $\varkappa\colon A/J^H(A) \hookrightarrow A$, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J}$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J$ — естественный сюръективный гомоморфизм,

$$\varkappa(a)\varkappa(b) = \varkappa(ab) \quad \text{и} \quad \varkappa(b)\varkappa(a) = \varkappa(ba) \quad \text{для всех } a \in A/J^H(A) \text{ и } b \in B.$$

Положим

$$\begin{gathered} d := \max\dim\Big(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \;\Big|\; r \geqslant 1, \\ (H\varkappa(B_{i_1}))A^+\,(H\varkappa(B_{i_2}))A^+ \ldots (H\varkappa(B_{i_{r-1}}))A^+\,(H\varkappa(B_{i_r})) \neq 0\Big), \end{gathered} \tag{7.6}$$

где $A^+ := A + F\cdot 1$. Тогда

1. *при $d = 0$ существует такое n_0, что $c_n^H(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *при $d > 0$ существуют такие $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7.10 будет доказана в §7.5.

Замечание 7.11. Из теоремы 7.10 следует, что существует

$$\mathrm{PIexp}^H(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} = d \in \mathbb{Z}_+$$

и для полиномиальных H-тождеств алгебры A справедлив аналог гипотезы Амицура.

Замечание 7.12. В случае, когда основное поле F алгебраически замкнуто, существование вложения $\varkappa$ с требуемыми свойствами следует из теоремы 5.17.

Докажем теперь основные следствия из теоремы 7.10:

Теорема 7.13. *Пусть H — алгебра Хопфа над полем F характеристики 0, причём H либо сама является конечномерной полупростой алгеброй Хопфа, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами. (Например, $H = H_{m^2}(\zeta)$.) Тогда для любой конечномерной ассоциативной H-модульной алгебры A*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^H(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой конечномерной ассоциативной H-модульной алгебры A существует $\mathrm{PIexp}^H(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для A справедлива гипотеза Амицура — Бахтурина.

Доказательство. Заметим, что H-коразмерности не меняются при расширении основного поля. Доказательство полностью повторяет соответствующие рассуждения в случае обычных коразмерностей [66, теорема 4.1.9]. Поэтому без ограничения общности можно считать, что основное поле F алгебраически замкнуто. В силу примера 7.6 и следствия 7.8 все конечномерные H-простые алгебры над F удовлетворяют свойству (*). Из теоремы 2.18 и леммы 2.19 следует, что $A/J^H(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых алгебр B_i. Теперь достаточно применить теоремы 5.17 и 7.10. □

Если потребовать, чтобы радикал Джекобсона алгебры A был её H-подмодулем, то справедливость гипотезы Амицура — Бахтурина получается и в случае произвольной алгебры Хопфа H:

Теорема 7.14. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра для некоторой алгебры Хопфа H над полем F характеристики 0, причём радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^H(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой конечномерной ассоциативной H-модульной алгебры A с H-инвариантным радикалом Джекобсона существует $\mathrm{PIexp}^H(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для A справедлива гипотеза Амицура — Бахтурина.

Доказательство. Пусть $K \supset F$ — расширение поля F. Поскольку алгебра $A/J(A)$ полупроста и $\operatorname{char} F = 0$,

$$(A \otimes_F K)/(J(A) \otimes_F K) \cong (A/J(A)) \otimes_F K$$

снова является полупростой алгеброй (см., например, [16, §10.7, следствие b]). В силу того, что идеал $J(A) \otimes_F K$ нильпотентен, справедливо равенство $J(A \otimes_F K) = J(A) \otimes_F K$. В частности, $J(A \otimes_F K)$ по-прежнему является $H \otimes_F K$-инвариантным идеалом. Как было уже замечено в доказательстве предыдущей теоремы, H-коразмерности не меняются при расширении основного поля. Поэтому без ограничения общности можно считать поле F алгебраически замкнутым. В силу теоремы 2.18 существует разложение $A/J(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$

(прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых алгебр B_i. Поскольку алгебра $A/J(A)$ полупроста, алгебры B_i также полупросты. В силу теоремы 7.4 для всех алгебр B_i выполняется свойство (*). Теперь для завершения доказательства достаточно применить теоремы 5.17 и 7.10. □

В случае, когда существует H-инвариантный аналог разложения Веддербёрна — Мальцева, формула (7.6) принимает особенно простой вид, напоминающий формулу для обычной PI-экспоненты, полученную А. Джамбруно и М. В. Зайцевым [66, §6.2]:

Теорема 7.15. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0, причём существует разложение $A = B_0 \oplus J^H(A)$ (прямая сумма H-подмодулей), где алгебра B_0 представляется в виде $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) для некоторых H-простых алгебр B_i, удовлетворяющих свойству (*). Положим*

$$\begin{gathered} d := \max \dim \Bigl(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \Bigm| \\ B_{i_1} J^H(A) B_{i_2} J^H(A) \ldots B_{i_{r-1}} J^H(A) B_{i_r} \neq 0,\ r \geqslant 1 \Bigr). \end{gathered} \tag{7.7}$$

Тогда

1. *при $d = 0$ существует такое n_0, что $c_n^H(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *при $d > 0$ существуют такие $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Достаточно положить $\varkappa = \left(\pi\big|_{B_0}\right)^{-1}$ и заметить, что в этом случае $\varkappa$ является гомоморфизмом алгебр и H-модулей, т.е. $(HB_k)A^+(HB_\ell) \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant k, \ell \leqslant q$, только если либо $k = \ell$, либо $B_k J^H(A) B_\ell \neq 0$. Отсюда числа d в теоремах 7.10 и 7.15 совпадают, и достаточно применить теорему 7.10. □

Теперь выведем из теоремы 7.14 справедливость аналога гипотезы Амицура для дифференциальных тождеств.

Теорема 7.16. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0 с действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{U(\mathfrak{g})}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A существует $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.

Доказательство. Как было показано в примере 1.33, алгебра A является $U(\mathfrak{g})$-модульной алгеброй. В силу теоремы 2.1 радикал Джекобсона $J(A)$ является $U(\mathfrak{g})$-подмодулем алгебры A. Теперь неравенство для коразмерностей следует из теоремы 7.14. □

Замечание 7.17. В случае, когда $\mathfrak{g}$ — конечномерная полупростая алгебра Ли, справедливо равенство $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$ (см. теорему 7.31 ниже).

Замечание 7.18. Из теоремы 7.16 следует справедливость аналога гипотезы Амицура для дифференциальных коразмерностей даже для тех алгебр, для которых не существует инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева, см. пример 2.29.

Докажем теперь справедливость аналогов гипотезы Амицура для градуированных тождеств, G-тождеств и градуированных G-тождеств:

Теорема 7.19. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, градуированная произвольной группой G. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{G\text{-gr}}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A существует $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.

Теорема 7.20. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0 с действием произвольной группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{G}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A существует $\mathrm{PIexp}^{G}(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.

Замечание 7.21. В случае, когда G — связная редуктивная аффинная алгебраическая группа, которая рационально действует на G, справедливо равенство $\mathrm{PIexp}^{G}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$ (см. теорему 7.30 ниже).

Теоремы 7.19 и 7.20 являются частными случаями (соответственно, при $G = \{e\}$ и при $T = \{e\}$) следующей теоремы:

Теорема 7.22. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, градуированная произвольной группой T, причём на A задано градуированное действие некоторой группы G (см. определение 5.11). Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{T\text{-gr},G}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы* $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, *что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{T\text{-gr},G}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A *существует* $\operatorname{PIexp}^{T\text{-gr},G}(A) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Доказательство. Как было доказано в теореме 5.10, алгебра A является алгеброй с обобщённым $F^T \otimes FG$-действием, причём в силу предложения 6.20 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $c_n^{T\text{-gr},G}(A) = c_n^{F^T \otimes FG}(A)$. Как и выше, коразмерности $c_n^{F^T \otimes FG}(A)$ не меняются при расширении основного поля F, поэтому без ограничения общности можно считать поле F алгебраически замкнутым. В силу теоремы 5.14 радикал $J(A)$ является $F^T \otimes FG$-подмодулем, а в силу теоремы 5.16 алгебра $A/J(A)$ является прямой суммой $F^T \otimes FG$-инвариантных идеалов B_i, каждый из которых является $F^T \otimes FG$-простой алгеброй. Поскольку алгебры B_i полупросты, в силу теоремы 7.4 для каждой из них выполняется свойство (*). Теперь достаточно применить теоремы 5.17 и 7.10. $\square$

Замечание 7.23. Из теоремы 7.20 следует справедливость аналога гипотезы Амицура для G-коразмерностей даже для тех алгебр, для которых не существует G-инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева, см. пример 2.25.

7.4 Оценки сверху и снизу

В данном параграфе доказываются оценки сверху и снизу из теоремы 7.10. Оказывается, что оценку сверху можно получить при более слабых предположениях, чем предположения теоремы 7.10. Оценка снизу доказывается в предположении, что существует H-многочлен, не являющийся полиномиальным H-тождеством, который кососимметричен по достаточному числу наборов из d переменных.

Пусть A — конечномерная ненильпотентная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0, а J — некоторый такой H-инвариантный идеал алгебры A, что $J^p = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Фиксируем разложение $A/J = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$, где B_i — некоторые подпространства. Пусть $\varkappa\colon A/J \hookrightarrow A$ — некоторое такое F-линейное отображение, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J}$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J$ — естественный сюръективный гомоморфизм. Зададим теперь число d формулой (7.6).

Лемма 7.24. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$, *причём* $\sum_{k=d+1}^{s} \lambda_k \geqslant p$. *Тогда* $m(A, H, \lambda) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1.45 достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f \in \operatorname{Id}^H(A)$ для всех $f \in P_n^H$ и для всех таблиц Юнга T_λ, отвечающих λ.

Выберем в алгебре A базис, который является объединением базисов пространств $\varkappa(B_1), \ldots, \varkappa(B_q)$ и J. Поскольку H-многочлен $e^*_{T_\lambda} f$ полилинеен, достаточно показать, что $e^*_{T_\lambda} f$ обращается в нуль при подстановке базисных элементов вместо своих неизвестных. Фиксируем некоторую подстановку базисных элементов и выберем такие $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant q$, что все подставляемые элементы принадлежат подпространству

$\varkappa(B_{i_1}) \oplus \ldots \oplus \varkappa(B_{i_r}) \oplus J$ и для любого k подставляется хотя бы один элемент из $\varkappa(B_{i_k})$. Тогда можно считать, что $\dim(B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_r}) \leqslant d$, поскольку в противном случае значение H-многочлена $e^*_{T_\lambda} f$ равно нулю в силу определения числа d. Напомним, что $e^*_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}$, а оператор b_{T_λ} делает многочлены кососимметричными по переменным, отвечающим каждому столбцу таблицы Юнга T_λ. Отсюда для того, чтобы H-многочлен $e^*_{T_\lambda} f$ не обратился в нуль, в переменные каждого столбца должны поставляться различные элементы базиса. Следовательно, в переменные должно подставляться по крайней мере $\sum_{k=d+1}^{s} \lambda_k \geqslant p$ элементов из идеала J. В силу того, что J является H-подмодулем и $J^p = 0$, значение H-многочлена $e^*_{T_\lambda} f$ равно нулю, откуда $e^*_{T_\lambda} f \in \mathrm{Id}^H(A)$ и $m(A, H, \lambda) = 0$. □

Теорема 7.25. *Если $d > 0$, то существуют такие константы $C_2 > 0$ и $r_2 \in \mathbb{R}$, что $c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В случае $d = 0$ алгебра A совпадает с нильпотентным идеалом J и $c_n^H(A) = 0$ при $n \geqslant p$.*

Доказательство. Рассмотрим такое $\lambda \vdash n$, что $m(A, H, \lambda) \neq 0$. Согласно формуле крюков

$$\dim M(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

где h_{ij} — длина крюка в диаграмме D_λ с вершиной в (i, j). Применив лемму 7.24 и оценивая полиномиальный коэффициент $\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_d)!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!}$ сверху по формуле возведения суммы $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{d}$ в степень $\lambda_1 + \ldots + \lambda_d$, получаем, что

$$\dim M(\lambda) \leqslant \frac{n!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!} \leqslant \frac{n!}{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_d)!} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_d)!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!} \leqslant \frac{n!}{(n-p)!} d^{\lambda_1+\ldots+\lambda_d} \leqslant C_3 n^{r_3} d^n.$$

для некоторых констант $C_3, r_3 > 0$. Теперь оценка сверху следует из теоремы 6.27. □

Лемма 7.26. *Предположим, что существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют попарно непересекающиеся наборы переменных $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k := \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = d$, и H-многочлен $f \in P_n^H \backslash \mathrm{Id}^H(A)$, кососимметричный по переменным каждого множества X_j. Тогда для любого $n \geqslant n_0$ существует такое разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$, где $\lambda_i > 2k - p$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d$, что $m(A, H, \lambda) \neq 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^H(A)$ для некоторой таблицы Юнга T_λ требуемой формы λ. Известно (см., например, теорему 3.2.7 из [3]), что

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda},$$

где суммирование ведётся по множеству стандартных таблиц Юнга T_λ всевозможных форм $\lambda \vdash n$. Отсюда

$$FS_n f = \sum_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda} f \not\subseteq \mathrm{Id}^H(A)$$

и $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^H(A)$ для некоторого $\lambda \vdash n$. Докажем, что разбиение λ имеет требуемый вид. Достаточно доказать, что $\lambda_d > 2k - p$, так как $\lambda_i \geqslant \lambda_d$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d$. В любой строчке таблицы T_λ содержится не более одного номера переменной из одного и того же множества X_i, поскольку $e^*_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}$, а a_{T_λ} симметризует по переменным, отвечающим каждой строчке таблицы T_λ. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \leqslant 2k(d-1) + (n-2kd) = n-2k.$$

В силу леммы 7.24 справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i > n-p$. Следовательно, $\lambda_d > 2k-p$. □

Теперь дополним оценку сверху оценкой снизу:

Теорема 7.27. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием для некоторой ассоциативной алгебры H с 1 над полем F характеристики 0, а J — некоторый такой H-инвариантный идеал алгебры A, что $J^p = 0$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Предположим, что задано разложение $A/J = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$, где B_i — некоторые подпространства. Пусть $\varkappa\colon A/J \hookrightarrow A$ — некоторое такое F-линейное отображение, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{A/J}$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J$ — естественный сюръективный гомоморфизм. Предположим, что число d, заданное формулой (7.6), больше 0 и существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют попарно непересекающиеся наборы переменных $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k := \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = d$, и H-многочлен $f \in P^H_n \backslash \mathrm{Id}^H(A)$, кососимметричный по переменным каждого множества X_j. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c^H_n(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Диаграмма Юнга D_λ из леммы 7.26 содержит квадратную поддиаграмму D_μ, где $\mu = (\underbrace{2k-p, \ldots, 2k-p}_{d})$. Из правила ветвления для группы S_n следует, что если рассмотреть сужение S_n-действия на $M(\lambda)$ до S_{n-1}-действия, то FS_n-модуль $M(\lambda)$ оказывается прямой суммой всех неизоморфных FS_{n-1}-модулей $M(\nu)$, где $\nu \vdash (n-1)$ и всякая таблица D_ν получена из D_λ удалением одной клетки. В частности, $\dim M(\nu) \leqslant \dim M(\lambda)$. Применяя правило ветвления $(n - d(2k-p))$ раз, получаем, что $\dim M(\mu) \leqslant \dim M(\lambda)$. В силу формулы крюков

$$\dim M(\mu) = \frac{(d(2k-p))!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

где h_{ij} — длина крюка с вершиной в (i,j). По формуле Стирлинга

$$c^H_n(A) \geqslant \dim M(\lambda) \geqslant \dim M(\mu) \geqslant \frac{(d(2k-p))!}{((2k-p+d)!)^d} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi d(2k-p)}\left(\frac{d(2k-p)}{e}\right)^{d(2k-p)}}{\left(\sqrt{2\pi(2k-p+d)}\left(\frac{2k-p+d}{e}\right)^{2k-p+d}\right)^d} \sim C_4 k^{r_4} d^{2kd}$$

для некоторых констант $C_4 > 0$, $r_4 \in \mathbb{Q}$ при $k \to \infty$. Поскольку $k = \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, это доказывает оценку снизу.

Оценка сверху была доказана в теореме 7.25. □

7.5 Завершение доказательства

Для того, чтобы завершить доказательство теоремы 7.10, осталось построить для алгебры A полилинейный H-многочлен, который кососимметричен по достаточно большому числу наборов из d переменных и при этом не является H-тождеством.

Лемма 7.28. *Пусть A, $\varkappa$, B_i и d те же, что и в теореме 7.10. Тогда если $d > 0$, то существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют попарно непересекающиеся наборы переменных $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k := \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = d$, и H-многочлен $f \in P_n^H \backslash \mathrm{Id}^H(A)$, кососимметричный по переменным каждого множества X_j.*

Доказательство. Пусть $J := J^H(A)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$d = \dim(B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_r),$$

где $(H\varkappa(B_1))A^+(H\varkappa(B_2))A^+ \ldots (H\varkappa(B_{r-1}))A^+(H\varkappa(B_r)) \neq 0$.

Поскольку идеал J нильпотентен, можно найти такое максимальное число $\sum_{i=1}^r q_i$, где $q_i \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\left(a_1 \prod_{i=1}^{q_1} j_{1i}\right)(\gamma_1\varkappa(b_1))\left(a_2 \prod_{i=1}^{q_2} j_{2i}\right)(\gamma_2\varkappa(b_2))\ldots\left(a_r \prod_{i=1}^{q_r} j_{ri}\right)(\gamma_r\varkappa(b_r))\left(a_{r+1} \prod_{i=1}^{q_{r+1}} j_{r+1,i}\right) \neq 0$$

для некоторых $j_{ki} \in J$, $a_k \in A^+$, $b_k \in B_i$, $\gamma_k \in H$. Введём обозначение $j_k := a_k \prod_{i=1}^{q_k} j_{ki}$.

Тогда

$$j_1(\gamma_1\varkappa(b_1))j_2(\gamma_2\varkappa(b_2))\ldots j_r(\gamma_r\varkappa(b_r))j_{r+1} \neq 0 \tag{7.8}$$

для некоторых $b_i \in B_i$, $\gamma_i \in H$, однако

$$j_1\tilde{b}_1 j_2\tilde{b}_2 \ldots j_r\tilde{b}_r j_{r+1} = 0 \tag{7.9}$$

для всех таких $\tilde{b}_i \in A^+(H\varkappa(B_i))A^+$, что $\tilde{b}_k \in J(H\varkappa(B_k))A^+ + A^+(H\varkappa(B_k))J$ хотя бы для одного k.

Пусть $a_k^{(i)}$, где $1 \leqslant k \leqslant d_i := \dim B_i$, — базисные элементы алгебры B_i для $1 \leqslant i \leqslant r$.

В силу свойства (*) существуют такие константы $\tilde{m}_i \in \mathbb{Z}_+$, что для любого k существуют полилинейные многочлены

$$f_i = f_i(x_1^{(i,1)}, \ldots, x_{d_i}^{(i,1)}; \ldots; x_1^{(i,2k)}, \ldots, x_{d_i}^{(i,2k)}; z_1^{(i)}, \ldots, z_{m_i}^{(i)}) \in P_{2kd_i+m_i}^H \backslash \mathrm{Id}^H(B_i),$$

где $0 \leqslant m_i \leqslant \tilde{m}_i$, кососимметричные по переменным каждого из попарно непересекающихся множеств $X_\ell^{(i)} = \{x_1^{(i,\ell)}, x_2^{(i,\ell)}, \ldots, x_{d_i}^{(i,\ell)}\}$, $1 \leqslant \ell \leqslant 2k$. В частности, существуют такие $\bar{z}_\alpha^{(i)} \in B_i$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant m_i$, что

$$\hat{b}_i := f_i(a_1^{(i)}, \ldots, a_{d_i}^{(i)}; \ldots; a_1^{(i)}, \ldots, a_{d_i}^{(i)}; \bar{z}_1^{(i)}, \ldots, \bar{z}_{m_i}^{(i)}) \neq 0.$$

Введём обозначения $n_0 := 3r-1+\sum_{i=1}^r \tilde m_i$, $k := \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, $\tilde k := \left[\frac{n-2kd}{2d_1}\right]+1$. Выберем многочлены f_i, где $1 \leqslant i \leqslant r$, для $k = \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$. Кроме этого, снова пользуясь свойством (*), выберем $\tilde f_1 = \tilde f_1(x_1^{(1)},\ldots,x_{d_i}^{(1)};\ldots;x_1^{(2\tilde k)},\ldots,x_{d_i}^{(2\tilde k)};z_1,\ldots,z_{\hat m_1}) \in P^H_{2\tilde k d_1+\hat m_1} \setminus \mathrm{Id}^H(B_1)$, где $0 \leqslant \hat m_1 \leqslant \tilde m_1$ и

$$\hat b := \tilde f_1(a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\ldots;a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1,\ldots,\bar z_{\hat m_1}) \neq 0$$

для некоторых $\bar z_1,\ldots,\bar z_{\hat m_1} \in B_1$.

Поскольку алгебры B_i являются H-простыми, существуют такие элементы $h_{i\ell} \in H$, $b_{i\ell}, \tilde b_{i\ell} \in B_i$, $\tilde b_\ell \in B_1$, что $\sum_\ell b_{i\ell}(h_{i\ell}\hat b_i)\tilde b_{i\ell} = b_i$ для всех $2 \leqslant i \leqslant r$ и $\sum_\ell \tilde b_\ell(h_{0\ell}\hat b) b_{1\ell}(h_{1\ell}\hat b_1)\tilde b_{1\ell} = b_1$.

Тогда выражение

$$j_1\Biggl(\gamma_1\varkappa\Biggl(\sum_{s_1}\tilde b_{s_1}\left(h_{0s_1}\tilde f_1\bigl(a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\ldots;a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1,\ldots,\bar z_{\hat m_1}\bigr)\right)b_{1s_1}\cdot$$
$$\cdot\left(h_{1s_1}f_1\bigl(a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\ldots;a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1^{(1)},\ldots,\bar z_{m_1}^{(1)}\bigr)\right)\tilde b_{1s_1}\Biggr)\Biggr)j_2\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=2}^r\Biggl(\gamma_i\varkappa\Biggl(\sum_{s_i} b_{is_i}\left(h_{is_i}f_i\bigl(a_1^{(i)},\ldots,a_{d_i}^{(i)};\ldots;a_1^{(i)},\ldots,a_{d_i}^{(i)};\bar z_1^{(i)},\ldots,\bar z_{m_i}^{(i)}\bigr)\right)\tilde b_{is_i}\Biggr)\Biggr)j_{i+1}$$

равно левой части неравенства (7.8), которая, как следует из (7.8), не равна нулю. Отсюда можно выбрать такие индексы $s_1,\ldots,s_r$, что

$$a := j_1\Biggl(\gamma_1\varkappa\Biggl(\tilde b_{s_1}\left(h_{0s_1}\tilde f_1\bigl(a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\ldots;a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1,\ldots,\bar z_{\hat m_1}\bigr)\right)b_{1s_1}\cdot$$
$$\cdot\left(h_{1s_1}f_1\bigl(a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\ldots;a_1^{(1)},\ldots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1^{(1)},\ldots,\bar z_{m_1}^{(1)}\bigr)\right)\tilde b_{1s_1}\Biggr)\Biggr)j_2\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=2}^r\Biggl(\gamma_i\varkappa\Biggl(b_{is_i}\left(h_{is_i}f_i\bigl(a_1^{(i)},\ldots,a_{d_i}^{(i)};\ldots;a_1^{(i)},\ldots,a_{d_i}^{(i)};\bar z_1^{(i)},\ldots,\bar z_{m_i}^{(i)}\bigr)\right)\tilde b_{is_i}\Biggr)\Biggr)j_{i+1} \neq 0.$$

Пусть B — максимальная полупростая подалгебра алгебры $A/J^H(A)$, для которой $\varkappa$ удовлетворяет свойствам $\varkappa(a)\varkappa(b) = \varkappa(ab)$ и $\varkappa(b)\varkappa(a) = \varkappa(ba)$ для всех $a \in A/J^H(A)$ и $b \in B$. Поскольку в силу свойства (*) все алгебры B_i обладает единицей, алгебра $A/J^H(A) = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) также обладает единицей, причём $1_B = 1_{A/J^H(A)}$. Введём обозначение $\tilde B_i := 1_{B_i}B$. Поскольку $\tilde B_i$ являются гомоморфными образами полупростой алгебры B, они также полупросты. Теперь из $B \subseteq \tilde B_1 \oplus \tilde B_2 \oplus \ldots \oplus \tilde B_q$ и максимальности подалгебры B следует, что $B = \tilde B_1 \oplus \tilde B_2 \oplus \ldots \oplus \tilde B_q$ (прямая сумма идеалов), а $\tilde B_i$ — максимальные полупростые подалгебры алгебр B_i. Отсюда $1_{\tilde B_i} = 1_{B_i}$ и $1_{B_i} \in B$.

Напомним, что, в частности, $\varkappa(b) = \varkappa(b)\varkappa(1_{B_i})$ для всех $b \in B_i$. Отсюда

$$a = j_1\Biggl(\gamma_1\Biggl(\varkappa\Bigl(\tilde b_{s_1}\bigl(h_{0s_1}\tilde f_1(a_1^{(1)},\dots,a_{d_1}^{(1)};\dots;a_1^{(1)},\dots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1,\dots,\bar z_{\hat m_1})\bigr)b_{1s_1}\cdot$$

$$\cdot\bigl(h_{1s_1}f_1(a_1^{(1)},\dots,a_{d_1}^{(1)};\dots;a_1^{(1)},\dots,a_{d_1}^{(1)};\bar z_1^{(1)},\dots,\bar z_{m_1}^{(1)})\bigr)\tilde b_{1s_1}\Bigr)\varkappa(1_{B_1})\Biggr)\Biggr)j_2\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{r}\Biggl(\gamma_i\Biggl(\varkappa\Bigl(b_{is_i}\bigl(h_{is_i}f_i(a_1^{(i)},\dots,a_{d_i}^{(i)};\dots;a_1^{(i)},\dots,a_{d_i}^{(i)};\bar z_1^{(i)},\dots,\bar z_{m_i}^{(i)})\bigr)\tilde b_{is_i}\Bigr)\varkappa(1_{B_i})\Biggr)\Biggr)j_{i+1} \ne 0.$$

Более того, из $\pi(h\varkappa(a) - \varkappa(ha)) = 0$ и $\pi(\varkappa(a)\varkappa(b) - \varkappa(ab)) = 0$ следует, что $h\varkappa(a) - \varkappa(ha) \in J$ и $\varkappa(a)\varkappa(b) - \varkappa(ab) \in J$ для всех $a, b \in A$ и $h \in H$. Отсюда в силу (7.9) в множителях слева от $\varkappa(1_{B_i})$ отображение $\varkappa$ ведёт себя как гомоморфизм H-модулей и

$$a = j_1\Biggl(\gamma_1\Biggl(\varkappa(\tilde b_{s_1})\Bigl(h_{0s_1}\tilde f_1\bigl(\varkappa(a_1^{(1)}),\dots,\varkappa(a_{d_1}^{(1)});\dots;\varkappa(a_1^{(1)}),\dots,\varkappa(a_{d_1}^{(1)});$$

$$\varkappa(\bar z_1),\dots,\varkappa(\bar z_{\hat m_1})\bigr)\Bigr)\varkappa(b_{1s_1})\cdot$$

$$\cdot\Bigl(h_{1s_1}f_1\bigl(\varkappa(a_1^{(1)}),\dots,\varkappa(a_{d_1}^{(1)});\dots;\varkappa(a_1^{(1)}),\dots,\varkappa(a_{d_1}^{(1)});$$

$$\varkappa(\bar z_1^{(1)}),\dots,\varkappa(\bar z_{m_1}^{(1)})\bigr)\Bigr)\varkappa(\tilde b_{1s_1})\varkappa(1_{B_1})\Biggr)\Biggr)j_2\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{r}\Biggl(\gamma_i\Biggl(\varkappa(b_{is_i})\Bigl(h_{is_i}f_i\bigl(\varkappa(a_1^{(i)}),\dots,\varkappa(a_{d_i}^{(i)});\dots;\varkappa(a_1^{(i)}),\dots,\varkappa(a_{d_i}^{(i)});$$

$$\varkappa(\bar z_1^{(i)}),\dots,\varkappa(\bar z_{m_i}^{(i)})\bigr)\Bigr)\varkappa(\tilde b_{is_i})\varkappa(1_{B_i})\Biggr)\Biggr)j_{i+1} \ne 0.$$

Определим полилинейную функцию

$$f_0 := v_1\Biggl(\gamma_1\Biggl(y_0\Bigl(h_{0s_1}\tilde f_1\bigl(x_1^{(1)},\dots,x_{d_1}^{(1)};\dots;x_1^{(2\tilde k)},\dots,x_{d_1}^{(2\tilde k)};z_1,\dots,z_{\hat m_1}\bigr)\Bigr)y_1\cdot$$

$$\cdot\Bigl(h_{1s_1}f_1\bigl(x_1^{(1,1)},\dots,x_{d_1}^{(1,1)};\dots;x_1^{(1,2k)},\dots,x_{d_1}^{(1,2k)};z_1^{(1)},\dots,z_{m_1}^{(1)}\bigr)\Bigr)w_1\Biggr)\Biggr)v_2\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{r}\Biggl(\gamma_i\Biggl(y_i\Bigl(h_{is_i}f_i\bigl(x_1^{(i,1)},\dots,x_{d_i}^{(i,1)};\dots;x_1^{(i,2k)},\dots,x_{d_i}^{(i,2k)};z_1^{(i)},\dots,z_{m_i}^{(i)}\bigr)\Bigr)w_i\Biggr)\Biggr)v_{i+1}.$$

(если $q_i = 0$ для некоторых i и элементы j_i отсутствовали в (7.8), то переменная v_i также отсутствует в f_0.) Значение f_0 при подстановке $x_\beta^{(\alpha)} = \varkappa(a_\beta^{(1)})$, $x_\beta^{(i,\alpha)} = \varkappa(a_\beta^{(i)})$, $z_i = \varkappa(\bar z_i)$, $z_\beta^{(i)} = \varkappa(\bar z_\beta^{(i)})$, $v_i = j_i$, $y_0 = \varkappa(\tilde b_{s_1})$, $y_i = \varkappa(b_{is_i})$, $w_i = \varkappa(\tilde b_{is_i})\varkappa(1_{B_i})$ равно $a \ne 0$. Обозначим эту подстановку через Ξ.

Пусть $X_\ell = \bigcup_{i=1}^r X^{(i,\ell)}$, где $X^{(i,\ell)} = \{x_\alpha^{(i,\ell)} \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant d_i\}$. Обозначим через Alt_ℓ оператор альтернирования по множеству X_ℓ. Введём обозначение $\hat f := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \dots \mathrm{Alt}_{2k} f_0$. Заметим, что альтернирования не меняют $z_i, z_\beta^{(i)}, v_i, y_i, w_i$, а H-многочлен f_i кососимметричен по каждому из множеств $X_\ell^{(i)}$. Следовательно, значение выражения $\hat f$ при подстановке Ξ равно

$((d_1)!(d_2)!\dots(d_r)!)^{2k}\,a \neq 0$, так как $B_1 \oplus \dots \oplus B_r$ является прямой суммой H-инвариантных идеалов и если альтернирование перемещает переменную из множества $X_\ell^{(i)}$ на место переменной из множества $X_\ell^{(i')}$ при $i \neq i'$, то соответствующие элементы $h\varkappa(a_\beta^{(i)})$, где $h \in H$, обращаются в нуль при умножение на элементы пространства $\varkappa(B_{i'})$. Здесь мы снова использовали тот факт, что в силу (7.9) в множителях слева от $\varkappa(1_{B_i})$ отображение $\varkappa$ ведёт себя как гомоморфизм H-модулей и алгебр.

Заметим, что без дополнительных преобразований выражение $\hat f$ является полилинейной функцией, а не H-многочленом. Однако в силу замечания 6.6 функцию $\hat f$ можно представить в виде H-многочлена

$$\begin{aligned}\tilde f := \mathrm{Alt}_1\,\mathrm{Alt}_2\dots\mathrm{Alt}_{2k}\, v_1 y_0^{\tilde h_0} \tilde f_1' \left(x_1^{(1)},\dots,x_{d_1}^{(1)};\dots;x_1^{(2\tilde k)},\dots,x_{d_1}^{(2\tilde k)}; z_1,\dots,z_{\hat m_1}\right) y_1^{\tilde h_1}\cdot \\ \cdot f_1'\left(x_1^{(1,1)},\dots,x_{d_1}^{(1,1)};\dots;x_1^{(1,2k)},\dots,x_{d_1}^{(1,2k)}; z_1^{(1)},\dots,z_{m_1}^{(1)}\right) w_1^{\hat h_1} v_2\cdot \\ \cdot\prod_{i=2}^r y_i^{\tilde h_i} f_i'\left(x_1^{(i,1)},\dots,x_{d_i}^{(i,1)};\dots;x_1^{(i,2k)},\dots,x_{d_i}^{(i,2k)}; z_1^{(i)},\dots,z_{m_i}^{(i)}\right) w_i^{\hat h_i} v_{i+1},\end{aligned}$$

где f_i' и $\tilde f_1'$ — некоторые H-многочлены, элементы $\tilde h_i, \hat h_i \in H$ получены из h_{0s_1}, h_{is_i} и γ_i применением равенства (5.1), а значение H-многочлена $\tilde f$ при подстановке Ξ снова равно $((d_1)!(d_2)!\dots(d_r)!)^{2k}\,a \neq 0$.

Представим теперь $\tilde f_1'$ в виде суммы одночленов и заметим, что $\tilde f$ является линейной комбинацией полилинейных H-многочленов

$$\begin{aligned}\tilde f_0 := \mathrm{Alt}_1\,\mathrm{Alt}_2\dots\mathrm{Alt}_{2k}\, u_1^{\tau_1}\dots u_s^{\tau_s}\cdot \\ \cdot f_1'\left(x_1^{(1,1)},\dots,x_{d_1}^{(1,1)};\dots;x_1^{(1,2k)},\dots,x_{d_1}^{(1,2k)}; z_1^{(1)},\dots,z_{m_1}^{(1)}\right) w_1^{\hat h_1} v_2\cdot \\ \cdot\prod_{i=2}^r y_i^{\tilde h_i} f_i'\left(x_1^{(i,1)},\dots,x_{d_i}^{(i,1)};\dots;x_1^{(i,2k)},\dots,x_{d_i}^{(i,2k)}; z_1^{(i)},\dots,z_{m_i}^{(i)}\right) w_i^{\hat h_i} v_{i+1},\end{aligned}$$

где $u_1,\dots,u_s$ — переменные $x_\beta^{(\alpha)}$, y_0, y_1, z_i и, возможно, v_1, а $\tau_i \in H$ — некоторые элементы. Здесь $s = 2\tilde k d_1 + \hat m_1 + 3$, если переменная v_1 присутствовала в f_0 и $s = 2\tilde k d_1 + \hat m_1 + 2$, если отсутствовала. По крайней мере один из H-многочленов $\tilde f_0$ не является полиномиальным H-тождеством. Снова обозначим его через $\tilde f_0$. Заметим, что

$$\deg \tilde f_0 \geqslant 2\tilde k d_1 + \hat m_1 + 1 + \sum_{i=1}^r (2kd_i + m_i + 2) > 2\tilde k d_1 + 2kd > n.$$

С другой стороны, $\sum_{i=1}^r (2kd_i + m_i + 3) - 1 \leqslant n$. Пусть

$$\begin{aligned}f := \mathrm{Alt}_1\,\mathrm{Alt}_2\dots\mathrm{Alt}_{2k}\, u_{(\deg \tilde f_0)-n+1}^{\tau_{(\deg \tilde f_0)-n+1}}\dots u_s^{\tau_s}\cdot \\ \cdot f_1'\left(x_1^{(1,1)},\dots,x_{d_1}^{(1,1)};\dots;x_1^{(1,2k)},\dots,x_{d_1}^{(1,2k)}; z_1^{(1)},\dots,z_{m_1}^{(1)}\right) w_1^{\hat h_1} v_2\cdot \\ \cdot\prod_{i=2}^r y_i^{\tilde h_i} f_i'\left(x_1^{(i,1)},\dots,x_{d_i}^{(i,1)};\dots;x_1^{(i,2k)},\dots,x_{d_i}^{(i,2k)}; z_1^{(i)},\dots,z_{m_i}^{(i)}\right) w_i^{\hat h_i} v_{i+1}.\end{aligned}$$

Тогда f не обращается в нуль при подстановке Ξ. С другой стороны, H-многочлен f кососимметричен по переменным каждого из множеств X_ℓ, где $1 \leqslant \ell \leqslant 2k$. Наконец, $\deg f = n$.

Теперь осталось переименовать переменные H-многочлена f в $x_1, \dots, x_n$ и заметить, что f удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 7.10. При $d > 0$ достаточно применить лемму 7.28 и теорему 7.27.

В случае $d = 0$ алгебра A совпадает с нильпотентным идеалом $J^H(A)$, откуда $c_n^H(A) = 0$ при $n \geqslant p$. $\square$

7.6 Применение понятия эквивалентности действий и случаи совпадения PI-экспонент

В этом параграфе мы, в частности, покажем, как понятие эквивалентности модульных структур может быть использовано для исследования коразмерностей полиномиальных H-тождеств.

Во-первых, из теоремы 7.14 можно вывести справедливость гипотезы Амицура — Бахтурина для любой структуры H-модульной алгебры с 1 на алгебре $F[x]/(x^2)$, где H — некоторая алгебра Хопфа:

Теорема 7.29. *Пусть на алгебре $F[x]/(x^2)$ определена структура H-модульной алгебры с 1 для некоторой алгебры Хопфа H над полем F характеристики 0. Обозначим через d размерность идеала $J^H\big(F[x]/(x^2)\big)$. Тогда существуют $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$C_1 n^{r_1}(2-d)^n \leqslant c_n^H(F[x]/(x^2)) \leqslant C_2 n^{r_2}(2-d)^n \tag{7.10}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

В частности, для H-тождеств алгебры $F[x]/(x^2)$ справедлива гипотеза Амицура — Бахтурина.

Доказательство. Из леммы 6.21 следует, что (7.10) достаточно доказать для модульных структур, описанных в теореме 2.38. В первых двух случаях радикал Джекобсона алгебры $F[x]/(x^2)$, который совпадает с подпространством $F\bar{x}$, H-инвариантен, т.е. $d = 1$. В последнем случае $F[x]/(x^2)$ — H_4-простая алгебра, т.е. $d = 0$. Как было уже отмечено в предыдущем параграфе, коразмерности не меняются при расширении основного поля. Принимая во внимание структуру алгебр $F[x]/(x^2)$ и H_4, заключаем, что при расширении основного поля не меняется и число $d = \dim_F \Big(J^H\big(F[x]/(x^2)\big)\Big)$. Отсюда без ограничения общности можно предполагать основное поле F алгебраически замкнутым. Теперь в случае H-инвариантного радикала Джекобсона неравенства (7.10) являются следствием теоремы 7.14 и формулы (7.6), а в случае, когда алгебра $F[x]/(x^2)$ является H_4-простой, неравенства (7.10) следуют из теоремы 7.13 и формулы (7.7). $\square$

Наша следующая цель — доказать, что в случае рационального действия связной редуктивной аффинной алгебраической группы автоморфизмами (в силу предложения 2.12, если связная группа действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами, то она действует автоморфизмами) или действия конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями экспоненты соответствующих типов тождеств совпадают с обычными PI-экспонентами.

Начнём с действий алгебраических групп:

Теорема 7.30. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с рациональным действием связной редуктивной аффинной алгебраической группы G автоморфизмами. Тогда* $\mathrm{PIexp}^G(A) = \mathrm{PIexp}(A)$.

Доказательство. В силу следствия 2.23 для алгебры A существует G-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма G-инвариантных подпространств). Согласно теореме 2.16 максимальная полупростая подалгебра B раскладывается в прямую сумму G-инвариантных идеалов B_i, являющихся G-простыми подалгебрами. В силу теоремы 2.13 все алгебры B_i просты, откуда формула (7.7) даёт для $\mathrm{PIexp}^G(A)$ и $\mathrm{PIexp}(A)$ одно и то же значение. □

Теперь выведем отсюда аналогичный результат для действий конечномерных полупростых алгебр Ли:

Теорема 7.31. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0 с действием конечномерной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями. Тогда* $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$.

Доказательство. Как и в случае обычных тожеств, $\mathfrak{g}$-коразмерности не меняются при расширении основного поля, поэтому без ограничения общности можно считать, что поле F алгебраически замкнуто. В силу теоремы 2.27 действию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ соответствует рациональное действие некоторой связной редуктивной аффинной алгебраической группы G автоморфизмами, причём $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли группы G. Согласно теореме 2.36 и лемме 6.21 справедливы равенства $c_n^{U(\mathfrak{g})}(A) = c_n^G(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь достаточно применить теорему 7.30. □

Замечание 7.32. В теореме 7.31 доказана справедливость равенства $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$, однако сами коразмерности могут различаться. Если на алгебре $M_2(F)$ определить присоединённое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(F)$, то $c_1^{U(\mathfrak{sl}_2(F))}(M_2(F)) > 1$, хотя $c_1(M_2(F)) = 1$.

Приведём ещё один пример совпадения PI-экспонент.

Работы автора [103, 104] были посвящены изучению асимптотического поведения коразмерностей обобщённых полиномиальных тождеств. Понятие обобщённого H-действия позволяет дать новое доказательство следующего результата:

Теорема 7.33 ([104]). *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, $d := \mathrm{PIexp}(A)$ — обычная PI-экспонента алгебры A, а $gc_n(A)$ — последовательность коразмерностей её обобщённых полиномиальных тождеств (см. определение в [103, 104]). Тогда*

1. *при $d = 0$ существует такое n_0, что $gc_n(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. при $d > 0$ существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant gc_n(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{gc_n(A)} = d \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.

Доказательство. Как было отмечено выше в примере 5.7, всякая ассоциативная алгебра A является алгеброй с обобщённым H-действием, где $H = A^+ \otimes (A^+)^{\mathrm{op}}$. В силу того, что алгебра H действует на A линейными комбинациями композиций умножений на элементы алгебры A справа и слева, справедливо равенство $gc_n(A) = c_n^H(A)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как и остальные типы коразмерностей, коразмерности обобщённых тождеств и H-тождеств не меняются при расширении основного поля. Отсюда можно предполагать основное поле F алгебраически замкнутым. Заметим, что $J(A)$ является H-подмодулем. Пусть $\varkappa\colon A/J(A) \hookrightarrow A$ — вложение, отвечающее некоторому обычному разложению Веддербёрна — Мальцева. Вложение $\varkappa$ является гомоморфизмом алгебр. Пусть $A/J(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$ — разложение полупростой алгебры $A/J(A)$ в прямую сумму идеалов, являющихся простыми алгебрами. Тогда все B_i являются H-подмодулями, где структура H-модуля на $A/J(A)$ наследуется с соответствующей структуры на A.

Заметим, что вложение $\varkappa$ удовлетворяет всем условиям теоремы 7.10. Более того,

$$\begin{aligned}
&\max\dim \Bigl(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \Bigm| r \geqslant 1,\\
&(H\varkappa(B_{i_1}))A^+ (H\varkappa(B_{i_2}))A^+ \ldots (H\varkappa(B_{i_{r-1}}))A^+ (H\varkappa(B_{i_r})) \ne 0\Bigr) =\\
&= \max\dim \Bigl(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \Bigm| r \geqslant 1,\\
&A^+\varkappa(B_{i_1})A^+\varkappa(B_{i_2})A^+ \ldots \varkappa(B_{i_{r-1}})A^+ \varkappa(B_{i_r}) \ne 0\Bigr) =\\
&= \max\dim \Bigl(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \Bigm| r \geqslant 1,\\
&\varkappa(B_{i_1})J(A)\varkappa(B_{i_2})J(A) \ldots \varkappa(B_{i_{r-1}})J(A)\, \varkappa(B_{i_r}) \ne 0\Bigr) = \operatorname{PIexp}(A).
\end{aligned}$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 7.10. □

7.7 Примеры и приложения

Воспользуемся теперь формулой (7.7) для того, чтобы вычислить H-PI-экспоненты для некоторых важных примеров алгебр с обобщённым H-действием.

7.7.1 Суммы H-простых алгебр и критерии H-простоты

Пример 7.34. Пусть $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) — ассоциативная алгебра с обобщённым H-действием, где B_i — конечномерные H-простые алгебры, удовлетворяющие условию (*), а H — ассоциативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Докажем сперва, что все H-инвариантные идеалы алгебры A являются прямыми суммами некоторых из идеалов B_j. Действительно, если $I \subseteq A$ — некоторый H-инвариантный идеал, то $IB_j, B_jI \subseteq I \cap B_j$, где $I \cap B_j$ — также двусторонний H-инвариантный идеал, т.е. в силу H-простоты алгебр B_j для всякого j либо $B_j \subseteq I$, либо $IB_j = B_jI = 0$. В последнем случае $I \subseteq \bigoplus_{i \neq j} B_i$, так как в силу условия (*) алгебра B_j с единицей. Отсюда I является прямой суммой всех таких B_j, что $B_j \subseteq I$. В частности, $J^H(A) = 0$ и $\varkappa = \mathrm{id}_A$. Теперь осталось применить теорему 7.15. □

С учётом примера 7.6 и следствия 7.8 получаем следующий пример:

Пример 7.35. Пусть $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов) — ассоциативная H-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, где B_i — конечномерные H-простые алгебры, а алгебра Хопфа H либо сама является конечномерной полупростой алгеброй Хопфа, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами. (Например, $H = H_{m^2}(\zeta)$.) Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда вытекает следующий критерий H-простоты:

Теорема 7.36. *Пусть A — конечномерная ассоциативная H-модульная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, где алгебра Хопфа H либо сама является конечномерной полупростой алгеброй Хопфа, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами. Тогда алгебра A является H-простой, если и только если $\mathrm{PIexp}^H(A) = \dim A$.*

Доказательство. Если $J^H(A) \neq 0$, то из (7.6) следует, что

$$\mathrm{PIexp}^H(A) \leqslant \dim A - \dim J^H(A) < \dim A.$$

Если же $J^H(A) = 0$, то в силу теоремы 2.18 и леммы 2.19 алгебра A является прямой суммой H-инвариантных идеалов, каждый из которых является H-простой алгеброй, т.е. можно воспользоваться примером 7.35. □

Используя предложение 6.15, следствие 2.5, теоремы 5.16 и 7.4, получаем аналогичные примеры и результаты для градуированных алгебр и алгебр с действием некоторой группы автоморфизмами и антиавтоморфизмами:

Пример 7.37. Пусть $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма градуированных идеалов) — ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, градуированная некоторой группой G, где B_i — конечномерные градуированно простые алгебры. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7.38. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, градуированная некоторой группой G. Тогда алгебра A является градуированно простой, если и только если* $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(A) = \dim A$.

Пример 7.39. Пусть $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма G-инвариантных идеалов) — ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами, где B_i — конечномерные G-простые алгебры. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7.40. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда алгебра A является G-простой, если и только если* $\mathrm{PIexp}^G(A) = \dim A$.

7.7.2 Примеры алгебр, градуированных группами

В примерах 7.41–7.48 основное поле F является произвольным полем характеристики 0.

Напомним, что коразмерности тождеств не меняются при расширении основного поля. В примерах, приведённых ниже, оценки для коразмерностей также не зависят от основного поля. Поэтому во всех доказательствах можно без ограничения общности считать поле F алгебраически замкнутым.

Пример 7.41. Пусть $G = S_3$, а $A = M_2(F) \oplus M_2(F)$. Рассмотрим следующую G-градуировку на A:

$$A^{(e)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\},$$

$$A^{\left((12)\right)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus 0, \qquad A^{\left((23)\right)} = 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

а остальные компоненты равны 0. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} 4^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} 4^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что обе копии алгебры $M_2(F)$ являются градуированными идеалами алгебры A, и воспользоваться примером 7.37. ☐

Пример 7.42. Пусть $A = FG$, где G — конечная группа. Рассмотрим естественную G-градуировку $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, где $A^{(g)} = Fg$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} |G|^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} |G|^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что алгебра FG является градуированно простой, и воспользоваться примером 7.37. ☐

Замечание 7.43. В следствии 3.4 из работы [31] Э. Альхадефф и А. Я. Канель-Белов показали, что

$$|G|^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(FG) \leqslant |G'| \cdot |G|^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

где G' — коммутант группы G. Кроме того, они доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{c_n^{G\text{-gr}}(FG)}{|G'|\cdot|G|^n} \right) = 1$.

7.7.3 Примеры алгебр с действием групп и алгебр Ли

Пример 7.44. Пусть F — поле характеристики 0, а

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, C, D \in M_m(F) \right\} \subseteq M_{2m}(F),$$

$m \geqslant 2$. Определим $\varphi \in \operatorname{Aut}(A)$ по формуле

$$\varphi \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & C + D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $G = \langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z}$ действует на алгебре A автоморфизмами, т.е. A является FG-модульной алгеброй. Как было показано в примере 2.25, для алгебры A не существует G-инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева. В то же время существуют такие константны $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} m^{2n} \leqslant c_n^G(A) \leqslant C_2 n^{r_2} m^{2n} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, коразмерности не меняются при расширении основного поля. Более того, при расширении основного поля алгебра A остаётся алгеброй того же типа. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что основное поле алгебраически замкнуто. Теперь достаточно заметить, что $A/J(A) \cong M_m(F)$, откуда в силу теоремы 7.10 справедливо равенство $\operatorname{PIexp}^G(A) = \dim M_m(F) = m^2$. □

Проводя аналогичные рассуждения, получаем следующий пример:

Пример 7.45. Пусть A — та же ассоциативная алгебра, что и в предыдущем примере. Определим на векторном пространстве A структуру алгебры Ли при помощи коммутатора $[x, y] = xy - yx$ и обозначим соответствующую алгебру Ли через $\mathfrak{g}$. Рассмотрим стандартное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на A дифференцированиями. Тогда A оказывается $U(\mathfrak{g})$-модульной ассоциативной алгеброй. Как было показано в примере 2.29, в A не существует $U(\mathfrak{g})$-инвариантного разложения Веддербёрна — Мальцева. В то же время существуют такие константны $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} m^{2n} \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} m^{2n} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пример 7.46. Пусть $A = Fe_1 \oplus \ldots \oplus Fe_m$ (прямая сумма идеалов), где $e_i^2 = e_i$, $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что группа $G \subseteq S_m$ действует на A по формуле $\sigma e_i := e_{\sigma(i)}$, $\sigma \in G$. Рассмотрим разложение $\{1, 2, \ldots, m\} = \coprod_{i=1}^q O_i$, где O_i — орбиты G-действия на $\{1, 2, \ldots, m\}$. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |O_i|$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что $C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$, где $B_i := \langle e_j \mid j \in O_i \rangle_F$ — G-инвариантные идеалы. Докажем, что B_i являются G-простыми алгебрами для всех $1 \leqslant i \leqslant q$. Действительно, если I — нетривиальный G-инвариантный идеал алгебры B_i, то существует такое $a = \sum_{j \in O_i} \alpha_j e_j \in I$, что $\alpha_j \in F$ и $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k \in O_i$. Следовательно, $e_k = \frac{1}{\alpha_k} e_k a \in I$. Более того, для любого $j \in O_i$ существует такое $\sigma \in G$, что $e_j = \sigma e_k$. Отсюда $I = B_i$ и алгебра B_i является G-простой.

Теперь из примера 7.39 следует, что $\mathrm{PIexp}^G(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \dim B_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |O_i|$. $\square$

Ниже в примере 7.47 группа G может действовать не только автоморфизмами, но и антиавтоморфизмами:

Пример 7.47. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ (прямая сумма идеалов), $A_i \cong M_k(F)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $k, m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathrm{Aut}^*(M_k(F))$ группу автоморфизмов и антиавтоморфизмов алгебры $M_k(F)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m$ действует на A следующим образом: если $(\varphi, \sigma) \in \mathrm{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m$ и $(a_1, \ldots, a_m) \in A$, то

$$(\varphi, \sigma) \cdot (a_1, \ldots, a_m) := \big(\varphi(a_{\sigma^{-1}(1)}), \ldots, \varphi(a_{\sigma^{-1}(m)})\big).$$

Пусть $G \subseteq \mathrm{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m$ — некоторая подгруппа. Обозначим через

$$\pi \colon \mathrm{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m \to S_m$$

естественную проекцию на вторую компоненту. Рассмотрим разложение $\{1, 2, \ldots, m\} = \coprod_{i=1}^{q} O_i$, где O_i — орбиты $\pi(G)$-действия на $\{1, 2, \ldots, m\}$. Введём обозначение $d := k^2 \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |O_i|$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что $C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q$, где $B_i := \bigoplus_{j \in O_i} A_j$ — G-инвариантные идеалы. Докажем, что B_i являются G-простыми алгебрами для всех $1 \leqslant i \leqslant q$. Действительно, если I — нетривиальный G-инвариантный идеал алгебры B_i, то существует такое $a = \sum_{j \in O_i} a_j \in I$, что $a_j \in A_j$ и $a_\ell \neq 0$ для некоторого $\ell \in O_i$. Обозначим через e_ℓ единичную матрицу компоненты A_ℓ, которая, напомним, изоморфна алгебре $M_k(F)$. Тогда $e_\ell a = a_\ell \in I$ и $I \cap A_\ell \neq 0$. Поскольку алгебра A_ℓ проста, $I \cap A_\ell = A_\ell$. Заметим теперь, что для любого $j \in O_i$ существует такое $g \in G$, что $A_j = g A_\ell$. Отсюда $I = B_i$, и алгебра B_i является G-простой.

Теперь из примера 7.39 следует, что $\mathrm{PIexp}^G(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \dim B_i = k^2 \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |O_i|$. $\square$

Ниже в примере 7.48 алгебра не является полупростой.

Пример 7.48. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$ (прямая сумма идеалов), где $A_i \cong \mathrm{UT}_k(F)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $k, m \in \mathbb{N}$, а $\mathrm{UT}_k(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц размера $k \times k$. Пусть группа $G \subseteq S_m$ действует на A следующим образом: если $\sigma \in G$ и $(a_1, \ldots, a_m) \in A$, то

$$\sigma \cdot (a_1, \ldots, a_m) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(m)}).$$

Рассмотрим разложение $\{1, 2, \ldots, m\} = \coprod_{i=1}^{s} O_i$, где O_i — орбиты G-действия на $\{1, 2, \ldots, m\}$. Введём обозначение $d := k \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |O_i|$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Обозначим через $e_{ij}^{(t)}$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, матричные единицы алгебры A_t, где $1 \leqslant t \leqslant m$. Тогда $\sigma e_{ij}^{(t)} = e_{ij}^{(\sigma(t))}$ Заметим, что

$$A = \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{k} B_{ij} \right) \oplus J, \tag{7.11}$$

где $B_{ij} := \langle e_{jj}^{(t)} \mid t \in O_i \rangle_F$ являются G-инвариантными подалгебрами, а

$$J := \langle e_{ij}^{(t)} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k, 1 \leqslant t \leqslant m \rangle_F$$

— G-инвариантный нильпотентный идеал. Докажем, что B_{ij} являются G-простыми алгебрами для всех $1 \leqslant i \leqslant s$ и $1 \leqslant j \leqslant k$. Действительно, если I — нетривиальный G-инвариантный идеал алгебры B_{ij}, то существует такое $a = \sum_{t \in O_i} \alpha_t e_{jj}^{(t)} \in I$, что $\alpha_t \in F$ и $\alpha_\ell \neq 0$ для некоторого $\ell \in O_i$. Тогда $e_{jj}^{(\ell)} = \frac{1}{\alpha_\ell} e_{jj}^{(\ell)} a \in I$. Теперь заметим, что для любого $t \in O_i$ существует такое $\sigma \in G$, что $e_{jj}^{(t)} = \sigma \left(e_{jj}^{(\ell)} \right)$. Отсюда $I = B_i$, и алгебра B_i является G-простой. Следовательно, (7.11) — G-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева алгебры A.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant s$, $t \in O_i$. Тогда

$$e_{11}^{(t)} e_{12}^{(t)} e_{22}^{(t)} e_{23}^{(t)} \ldots e_{kk}^{(t)} = e_{1k}^{(t)} \neq 0,$$

откуда

$$B_{i1} J B_{i2} J \ldots J B_{ik} \neq 0$$

и в силу (7.7) справедливо неравенство

$$\operatorname{PIexp}^G(A) \geqslant \dim(B_{i1} \oplus \ldots \oplus B_{ik}) = k|O_i|. \tag{7.12}$$

Предположим, что

$$B_{i_1 j_1} J B_{i_2 j_2} J \ldots J B_{i_r j_r} \neq 0$$

для некоторых $1 \leqslant i_\ell \leqslant s$, $1 \leqslant j_\ell \leqslant k$. Тогда можно выбрать такие $e_{j_\ell j_\ell}^{(q_\ell)} \in B_{i_\ell j_\ell}$, $q_\ell \in O_{i_\ell}$, где $1 \leqslant j_\ell \leqslant k$, и такие $e_{i'_\ell j'_\ell}^{(q'_\ell)} \in J$, где $1 \leqslant i'_\ell < j'_\ell \leqslant k$, что

$$e_{j_1 j_1}^{(q_1)} e_{i'_1 j'_1}^{(q'_1)} e_{j_2 j_2}^{(q_2)} e_{i'_2 j'_2}^{(q'_2)} \ldots e_{i'_{r-1} j'_{r-1}}^{(q'_{r-1})} e_{j_r j_r}^{(q_r)} \neq 0.$$

В этом случае $q_1 = q'_1 = q_2 = q'_2 = \ldots = q'_{r-1} = q_r$ и $j_\ell = i'_\ell$, $j'_{\ell-1} = j_\ell$. Следовательно, $i_1 = \ldots = i_r$, $r \leqslant k$ и $\dim(B_{i_1 j_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_r j_r}) \leqslant k|O_{i_1}|$. Отсюда $\operatorname{PIexp}^G(A) \leqslant k \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |O_i|$. Оценка снизу была получена в (7.12). $\square$

Глава 8

Рост коразмерностей полиномиальных H-тождеств в H-модульных алгебрах Ли

В данной главе аналог гипотезы Амицура (существование целочисленной экспоненты) доказывается для достаточно широкого класса конечномерных алгебр Ли с дополнительной структурой, включающего в себя H-модульные алгебры Ли для конечномерных полупростых алгебр Хопфа H (теорема 8.7), алгебры Ли с рациональным действием аффинной алгебраической группы автоморфизмами и антиавтоморфизмами (теорема 8.12), алгебры Ли с действием конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями (теорема 8.16), алгебры Ли, градуированные произвольными группами (теорема 8.9), H-модульные алгебры Ли, разрешимый радикал которых является нильпотентным H-инвариантным идеалом (теорема 8.46), и алгебры Ли, простые по отношению к действию алгебры Тафта (теорема 8.70).

Результаты главы были опубликованы в работах [105, 109, 112, 113, 121].

8.1 H-хорошие алгебры Ли

Напомним, что если M — модуль над некоторой алгеброй Хопфа H, то алгебра $\mathrm{End}_F(M)$ наделена структурой ассоциативной H-модульной алгебры (см. пример 1.34), однако соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{gl}(M)$, хотя и наследует с $\mathrm{End}_F(M)$ структуру H-модуля, вообще говоря, не обязана являться H-модульной алгеброй Ли.

Для того, чтобы сформулировать требования, предъявляемые к H-действию в основной теореме главы (см. теорему 8.5), дадим следующее определение.

Пусть L — конечномерная H-модульная алгебра Ли, где H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Будем говорить, что алгебра Ли L является *H-хорошей*[1], если выполнены следующие условия:

1. нильпотентный радикал N и разрешимый радикал R алгебры Ли L являются H-подмодулями;

[1] В работе автора [113], в которой впервые было введено это понятие, использовался английский термин *H-nice*.

2. *(существование разложения Леви)* существует такая H-инвариантная максимальная полупростая подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-модулей);

3. *(существование разложений Веддербёрна — Мальцева)* для любого H-подмодуля $W \subseteq L$ и любой ассоциативной H-модульной подалгебры $A_1 \subseteq \operatorname{End}_F(W)$ радикал Джекобсона $J(A_1)$ является H-подмодулем и существует такая H-инвариантная максимальная полупростая ассоциативная подалгебра $\tilde{A}_1 \subseteq A_1$, что $A_1 = \tilde{A}_1 \oplus J(A_1)$ (прямая сумма H-модулей);

4. для любой H-инвариантной подалгебры Ли $L_0 \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ такой, что L_0 является H-модульной алгеброй Ли, а пространство L является вполне приводимым L_0-модулем без учёта H-действия, пространство L является вполне приводимым (H, L_0)-модулем.

Приведём основные примеры H-хороших алгебр Ли:

Пример 8.1. Пусть L — конечномерная H-модульная алгебра Ли, где H — конечномерная полупростая алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда алгебра Ли L является H-хорошей.

Доказательство. В силу следствия 3.4 нильпотентный радикал N и разрешимый радикал R алгебры Ли L являются H-подмодулями. Согласно теореме 3.26 существует такая H-инвариантная максимальная полупростая подалгебра $B \subseteq L$, что $L = B \oplus R$ (прямая сумма H-модулей). В силу следствий 2.3 и 2.24 существуют H-инвариантные разложения Веддербёрна — Мальцева. Из теоремы 3.37 вытекает выполнение условия 4.

Следовательно, алгебра Ли L является H-хорошей. □

Пример 8.2. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами некоторая редуктивная аффинная алгебраическая группа G. Тогда алгебра Ли L является FG-хорошей, где действие алгебры Хопфа FG на L является продолжением G-действия по линейности.

Доказательство. Во-первых, разрешимый и нильпотентный радикалы являются FG-подмодулями, поскольку радикалы переходят в себя при любых автоморфизмах. Отсюда условие 1 выполнено. В силу теоремы 3.28 существует G-инвариантное разложение Леви.

Рассмотрим произвольный FG-подмодуль $W \subseteq L$ и FG-действие, заданное на ассоциативной алгебре $\operatorname{End}_F(W)$ формулой (1.3). Это действие соответствует естественному рациональному G-действию на $\operatorname{End}_F(W)$:

$$(g\psi)(w) = g\bigl(\psi(g^{-1}w)\bigr) \text{ для всех } w \in W,\ \psi \in \operatorname{End}_F(W) \text{ и } g \in G. \tag{8.1}$$

Отсюда в силу следствия 2.23 для любой FG-модульной подалгебры $A_1 \subseteq \operatorname{End}_F(W)$ существует FG-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева.

Заметим, что в силу кокоммутативности алгебры Хопфа FG алгебра Ли $\mathfrak{gl}(L)$ является FG-модульной, откуда её FG-модульные подалгебры Ли — это в точности её G-инвариантные подалгебры Ли. Для любой G-инвариантной подалгебры Ли $L_0 \subseteq \mathfrak{gl}(L)$ пространство L является (G, L_0)-модулем. Если пространство L является вполне приводимым L_0-модулем без учёта G-действия, то в силу теоремы 3.39 пространство L является вполне приводимым (G, L_0)-модулем.

Следовательно, L является FG-хорошей алгеброй Ли. □

Пример 8.3. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой рационально действует автоморфизмами некоторая связная редуктивная аффинная алгебраическая группа G. Тогда алгебра Ли L является $U(\mathfrak{g})$-хорошей, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G.

Доказательство. Из (1.3) следует, что для всякого $U(\mathfrak{g})$-подмодуля $W \subseteq L$ действие группы G на пространстве $\mathrm{End}_F(W)$ задаётся формулой (8.1), а $\mathfrak{g}$-действие — формулой

$$(\delta\psi)(w) = \delta\psi(w) - \psi(\delta w) \text{ для всех } w \in W,\ \psi \in \mathrm{End}_F(W) \text{ и } \delta \in W.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{g}$-действие на $\mathrm{End}_F(W)$ также является дифференциалом G-действия на $\mathrm{End}_F(W)$. Поскольку в силу предложения 2.26 алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует дифференцированиями и оба действия имеют одинаковые инвариантные подпространства, достаточно использовать пример 8.2. □

Пример 8.4. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями конечномерная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Тогда алгебра Ли L является $U(\mathfrak{g})$-хорошей.

Доказательство. В силу теоремы 2.27 действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на L дифференцированиями является дифференциалом действия некоторой такой односвязной полупростой аффинной алгебраической группы G на L автоморфизмами, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Теперь достаточно использовать пример 8.3. □

Другим важным примером H-хорошей алгебры является пример 8.38, который будет приведён ниже и окажется частным случаем примера 8.2.

8.2 Основная теорема и её следствия

Следующая теорема является основным результатом данной главы:

Теорема 8.5. *Пусть L — конечномерная H-хорошая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, где H — некоторая алгебра Хопфа. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^H(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^H(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для* $c_n^H(L)$ *справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Теорема 8.6. *Пусть* $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ *(прямая сумма* H*-инвариантных идеалов) —* H*-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем* F *характеристики* 0*, где* H *— некоторая алгебра Хопфа, а* L_i *—* H*-хорошие алгебры. Тогда существует* $\mathrm{PIexp}^H(L) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{PIexp}^H(L_i)$.

Теоремы 8.5 и 8.6 будут доказаны в конце §8.6. Формула для $d = d(L, H) = \mathrm{PIexp}^H(L)$ будет дана в §8.3.

Сформулируем теперь важнейшие следствия из теорем 8.5 и 8.6:

Теорема 8.7. *Пусть* L *— конечномерная* H*-модульная алгебра Ли над произвольным полем* F *характеристики* 0*, где* H *— конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Тогда*

1. *либо существует такое* n_0*, что* $c_n^H(L) = 0$ *при всех* $n \geqslant n_0$*;*
2. *либо существуют такие константы* $C_1, C_2 > 0$*,* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$*,* $d \in \mathbb{N}$*, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^H(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для* $c_n^H(L)$ *справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Теорема 8.8. *Пусть* $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ *(прямая сумма* H*-инвариантных идеалов) — конечномерная* H*-модульная алгебра Ли над произвольным полем* F *характеристики* 0*, где* H *— конечномерная полупростая алгебра Хопфа. Тогда* $\mathrm{PIexp}^H(L) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathrm{PIexp}^H(L_i)$.

Доказательство теорем 8.7 и 8.8. H-коразмерности не меняются при расширении основного поля. Доказательство полностью повторяет соответствующее доказательство для коразмерностей обычных тождеств ассоциативных алгебр [66, теорема 4.1.9] и алгебр Ли [10, §2]. Отсюда без ограничения общности можно считать основное поле F алгебраически замкнутым. Теперь теоремы 8.7 и 8.8 получаются из теорем 8.5 и 8.6 при помощи примера 8.1. □

Теорема 8.9. *Пусть* L *— конечномерная алгебра Ли над полем* F *характеристики* 0*, градуированная произвольной группой* G*. Тогда*

1. *либо существует такое* n_0*, что* $c_n^{G\text{-gr}}(L) = 0$ *при всех* $n \geqslant n_0$*;*
2. *либо существуют такие константы* $C_1, C_2 > 0$*,* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$*,* $d \in \mathbb{N}$*, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для градуированных тождеств справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Теорема 8.10. *Пусть $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ (прямая сумма градуированных идеалов) — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, градуированная произвольной группой G. Тогда $\mathrm{PIexp}^{G\text{-}\mathrm{gr}}(L) = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \mathrm{PIexp}^{G\text{-}\mathrm{gr}}(L_i)$.*

Теоремы 8.9 и 8.10 будут выведены из теорем 8.5 и 8.6 в §8.7.

Алгебры, на которых некоторая группа действует не только автоморфизмами, но и антиавтоморфизмами формально не являются модульными алгебрами над алгебрами Хопфа, однако в случае алгебр Ли следующий приём позволяет свести такой случай к случаю, когда группа действует только автоморфизмами:

Предложение 8.11. *Пусть L — алгебра Ли, на которой некоторая группа G действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Обозначим через G_0 подгруппу группы G, состоящую из элементов, действующих на L автоморфизмами. Определим на L действие группы $\tilde G$, изоморфной группе G, при помощи равенства*

$$\tilde g a = \begin{cases} ga & \text{при} \quad g \in G_0, \\ -ga & \text{при} \quad g \in G\backslash G_0, \end{cases}$$

где $a \in L$. (Через $\tilde g \in \tilde G$ обозначается элемент, соответствующий элементу $g \in G$ при изоморфизме $\tilde G \cong G$.) Тогда группа $\tilde G$ действует на $\tilde G$ автоморфизмами. Обратно, на всякой алгебре Ли L, на которой группа $\tilde G$ действует автоморфизмами, в случае, когда в группе G фиксирована подгруппа G_0 индекса $\leqslant 2$, можно определить такое действие группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами, что элементы подгруппы G_0 действуют автоморфизмами, а элементы подмножества $G\backslash G_0$ действуют антиавтоморфизмами:

$$ga = \begin{cases} \tilde g a & \text{при} \quad g \in G_0, \\ -\tilde g a & \text{при} \quad g \in G\backslash G_0 \end{cases}$$

для всех $a \in L$. Кроме того, $c_n^{\tilde G}(L) = c_n^G(L)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если G — аффинная алгебраическая группа, рационально действующая на L, а алгебра Ли L конечномерна, то группа $\tilde G$ также действует на L рационально. (Считаем, что на $\tilde G$ задана та же структура аффинного алгебраического многообразия, что и на G.)

Доказательство. Заметим, что для всех $\tilde g \in \tilde G$ и $a, b \in L$ справедливо равенство

$$\tilde g[a,b] = [\tilde g a, \tilde g b].$$

Это в точности означает, что группа $\tilde G$ действует на L автоморфизмами. Переход от $\tilde G$- к G-действию рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь изоморфизм свободных алгебр $\psi\colon L(X|G) \to L(X|\tilde G)$, заданный равенствами

$$\psi\big(x^g\big) = \begin{cases} x^{\tilde g} & \text{при} \quad g \in G_0, \\ -x^{\tilde g} & \text{при} \quad g \in G\backslash G_0, \end{cases}$$

где $x \in X$. Тогда $\psi(\mathrm{Id}^G(L)) = \mathrm{Id}^{\tilde G}(L)$, $\psi(V_n^G) = V_n^{\tilde G}$ и, следовательно, $c_n^{\tilde G}(L) = c_n^G(L)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если G — аффинная алгебраическая группа, то G_0 — замкнутая подгруппа индекса $\leqslant 2$, а G является объединением непересекающихся замкнутых подмножеств G_0 и $G\backslash G_0$. Обозначим через $\mathcal{O}(G)$ алгебру регулярных функций на G. Пусть

$$I_1 = \{f \in \mathcal{O}(G) \mid f(g) = 0 \text{ для всех } g \in G_0\},$$

а

$$I_2 = \{f \in \mathcal{O}(G) \mid f(g) = 0 \text{ для всех } g \in G\backslash G_0\}.$$

Поскольку $G_0 \cap (G\backslash G_0) = \varnothing$, в силу теоремы Гильберта о нулях справедливо равенство $I_1 + I_2 = \mathcal{O}(G)$. Отсюда для некоторых $f_1 \in I_1$ и $f_2 \in I_2$ справедливо равенство $1 = f_1 + f_2$. Следовательно, $f_2(g) - f_1(g) = 1$ для всех $g \in G_0$ и $f_2(g) - f_1(g) = -1$ для всех $g \in G\backslash G_0$. Отсюда, для того, чтобы домножить каждый оператор из $G\backslash G_0$ на (-1), достаточно домножить представление на $\big(f_2(g) - f_1(g)\big)$, и оно по-прежнему останется рациональным. $\square$

С учётом предложения 8.11 и примера 8.2 теоремы 8.12 и 8.13, сформулированные ниже, оказываются немедленными следствиями теорем 8.5 и 8.6:

Теорема 8.12. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 с рациональным действием некоторой редуктивной аффинной алгебраической группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^G(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\operatorname{PIexp}^G(L) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для G-тождеств справедлив аналог гипотезы Амицура.

Теорема 8.13. *Пусть $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ (прямая сумма G-инвариантных идеалов) — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 с рациональным действием некоторой редуктивной аффинной алгебраической группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда $\operatorname{PIexp}^G(L) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \operatorname{PIexp}^G(L_i)$.*

При этом, как и в случае G-тождеств ассоциативных алгебр (см. теорему 7.30), если группа G связная, G-PI-экспонента совпадает с обычной (см. теорему 8.45 ниже).

Следующие две теоремы можно было бы вывести из теорем 8.12 и 8.13, пользуясь тем, что всякая конечная группа является редуктивной аффинной алгебраической группой и всякое её конечномерное представление рационально, однако мы выведем их из теорем 8.7 и 8.8:

Теорема 8.14. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 с действием некоторой конечной группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^G(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы* $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, *что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\operatorname{PIexp}^G(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для* G*-тождеств справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Теорема 8.15. *Пусть* $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$ *(прямая сумма* G*-инвариантных идеалов) — конечномерная алгебра Ли над полем* F *характеристики* 0 *с действием некоторой конечной группы* G *автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда* $\operatorname{PIexp}^G(L) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \operatorname{PIexp}^G(L_i)$.

Доказательство теорем 8.14 и 8.15. В силу теоремы Машке алгебра Хопфа FG полупроста. Теперь достаточно применить теоремы 8.7 и 8.8 для $H = FG$. □

Как и в случае дифференциальных тождеств ассоциативных алгебр (см. теорему 7.31), при действии конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями дифференциальная PI-экспонента совпадает с обычной:

Теорема 8.16. *Пусть* L *— конечномерная алгебра Ли над полем* F *характеристики* 0*, на которой действует дифференцированиями некоторая конечномерная полупростая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$*. Обозначим через* $d := \operatorname{PIexp}(L)$ *экспоненту роста коразмерностей обычных тождеств алгебры Ли* L*. Тогда*

1. *при* $d = 0$ *существует такое* n_0*, что* $c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) = 0$ *для всех* $n \geqslant n_0$*;*

2. *при* $d > 0$ *существуют такие константы* $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, *что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\operatorname{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для дифференциальных тождеств справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Теорема 8.16 будет доказана в §8.8.

8.3 Формулы для H-PI-экспоненты

Предположим, что L — H-хорошая алгебра Ли.

Для всевозможных $r \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим такие семейства H-инвариантных идеалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$, $J_1, J_2, \ldots, J_r$ алгебры Ли L, что $J_k \subseteq I_k$ и выполнены следующие условия:

1. всякий фактормодуль I_k/J_k является неприводимым (H, L)-модулем;

2. для любых таких H-инвариантных B-подмодулей T_k, что $I_k = J_k \oplus T_k$, существуют такие числа $q_i \geqslant 0$, что

$$\big[[T_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [T_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [T_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]\big] \neq 0.$$

Напомним, что через $\mathrm{Ann}(M)$ обозначается аннулятор модуля M. Положим

$$d(L,H) := \max\left(\dim \frac{L}{\mathrm{Ann}(I_1/J_1)\cap\ldots\cap\mathrm{Ann}(I_r/J_r)}\right),$$

где максимум берётся по всем $r \in \mathbb{Z}_+$ и всем H-инвариантным идеалам $I_1,\ldots,I_r$, $J_1,\ldots,J_r$, для которых выполнены условия 1–2, приведённые выше. Утверждается, что $\mathrm{PIexp}^H(L) = d(L,H)$. Соответственно, теорема 8.5 будет доказываться для $d = d(L,H)$.

Для доказательства равенства дифференциальной PI-экспоненты с обычной PI-экспонентой в случае действия конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями, а также аналогичного результата для G-PI-экспоненты в случае рационального действия связной редуктивной аффинной алгебраической группы автоморфизмами (напомним, что в силу предложений 2.12 и 8.11 случай антиавтоморфизмов можно не рассматривать), нам потребуется ещё одна формула для H-PI-экспоненты.

Докажем сперва следующую лемму:

Лемма 8.17. *Пусть L — H-хорошая алгебра Ли. Рассмотрим H-инвариантное разложение Леви $L = B\oplus R$ из условия 2 §8.1 и ограничение присоединённого представления $\mathrm{ad}\colon L\to\mathfrak{gl}(L)$ на полупростую алгебру Ли B. Тогда алгебра Ли L является вполне приводимым (H,B)-модулем. Более того, существует такой (H,B)-подмодуль $Q\subseteq R$, что $L = B\oplus Q\oplus N$ (прямая сумма (H,B)-подмодулей) и $[B,Q]=0$.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{ad}\colon L\to\mathfrak{gl}(L)$ является гомоморфизмом алгебр Ли и H-модулей, алгебра Ли $(\mathrm{ad}\, B)$, будучи гомоморфным образом полупростой H-модульной алгебры Ли, сама является полупростой H-модульной алгеброй Ли. Отсюда в силу теоремы Вейля алгебра Ли L является вполне приводимым $(\mathrm{ad}\, B)$-модулем. Следовательно, в силу условия 4 из §8.1 алгебра Ли L является вполне приводимым $(H,\mathrm{ad}\, B)$-модулем и существует такой (H,B)-подмодуль $Q\subseteq R$, что $R = Q\oplus N$, т.е. $L = B\oplus Q\oplus N$. При этом в силу предложения 2.1.7 из [7] справедливо включение $[L,R]\subseteq N$. Отсюда $[B,Q]\subseteq[L,R]\subseteq N$, в то время как $[B,Q]\subseteq Q$. Следовательно, $[B,Q]=0$. □

Рассмотрим теперь ассоциативную подалгебру A_0 алгебры $\mathrm{End}_F(L)$, порождённую подпространством $\mathrm{ad}\, Q$. Заметим, что A_0 является H-модульной алгеброй, поскольку Q является H-подмодулем. В силу условия 3 из §8.1 существует разложение $A_0 = \tilde A_0\oplus J(A_0)$ (прямая сумма H-подмодулей), где $\tilde A_0$ — максимальная полупростая подалгебра алгебры A_0.

Докажем следующее утверждение:

Лемма 8.18. *Существует такое число $q\in\mathbb{N}$, что*

$$\tilde A_0 = Fe_1\oplus\ldots\oplus Fe_q \text{ (прямая сумма идеалов)}$$

для некоторых идемпотентов $e_i\in A_0$.

Доказательство. Поскольку разрешимый радикал R является разрешимой алгеброй Ли, в силу теоремы Ли в L существует такой базис, что в этом базисе матрицы всех операторов $\mathrm{ad}\, a$, где $a\in R$, являются верхнетреугольными. Обозначим соответствующий изоморфизм алгебр $\mathrm{End}_F(L)\to M_s(F)$ через ψ, где $s := \dim L$. Поскольку $\psi(\mathrm{ad}\, R)\subseteq \mathrm{UT}_s(F)$, справедливо включение $\psi(A_0) \subseteq \mathrm{UT}_s(F)$, где $\mathrm{UT}_s(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц размера $s \times s$. Однако

$$\mathrm{UT}_s(F) = Fe_{11} \oplus Fe_{22} \oplus \ldots \oplus Fe_{ss} \oplus \tilde{N},$$

где

$$\tilde{N} := \langle e_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant s \rangle_F$$

является нильпотентным идеалом. Поскольку ψ — изоморфизм, алгебра A_0 не содержит подалгебр, изоморфных $M_2(F)$, откуда $\tilde{A}_0 = Fe_1 \oplus \ldots \oplus Fe_q$ (прямая сумма идеалов) для некоторых идемпотентов $e_i \in A_0$. $\square$

В силу того, что $[B, Q] = 0$, а элементы e_i являются многочленами от элементов $\operatorname{ad} a$, где $a \in Q$, справедливо равенство $[\operatorname{ad} B, \tilde{A}_0] = 0$. Из полупростоты алгебры Ли B следует, что $(\operatorname{ad} B) \cap \tilde{A}_0 = 0$. Будем рассматривать $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$ как H-модульную алгебру Ли.

Лемма 8.19. *Алгебра Ли L является вполне приводимым $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$- и $(H, (\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0)$-модулем.*

Доказательство. Заметим, что e_i являются коммутирующими диагонализуемыми на L операторами. Отсюда для них существует общий базис из собственных векторов и $L = \bigoplus_j W_j$, где W_j — пересечения собственных подпространств операторов e_i. Каждый из операторов e_i коммутирует с операторами из $\operatorname{ad} B$. Следовательно, W_j являются $(\operatorname{ad} B)$-подмодулями. В силу того, что алгебра Ли B полупроста, каждое из подпространств W_j является прямой суммой неприводимых $(\operatorname{ad} B)$-подмодулей. Поскольку операторы e_i действуют на каждом из W_j как скалярные операторы, алгебра Ли L является прямой суммой неприводимых $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодулей. Теперь утверждение леммы следует из условия 4 §8.1. $\square$

Теперь мы готовы дать альтернативную формулу для PI-экспоненты, в которой условие 2 из формулы для $d(L, H)$ заменено на более слабое условие 2'.

Пусть L — H-хорошая алгебра Ли. Для всевозможных $r \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим такие семейства H-инвариантных идеалов $I_1, I_2, \ldots, I_r$, $J_1, J_2, \ldots, J_r$ алгебры Ли L, что $J_k \subseteq I_k$ и выполнены следующие условия:

1. всякий фактормодуль I_k/J_k является неприводимым (H, L)-модулем;

2'. существуют такие H-инвариантные $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодули $\tilde{T}_k$, где $I_k = J_k \oplus \tilde{T}_k$, и числа $q_i \geqslant 0$, что
$$[[\tilde{T}_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [\tilde{T}_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [\tilde{T}_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0.$$

Положим
$$d'(L, H) := \max\left(\dim \frac{L}{\operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_r/J_r)}\right),$$
где максимум берётся по всем $r \in \mathbb{Z}_+$ и всем наборам $I_1, \ldots, I_r$, $J_1, \ldots, J_r$, удовлетворяющим условиям 1 и 2'.

Как было только что доказано в лемме 8.19, алгебра Ли L является вполне приводимым $(H, (\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0)$-модулем, откуда всегда можно выбрать такие H-инвариантные $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодули $\tilde{T}_k$, что $I_k = J_k \oplus \tilde{T}_k$. Следовательно, $d'(L, H) \geqslant d(L, H)$.

Отсюда для доказательства равенства $\operatorname{PIexp}^H(L) = d'(L, H) = d(L, H)$ достаточно доказать оценку сверху для коразмерностей с использованием числа $d(L, H)$, а оценку снизу — с использованием числа $d'(L, H)$. Именно это и будет сделано в следующих параграфах.

8.4 Полиномиальные H-тождества представлений и кососимметрические H-многочлены

В данном параграфе доказываются вспомогательные утверждения, которые будут затем использованы для получения оценки снизу.

Пусть L — H-модульная алгебра Ли для некоторой алгебры Хопфа H, M — некоторый (H, L)-модуль, а $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(M)$ — соответствующее представление. Ассоциативный H-многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X|H\rangle$ называется *полиномиальным H-тождеством* представления φ, если $f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = 0$ для всех $a_i \in L$. Другими словами, f — H-тождество представления φ, если для любого гомоморфизма H-модульных алгебр $\psi\colon F\langle X|H\rangle \to \operatorname{End}_F(M)$ такого, что $\psi(X) \subseteq \varphi(L)$, справедливо равенство $\psi(f) = 0$. Множество $\operatorname{Id}^H(\varphi)$ всех H-тождеств представления φ является H-инвариантным двусторонним идеалом алгебры $F\langle X|H\rangle$.

Лемма 8.20 является аналогом леммы 1 из [63] и леммы 7.3.

Лемма 8.20. *Пусть M — некоторый конечномерный неприводимый (H, L)-модуль, точный как L-модуль, где L — H-модульная алгебра Ли, а H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Обозначим через $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(M)$ и $\zeta\colon H \to \operatorname{End}_F(M)$ соответствующие гомоморфизмы. Пусть $(\zeta(\gamma_j))_{j=1}^m$ — базис алгебры $\zeta(H)$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие H-многочлены $f_j \in P_n^H$, где $1 \leqslant j \leqslant m$, кососимметричные по переменным каждого из множеств $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ и $\{y_1, \ldots, y_\ell\} \subseteq \{x_{\ell+1}, \ldots, x_n\}$, где $\ell := \dim L$, что для некоторых $\bar{x}_i \in L$ справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^m f_j(\varphi(\bar{x}_1), \ldots, \varphi(\bar{x}_n))\, \zeta(\gamma_j) = \mathrm{id}_M\,.$$

В частности, существует H-многочлен $f \in P_n^H \setminus \operatorname{Id}^H(\varphi)$, кососимметричный по $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ и по $\{y_1, \ldots, y_\ell\} \subseteq \{x_{\ell+1}, \ldots, x_n\}$.

Доказательство. Поскольку (H, L)-модуль M неприводим, в силу теоремы плотности алгебра $\operatorname{End}_F(M) \cong M_q(F)$ порождена операторами из $\zeta(H)$ и $\varphi(L)$. Здесь $q := \dim M$. Рассмотрим многочлен Регева

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_{q^2}; y_1, \ldots, y_{q^2}) := \sum_{\substack{\sigma \in S_q, \\ \tau \in S_q}} (\operatorname{sign}(\sigma\tau)) x_{\sigma(1)}\ y_{\tau(1)}\ x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}\ y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} y_{\tau(4)} \cdots$$
$$\cdot x_{\sigma(q^2-2q+2)} \cdots x_{\sigma(q^2)}\ y_{\tau(q^2-2q+2)} \cdots y_{\tau(q^2)}.$$

Как уже было отмечено в главе 7, этот многочлен является центральным многочленом для $M_q(F)$, т.е. $\hat{f}$ не является полиномиальным тождеством для $M_q(F)$, а его значения принадлежат центру алгебры $M_q(F)$. (См., например, [66, теорема 5.7.4].) Поскольку многочлен $\hat{f}$ кососимметричный, его значение является ненулевым скалярным оператором при подстановке всех элементов любого базиса вместо переменных каждого из множеств $\{x_1, \ldots, x_\ell\}$ и $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$.

Пусть $a_1, \ldots, a_\ell$ — базис алгебры Ли L. Напомним, что в произведении элементов пространств $\varphi(L)$ и $\zeta(H)$ всегда можно переместить элементы пространства $\zeta(H)$ вправо, используя равенство (3.5). Следовательно, $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_\ell)$, $\left(\varphi\left(a_{i_{11}}\right) \ldots \varphi\left(a_{i_{1,m_1}}\right)\right)\zeta(h_1)$, $\ldots$, $\left(\varphi\left(a_{i_{r,1}}\right) \ldots \varphi\left(a_{i_{r,m_r}}\right)\right)\zeta(h_r)$ является базисом пространства $\mathrm{End}_F(M)$ для подходящих $i_{jk} \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $h_j \in H$, поскольку алгебра $\mathrm{End}_F(M)$ порождена операторами из $\zeta(H)$ и $\varphi(L)$. Заменим в $\hat{f}$ переменные $x_{\ell+j}$ на $z_{j1}z_{j2}\ldots z_{j,m_j}\zeta(h_j)$, а переменные $y_{\ell+j}$ — на $z'_{j1}z'_{j2}\ldots z'_{j,m_j}\zeta(h_j)$ и обозначим получившееся выражение через $\tilde{f}$. Используя (3.5) ещё раз, переместим в $\tilde{f}$ все $\zeta(h)$, где $h \in H$, вправо и представим $\tilde{f}$ в виде суммы $\sum_{j=1}^m f_j\,\zeta(\gamma_j)$, где $f_j \in P^H_{2\ell+2\sum_{i=1}^r m_i}$ являются H-многочленами, кососимметричными по $x_1, \ldots, x_\ell$ и по $y_1, \ldots, y_\ell$. Заметим, что $\tilde{f}$ становится ненулевым скалярным оператором на M при подстановке $x_i = y_i = \varphi(a_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant \ell$ и $z_{jk} = z'_{jk} = \varphi(a_{i_{jk}})$ при $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant m_j$. Поделив все f_j на соответствующий скаляр, мы получим требуемые многочлены. В частности, по крайней мере для одного из $1 \leqslant j \leqslant m$ выполнено условие $f_j \notin \mathrm{Id}^H(\varphi)$, т.е. можно положить $f := f_j$. $\square$

Лемма 8.21. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $\beta_1, \ldots, \beta_q \in F$, где F — бесконечное поле, $1 \leqslant k \leqslant q$, $\alpha_i \neq 0$ для всех $1 \leqslant i < k$, $\alpha_k = 0$, а $\beta_k \neq 0$. Тогда существует такое $\gamma \in F$, что $\alpha_i + \gamma\beta_i \neq 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Достаточно выбрать $\gamma \notin \left\{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \ldots, -\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_{k-1}}, 0\right\}$. Это возможно сделать, поскольку поле F бесконечно. $\square$

Лемма 8.22. *Пусть $L = B \oplus Z(L)$ — редуктивная H-модульная алгебра Ли, где H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, B — H-инвариантная максимальная полупростая подалгебра, а $Z(L)$ — центр алгебры Ли L с базисом r_1, r_2, $\ldots$, r_t. Пусть M — конечномерный неприводимый (H, L)-модуль, точный как L-модуль, а $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(M)$ и $\zeta\colon H \to \mathrm{End}_F(M)$ — соответствующие гомоморфизмы. Предположим, что для всех H-инвариантных ассоциативных подалгебр в $\mathrm{End}_F(M)$ существует H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева. Тогда существует такой H-многочлен $f \in P^H_t$, кососимметричный по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_t$, что $f(\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_t))$ является на M невырожденным оператором.*

Доказательство. В силу леммы 3.11 центр $Z(L)$ является H-подмодулем. Согласно лемме 3.15 существует разложение $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_q$, где M_j — L-подмодули, а элементы r_i действуют на каждом из M_j как скалярные операторы. Докажем, что для любого j существует такой H-многочлен $f_j \in P^H_t$, кососимметричный по $x_1, x_2, \ldots, x_t$, что $f_j(\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_t))$ умножает каждый элемент пространства M_j на ненулевой элемент поля.

В силу леммы 8.20 существует такое $n \in \mathbb{N}$ и H-многочлены $\hat{f}_k \in P_n^H$, кососимметричные по переменным из множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\}$, где $\ell := \dim L$, что

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{f}_k(\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_t), \varphi(\bar{x}_{t+1}), \varphi(\bar{x}_{t+2}), \ldots, \varphi(\bar{x}_n))\, \zeta(\gamma_k) = \mathrm{id}_M \tag{8.2}$$

для некоторых $\bar{x}_i \in L$. (Вместо переменных множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\}$ можно подставлять элементы любого базиса пространства L, поскольку H-многочлен $\hat{f}_k$ является кососимметричным по первым ℓ переменным.) Заметим, что $[\varphi(r_i), \varphi(a)] = 0$ для всех $a \in L$ и $1 \leqslant i \leqslant t$. Следовательно, можно переместить все элементы $\varphi(r_i)$ влево и переписать (8.2) как

$$\sum_k \tilde{f}_k(\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_t)) b_k = \mathrm{id}_M,$$

где $\tilde{f}_k \in P_t^H$ являются H-многочленами, кососимметричными по переменным множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$, а $b_k \in \mathrm{End}_F(M)$. Следовательно, для любого $1 \leqslant j \leqslant q$ существует такое k, что $\tilde{f}_k(\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_t))\big|_{M_j} \neq 0$. Поскольку $\tilde{f}_j(\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_t))$ является на M_j скалярным оператором, достаточно взять $f_j := \tilde{f}_k$.

Теперь докажем по индукции, что для любого $1 \leqslant k \leqslant q$ существует такой H-многочлен $g_k = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$, где $\lambda_i \in F$, что $g_k(\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_t))$ действует на каждом из M_i, где $1 \leqslant i \leqslant k$, как ненулевой скалярный оператор.

База индукции $k = 1$ очевидна, поскольку достаточно положить $\lambda_1 := 1$. Предположим теперь существование H-многочлена g_{k-1}. Выведем отсюда существование H-многочлена g_k. Обозначим через α_j скаляры, умножением на которые действует оператор $g_{k-1}(\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_t))$ на M_j, а через β_j — скаляры, умножением на которые действует оператор $f_k(\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_t))$ на M_j, где $1 \leqslant j \leqslant k$. Согласно предположению индукции $\alpha_j \neq 0$ при $1 \leqslant j < k$, а в силу свойств H-многочлена f_k справедливо равенство $\beta_k \neq 0$. Если $\alpha_k \neq 0$, то достаточно положить $g_k := g_{k-1}$, а если $\alpha_k = 0$, то достаточно положить $g_k := g_{k-1} + \gamma f_k$, где $\gamma \in F$ берётся из леммы 8.21.

Таким образом, по индукции следует существование H-многочленов $g_1, \ldots, g_q$ с заданными свойствами. Теперь достаточно положить $f := g_k$. □

Пусть $k\ell \leqslant n$, где $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ — некоторые числа. Как и в §7.1, обозначим через $Q^H_{\ell,k,n} \subseteq P_n^H$ подпространство, состоящее из всех многочленов, кососимметричных по каждому из k попарно непересекающихся наборов переменных $\{x_1^i, \ldots, x_\ell^i\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$.

Теорема 8.23 является аналогом теоремы 1 из [63] и теоремы 7.4.

Теорема 8.23. *Пусть $L = B \oplus Z(L)$ — конечномерная редуктивная H-модульная алгебра Ли, где H — алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, B — H-инвариантная максимальная полупростая подалгебра, $\ell := \dim L$. Пусть M — конечномерный неприводимый (H, L)-модуль, точный как L-модуль, а $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(M)$ и $\zeta\colon H \to \mathrm{End}_F(M)$ — соответствующие гомоморфизмы. Предположим, что либо $Z(L) = 0$, либо для всех H-инвариантных ассоциативных подалгебр в $\mathrm{End}_F(M)$ существует H-инвариантное разложение Веддербёрна — Мальцева. Тогда существует такое $T \in \mathbb{Z}_+$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $f \in Q^H_{\ell,2k,2k\ell+T} \setminus \mathrm{Id}^H(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $f_1 = f_1(x_1,\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T)$ — H-многочлен f из леммы 8.20, кососимметричный по $x_1,\dots,x_\ell$ и по $y_1,\dots,y_\ell$. Поскольку $f_1 \in Q^H_{\ell,2,2\ell+T}\setminus \operatorname{Id}^H(\varphi)$, можно считать, что $k>1$. Заметим, что

$$f_1^{(1)}(u_1,v_1,x_1,\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T) := \\ = \sum_{i=1}^{\ell} f_1(x_1,\dots,[u_1,[v_1,x_i]],\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T)$$

кососимметричен по $x_1,\dots,x_\ell$ и по $y_1,\dots,y_\ell$, причём

$$f_1^{(1)}(\bar u_1,\bar v_1,\bar x_1,\dots,\bar x_\ell,\ \bar y_1,\dots,\bar y_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T) = \\ = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar u_1 \operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar v_1) f_1(\bar x_1,\bar x_2,\dots,\bar x_\ell,\ \bar y_1,\dots,\bar y_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)$$

для любой подстановки элементов из пространства $\varphi(L)$, поскольку мы можем считать, что $\bar x_1,\dots,\bar x_\ell$ — различные элементы базиса.

Пусть

$$f_1^{(j)}(u_1,\dots,u_j,v_1,\dots,v_j,x_1,\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T) := \\ = \sum_{i=1}^{\ell} f_1^{(j-1)}(u_1,\dots,u_{j-1},v_1,\dots,v_{j-1},x_1,\dots,[u_j,[v_j,x_i]],\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T),$$

$2\leqslant j\leqslant s$, $s:=\dim B$. Заметим, что если вместо u_i или v_i подставляются элементы из $\varphi(Z(L))$, то H-многочлены $f_1^{(j)}$ обращаются в нуль, поскольку $Z(L)$ является центром алгебры Ли L. Снова получаем, что

$$f_1^{(j)}(\bar u_1,\dots,\bar u_j,\bar v_1,\dots,\bar v_j,\bar x_1,\dots,\bar x_\ell,\ \bar y_1,\dots,\bar y_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T) = \\ = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar u_1 \operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar v_1)\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar u_2 \operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar v_2)\dots\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar u_j \operatorname{ad}_{\varphi(L)}\bar v_j)\cdot \\ \cdot f_1(\bar x_1,\bar x_2,\dots,\bar x_\ell,\ \bar y_1,\dots,\bar y_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T). \tag{8.3}$$

Пусть η — H-многочлен f из леммы 8.22. Положим

$$f_2(u_1,\dots,u_\ell,v_1,\dots,v_\ell,x_1,\dots,x_\ell,y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T) := \\ = \sum_{\sigma,\tau\in S_\ell}\operatorname{sign}(\sigma\tau) f_1^{(s)}(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(s)},v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(s)},x_1,\dots,x_\ell,\ y_1,\dots,y_\ell,z_1,\dots,z_T)\cdot \\ \cdot\eta(u_{\sigma(s+1)},\dots,u_{\sigma(\ell)})\eta(v_{\tau(s+1)},\dots,v_{\tau(\ell)}).$$

Тогда $f_2\in Q^H_{\ell,4,4\ell+T}$. Предположим, что элементы $a_1,\dots,a_s\in\varphi(B)$ и $a_{s+1},\dots,a_\ell\in\varphi(Z(L))$ образуют базис пространства $\varphi(L)$. Рассмотрим подстановку $x_i=y_i=u_i=v_i=a_i$, где $1\leqslant i\leqslant \ell$. Предположим, что значения $z_j=\bar z_j$, где $1\leqslant j\leqslant T$, выбраны таким образом, что $f_1(a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)\neq 0$. Докажем, что f_2 также не обращается в нуль. Действительно,

$$f_2(a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)=$$
$$=\sum_{\sigma,\tau\in S_\ell}\operatorname{sign}(\sigma\tau)f_1^{(s)}(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(s)},a_{\tau(1)},\dots,a_{\tau(s)},a_1,\dots,a_\ell,\ a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)\cdot$$
$$\cdot\eta(a_{\sigma(s+1)},\dots,a_{\sigma(\ell)})\eta(a_{\tau(s+1)},\dots,a_{\tau(\ell)})=$$
$$=\left(\sum_{\sigma,\tau\in S_s}\operatorname{sign}(\sigma\tau)f_1^{(s)}(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(s)},a_{\tau(1)},\dots,a_{\tau(s)},a_1,\dots,a_\ell,\ a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\pi,\omega\in S\{s+1,\dots,\ell\}}\operatorname{sign}(\pi\omega)\eta(a_{\pi(s+1)},\dots,a_{\pi(\ell)})\eta(a_{\omega(s+1)},\dots,a_{\omega(\ell)})\right).$$

поскольку элементы a_j при $s<j\leqslant\ell$ принадлежат центру алгебры Ли $\varphi(L)$, а H-многочлен $f_j^{(s)}$ обращается в нуль, если подставить такой элемент a_i вместо u_i или v_i. Здесь $S\{s+1,\dots,\ell\}$ — группа подстановок на множестве $\{s+1,\dots,\ell\}$. Заметим, что многочлен η кососимметрический. Используя (8.3), получаем, что

$$f_2(a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)=$$
$$=\left(\sum_{\sigma,\tau\in S_s}\operatorname{sign}(\sigma\tau)\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\sigma(1)}\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau(1)})\dots\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\sigma(s)}\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau(s)})\right)\cdot$$
$$\cdot f_1(a_1,\dots,a_\ell,\ a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)((\ell-s)!)^2\left(\eta(a_{s+1},\dots,a_\ell)\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{\sigma,\tau\in S_s}\operatorname{sign}(\sigma\tau)\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\sigma(1)}\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau(1)})\dots\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\sigma(s)}\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau(s)})=$$
$$=\sum_{\sigma,\tau\in S_s}\operatorname{sign}(\sigma\tau)\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_1\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau\sigma^{-1}(1)})\dots\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_s\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau\sigma^{-1}(s)})\overset{(\tau'=\tau\sigma^{-1})}{=}$$
$$=\sum_{\sigma,\tau'\in S_s}\operatorname{sign}(\tau')\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_1\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau'(1)})\dots\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_s\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_{\tau'(s)})=$$
$$=s!\det(\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_i\operatorname{ad}_{\varphi(L)}a_j))_{i,j=1}^s=s!\det(\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\varphi(B)}a_i\operatorname{ad}_{\varphi(B)}a_j))_{i,j=1}^s\neq 0,$$

поскольку форма Киллинга $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}x\operatorname{ad}y)$ полупростой алгебры Ли $\varphi(B)$ невырождена. Отсюда

$$f_2(a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,a_1,\dots,a_\ell,\bar z_1,\dots,\bar z_T)\neq 0.$$

Заметим, что если H-многочлен f_1 был кососимметричен по некоторым из переменных $z_1,\dots,z_T$, H-многочлен f_2 также будет кососимметричен по этим переменным. Следовательно, если применить ту же процедуру не к f_1, а уже к f_2, мы получим $f_3\in Q^H_{\ell,6,6\ell+T}$. Аналогично, определим f_4, используя f_3, f_5 используя f_4 и т.д. В конце концов мы получим $f:=f_k\in Q^H_{\ell,2k,2k\ell+T}\backslash\operatorname{Id}^H(\varphi)$. □

8.5 Оценка сверху

В §8.5–8.6 рассматривается некоторая H-хорошая алгебра Ли L (см. §8.1).

Лемма 8.24 является H-инвариантным аналогом леммы 4 из [10].

Лемма 8.24. *Пусть $J \subseteq I \subseteq L$ — такие H-инвариантные идеалы, что I/J является неприводимым (H, L)-модулем. Тогда*

1. $\mathrm{Ann}(I/J) \cap B$ *и* $\mathrm{Ann}(I/J) \cap Q$ *являются H-подмодулями алгебры Ли L;*

2. $\mathrm{Ann}(I/J) = (\mathrm{Ann}(I/J) \cap B) \oplus (\mathrm{Ann}(I/J) \cap Q) \oplus N$. *(См. лемму 8.17.)*

Доказательство. В силу леммы 3.11 пространства $\mathrm{Ann}(I/J)$, $\mathrm{Ann}(I/J) \cap B$ и $\mathrm{Ann}(I/J) \cap Q$ являются H-подмодулями.

В силу того, что нильпотентный радикал N является нильпотентным идеалом, для некоторого $p \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $[\underbrace{N, [N, \ldots, [N}_{p}, I] \ldots] = 0$. Отсюда $N^p(I/J) = 0$. Однако I/J является неприводимым (H, L)-модулем, откуда либо $N(I/J) = 0$, либо $N(I/J) = I/J$. Следовательно, $N(I/J) = 0$ и $N \subseteq \mathrm{Ann}(I/J)$. Для того, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что если $b + s \in \mathrm{Ann}(I/J)$, где $b \in B$, $s \in Q$, то $b, s \in \mathrm{Ann}(I/J)$. Обозначим через $\varphi\colon L \to \mathfrak{gl}(I/J)$ гомоморфизм, отвечающий структуре L-модуля на пространстве I/J. Тогда $\varphi(b) + \varphi(s) = 0$ и

$$[\varphi(b), \varphi(B)] = [-\varphi(s), \varphi(B)] = 0,$$

поскольку $[B, Q] = 0$. Следовательно, элемент $\varphi(b)$ принадлежит центру алгебры Ли $\varphi(B)$ и $\varphi(b) = \varphi(s) = 0$, так как алгебра Ли $\varphi(B)$ полупроста. Отсюда $b, s \in \mathrm{Ann}(I/J)$, и лемма доказана. $\square$

Зафиксируем в L композиционный ряд из H-инвариантных идеалов

$$L = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq L_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq N \supsetneqq \ldots \supsetneqq L_{\theta-1} \supsetneqq L_\theta = 0.$$

Введём обозначение $\mathrm{ht}\, a := \max_{a \in L_k} k$ для всех $a \in L$.

Замечание 8.25. Если $d = d(L, H) = 0$, то $L = \mathrm{Ann}(L_{i-1}/L_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant \theta$ и $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = 0$ для всех $a_i \in L$ и $n \geqslant \theta + 1$. В этом случае $c_n^H(L) = 0$ для всех $n \geqslant \theta + 1$. Следовательно, ниже мы можем без ограничения общности считать, что $d > 0$.

Пусть $Y := \{y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j_1}; y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j_2}; \ldots; y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mj_m}\}$, $Y_1, \ldots, Y_q$ и $\{z_1, \ldots, z_m\}$ являются такими подмножествами множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что $Y_i \subseteq Y$, $|Y_i| = d + 1$, $Y_i \cap Y_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $Y \cap \{z_1, \ldots, z_m\} = \varnothing$, $j_i \geqslant 0$. Введём обозначение

$$f_{m,q} := \mathrm{Alt}_1 \ldots \mathrm{Alt}_q \Big[[z_1^{h_1}, y_{11}^{h_{11}}, y_{12}^{h_{12}}, \ldots, y_{1j_1}^{h_{1j_1}}], [z_2^{h_2}, y_{21}^{h_{21}}, y_{22}^{h_{22}}, \ldots, y_{2j_2}^{h_{2j_2}}], \ldots, \\ [z_m^{h_m}, y_{m1}^{h_{m1}}, y_{m2}^{h_{m2}}, \ldots, y_{mj_m}^{h_{mj_m}}] \Big],$$

где Alt_i — оператор альтернирования по переменным из множества Y_i, а $h_i, h_{ij} \in H$ — произвольные фиксированные элементы.

Пусть $\xi\colon L(X|H) \to L$ — гомоморфизм H-модульных алгебр, индуцированный некоторой подстановкой $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \to L$. Будем называть гомоморфизм ξ *собственным* для $f_{m,q}$, если $\xi(z_1) \in B \cup Q \cup N$, $\xi(z_i) \in N$ при $2 \leqslant i \leqslant m$ и $\xi(y_{ik}) \in B \cup Q$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant j_i$.

Воспользуемся идеей из леммы 7 из работы [10]:

Лемма 8.26. *Пусть ξ — гомоморфизм, собственный для H-многочлена $f_{m,q}$. Тогда выражение $\xi(f_{m,q})$ является линейной комбинацией выражений $\psi(f_{m+1,q'})$, где ψ — собственный гомоморфизм для $f_{m+1,q'}$, а $q' \geqslant q - (\dim L)m - 2$. (Соответствующие множества Y', Y_i', переменные $z_1', \ldots, z_{m+1}'$ и элементы h_i', h_{ij}' могут быть различными для различных слагаемых $f_{m+1,q'}$.)*

Доказательство. Пусть $\alpha_i := \operatorname{ht} \xi(z_i)$. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по $\sum_{i=1}^m \alpha_i$, причём сумма будет расти. Заметим, что $\alpha_i \leqslant \theta \leqslant \dim L$, и индукция рано или поздно прекратится. Введём обозначения $I_i := L_{\alpha_i}$, $J_i := L_{\alpha_i+1}$.

Во-первых, рассмотрим случай, когда для $I_1, \ldots, I_m$, $J_1, \ldots, J_m$ нарушены условия 1 и 2 из определения числа $d(L, H)$. В этом случае можно выбрать такие H-инвариантные B-подмодули T_i, что $I_i = T_i \oplus J_i$ и

$$\big[[T_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [T_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [T_m, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_m}]\big] = 0 \qquad (8.4)$$

для всех $q_i \geqslant 0$. Определим элементы $a_i' \in T_i$ и $a_i'' \in J_i$ при помощи равенств $\xi(z_i) = a_i' + a_i''$. Заметим, что $\operatorname{ht} a_i'' > \operatorname{ht} \xi(z_i)$. Поскольку H-многочлен $f_{m,q}$ полилинеен, выражение $\xi(f_{m,q})$ можно представить в виде суммы аналогичных слагаемых $\tilde{\xi}(f_{m,q})$, где $\tilde{\xi}(z_i)$ равно либо a_i', либо a_i''. В силу (8.4) слагаемое, в котором все $\tilde{\xi}(z_i) = a_i' \in T_i$, равно 0. Для всех остальных слагаемых $\tilde{\xi}(f_{m,q})$ выполняется условие $\sum_{i=1}^m \operatorname{ht} \tilde{\xi}(z_i) > \sum_{i=1}^m \operatorname{ht} \xi(z_i)$.

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что H-инвариантные идеалы $I_1, \ldots, I_m$, $J_1, \ldots, J_m$ удовлетворяют условиям 1 и 2 из определения числа $d(L, H)$. В этом случае $\dim(\operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)) \geqslant \dim(L) - d$. В силу леммы 8.24

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m) = (B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)) \oplus \\ \oplus (Q \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)) \ \oplus \ N.\end{aligned}$$

Выберем в B базис, который включает в себя базис пространства $B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$, а в Q — базис, который включает в себя базис пространства $Q \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$. Поскольку H-многочлен $f_{m,q}$ полилинеен, без ограничения общности можно считать, что вместо $y_{k\ell}$ подставляются только элементы базиса. Напомним, что H-многочлен $f_{m,q}$ кососимметричен по переменным из Y_i. Следовательно, в случае, когда $\xi(f_{m,q}) \neq 0$, для любого $1 \leqslant i \leqslant q$ существуют такие $y_{kj} \in Y_i$, что либо

$$\xi(y_{kj}) \in B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m),$$

либо

$$\xi(y_{kj}) \in Q \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m).$$

Рассмотрим случай, когда $\xi(y_{kj}) \in B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$ для некоторого y_{kj}. Поскольку L является вполне приводимым (H, B)-модулем (см. лемму 8.17), можно выбрать такие H-инвариантные B-подмодули T_k, что $I_k = T_k \oplus J_k$. Можно считать, что $\xi(z_k) \in T_k$, поскольку элементы идеалов J_k имеют бо́льшие высоты. Следовательно,

$[\xi(z_k^{h_k}), a] \in T_k \cap J_k$ для всех $a \in B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$. Отсюда $[\xi(z_k^{h_k}), a] = 0$. Более того, $B \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$ является H-инвариантным идеалом алгебры Ли B, а $[B, Q] = 0$. Поэтому, применяя необходимое число раз тождество Якоби, приходим к тому, что

$$\xi([z_k^{h_k}, y_{k1}^{h_{k1}}, \ldots, y_{kj_k}^{h_{kj_k}}]) = 0.$$

Расписывая альтернирования, получаем, что $\xi(f_{m,q}) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi(y_{k\ell}) \in Q \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$ для некоторого $y_{k\ell} \in Y_q$. Распишем в $f_{m,q}$ альтернирование Alt_q и представим $f_{m,q}$ в виде суммы слагаемых

$$\tilde{f}_{m,q-1} := \operatorname{Alt}_1 \ldots \operatorname{Alt}_{q-1}\big[[z_1^{h_1}, y_{11}^{h_{11}}, y_{12}^{h_{12}}, \ldots, y_{1j_1}^{h_{1j_1}}], [z_2^{h_2}, y_{21}^{h_{21}}, y_{22}^{h_{22}}, \ldots, y_{2j_2}^{h_{2j_2}}], \ldots,$$
$$[z_m^{h_m}, y_{m1}^{h_{m1}}, y_{m2}^{h_{m2}}, \ldots, y_{mj_m}^{h_{mj_m}}]\big].$$

Оператор Alt_q может менять индексы переменных, однако мы сохраним обозначение $y_{k\ell}$ за переменной, обладающей свойством $\xi(y_{k\ell}) \in Q \cap \operatorname{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Ann}(I_m/J_m)$. Теперь альтернирования оставляют $y_{k\ell}$ на месте. Заметим, что

$$[z_k^{h_k}, y_{k1}^{h_{k1}}, \ldots, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}, \ldots, y_{kj_k}^{h_{kj_k}}] = [z_k^{h_k}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}, y_{k1}^{h_{k1}}, \ldots, y_{kj_k}^{h_{kj_k}}] +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{\ell-1} [z_k^{h_k}, y_{k1}^{h_{k1}}, \ldots, y_{k,\beta-1}^{h_{k,\beta-1}}, [y_{k\beta}^{h_{k\beta}}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}], y_{k,\beta+1}^{h_{k,\beta+1}}, \ldots, y_{k,\ell-1}^{h_{k,\ell-1}}, y_{k,\ell+1}^{h_{k,\ell+1}}, \ldots, y_{kj_k}^{h_{kj_k}}].$$

Заменим в первом слагаемом $[z_k^{h_k}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}]$ на z'_k и положим $\xi'(z'_k) := \xi([z_k^{h_k}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}])$ и $\xi'(x) := \xi(x)$ для всех остальных переменных x. Тогда $\operatorname{ht}\xi'(z'_k) > \operatorname{ht}\xi(z_k)$, и мы можем воспользоваться предположением индукции. Если для некоторого j выполнено условие $y_{k\beta} \in Y_j$, то мы расписываем в соответствующем слагаемом в $\tilde{f}_{m,q-1}$ альтернирование Alt_j. Если $\xi(y_{k\beta}) \in B$, то соответствующее слагаемое равно нулю. Если $\xi(y_{k\beta}) \in Q$, то $\xi([y_{k\beta}^{h_{k\beta}}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}]) \in N$. Заменим $[y_{k\beta}^{h_{k\beta}}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}]$ на дополнительную переменную z'_{m+1} и положим $\psi(z'_{m+1}) := \xi([y_{k\beta}^{h_{k\beta}}, y_{k\ell}^{h_{k\ell}}])$ и $\psi(x) := \xi(x)$ для остальных переменных x. Теперь для того, чтобы получить H-многочлен требуемого вида, осталось применить необходимое число раз тождество Якоби. На каждом шаге индукции число q уменьшается не более чем на 1, а максимальное число индукционных шагов равно $(\dim L)m$. □

Поскольку N является нильпотентным идеалом, для некоторого $p \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $N^p = 0$.

Лемма 8.27. *Если $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$, причём $\lambda_{d+1} \geqslant p((\dim L)p + 3)$ или $\lambda_{\dim L+1} > 0$, то $m(L, H, \lambda) = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.45 достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f \in \operatorname{Id}^H(A)$ для всех $f \in V_n^H$ и для всех таблиц Юнга T_λ, где $\lambda \vdash n$, $\lambda_{d+1} \geqslant p((\dim L)p + 3)$ или $\lambda_{\dim L+1} > 0$.

Выберем в алгебре Ли L базис, который является объединением базисов пространств B, Q и N. Поскольку H-многочлены $e^*_{T_\lambda} f$ полилинейны, достаточно подставлять вместо их переменных только базисные переменные. Напомним, что $e^*_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}$, а оператор b_{T_λ} делает многочлены кососимметричными по переменным, отвечающим каждому столбцу таблицы

Юнга T_λ. Отсюда для того, чтобы H-многочлен $e^*_{T_\lambda} f$ не обратился в нуль, в переменные каждого столбца должны поставляться различные элементы базиса. Однако при $\lambda_{\dim L+1} > 0$ длина первого столбца больше, чем $(\dim L)$. Следовательно, $e^*_{T_\lambda} f \in \mathrm{Id}^H(L)$.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_{d+1} \geqslant p((\dim L)p+3)$. Пусть ξ — гомоморфизм, отвечающий некоторой подстановке базисных элементов вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $e^*_{T_\lambda} f$ можно представить в виде линейной комбинации H-многочленов $f_{m,q}$, где $1 \leqslant m \leqslant p$, $q \geqslant p((\dim L)p+2)$, а переменные z_i, где $2 \leqslant i \leqslant m$, заменяются на элементы идеала N. (Для различных слагаемых $f_{m,q}$ числа m и q, переменные z_i, y_{ij}, множества Y_i и элементы h_i, h_{ij} могут быть, вообще говоря, различными.) Действительно, распишем симметризацию по всех переменным и альтернирование тем переменным, в которые подставляются элементы из N. Если ни в одну из переменных элементы из N не подставляются, положим $m = 1$, представим H-многочлен f в виде суммы длинных коммутаторов и в каждом слагаемом обозначим через z_1 одну из переменных во внутреннем коммутаторе, расписав альтернирование по множеству, включающему z_1. Если же в некоторые переменные подставляются элементы из N, то обозначим все такие переменные через z_k, где $1 \leqslant k \leqslant m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Затем, используя тождество Якоби, занесём одну из таких переменных во внутренний коммутатор и сгруппируем все переменные, в которые подставляются элементы из $B \cup Q$, вокруг z_k так, что каждая переменная z_k окажется в самом внутреннем коммутаторе некоторого длинного коммутатора.

Применяя необходимое число раз лемму 8.26, будем увеличивать число m. В силу того, что идеал N нильпотентен, а $\xi(f_{p+1,q}) = 0$ для любого q и собственного гомоморфизма ξ, уменьшая число q не более чем на $p((\dim L)p+2)$, получим, что $\xi(e^*_{T_\lambda} f) = 0$. □

Теорема 8.28. *Пусть L — H-хорошая алгебра Ли, причём $d := d(L,H) > 0$. Тогда существуют такие константы $C_2 > 0$, $r_2 \in \mathbb{R}$, что $c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В случае, когда $d = 0$, алгебра Ли L является нильпотентной.*

Доказательство. Рассмотрим такое $\lambda \vdash n$, что $m(A,H,\lambda) \neq 0$. Согласно формуле крюков
$$\dim M(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$
где h_{ij} — длина крюка в диаграмме D_λ с вершиной в (i,j). Оценивая полиномиальный коэффициент $\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_d)!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!}$ сверху по формуле возведения суммы $\underbrace{1+\ldots+1}_{d}$ в степень $\lambda_1+\ldots+\lambda_d$ и применяя лемму 8.27, получаем, что
$$\dim M(\lambda) \leqslant \frac{n!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!} \leqslant \frac{n!}{(\lambda_1+\ldots+\lambda_d)!}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_d)!}{(\lambda_1)!\ldots(\lambda_d)!} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n!}{\Bigl(n - p\bigl((\dim L)p+3\bigr)\bigl((\dim L)-d\bigr)\Bigr)!} d^{\lambda_1+\ldots+\lambda_d} \leqslant C_3 n^{r_3} d^n.$$
для некоторых констант $C_3, r_3 > 0$. Теперь оценка сверху следует из теоремы 6.27. □

Замечание 8.29. Как видно из доказательства, теорема 8.28 справедлива для всех H-модульных алгебр Ли L, для которых справедливо утверждение леммы 8.17.

8.6 Оценка снизу

Напомним, что оценка снизу будет доказываться для числа $d' = d'(L, H)$ (см. §8.3). Согласно определению числа d' существуют такие H-инвариантные идеалы I_1, I_2, …, I_r, J_1, J_2, …, J_r, где $r \in \mathbb{Z}_+$, алгебры L, удовлетворяющие условия 1–2, что $J_k \subseteq I_k$ и

$$d' = \dim \frac{L}{\mathrm{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(I_r/J_r)}.$$

В доказательстве оценки снизу достаточно рассматривать только случай $d' > 0$.

Без ограничения общности можно считать, что для всех $1 \leqslant \ell \leqslant r$ справедливо неравенство

$$\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ann}(I_k/J_k) \neq \bigcap_{\substack{k=1,\\ k\neq \ell}}^{r} \mathrm{Ann}(I_k/J_k).$$

В частности, действие алгебры Ли L на всяком I_k/J_k ненулевое.

Наша цель — предъявить такое разбиение $\lambda \vdash n$, что $m(L, H, \lambda) \neq 0$, а $\dim M(\lambda)$ имеет требуемое асимптотическое поведение. Мы будем перемножать кососимметрические H-многочлены, построенные в теореме 8.23 для точных неприводимых модулей над редуктивными алгебрами Ли. Редуктивные алгебры Ли выбираются в лемме ниже:

Лемма 8.30. *Существуют такие H-инвариантные идеалы $B_1, \ldots, B_r$ алгебры Ли B и H-подмодули $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_r \subseteq Q$ (некоторые из $\tilde{R}_i$ и B_j могут оказаться нулевыми), что*

1. $B_1 + \ldots + B_r = B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$;
2. $\tilde{R}_1 + \ldots + \tilde{R}_r = \tilde{R}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{R}_r$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{r} \dim(B_k \oplus \tilde{R}_k) = d$;
4. *I_k/J_k является точным $(B_k \oplus \tilde{R}_k \oplus N)/N$-модулем;*
5. *I_k/J_k является неприводимым $\left(H, \left(\sum_{i=1}^{r}(B_i \oplus \tilde{R}_i) \oplus N\right)/N\right)$-модулем;*
6. *$B_i I_k/J_k = \tilde{R}_i I_k/J_k = 0$ при $i > k$.*

Доказательство. Положим $N_\ell := \bigcap\limits_{k=1}^{\ell} \mathrm{Ann}(I_k/J_k)$, $1 \leqslant \ell \leqslant r$, $N_0 := L$. Заметим, что идеалы N_ℓ являются H-подмодулями. Поскольку алгебра Ли B полупростая, в силу теоремы 3.19 можно выбрать такие H-инвариантные идеалы B_ℓ, что $N_{\ell-1} \cap B = B_\ell \oplus (N_\ell \cap B)$. Кроме того, применяя условие 4 из §8.1 к нулевой алгебре, получаем, что L является вполне приводимым H-модулем. Отсюда можно выбрать такие H-подмодули $\tilde{R}_\ell$, что $N_{\ell-1} \cap Q = \tilde{R}_\ell \oplus (N_\ell \cap Q)$. Таким образом, свойства 1, 2, 6 доказаны.

В силу леммы 8.24 справедливо равенство $N_k = (N_k \cap B) \oplus (N_k \cap Q) \oplus N$, из которого следует свойство 4. Более того,

$$N_{\ell-1} = B_\ell \oplus (N_\ell \cap B) \oplus \tilde{R}_\ell \oplus (N_\ell \cap Q) \oplus N = (B_\ell \oplus \tilde{R}_\ell) \oplus N_\ell$$

(прямая сумма подпространств). Отсюда $L = \left(\bigoplus_{i=1}^{r}(B_i \oplus \tilde R_i)\right) \oplus N_r$, и свойства 3 и 5 также доказаны. □

Обозначим через $\zeta\colon H \to \mathrm{End}_F(L)$ гомоморфизм, отвечающий H-действию, а через A — ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(L)$, порождённую операторами из $(\mathrm{ad}\, L)$ и $\zeta(H)$. Пусть A_0 и $\tilde A_0$ — ассоциативные алгебры из §8.3. Выберем в каждом из пространств $\tilde R_\ell$ некоторый базис $a_{\ell 1}, \ldots, a_{\ell, k_\ell}$.

Лемма 8.31. *Для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant k_i$ существуют разложения*

$$\mathrm{ad}\, a_{ij} = c_{ij} + d_{ij},$$

где операторы $c_{ij} \in \tilde A_0$ являются диагонализуемыми на L, $d_{ij} \in J(A)$, элементы c_{ij} коммутируют друг с другом, а c_{ij} и d_{ij} представляются в виде многочленов от элементов $\mathrm{ad}\, a$, где $a \in Q$, без свободного члена. Более того, пространства $R_\ell := \langle c_{\ell 1}, \ldots, c_{\ell, k_\ell}\rangle_F$ являются H-подмодулями алгебры A.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{ad}\, a_{ij} \in A_0$, существует разложение $\mathrm{ad}\, a_{ij} = c_{ij} + d_{ij}$, где $c_{ij} \in \tilde A_0$, а $d_{ij} \in J(A_0)$.

В силу леммы 8.18 операторы c_{ij} являются коммутирующими диагонализуемыми на L операторами. Более того,

$$hc_{\ell j}+hd_{\ell j} = h\psi(a_{\ell j}) \in \langle \psi(a_{\ell i}) \mid 1 \leqslant i \leqslant k_\ell\rangle_F \subseteq \langle c_{\ell i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k_\ell\rangle_F \oplus \langle d_{\ell i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k_\ell\rangle_F \subseteq \tilde A_0 \oplus J(A_0)$$

для всех $h \in H$. Однако $\tilde A_0$ и $J(A_0)$ являются H-подмодулями, откуда $hc_{\ell j} \in \tilde A_0$, а $hd_{\ell j} \in J(A_0)$. Следовательно, $hc_{\ell j} \in R_\ell := \langle c_{\ell 1}, \ldots, c_{\ell, k_\ell}\rangle_F$ и $hd_j \in \langle d_{\ell 1}, \ldots, d_{\ell, k_\ell}\rangle_F$. Отсюда $R_\ell := \langle c_{\ell 1}, \ldots, c_{\ell, k_\ell}\rangle_F$ и $\langle d_{\ell 1}, \ldots, d_{\ell, k_\ell}\rangle_F$ являются H-подмодулями алгебры $\mathrm{End}_F(V)$.

Теперь для завершения доказательства леммы достаточно применить лемму 3.13. □

Пусть

$$\tilde B := \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{ad}\, B_i\right) \oplus \langle c_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant k_i\rangle_F,$$

$$\tilde B_0 := (\mathrm{ad}\, B) \oplus \langle c_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant k_i\rangle_F \subseteq A.$$

В силу определения пространства Q (см. лемму 8.17), леммы 8.31 и тождества Якоби, справедливы равенства

$$[c_{ij}, \mathrm{ad}\, B] = 0. \tag{8.5}$$

Отсюда для $\tilde B$ и $\tilde B_0$ справедливо условие (3.2), и $\tilde B$ и $\tilde B_0$ являются H-модульными алгебрами Ли.

Лемма 8.32. *Алгебра Ли L является вполне приводимым $(H, \tilde B_0)$-модулем. Более того, для любого $1 \leqslant k \leqslant r$ алгебра Ли L является вполне приводимым $(H, (\mathrm{ad}\, B_k) \oplus R_k)$-модулем.*

Доказательство. В силу условия 4 из §8.1 достаточно показать, что L является вполне приводимым $\tilde{B}_0$- и $(\operatorname{ad} B_k)\oplus R_k$-модулем без учёта H-действия. Элементы c_{ij} являются диагонализуемыми коммутирующими на L операторами, откуда всякое собственное подпространство одного из операторов c_{ij} инвариантно относительно действия остальных операторов $c_{k\ell}$. По индукции получаем разложение $L = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} W_i$, где W_i являются пересечениями собственных подпространств операторов $c_{k\ell}$ и все элементы $c_{k\ell}$ действуют на W_i как скалярные операторы. В силу (8.5) подпространства W_i являются B-подмодулями и L — вполне приводимый $\tilde{B}_0$- и $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модуль, так как алгебры B и B_k полупросты. $\square$

Пусть $\tilde{T}_k$ — $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодули из условия 2' §8.3. Напомним, что $I_k = \tilde{T}_k \oplus J_k$.

Лемма 8.33. *Модули $\tilde{T}_k$ удовлетворяют следующим свойствам:*

1. *каждый $\tilde{T}_k$ является H-инвариантным B-подмодулем и неприводимым $(H, \tilde{B})$-подмодулем;*
2. *каждый $\tilde{T}_k$ является вполне приводимым $(H, (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k)$-модулем, точным как $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модуль;*
3. $\sum\limits_{k=1}^{r} \dim((\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k) = d;$
4. $B_i \tilde{T}_k = R_i \tilde{T}_k = 0$ *для всех* $i > k$.

Доказательство. В силу того, что все $c_{ij} \in \tilde{A}_0$, подпространства $\tilde{T}_k$ являются (H, B)- и $(H, \tilde{B})$-подмодулями.

Заметим, что $(\operatorname{ad} a_{ij})w = c_{ij}w$ для всех $w \in I_k/J_k$, так как I_k/J_k являются неприводимыми A-модулями и $J(A)\, I_k/J_k = 0$. Следовательно, в силу леммы 8.30 модули I_k/J_k являются точными $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модулями, $R_i\, I_k/J_k = 0$ при $i > k$, и элементы c_{ij} линейно независимы. Более того, в силу свойства 5 из леммы 8.30 модули I_k/J_k являются неприводимыми $\left(H, \left(\sum_{i=1}^{r}(B_i \oplus \tilde{R}_i) \oplus N\right)/N\right)$-модулями. Однако алгебра Ли $\left(\sum_{i=1}^{r}(B_i \oplus \tilde{R}_i) \oplus N\right)/N$ действует на I_k/J_k теми же самыми операторами, что и $\tilde{B}$. Отсюда $\tilde{T}_k \cong I_k/J_k$ являются неприводимыми $(H, \tilde{B})$-модулями и свойство 1 доказано. Согласно лемме 8.32 алгебра Ли L для любого $1 \leqslant k \leqslant r$ является вполне приводимым $(H, (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k)$-модулем. Используя изоморфизм $\tilde{T}_k \cong I_k/J_k$, из замечаний, сделанных выше, получаем свойства 2 и 4. Свойство 3 является следствием свойства 3 из леммы 8.30. $\square$

Лемма 8.34. *Для любого $1 \leqslant k \leqslant r$ существует разложение*

$$\tilde{T}_k = T_{k1} \oplus T_{k2} \oplus \ldots \oplus T_{km},$$

где T_{kj} — неприводимые $(H, (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k)$-подмодули, являющиеся точными $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модулями, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Доказательство. В силу свойства 2 из леммы 8.33

$$\tilde{T}_k = T_{k1} \oplus T_{k2} \oplus \ldots \oplus T_{km}$$

для некоторых $(H, (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k)$-подмодулей. Предположим, что для некоторого $1 \leqslant j \leqslant m$ модуль T_{kj} не является точным $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модулем. Тогда $bT_{kj} = 0$ для некоторого $b \in (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$, $b \neq 0$. Заметим, что $\tilde{B} = ((\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k) \oplus \tilde{B}_k$, где

$$\tilde{B}_k := \bigoplus_{i \neq k} (\operatorname{ad} B_i) \oplus \bigoplus_{i \neq k} R_i$$

и $[(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k, \tilde{B}_k] = 0$. Обозначим через $\widehat{B}_k$ ассоциативную подалгебру с 1 алгебры $\operatorname{End}_F(\tilde{T}_k)$, порождённую операторами из алгебры Ли $\tilde{B}_k$. Эта подалгебра является H-инвариантной, причём

$$[(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k, \widehat{B}_k] = 0$$

и $\sum_{a \in \widehat{B}_k} aT_{kj} \supseteq T_{kj}$ является H-инвариантным $\tilde{B}$-подмодулем пространства $\tilde{T}_k$, поскольку

$$h\left(\sum_{a \in \widehat{B}_k} aT_{kj}\right) = \sum_{a \in \widehat{B}_k} (h_{(1)}a)(h_{(2)}T_{kj}) \subseteq \sum_{a \in \widehat{B}_k} aT_{kj}$$

для всех $h \in H$. Следовательно, $\tilde{T}_k = \sum_{a \in \widehat{B}_k} aT_{kj}$ и

$$b\tilde{T}_k = \sum_{a \in \widehat{B}_k} baT_{kj} = \sum_{a \in \widehat{B}_k} a(bT_{kj}) = 0.$$

Получаем противоречие с точностью $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модуля $\tilde{T}_k$. □

В силу условия 2' из определения числа d' (см. §8.3) существуют такие числа $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}_+$, что

$$[[\tilde{T}_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [\tilde{T}_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}] \ldots, [\tilde{T}_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0$$

Выберем такие числа $n_i \in \mathbb{Z}_+$ с максимальной суммой $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$, что

$$[[\left(\prod_{k=1}^{n_1} j_{1k}\right) \tilde{T}_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [\left(\prod_{k=1}^{n_2} j_{2k}\right) \tilde{T}_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}] \ldots, [\left(\prod_{k=1}^{n_r} j_{rk}\right) \tilde{T}_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0$$

для некоторых $j_{ik} \in J(A)$. Пусть $j_i := \prod_{k=1}^{n_i} j_{ik}$. Тогда $j_i \in J(A) \cup \{1\}$ и

$$[[j_1\tilde{T}_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [j_2\tilde{T}_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [j_r\tilde{T}_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0,$$

но

$$[[j_1\tilde{T}_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], \ldots, [j_k(j\tilde{T}_k), \underbrace{L, \ldots, L}_{q_k}], \ldots, [j_r\tilde{T}_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] = 0 \tag{8.6}$$

для всех $j \in J(A)$ и $1 \leqslant k \leqslant r$.

В силу леммы 8.34 можно выбрать такие неприводимые $(H, (\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k)$-модули $T_k \subseteq \tilde{T}_k$, точные как $(\operatorname{ad} B_k) \oplus R_k$-модули, что

$$[[j_1T_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [j_2T_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}] \ldots, [j_rT_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0. \tag{8.7}$$

Лемма 8.35. *Пусть* $\psi\colon \bigoplus_{i=1}^r (B_i \oplus \tilde R_i) \to \bigoplus_{i=1}^r ((\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i)$ *— линейная биекция, заданная формулами* $\psi(b) = \operatorname{ad} b$ *при* $b \in B_i$ *и* $\psi(a_{i\ell}) = c_{i\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant k_\ell$. *Пусть* f_i *— полилинейные ассоциативные* H*-многочлены, а* $\bar x_1^{(i)}, \ldots, \bar x_{n_i}^{(i)} \in \bigoplus_{i=1}^r B_i \oplus \tilde R_i$, $\bar t_i \in \tilde T_i$, $\bar u_{ik} \in L$ *— некоторые элементы. Тогда*

$$[[j_1 f_1(\operatorname{ad} \bar x_1^{(1)}, \ldots, \operatorname{ad} \bar x_{n_1}^{(1)})\bar t_1, \bar u_{11}, \ldots, \bar u_{1q_1}], \ldots, [j_r f_r(\operatorname{ad} \bar x_1^{(r)}, \ldots, \operatorname{ad} \bar x_{n_r}^{(r)})\bar t_r, \bar u_{r1}, \ldots, \bar u_{rq_r}]] =$$
$$= [[j_1 f_1(\psi(\bar x_1^{(1)}), \ldots, \psi(\bar x_{n_1}^{(1)}))\bar t_1, \bar u_{11}, \ldots, \bar u_{1q_1}], \ldots,$$
$$[j_r f_r(\psi(\bar x_1^{(r)}), \ldots, \psi(\bar x_{n_r}^{(r)}))\bar t_r, \bar u_{r1}, \ldots, \bar u_{rq_r}]].$$

Другими словами, после замены $\operatorname{ad} a_{i\ell}$ *на* $c_{i\ell}$ *результат не меняется.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться равенствами

$$\operatorname{ad} a_{i\ell} = c_{i\ell} + d_{i\ell} = \psi(a_{i\ell}) + d_{i\ell}$$

и полилинейностью H-многочленов f_i. В силу (8.6) слагаемые с $d_{i\ell}$ обратятся в нуль. □

Лемма 8.36. *Если* $d' > 0$, *то существует такое число* $n_0 \in \mathbb N$, *что для любого* $n \geqslant n_0$ *существуют попарно непересекающиеся множества* $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, *где* $k := \left[\frac{n-n_0}{2d'}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = d'$, *и* H*-многочлен* $f \in V_n^H \setminus \operatorname{Id}^H(L)$, *кососимметричный по переменным каждого из множеств* X_j.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_i\colon (\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i \to \mathfrak{gl}(T_i)$ представление, отвечающее $(\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i$-действию на T_i. В силу теоремы 8.23 существуют такие константы $m_i \in \mathbb Z_+$, что для любого k существуют полилинейные ассоциативные H-многочлены $f_i \in Q^H_{d_i, 2k, 2kd_i + m_i} \setminus \operatorname{Id}^H(\varphi_i)$, где $d_i := \dim((\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i)$, кососимметричные по переменным из непересекающихся множеств $X_\ell^{(i)}$, где $1 \leqslant \ell \leqslant 2k$, $|X_\ell^{(i)}| = d_i$.

В силу (8.7) для некоторых $\bar u_{i\ell} \in L$ и $\bar t_i \in T_i$ справедливо неравенство

$$[[j_1 \bar t_1, \bar u_{11}, \ldots, \bar u_{1,q_1}], [j_2 \bar t_2, \bar u_{21}, \ldots, \bar u_{2,q_2}], \ldots, [j_r \bar t_r, \bar u_{r1}, \ldots, \bar u_{r,q_r}]] \neq 0.$$

Все $j_i \in J(A) \cup \{1\}$ являются многочленами от элементов из $\zeta(H)$ и $\operatorname{ad} L$. Обозначим через $\tilde m$ наибольшую среди степеней этих многочленов.

Напомним, что каждое из пространств T_i является неприводимым $(H, (\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i)$-модулем и точным $(\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i$-модулем. Следовательно, в силу теоремы плотности всякая алгебра $\operatorname{End}_F(T_i)$ порождена операторами из $\zeta(H)$ и $(\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i$. Отождествим $\operatorname{End}_F(T_i)$ с $M_{\dim T_i}(F)$. Тогда каждая матричная единица $e_{j\ell}^{(i)} \in M_{\dim T_i}(F)$ может быть представлена как многочлен от элементов пространств $\zeta(H)$ и $(\operatorname{ad} B_i) \oplus R_i$. Выберем такие многочлены для всех i и всех матричных единиц. Обозначим через m_0 наибольшую среди степеней этих многочленов.

Пусть $n_0 := r(2m_0 + \tilde m + 1) + \sum_{i=1}^r (m_i + q_i)$. Выберем H-многочлены f_i в соответствии с теоремой 8.23 для $k = \left[\frac{n-n_0}{2d'}\right]$ и представлений φ_i. Кроме того, выберем H-многочлен $\tilde f_1$ для $\tilde k = \left[\frac{n-2kd'-m_1}{2d_1}\right] + 1$ и представления φ_1. При помощи H-многочленов f_i мы получим необходимое количество альтернирований. Однако общая степень такого произведения может оказаться меньше n. Мы будем использовать H-многочлен $\tilde{f}_1$ для того, чтобы увеличить число переменных и получить H-многочлен степени n.

Поскольку $f_i \notin \mathrm{Id}^H(\varphi_i)$ и $\tilde{f}_1 \notin \mathrm{Id}^H(\varphi_1)$, существуют такие

$$\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{i,2kd_i+m_i} \in (\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i,$$

что $f_i(\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{i,2kd_i+m_i}) \neq 0$, и такие

$$\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1} \in (\mathrm{ad}\, B_1) \oplus R_1,$$

что $\tilde{f}_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}) \neq 0$. Следовательно, для некоторых матричных единиц $e^{(i)}_{\ell_i\ell_i}, e^{(i)}_{s_is_i} \in \mathrm{End}_F(T_i)$, $1 \leqslant \ell_i, s_i \leqslant \dim T_i$, $e^{(1)}_{\tilde{\ell}\tilde{\ell}}, e^{(1)}_{\tilde{s}\tilde{s}} \in \mathrm{End}_F(T_1)$, $1 \leqslant \tilde{\ell}, \tilde{s} \leqslant \dim T_1$ справедливы неравенства

$$e^{(i)}_{\ell_i\ell_i} f_i(\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{i,2kd_i+m_i}) e^{(i)}_{s_is_i} \neq 0$$

и

$$e^{(1)}_{\tilde{\ell}\tilde{\ell}} \tilde{f}_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}) e^{(1)}_{\tilde{s}\tilde{s}} \neq 0.$$

Отсюда

$$\sum_{\ell=1}^{\dim_{T_i}} e^{(i)}_{\ell\ell_i} f_i(\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{i,2kd_i+m_i}) e^{(i)}_{s_i\ell}$$

является ненулевым скалярным оператором, принадлежащим алгебре $\mathrm{End}_F(T_i)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
[[j_1 \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_1} e^{(1)}_{\ell\ell_1} f_1(\bar{x}_{11}, \ldots, \bar{x}_{1,2kd_1+m_1}) e^{(1)}_{s_1\tilde{\ell}} \tilde{f}_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}) e^{(1)}_{\tilde{s}\ell} \right) \bar{t}_1, \bar{u}_{11}, \ldots, \bar{u}_{1q_1}], \\
[j_2 \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_2} e^{(2)}_{\ell\ell_2} f_2(\bar{x}_{21}, \ldots, \bar{x}_{2,2kd_2+m_2}) e^{(2)}_{s_2\ell} \right) \bar{t}_2, \bar{u}_{21}, \ldots, \bar{u}_{2q_2}], \ldots, \\
[j_r \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_r} e^{(r)}_{\ell\ell_r} f_r(\bar{x}_{r1}, \ldots, \bar{x}_{r,2kd_r+m_r}) e^{(r)}_{s_r\ell} \right) \bar{t}_r, \bar{u}_{r1}, \ldots, \bar{u}_{rq_r}]] \neq 0.
\end{aligned}$$

(Считаем, что всякий f_i является H-многочленом от переменных $x_{i1}, \ldots, x_{i,2kd_i+m_i}$, а всякий $\tilde{f}_1$ является H-многочленом от переменных $x_1, \ldots, x_{2\tilde{k}d_1+m_1}$.) Введём обозначение $X_\ell := \bigcup_{i=1}^r X^{(i)}_\ell$, где $X^{(i)}_\ell$ — множества, по переменным которых был кососимметричен H-многочлен f_i. Обозначим через Alt_ℓ оператор альтернирования по переменным из множества X_ℓ. Рассмотрим выражение

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_{2\tilde{k}d_1+m_1}; x_{11}, \ldots, x_{1,2kd_1+m_1}; \ldots;\ x_{r1}, \ldots, x_{r,2kd_r+m_r}) :=$$

$$= \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \ldots \mathrm{Alt}_{2k}[[j_1 \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_1} e^{(1)}_{\ell\ell_1} f_1(x_{11}, \ldots, x_{1,2kd_1+m_1}) e^{(1)}_{s_1\tilde\ell} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \tilde f_1(x_1, \ldots, x_{2\tilde k d_1+m_1}) e^{(1)}_{\tilde s \ell} \right) \bar t_1, \bar u_{11}, \ldots, \bar u_{1q_1}],$$
$$[j_2 \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_2} e^{(2)}_{\ell\ell_2} f_2(x_{21}, \ldots, x_{2,2kd_2+m_2}) e^{(2)}_{s_2\ell} \right) \bar t_2, \bar u_{21}, \ldots, \bar u_{2q_2}], \ldots,$$
$$[j_r \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_r} e^{(r)}_{\ell\ell_r} f_r(x_{r1}, \ldots, x_{r,2kd_r+m_r}) e^{(r)}_{s_r\ell} \right) \bar t_r, \bar u_{r1}, \ldots, \bar u_{rq_r}]].$$

Тогда

$$\tilde f(\bar x_1, \ldots, \bar x_{2\tilde k d_1+m_1}; \bar x_{11}, \ldots, \bar x_{1,2kd_1+m_1}; \ldots;\ \bar x_{r1}, \ldots, \bar x_{r,2kd_r+m_r}) =$$
$$= (d_1!)^{2k} \ldots (d_r!)^{2k}[[j_1 \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_1} e^{(1)}_{\ell\ell_1} f_1(\bar x_{11}, \ldots, \bar x_{1,2kd_1+m_1}) e^{(1)}_{s_1\tilde\ell} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \tilde f_1(\bar x_1, \ldots, \bar x_{2\tilde k d_1+m_1}) e^{(1)}_{\tilde s \ell} \right) \bar t_1, \bar u_{11}, \ldots, \bar u_{1q_1}], \ldots,$$
$$[j_r \left(\sum_{\ell=1}^{\dim T_r} e^{(r)}_{\ell\ell_r} f_r(\bar x_{r1}, \ldots, \bar x_{r,2kd_r+m_r}) e^{(r)}_{s_r\ell} \right) \bar t_r, \bar u_{r1}, \ldots, \bar u_{rq_r}]] \neq 0,$$

поскольку H-многочлены f_i кососимметричны по переменным каждого множества $X^{(i)}_\ell$ и в силу леммы 8.33 справедливо равенство $((\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i)\tilde T_\ell = 0$ при $i > \ell$. Теперь представим $e^{(i)}_{\ell j}$ в виде многочленов от переменных из $(\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i$ и $\zeta(H)$. В силу линейности H-многочленов $\tilde f$ по $e^{(i)}_{\ell j}$ можно заменить матричные единицы $e^{(i)}_{\ell j}$ произведениями элементов из $(\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i$ и $\zeta(H)$, и для некоторого выбора таких произведений выражение не обратится в нуль. Используя (3.5), можно переместить все $\zeta(h)$ вправо. В силу 8.35 все элементы из $(\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i$ можно заменить на элементы из $B_i \oplus \tilde R_i$, и выражение по-прежнему останется ненулевым. Обозначим через $\psi\colon \bigoplus_{i=1}^r (B_i \oplus \tilde R_i) \to \bigoplus_{i=1}^r ((\mathrm{ad}\, B_i) \oplus R_i)$ соответствующую линейную биекцию. Теперь представим j_i как многочлены от элементов из $\mathrm{ad}\, L$ и $\zeta(H)$. Поскольку выражение $\tilde f$ линейно по j_i, можно заменить каждый из элементов j_i на некоторый одночлен, т.е. произведение элементов пространств $\mathrm{ad}\, L$ и $\zeta(H)$. Используя (3.5), снова перемещаем элементы $\zeta(h)$ вправо. Теперь заменим элементы из $\mathrm{ad}\, L$ на новые переменные. Тогда

$$\hat f := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \ldots \mathrm{Alt}_{2k} \Big[\Big[\Big[y_{11}, [y_{12}, \ldots [y_{1\alpha_1}, \Big[z_{11}, [z_{12}, \ldots, [z_{1\beta_1},$$
$$\big(h_1 f_1(\mathrm{ad}\, x_{11}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{1,2kd_1+m_1})\big)[w_{11}, [w_{12}, \ldots, [w_{1\theta_1},$$
$$\big(\tilde h \tilde f_1(\mathrm{ad}\, x_1, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{2\tilde k d_1+m_1})\big)[w_1, [w_2, \ldots, [w_{\tilde\theta}, t_1^{h'_1}] \ldots \Big], u_{11}, \ldots, u_{1q_1} \Big],$$
$$\Big[\Big[y_{21}, [y_{22}, \ldots [y_{2\alpha_2}, \Big[z_{21}, [z_{22}, \ldots, [z_{2\beta_2},$$
$$\big(h_2 f_2(\mathrm{ad}\, x_{21}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{2,2kd_2+m_2})\big)[w_{21}, [w_{22}, \ldots, [w_{2\theta_2}, t_2^{h'_2}] \ldots \Big], u_{21}, \ldots, u_{2q_2} \Big], \ldots,$$
$$\Big[\Big[y_{r1}, [y_{r2}, \ldots, [y_{r\alpha_r}, \Big[z_{r1}, [z_{r2}, \ldots, [z_{r\beta_r},$$
$$\big(h_r f_r(\mathrm{ad}\, x_{r1}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{r,2kd_r+m_r})\big)[w_{r1}, [w_{r2}, \ldots, [w_{r\theta_r}, t_r^{h'_r}] \ldots \Big], u_{r1}, \ldots, u_{rq_r} \Big] \Big]$$

для некоторых $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \tilde{m}$, $\quad 0 \leqslant \beta_i, \theta_i, \tilde{\theta} \leqslant m_0$, $\quad h_i, h'_i, \tilde{h} \in H$, $\quad \bar{y}_{i\ell}, \bar{z}_{i\ell}, \bar{w}_{i\ell}, \bar{w}_i \in L$ не обращается в нуль при подстановке

$$t_i = \bar{t}_i,\ u_{i\ell} = \bar{u}_{i\ell},\ x_{i\ell} = \psi^{-1}(\bar{x}_{i\ell}),\ x_i = \psi^{-1}(\bar{x}_i),\ y_{i\ell} = \bar{y}_{i\ell},\ z_{i\ell} = \bar{z}_{i\ell},\ w_{i\ell} = \bar{w}_{i\ell},\ w_i = \bar{w}_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_0 := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \dots \mathrm{Alt}_{2k} \Bigl[\Bigl[\Bigl[y_{11}, [y_{12}, \dots [y_{1\alpha_1}, \Bigl[z_{11}, [z_{12}, \dots, [z_{1\beta_1}, \\ \bigl(h_1 f_1(\mathrm{ad}\, x_{11}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{1,2kd_1+m_1})\bigr)[w_{11}, [w_{12}, \dots, [w_{1\theta_1}, t_1] \dots \Bigr], u_{11}, \dots, u_{1q_1} \Bigr], \\ \Bigl[\Bigl[y_{21}, [y_{22}, \dots [y_{2\alpha_2}, \Bigl[z_{21}, [z_{22}, \dots, [z_{2\beta_2}, \\ \bigl(h_2 f_2(\mathrm{ad}\, x_{21}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{2,2kd_2+m_2})\bigr)[w_{21}, [w_{22}, \dots, [w_{2\theta_2}, t_2^{h'_2}] \dots \Bigr], u_{21}, \dots, u_{2q_2} \Bigr], \dots, \\ \Bigl[\Bigl[y_{r1}, [y_{r2}, \dots, [y_{r\alpha_r}, \Bigl[z_{r1}, [z_{r2}, \dots, [z_{r\beta_r}, \\ \bigl(h_r f_r(\mathrm{ad}\, x_{r1}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{r,2kd_r+m_r})\bigr)[w_{r1}, [w_{r2}, \dots, [w_{r\theta_r}, t_r^{h'_r}] \dots \Bigr], u_{r1}, \dots, u_{rq_r} \Bigr] \Bigr] \end{aligned}$$

не обращается в нуль при подстановке

$$t_1 = \bigl(\tilde{h} \tilde{f}_1(\mathrm{ad}\, \bar{x}_1, \dots, \mathrm{ad}\, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1})\bigr)[\bar{w}_1, [\bar{w}_2, \dots, [\bar{w}_{\tilde{\theta}}, h'_1 \bar{t}_1] \dots],$$

$t_i = \bar{t}_i$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = \bar{u}_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \psi^{-1}(\bar{x}_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar{y}_{i\ell}$, $z_{i\ell} = \bar{z}_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar{w}_{i\ell}$.

Заметим, что $f_0 \in V^H_{\tilde{n}}$,

$$\tilde{n} := 2kd + r + \sum_{i=1}^{r} (m_i + q_i + \alpha_i + \beta_i + \theta_i) \leqslant n.$$

Если $n = \tilde{n}$, положим $f := f_0$. Предположим, что $n > \tilde{n}$. Выражение

$$\bigl(\tilde{h} \tilde{f}_1(\mathrm{ad}\, \bar{x}_1, \dots, \mathrm{ad}\, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1})\bigr)[\bar{w}_1, [\bar{w}_2, \dots, [\bar{w}_{\tilde{\theta}}, h'_1 \bar{t}_1] \dots]$$

является линейной комбинацией длинных коммутаторов, каждый из которых содержит как минимум $2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1 > n - \tilde{n} + 1$ элементов алгебры Ли L. Следовательно, f_0 не обращается в нуль при подстановке $t_1 = [\bar{v}_1, [\bar{v}_2, [\dots, [\bar{v}_q, h'_1 \bar{t}_1] \dots]$ для некоторых $q \geqslant n - \tilde{n}$, $\bar{v}_i \in L$; $t_i = \bar{t}_i$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = \bar{u}_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \psi^{-1}(\bar{x}_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar{y}_{i\ell}$, $z_{i\ell} = \bar{z}_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar{w}_{i\ell}$. Отсюда

$$\begin{aligned} f := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \dots \mathrm{Alt}_{2k} \Bigl[\Bigl[\Bigl[y_{11}, [y_{12}, \dots [y_{1\alpha_1}, \Bigl[z_{11}, [z_{12}, \dots, [z_{1\beta_1}, \\ \bigl(h_1 f_1(\mathrm{ad}\, x_{11}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{1,2kd_1+m_1})\bigr)[w_{11}, [w_{12}, \dots, [w_{1\theta_1}, \\ [v_1, [v_2, [\dots, [v_{n-\tilde{n}}, t_1] \dots] \dots \Bigr], u_{11}, \dots, u_{1q_1} \Bigr], \\ \Bigl[\Bigl[y_{21}, [y_{22}, \dots [y_{2\alpha_2}, \Bigl[z_{21}, [z_{22}, \dots, [z_{2\beta_2}, \\ \bigl(h_2 f_2(\mathrm{ad}\, x_{21}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{2,2kd_2+m_2})\bigr)[w_{21}, [w_{22}, \dots, [w_{2\theta_2}, t_2^{h'_2}] \dots \Bigr], u_{21}, \dots, u_{2q_2} \Bigr], \\ \dots, \Bigl[\Bigl[y_{r1}, [y_{r2}, \dots, [y_{r\alpha_r}, \Bigl[z_{r1}, [z_{r2}, \dots, [z_{r\beta_r}, \\ \bigl(h_r f_r(\mathrm{ad}\, x_{r1}, \dots, \mathrm{ad}\, x_{r,2kd_r+m_r})\bigr)[w_{r1}, [w_{r2}, \dots, [w_{r\theta_r}, t_r^{h'_r}] \dots \Bigr], u_{r1}, \dots, u_{rq_r} \Bigr] \Bigr] \end{aligned}$$

не обращается в нуль при подстановке $v_\ell = \bar v_\ell$ при $1 \leqslant \ell \leqslant n - \tilde n$,

$$t_1 = [\bar v_{n-\tilde n+1}, [\bar v_{n-\tilde n+2}, [\ldots, [\bar v_q, h'_1 \bar t_1] \ldots];$$

$t_i = \bar t_i$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = \bar u_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \psi^{-1}(\bar x_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar y_{i\ell}$, $z_{i\ell} = \bar z_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar w_{i\ell}$. Теперь осталось заметить, что H-многочлен f принадлежит пространству V_n^H и удовлетворяет всем условиям леммы. □

Лемма 8.37. *Пусть k, n_0 — числа из леммы 8.36. Тогда для всех $n \geqslant n_0$ существует такое разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$, что $m(L, H, \lambda) \neq 0$ и $\lambda_i > 2k - C$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d'$. Здесь $C := p((\dim L)p + 3)((\dim L) - d')$, где $p \in \mathbb{N}$ — такое число, что $N^p = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^H(L)$ для некоторой таблицы Юнга T_λ требуемой формы λ. Известно (см., например, теорему 3.2.7 из [3]), что

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda},$$

где суммирование ведётся по множеству стандартных таблиц Юнга T_λ всевозможных форм $\lambda \vdash n$. Отсюда $FS_n f = \sum_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda} f \nsubseteq \mathrm{Id}^H(L)$ и $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^H(L)$ для некоторого $\lambda \vdash n$. Докажем, что разбиение λ имеет требуемый вид. Достаточно доказать, что $\lambda_{d'} > 2k - C$, так как $\lambda_i \geqslant \lambda_{d'}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d'$. В любой строчке таблицы T_λ содержится не более одного номера переменной из одного и того же множества X_i, поскольку $e^*_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}$, а a_{T_λ} симметризует по переменным, отвечающим каждой строчке таблицы T_λ. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{d'-1} \lambda_i \leqslant 2k(d'-1) + (n - 2kd') = n - 2k.$$

Из леммы 8.27 и неравенства $d' \geqslant d$ следует, что

$$\lambda_{d'+1} \leqslant \lambda_{d+1} < p((\dim L)p + 3),$$

откуда $\sum_{i=1}^{d'} \lambda_i > n - C$. Следовательно, $\lambda_{d'} > 2k - C$. □

Доказательство теоремы 8.5. Диаграмма Юнга D_λ из леммы 8.37 содержит квадратную поддиаграмму D_μ, где $\mu = (\underbrace{2k - C, \ldots, 2k - C}_{d'})$. Из правила ветвления для группы S_n следует, что если рассмотреть сужение S_n-действия на $M(\lambda)$ до S_{n-1}-действия, то FS_n-модуль $M(\lambda)$ оказывается прямой суммой всех неизоморфных FS_{n-1}-модулей $M(\nu)$, где $\nu \vdash (n-1)$ и всякая таблица D_ν получена из D_λ удалением одной клетки. В частности, $\dim M(\nu) \leqslant \dim M(\lambda)$. Применяя правило ветвления $(n - d'(2k - C))$ раз, получаем, что $\dim M(\mu) \leqslant \dim M(\lambda)$. В силу формулы крюков

$$\dim M(\mu) = \frac{(d'(2k-C))!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

где h_{ij} — длина крюка с вершиной в (i, j). По формуле Стирлинга

$$c_n^H(L) \geqslant \dim M(\lambda) \geqslant \dim M(\mu) \geqslant \frac{(d'(2k-C))!}{((2k - C + d')!)^{d'}} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi d'(2k-C)} \left(\frac{d'(2k-C)}{e}\right)^{d'(2k-C)}}{\left(\sqrt{2\pi(2k-C+d')} \left(\frac{2k-C+d'}{e}\right)^{2k-C+d'}\right)^{d'}} \sim C_4 k^{r_4} (d')^{2kd'}$$

для некоторых констант $C_4 > 0$, $r_4 \in \mathbb{Q}$ при $k \to \infty$. Поскольку $k = \left[\frac{n-n_0}{2d'}\right]$, это доказывает оценку снизу. Оценка сверху была доказана в теоремы 8.28. Учитывая, что $d' \geqslant d$, получаем отсюда, что $d = d(L,H) = d' = d'(L,H)$. Теперь утверждение теоремы 8.5 следует из полученных оценок. $\square$

Доказательство теоремы 8.6. Пусть $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_q$, где L_i — H-хорошие идеалы. Во-первых, $c_n^H(L) \geqslant c_n^H(L_i)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant i \leqslant q$, поскольку L_i являются H-инвариантными подалгебрами алгебры Ли L. Отсюда

$$\max_{1\leqslant i\leqslant q} \operatorname{PIexp}^H(L_i) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(L)}.$$

Пусть $f_0 \in V_n^H$, где $n \in \mathbb{N}$. Для того, чтобы проверить, что $f_0 \in \operatorname{Id}^H(L)$, достаточно подставлять только элементы базиса. Выберем в L базис, который является объединением базисов идеалов L_i. Тогда если вместо переменных H-многочлена f_0 подставляются элементы из разных идеалов L_i, данный H-многочлен обращается в нуль. Отсюда для того, чтобы доказать, что $f_0 \in \operatorname{Id}^H(L)$, достаточно показать, что $f_0 \in \operatorname{Id}^H(L_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$. Пусть $d := \max_{1\leqslant i\leqslant q} d(L_i,H) = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \operatorname{PIexp}^H(L_i)$. Тогда из леммы 8.27 следует, что для всех $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s) \vdash n$, где $\lambda_{d+1} \geqslant p((\dim L)p+3)$ или $\lambda_{\dim L+1} > 0$, справедливо равенство $m(L,H,\lambda) = 0$. Повторяя рассуждения теоремы 8.28, применим теорему 6.27 и получим отсюда, что существуют такие $C_2 > 0$, $r_2 \in \mathbb{R}$, что $c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(L)} \leqslant d = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \operatorname{PIexp}^H(L_i).$$

Оценка снизу была получена выше. $\square$

8.7 Рост градуированных тождеств

Данный параграф посвящён доказательству теорем 8.9 и 8.10, сформулированных в §8.2.

В случае, когда градуирующая группа G конечна, достаточно рассмотреть действие конечномерной полупростой алгебры Хопфа $(FG)^*$, которое является двойственным к FG-кодействию, соответствующему G-градуировке. (См. §1.4.) В этом случае теоремы 8.9 и 8.10 получаются из теорем 8.7 и 8.8 при помощи предложения 6.15 с учётом изоморфизма $(FG)^* \cong F^G$. Этот переход позволяет использовать для градуированной PI-экспоненты в случае алгебраически замкнутого поля F формулу из §8.3.

В случае произвольной градуирующей группы используется тот же приём с использованием действия алгебры Хопфа $F\hat{G}$, где $\hat{G} := \operatorname{Hom}(G, F^\times)$,

$$\chi a = \chi(g)a \text{ для всех } \chi \in \hat{G},\ a \in L^{(g)} \text{ и } g \in G,$$

L — алгебра Ли, градуированная группой G.

Пример 8.38. Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, градуированная конечнопорождённой абелевой группы G. Тогда L — $F\hat{G}$-хорошая алгебра.

Доказательство. Сперва заметим, что разрешимый и нильпотентный радикалы инвариантны относительно всех автоморфизмов. Следовательно, они $\hat{G}$- и $F\hat{G}$-инвариантны.

В силу теоремы 3.27 существует G-градуированное, а значит и $F\hat{G}$-инвариантное разложение Леви.

Из леммы 6.17 следует, что $F\hat{G}$-подмодули любого G-градуированного подпространства являются градуированными подпространствами. Если $V = \bigoplus_{g\in G} V^{(g)}$ — G-градуированное пространство, то алгебра $\mathrm{End}_F(V)$ наделена следующе естественной градуировкой:

$$\mathrm{Hom}_F(V^{(g_1)}, V^{(g_2)}) \subseteq \mathrm{End}_F(V)^{(g_2 g_1^{-1})} \text{ для всех } g_1, g_2 \in G.$$

(Результат применения отображений из пространства $\mathrm{Hom}_F(V^{(g_1)}, V^{(g_2)})$ к элементам компонент $V^{(g)}$, где $g \neq g_1$, равен нулю.) Эта G-градуировка соответствует стандартному $F\hat{G}$-действию на $\mathrm{End}_F(V)$:

$$(h\psi)(v) = h_{(1)}\psi((Sh_{(2)})v) \text{ для всех } h \in F\hat{G},\ \psi \in \mathrm{End}_F(V),\ v \in V.$$

Отсюда из градуированной версии теоремы Веддербёрна — Мальцева (следствие 2.22) следует существование $F\hat{G}$-инвариантных разложений Веддербёрна — Мальцева, которые требуются в условии 3. Аналогично, условие 4 следует из теоремы 3.35. Отсюда алгебра Ли L действительно является $F\hat{G}$-хорошей. □

Докажем теперь следующий частный случай теоремы 8.9:

Теорема 8.39. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, градуированная конечнопорождённой абелевой группой G. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{G\text{-gr}}(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для градуированных тождеств справедлив аналог гипотезы Амицура.

Доказательство. Как и прочие виды коразмерностей, градуированные коразмерности не меняются при расширении основного поля. Доказательство этого факта для градуированных коразмерностей полностью аналогично доказательству для случая обычных коразмерностей (см., например, [66, теорема 4.1.9] или [10, §2]. Отсюда без ограничения общности можно считать основное поле F алгебраически замкнутым.

В примере 8.38 было показано, что алгебра Ли L является $F\hat{G}$-хорошей, в силу чего теорема 8.39 следует из теоремы 8.5 и предложения 6.19. □

Сведём теперь случай произвольной градуирующей группы G к случаю, когда G является конечнопорождённой абелевой группой.

Нам потребуется следующее утверждение (см., например, [90, лемма 2.1]):

Лемма 8.40. *Пусть L — алгебра Ли, градуированная некоторой группой G. Предположим, что $[L^{(g_1)}, \ldots, L^{(g_k)}] \neq 0$ для некоторых $g_1, \ldots, g_k \in G$. Тогда $g_i g_j = g_j g_i$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant k$.*

Пусть G_0 — подгруппа группы G. Введём обозначение $L_{G_0} := \bigoplus_{g \in G_0} L^{(g)}$. Тогда силу леммы 6.22 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_0}) = c_n^{G_0\text{-gr}}(L_{G_0})$.

Лемма 8.41. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, градуированная произвольной группой G. Тогда существуют такие конечнопорождённые абелевы подгруппы $G_1, \ldots, G_r \subseteq G$, что*

$$\begin{aligned} c_n^{G\text{-gr}}(L) = \sum_{i=1}^{r} c_n^{G_i\text{-gr}}(L_{G_i}) - \sum_{i,j=1}^{r} c_n^{G_i \cap G_j\text{-gr}}(L_{G_i \cap G_j}) + \\ + \sum_{i,j,k=1}^{r} c_n^{G_i \cap G_j \cap G_k\text{-gr}}(L_{G_i \cap G_j \cap G_k}) - \ldots + (-1)^{r-1} c_n^{G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_r\text{-gr}}(L_{G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_r}). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Доказательство. Сперва заметим, что $V_n^{G\text{-gr}} = \bigoplus_{g_1, \ldots, g_n \in G} V_{g_1, \ldots, g_n}$ где

$$V_{g_1, \ldots, g_n} := \left\langle \left[x_{\sigma(1)}^{(g_{\sigma(1)})}, x_{\sigma(2)}^{(g_{\sigma(2)})}, \ldots, x_{\sigma(n)}^{(g_{\sigma(n)})} \right] \;\middle|\; \sigma \in S_n \right\rangle_F.$$

Используя процесс линеаризациии (см., например, [3, теорема 4.2.3]), получаем, что

$$\frac{V_n^{G\text{-gr}}}{V_n^{G\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{G\text{-gr}}(L)} \cong \bigoplus_{g_1, \ldots, g_n \in G} \frac{V_{g_1, \ldots, g_n}}{V_{g_1, \ldots, g_n} \cap \mathrm{Id}^{G\text{-gr}}(L)}. \tag{8.9}$$

Пусть $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} := \{g \in G \mid L^{(g)} \neq 0\}$. Это множество конечно в силу конечномерности алгебры L. Введём обозначение $V_{n_1, \ldots, n_m} := V_{\bar{g}}$, где

$$\bar{g} := (\underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_1}_{n_1}, \underbrace{\gamma_2, \ldots, \gamma_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{\gamma_m, \ldots, \gamma_m}_{n_m}), \; n_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда из (8.9) следует, что

$$c_n^{G\text{-gr}}(L) = \sum_{n_1 + \ldots + n_m = n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_m} c_{n_1, \ldots, n_m}(L), \tag{8.10}$$

где $c_{n_1, \ldots, n_m}(L) := \dim \frac{V_{n_1, \ldots, n_m}}{V_{n_1, \ldots, n_m} \cap \mathrm{Id}^{G\text{-gr}}(L)}$.

Пусть G_0 — некоторая подгруппа группы G. Если $n_i = 0$ для всех $\gamma_i \notin G_0$, то $c_{n_1, \ldots, n_m}(L) = c_{n_1, \ldots, n_m}(L_{G_0})$. (В силу леммы 6.22 неважно, рассматриваем мы G_0- или G-градуировку на L_{G_0}.) Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $\Theta(G_0)$ всех таких наборов $(n_1, \ldots, n_m)$, что $n_i \geqslant 0$, $n_1 + \ldots + n_m = n$ и $n_i = 0$ для всех $\gamma_i \notin G_0$.

Введём теперь на множестве $\Theta(G)$ дискретную меру μ по формуле

$$\mu\big((n_1, \ldots, n_m)\big) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_m} c_{n_1, \ldots, n_m}(L).$$

Тогда из (8.10) следует, что $c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_0}) = \mu(\Theta(G_0))$. Согласно лемме 8.40 в случае, когда $n_i, n_j \neq 0$ для некоторых таких i, j, что $\gamma_i \gamma_j \neq \gamma_j \gamma_i$, справедливо равенство $c_{n_1, \ldots, n_m}(L) = 0$.

Обозначим множество всех таких наборов через Θ_0. Тогда $\mu(\Theta_0) = 0$. Следовательно, всякая ненулевая коразмерность $c_{n_1,\ldots,n_m}(L)$ равна $c_{n_1,\ldots,n_m}(L_{G_0})$ для некоторой конечнопорождённой абелевой подгруппы G_0 группы G. Предположим, что $G_1,\ldots,G_r$ — это все абелевы подгруппы группы G, порождённые подмножествами множества $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_m\}$. Тогда $\Theta(G) = \Theta_0 \cup \bigcup_{i=1}^r \Theta(G_i)$. Используя формулу включений-исключений, получаем, что

$$c_n^{G\text{-gr}}(L) = \mu(\Theta(G)) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^r \Theta(G_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^r \mu(\Theta(G_i)) - \sum_{i,j=1}^r \mu(\Theta(G_i)\cap\Theta(G_j)) + \ldots + (-1)^{r-1}\mu(\Theta(G_1)\cap\Theta(G_2)\cap\ldots\cap\Theta(G_r)) =$$
$$= \sum_{i=1}^r \mu(\Theta(G_i)) - \sum_{i,j=1}^r \mu(\Theta(G_i\cap G_j)) + \ldots + (-1)^{r-1}\mu(\Theta(G_1\cap G_2\cap\ldots\cap G_r)) =$$
$$= \sum_{i=1}^r c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_i}) - \sum_{i,j=1}^r c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_i\cap G_j}) + \ldots + (-1)^{r-1} c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_1\cap G_2\cap\ldots\cap G_r}).$$

□

Доказательство теоремы 8.9. В силу теоремы 8.39 всякое слагаемое в формуле (8.8) имеет требуемую асимптотику для некоторого d. Выберем среди всех таких d наибольшее. Тогда при $d>0$ существуют такие $C_2>0$ и $r_2\in\mathbb{R}$, что $c_n^{G\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, а при $d=0$ существует такое $n_0\in\mathbb{N}$, что $c_n^{G\text{-gr}}(L)=0$ для всех $n\geqslant n_0$.

В силу выбора числа d существует такая конечнопорождённая абелева подгруппа $G_0\subseteq G$, что $\mathrm{PIexp}^{G_0\text{-gr}}(L_{G_0}) = d$. Отсюда существуют такие $C_1>0$ и $r_1\in\mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G_0\text{-gr}}(L_{G_0}) = c_n^{G\text{-gr}}(L_{G_0}) \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(L) \text{ для всех } n\in\mathbb{N}.$$

□

Доказательство теоремы 8.10. Пусть

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_q,$$

где L_i — градуированные идеалы. Во-первых, $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) \geqslant \mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L_i)$ для всех $1\leqslant i\leqslant q$, поскольку L_i — градуированные подалгебры алгебры L. Во-вторых, в силу леммы 8.41 достаточно доказать, что

$$\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L_{G_0}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant q} \mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L_i)$$

для всех конечнопорождённых абелевых подгрупп $G_0\subseteq G$. Однако $L_{G_0} = (L_1)_{G_0}\oplus\ldots\oplus(L_q)_{G_0}$. Используя предложение 6.19, пример 8.38 и теорему 8.6, получаем, что

$$\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L_{G_0}) = \mathrm{PIexp}^{F\hat{G}_0}(L_{G_0}) = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \mathrm{PIexp}^{F\hat{G}_0}((L_i)_{G_0}) =$$
$$= \max_{1\leqslant i\leqslant q} \mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}((L_i)_{G_0}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant q} \mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L_i).$$

□

8.8 Рост дифференциальных тождеств

В данном параграфе доказывается теорема 8.16 об асимптотическом поведении коразмерностей дифференциальных тождеств в алгебрах Ли с действием конечномерных полупростых алгебр Ли дифференцированиями, которая будет получена как следствие следующего более общего результата:

Теорема 8.42. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Предположим, что некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ так действует на L дифференцированиями, что L является $U(\mathfrak{g})$-хорошей алгеброй Ли. Пусть $d := \mathrm{PIexp}(L)$ — PI-экспонента обычных тождеств алгебры Ли L. Тогда*

1. *при $d = 0$ существует такое n_0, что $c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *при $d > 0$ существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что*
$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, $\mathrm{PIexp}(L) = \mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L)$.

Замечание 8.43. Если связная редуктивная аффинная алгебраическая группа G действует на L автоморфизмами, то L является $U(\mathfrak{g})$-хорошей алгеброй (см. пример 8.3). Как было показано в примере 8.4, любая конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с действием некоторой конечномерной полупростой алгебры Ли дифференцированиями также является $U(\mathfrak{g})$-хорошей.

Доказательство теоремы 8.42. В силу теоремы 8.5 дифференциальные коразмерности удовлетворяют требуемым оценкам сверху и снизу для $d = \mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L) = d'(L, U(\mathfrak{g}))$, причём, кроме этого, ещё существует $\mathrm{PIexp}(L) = d'(L, F)$. Отсюда для доказательства теоремы достаточно показать, что $d'(L, U(\mathfrak{g})) = d'(L, F)$.

Рассмотрим дифференциальные и обычные лиевские многочлены как полилинейные функции на L и получим, что $c_n(L) \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(L)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\mathrm{PIexp}(L) \leqslant \mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L)$.

Предположим, что $\mathfrak{g}$-инвариантные идеалы $I_1, I_2, \ldots, I_r$ и $J_1, J_2, \ldots, J_r$ алгебры Ли L, где $r \in \mathbb{Z}_+$ и $J_k \subseteq I_k$, удовлетворяют условиям 1 и 2' при $H = U(\mathfrak{g})$. В силу условия 2' существуют такие $\mathfrak{g}$-инвариантные $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодули T_k, где $I_k = J_k \oplus T_k$, и числа $q_i \geqslant 0$, что
$$\bigl[[T_1, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [T_2, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [T_r, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]\bigr] \neq 0.$$
Из леммы 8.19 следует, что алгебра Ли L является вполне приводимым $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-модулем, откуда $T_k = T_{k1} \oplus T_{k2} \oplus \ldots \oplus T_{kn_k}$ для некоторых неприводимых $(\operatorname{ad} B) \oplus \tilde{A}_0$-подмодулей T_{kj}. Отсюда можно выбрать такие $1 \leqslant j_k \leqslant n_k$, что
$$\bigl[[T_{1j_1}, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}], [T_{2j_2}, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [T_{rj_r}, \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]\bigr] \neq 0.$$

Пусть $\tilde{I}_k = T_{kj_k} \oplus J_k$.

Докажем, что $\tilde{I}_k$ являются идеалами алгебры Ли L, причём $\mathrm{Ann}(\tilde{I}_k/J_k) = \mathrm{Ann}(I_k/J_k)$ для всех $1 \leqslant k \leqslant r$. Обозначим через L_0, B_0, R_0, $\mathfrak{g}_0$, соответственно, образы алгебр Ли L, B, R, $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(I_k/J_k)$. Заметим, что алгебра Ли B_0 полупроста, а алгебра Ли R_0 разрешима. Отсюда $L_0 = B_0 \oplus R_0$ (прямая сумма $\mathfrak{g}$-подмодулей), где $\mathfrak{g}$-действие на $\mathfrak{gl}(I_k/J_k)$ индуцировано $\mathfrak{g}$-действием на I_k/J_k и соответствует присоединённому представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{gl}(I_k/J_k)$. В частности, R_0 является разрешимым идеалом алгебры Ли $(L_0+\mathfrak{g}_0)$, а B_0 является идеалом алгебры Ли $(B_0+\mathfrak{g}_0)$. Из того, что I_k/J_k — неприводимый $(U(\mathfrak{g}), L)$-модуль, следует, что I_k/J_k — неприводимый $(L_0 + \mathfrak{g}_0)$-модуль. В силу теоремы Э. Картана (см., например, [7, предложение 1.4.11]), $L_0+\mathfrak{g}_0 = B_1 \oplus R_1$ (прямая сумма идеалов), где B_1 — полупростая алгебра Ли, а R_1 либо равно нулю, либо совпадает с центром $Z(\mathfrak{gl}(I_k/J_k))$, состоящим из скалярных операторов. Отсюда идеал $R_0 \subseteq R_1$ состоит из скалярных операторов, а B_0 является идеалом алгебры Ли $(L_0+\mathfrak{g}_0)$. Рассматривая сюръективный гомоморфизм $(L_0+\mathfrak{g}_0) \twoheadrightarrow R_1$ с ядром B_1, получаем, что $B_0 \subseteq B_1$.

Поскольку $\tilde{I}_k/J_k \cong T_{kj_k}$ является неприводимым $(\mathrm{ad}\, B)\oplus\tilde{A}_0$-модулем, алгебра Ли $\tilde{A}_0$ действует на $\tilde{I}_k/J_k$ скалярными операторами и $\tilde{I}_k/J_k$ является неприводимым B_0- и L-модулем. В частности, $\tilde{I}_k$ является идеалом.

Если $\mathrm{Ann}(\tilde{I}_k/J_k) \neq \mathrm{Ann}(I_k/J_k)$, то $a\tilde{I}_k/J_k = 0$ для некоторого $a \in L_0 \cong L/\mathrm{Ann}(I_k/J_k)$, $a \neq 0$. Пусть $\varphi\colon L_0 \to \mathfrak{gl}(\tilde{I}_k/J_k)$ — соответствующее представление, а $a = b + c$, где $b \in B_0$, $c \in R_0$. Тогда $\varphi(b) = -\varphi(c)$ является скалярным оператором на $\tilde{I}_k/J_k$. Следовательно, элемент $\varphi(b)$ принадлежит центру полупростой алгебры Ли $\varphi(B_0)$. Отсюда $\varphi(b) = \varphi(c) = 0$, $b \neq 0$. Напомним, что алгебра Ли B_1 полупроста. Следовательно, $B_1 = B_0 \oplus B_2$ (прямая сумма идеалов) для некоторой полупростой алгебры Ли B_2. Поскольку R_1 состоит из скалярных операторов, I_k/J_k является неприводимым B_1-модулем и

$$I_k/J_k = \sum_{\substack{a_i \in B_2,\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+}} a_1 \ldots a_\alpha\ \tilde{I}_k/J_k.$$

Теперь из $[b, B_2] = 0$ и $b\tilde{I}_k/J_k = 0$ следует, что $bI_k/J_k = 0$ и $b = 0$. Получаем противоречие, откуда $\mathrm{Ann}(\tilde{I}_k/J_k) = \mathrm{Ann}(I_k/J_k)$.

Теперь заметим, что $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots, \tilde{I}_r, J_1, J_2, \ldots, J_r$ удовлетворяют условиям 1 и 2' при $H = F$, т.е. для случая обычных полиномиальных тождеств. Более того,

$$\dim \frac{L}{\mathrm{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(I_r/J_r)} = \dim \frac{L}{\mathrm{Ann}(\tilde{I}_1/J_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(\tilde{I}_r/J_r)}.$$

Отсюда $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L) = \mathrm{PIexp}(L)$. □

Доказательство теоремы 8.16. Снова воспользуемся тем, что H-коразмерности не меняются при расширении основного поля. (Доказательство полностью повторяет соответствующее доказательство для коразмерностей обычных тождеств ассоциативных алгебр [66, теорема 4.1.9] и алгебр Ли [10, §2].) Отсюда без ограничения общности можно считать основное поле F алгебраически замкнутым. Теперь достаточно применить теорему 8.42 и замечание 8.43. □

Замечание 8.44. Из теоремы 8.16 следует, что обычные и дифференциальные коразмерности имеют схожее асимптотическое поведение. Однако сами коразмерности могут не совпадать. Рассмотрим присоединённое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(F)$ на себе самой. Тогда $c_1(\mathfrak{sl}_2(F)) = 1 < c_1^{U(\mathfrak{sl}_2(F))}(\mathfrak{sl}_2(F))$, поскольку $U(\mathfrak{sl}_2(F))$-многочлены $x_1^{e_{11}-e_{22}}$ и $x_1^{e_{12}}$ являются линейно независимыми по модулю $\mathrm{Id}^{U(\mathfrak{sl}_2(F))}(\mathfrak{sl}_2(F))$.

Теорема 8.45. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Предположим, что связная редуктивная аффинная алгебраическая группа G рационально действует на L автоморфизмами. Тогда $\mathrm{PIexp}^G(L) = \mathrm{PIexp}(L)$.*

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G в силу предложения 2.26 действует на L дифференцированиями. В силу теоремы 2.36 и леммы 6.21 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) = c_n^G(L)$. Теперь из теоремы 8.42 и замечания 8.43 следует, что $\mathrm{PIexp}^G(L) = \mathrm{PIexp}(L)$. □

8.9 Рост H-коразмерностей в алгебрах Ли, в которых нильпотентный и разрешимый радикалы совпадают

Оказывается, что в случае, когда разрешимый радикал H-модульной алгебры Ли L является нильпотентным H-инвариантным идеалом, для доказательства аналога гипотезы Амицура можно не требовать, чтобы для алгебры Ли выполнялись свойства 2–4 из определения H-хорошей алгебры Ли (см. §8.1). Более того, в этом случае формула для H-PI-экспоненты оказывается существенно проще, чем в общем случае (см. §8.3).

Теорема 8.46. *Пусть L — конечномерная H-модульная алгебра Ли над произвольным полем F характеристики 0, где H — некоторая алгебра Хопфа, причём разрешимый радикал алгебры Ли L совпадает с её нильпотентным радикалом N и является H-подмодулем. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^H(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^H(L) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для $c_n^H(L)$ справедлив аналог гипотезы Амицура.

В случае, когда поле F алгебраически замкнуто, константа d определяется следующим образом. Пусть

$$L/N = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q \text{ (прямая сумма } H\text{-инвариантных идеалов),}$$

где B_i — H-простые алгебры Ли, а $\varkappa\colon L/N \to L$ — произвольный такой (необязательно H-линейный) гомоморфизм алгебр Ли, что $\pi\varkappa = \mathrm{id}_{L/N}$, где $\pi\colon L \twoheadrightarrow L/N$ — естественный сюрьективный гомоморфизм. Тогда

$$d = \max\left(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \,\middle|\, r \geqslant 1,\ [[H\varkappa(B_{i_1}), \underbrace{L, \ldots, L}_{q_1}],\right.$$

$$\left.[H\varkappa(B_{i_2}), \underbrace{L, \ldots, L}_{q_2}], \ldots, [H\varkappa(B_{i_r}), \underbrace{L, \ldots, L}_{q_r}]] \neq 0 \text{ для некоторых } q_i \geqslant 0\right). \tag{8.11}$$

Теорема 8.46 будет доказана в конце данного параграфа.

Замечание 8.47. Существование разложения

$$L/N = B_1 \oplus \ldots \oplus B_q \text{ (прямая сумма } H\text{-инвариантных идеалов),}$$

где B_i — H-простые алгебры Ли, следует из теоремы 3.19. Существование отображения $\varkappa$ следует из обычной теоремы Леви.

Замечание 8.48. Заметим, что в силу теоремы 3.6 всякая дифференциально простая алгебра Ли проста. В силу теоремы 3.7 в случае, когда алгебра Ли L является G-простой по отношению к рациональному действию некоторой связной аффинной алгебраической группы G автоморфизмами, алгебра Ли L также является простой. Отсюда в случае, когда $R = N$, из теоремы 8.46 получается другое доказательство теорем 8.16 и 8.45. Действительно, из условий теорем 8.16 и 8.45 следует существование H-инвариантного разложения Леви, откуда можно выбрать отображение $\varkappa$, являющееся гомоморфизмом H-модулей.

Используя предложение 8.11, получаем такое следствие из теоремы 8.46:

Следствие 8.49. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над произвольным полем F характеристики 0, на которой действует автоморфизмами и антиавтоморфизмами некоторая группа G, причём разрешимый радикал алгебры Ли L совпадает с её нильпотентным радикалом N. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^G(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*
2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^G(L) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, для $c_n^G(L)$ справедлив аналог гипотезы Амицура.

Следствие 8.50. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над произвольным полем F характеристики 0, на которой действует дифференцированиями некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, причём разрешимый радикал алгебры Ли L совпадает с её нильпотентным радикалом N. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, существует $\mathrm{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L) \in \mathbb{Z}_+$ *и, таким образом, для* $c_n^{U(\mathfrak{g})}(L)$ *справедлив аналог гипотезы Амицура.*

Доказательство. В силу следствия 3.5 радикал инвариантен относительно всех дифференцирований. Теперь достаточно применить теорему 8.46. □

Фиксируем такое число $p \in \mathbb{N}$, что $N^p = 0$. Тогда дословно повторив рассуждения из леммы 7.24, получаем следующий результат:

Лемма 8.51. *Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причём $\sum_{k=d+1}^{s} \lambda_k \geqslant p$. Тогда $m(L, H, \lambda) = 0$.*

Дословно повторив рассуждения из теоремы 7.25, получаем оценку сверху:

Лемма 8.52. *Если $d > 0$, то существуют такие константы $C_2 > 0$, $r_2 \in \mathbb{R}$, что $c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В случае, когда $d = 0$, алгебра Ли L нильпотентна.*

Докажем теперь существование H-многочлена, кососимметричного по достаточному числу наборов переменных:

Лемма 8.53. *Предположим, что основное поле F алгебраически замкнуто, а L, N, $\varkappa$, B_i и d те же, что и в теореме 8.46. Тогда если $d > 0$, то существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют попарно непересекающиеся наборы переменных $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k := \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = d$, и H-многочлен $f \in V_n^H \backslash \mathrm{Id}^H(L)$, кососимметричный по переменным каждого множества X_j.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$d = \dim(B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_r),$$

где

$$[[H\varkappa(B_1), a_{11}, \ldots, a_{1q_1}], [H\varkappa(B_2), a_{21}, \ldots, a_{2q_2}], \ldots, [H\varkappa(B_r), a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}]] \neq 0$$

для некоторых $q_i \geqslant 0$ и $a_{kj} \in L$. Поскольку идеал N нильпотентен, мы можем увеличить числа q_i, добавляя ко множествам $\{a_{ij}\}$ необходимое количество элементов идеала N так, что для некоторых $q_i \geqslant 0$, $b_i \in B_i$, $\gamma_i \in H$ справедливо неравенство

$$[[\gamma_1\varkappa(b_1), a_{11}, \ldots, a_{1q_1}], [\gamma_2\varkappa(b_2), a_{21}, \ldots, a_{2q_2}], \ldots, [\gamma_r\varkappa(b_r), a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}]] \neq 0,$$

однако

$$[[\tilde{b}_1, a_{11}, \ldots, a_{1q_1}], [\tilde{b}_2, a_{21}, \ldots, a_{2q_2}], \ldots, [\tilde{b}_r, a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}]] = 0 \tag{8.12}$$

для всех таких $t_i \geqslant 0$, $\tilde{b}_i \in [H\varkappa(B_i), \underbrace{L, \ldots, L}_{t_i}]$, что $\tilde{b}_j \in [H\varkappa(B_j), L, \ldots, L, N, L, \ldots, L]$ хотя бы для одного j.

Напомним, что $\varkappa$ является гомоморфизмом алгебр Ли. Более того, из $\pi(h\varkappa(a) - \varkappa(ha)) = 0$ следует, что

$$h\varkappa(a) - \varkappa(ha) \in N \text{ для всех } a \in L \text{ и } h \in H.$$

В силу (8.12) получаем отсюда, что если в

$$\big[[\gamma_1\varkappa(b_1), a_{11}, \ldots, a_{1q_1}], [\gamma_2\varkappa(b_2), a_{21}, \ldots, a_{2q_2}], \ldots, [\gamma_r\varkappa(b_r), a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}]\big]$$

заменить $\varkappa(b_i)$ на коммутатор элемента $\varkappa(b_i)$ и некоторого выражения с участием $\varkappa$, то отображение $\varkappa$ будет вести себя как гомоморфизм H-модулей. Это свойство будет использовано ниже.

Поскольку B_i являются неприводимыми $(H, \operatorname{ad} B_i)$-модулями, в силу теоремы 8.23 существуют такие константы $m_i \in \mathbb{Z}_+$, что для любого k существуют полилинейные ассоциативные H-многочлены f_i степени $(2kd_i + m_i)$, где $d_i := \dim B_i$, кососимметричные по переменным из непересекающихся наборов $X_\ell^{(i)}$, где $1 \leqslant \ell \leqslant 2k$, $|X_\ell^{(i)}| = d_i$, причём для каждого i существуют такие элементы из $\operatorname{ad} B_i$, что f_i не обращается в нуль при подстановке этих элементов вместо своих переменных.

Используя тот факт, что B_i являются неприводимыми $(H, \operatorname{ad} B_i)$-модулями, ещё раз, получаем из теоремы плотности, что алгебры $\operatorname{End}_F(B_i)$ порождены операторами из алгебр H и $\operatorname{ad} B_i$. Произведём отождествление алгебр $\operatorname{End}_F(B_i)$ и $M_{d_i}(F)$ при помощи изоморфизма $\operatorname{End}_F(B_i) \cong M_{d_i}(F)$. Тогда любая матричная единица $e_{j\ell}^{(i)} \in M_{d_i}(F)$ может быть представлена в виде многочлена от операторов из алгебр H и $\operatorname{ad} B_i$. Выберем такие многочлены для всех i и всех матричных единиц. Обозначим через m_0 наибольшую среди степеней всех таких многочленов.

Пусть $n_0 := r(2m_0 + 1) + \sum_{i=1}^r (m_i + q_i)$. Выберем теперь H-многочлены f_i, о которых шла речь выше, для $k = \left[\frac{n-n_0}{2d}\right]$. Кроме того, снова пользуясь теоремой 8.23, выберем $\tilde{f}_1$ для $\tilde{k} = \left[\frac{n-2kd-m_1}{2d_1}\right] + 1$ и алгебры Ли B_{i_1}. Тогда H-многочлены f_i дадут необходимое число наборов переменных, по которым результирующий многочлен будет кососимметричен, однако общая степень произведения таких H-многочленов может оказаться меньше n. Для того чтобы увеличить число переменных и получить H-многочлен степени n, мы воспользуемся H-многочленом $\tilde{f}_1$.

В силу теоремы 8.23 существуют такие элементы $\bar{x}_{i1}, \ldots, \bar{x}_{i,2kd_i+m_i} \in B_i$, что

$$f_i(\operatorname{ad} \bar{x}_{i1}, \ldots, \operatorname{ad} \bar{x}_{i,2kd_i+m_i}) \neq 0,$$

и такие элементы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1} \in B_1$, что $\tilde{f}_1(\operatorname{ad} \bar{x}_1, \ldots, \operatorname{ad} \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}) \neq 0$. В частности,

$$e_{\ell_i\ell_i}^{(i)} f_i(\operatorname{ad} \bar{x}_{i1}, \ldots, \operatorname{ad} \bar{x}_{i,2kd_i+m_i}) e_{s_is_i}^{(i)} \neq 0$$

и

$$e_{\tilde{\ell}\tilde{\ell}}^{(1)} \tilde{f}_1(\operatorname{ad} \bar{x}_1, \ldots, \operatorname{ad} \bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}) e_{\tilde{s}\tilde{s}}^{(1)} \neq 0$$

для некоторых $e^{(i)}_{\ell_i\ell_i}, e^{(i)}_{s_is_i} \in \mathrm{End}_F(B_i)$, $1 \leqslant \ell_i, s_i \leqslant d_i$, $e^{(1)}_{\tilde\ell\tilde\ell}, e^{(1)}_{\tilde s\tilde s} \in \mathrm{End}_F(B_1)$, $1 \leqslant \tilde\ell, \tilde s \leqslant d_1$. Отсюда

$$\sum_{\ell=1}^{d_i} e^{(i)}_{\ell\ell_i} f_i(\bar x_{i1}, \ldots, \bar x_{i,2kd_i+m_i}) e^{(i)}_{s_i\ell}$$

является ненулевым скалярным оператором, принадлежащим алгебре $\mathrm{End}_F(B_i)$.

Следовательно,

$$[[\gamma_1 \varkappa \left(\sum_{\ell=1}^{d_1} e^{(1)}_{\ell\ell_1} f_1(\mathrm{ad}\,\bar x_{11}, \ldots, \mathrm{ad}\,\bar x_{1,2kd_1+m_1}) e^{(1)}_{s_1\tilde\ell} \tilde f_1(\mathrm{ad}\,\bar x_1, \ldots, \mathrm{ad}\,\bar x_{2\tilde k d_1+m_1}) e^{(1)}_{\tilde s\ell} b_1\right), a_{11}, \ldots, a_{1q_1}],$$
$$[\gamma_2 \varkappa \left(\sum_{\ell=1}^{d_2} e^{(2)}_{\ell\ell_2} f_2(\mathrm{ad}\,\bar x_{21}, \ldots, \mathrm{ad}\,\bar x_{2,2kd_2+m_2}) e^{(2)}_{s_2\ell} b_2\right), a_{21}, \ldots, a_{2q_2}], \ldots,$$
$$[\gamma_r \varkappa \left(\sum_{\ell=1}^{d_r} e^{(r)}_{\ell\ell_r} f_r(\mathrm{ad}\,\bar x_{r1}, \ldots, \mathrm{ad}\,\bar x_{r,2kd_r+m_r}) e^{(r)}_{s_r\ell} b_r\right), a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}]] \neq 0.$$

Представим теперь матричные единицы $e^{(i)}_{\ell j}$ в виде многочленов от элементов $\mathrm{ad}\,B_i$ и H. Используя линейность выражений по $e^{(i)}_{\ell j}$, можно заменить $e^{(i)}_{\ell j}$ такими произведениями элементов алгебр $\mathrm{ad}\,B_i$ и H, что выражение не обратится в нуль. По определению H-модульной алгебры для всех $h \in H$ и $a, b \in L$ справедливо равенство $h(\mathrm{ad}\,a)b = \mathrm{ad}(h_{(1)}a)(h_{(2)}b)$. Пользуясь этим равенством, переместим все элементы из H вправо. Как было отмечено выше, отображение $\varkappa$ является гомоморфизмом алгебр Ли и в силу (8.12) ведёт себя как гомоморфизм H-модулей. Отсюда получаем, что

$$a_0 := \Bigl[\Bigl[\gamma_1 \Bigl[\bar y_{11}, [\bar y_{12}, \ldots [\bar y_{1\alpha_1},$$
$$\bigl(h_1 f_1(\mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{11}), \ldots, \mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{1,2kd_1+m_1}))\bigr)[\bar w_{11}, [\bar w_{12}, \ldots, [\bar w_{1\theta_1},$$
$$\bigl(\tilde h \tilde f_1(\mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_1), \ldots, \mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{2\tilde k d_1+m_1}))\bigr)[\bar w_1, [\bar w_2, \ldots, [\bar w_{\tilde\theta}, \varkappa(h'_1 b_1)] \ldots \Bigr], a_{11}, \ldots, a_{1q_1}\Bigr],$$
$$\Bigl[\gamma_2 \Bigl[\bar y_{21}, [\bar y_{22}, \ldots [\bar y_{2\alpha_2},$$
$$\bigl(h_2 f_2(\mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{21}), \ldots, \mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{2,2kd_2+m_2}))\bigr)[\bar w_{21}, [\bar w_{22}, \ldots, [\bar w_{2\theta_2}, \varkappa(h'_2 b_2)] \ldots \Bigr], a_{21}, \ldots, a_{2q_2}\Bigr], \ldots,$$
$$\Bigl[\gamma_r \Bigl[\bar y_{r1}, [\bar y_{r2}, \ldots, [\bar y_{r\alpha_r},$$
$$\bigl(h_r f_r(\mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{r1}), \ldots, \mathrm{ad}\,\varkappa(\bar x_{r,2kd_r+m_r}))\bigr)[\bar w_{r1}, [\bar w_{r2}, \ldots, [\bar w_{r\theta_r}, \varkappa(h'_r b_r)] \ldots \Bigr], a_{r1}, \ldots, a_{rq_r}\Bigr]\Bigr] \neq 0$$

для некоторых $0 \leqslant \alpha_i, \theta_i, \tilde\theta \leqslant m_0$, $\quad h_i, h'_i, \tilde h \in H$, $\quad \bar y_{ij}, \bar w_{ij} \in \varkappa(B_i)$, $\quad \bar w_j \in \varkappa(B_1)$. Здесь мы считаем, что каждый H-многочлен f_i зависит от переменных $x_{i1}, \ldots, x_{i,2kd_i+m_i}$, а H-многочлен $\tilde f_1$ зависит от переменных $x_1, \ldots, x_{2\tilde k d_1+m_1}$.

Введём обозначение $X_\ell := \bigcup_{i=1}^r X^{(i)}_\ell$, где $X^{(i)}_\ell$ — множества, по переменным которых кососимметричны H-многочлены f_i. Обозначим через Alt_ℓ операторы альтернирования по переменным из множества X_ℓ.

Рассмотрим выражение

$$\hat{f} := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \ldots \mathrm{Alt}_{2k} \Bigg[\Big[\gamma_1 \Big[y_{11}, [y_{12}, \ldots [y_{1\alpha_1},$$

$$\big(h_1 f_1(\mathrm{ad}\, x_{11}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{1,2kd_1+m_1})\big)[w_{11}, [w_{12}, \ldots, [w_{1\theta_1},$$

$$\big(\tilde{h}\tilde{f}_1(\mathrm{ad}\, x_1, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{2\tilde{k}d_1+m_1})\big)[w_1, [w_2, \ldots, [w_{\tilde{\theta}}, z_1] \ldots \Big], u_{11}, \ldots, u_{1q_1} \Big],$$

$$\Big[\gamma_2 \Big[y_{21}, [y_{22}, \ldots [y_{2\alpha_2},$$

$$\big(h_2 f_2(\mathrm{ad}\, x_{21}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{2,2kd_2+m_2})\big)[w_{21}, [w_{22}, \ldots, [w_{2\theta_2}, z_2] \ldots \Big], u_{21}, \ldots, u_{2q_2} \Big], \ldots,$$

$$\Big[\gamma_r \Big[y_{r1}, [y_{r2}, \ldots, [y_{r\alpha_r},$$

$$\big(h_r f_r(\mathrm{ad}\, x_{r1}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{r,2kd_r+m_r})\big)[w_{r1}, [w_{r2}, \ldots, [w_{r\theta_r}, z_r] \ldots \Big], u_{r1}, \ldots, u_{rq_r} \Big] \Bigg].$$

Тогда значение выражения $\hat{f}$ при подстановке $z_i = \varkappa(h_i' b_i)$, $u_{i\ell} = a_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \varkappa(\bar{x}_{i\ell})$, $x_i = \varkappa(\bar{x}_i)$, $y_{i\ell} = \bar{y}_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar{w}_{i\ell}$, $w_i = \bar{w}_i$ равно $(d_1!)^{2k} \ldots (d_r!)^{2k} a_0 \neq 0$, так как f_i кососимметричны по переменным каждого из множеств $X_\ell^{(i)}$, $[B_i, B_\ell] = 0$ при $i \neq \ell$, а $\varkappa$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Следовательно,

$$f_0 := \mathrm{Alt}_1 \mathrm{Alt}_2 \ldots \mathrm{Alt}_{2k} \Bigg[\Big[\gamma_1 \Big[y_{11}, [y_{12}, \ldots [y_{1\alpha_1},$$

$$\big(h_1 f_1(\mathrm{ad}\, x_{11}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{1,2kd_1+m_1})\big)[w_{11}, [w_{12}, \ldots, [w_{1\theta_1}, z_1] \ldots \Big], u_{11}, \ldots, u_{1q_1} \Big],$$

$$\Big[\gamma_2 \Big[y_{21}, [y_{22}, \ldots [y_{2\alpha_2},$$

$$\big(h_2 f_2(\mathrm{ad}\, x_{21}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{2,2kd_2+m_2})\big)[w_{21}, [w_{22}, \ldots, [w_{2\theta_2}, z_2] \ldots \Big], u_{21}, \ldots, u_{2q_2} \Big], \ldots,$$

$$\Big[\gamma_r \Big[y_{r1}, [y_{r2}, \ldots, [y_{r\alpha_r},$$

$$\big(h_r f_r(\mathrm{ad}\, x_{r1}, \ldots, \mathrm{ad}\, x_{r,2kd_r+m_r})\big)[w_{r1}, [w_{r2}, \ldots, [w_{r\theta_r}, z_r] \ldots \Big], u_{r1}, \ldots, u_{rq_r} \Big] \Bigg]$$

не обращается в нуль при подстановке

$$z_1 = \big(\tilde{h}\tilde{f}_1(\mathrm{ad}\, \varkappa(\bar{x}_1), \ldots, \mathrm{ad}\, \varkappa(\bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}))\big)[\bar{w}_1, [\bar{w}_2, \ldots, [\bar{w}_{\tilde{\theta}}, \varkappa(h_1' b_1)] \ldots],$$

$z_i = \varkappa(h_i' b_i)$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = a_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \varkappa(\bar{x}_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar{y}_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar{w}_{i\ell}$.

Заметим, что $f_0 \in V_{\tilde{n}}^H$, где

$$\tilde{n} := 2kd + r + \sum_{i=1}^{r} (m_i + q_i + \alpha_i + \theta_i) \leqslant n.$$

Если $n = \tilde{n}$, положим $f := f_0$. Предположим, что $n > \tilde{n}$. Учитывая, что

$$\big(\tilde{h}\tilde{f}_1(\mathrm{ad}\, \varkappa(\bar{x}_1), \ldots, \mathrm{ad}\, \varkappa(\bar{x}_{2\tilde{k}d_1+m_1}))\big)[\bar{w}_1, [\bar{w}_2, \ldots, [\bar{w}_{\tilde{\theta}}, \varkappa(h_1' b_1)] \ldots]$$

является линейной комбинацией длинных коммутаторов, каждый из которых содержит по крайней мере $2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1 > n - \tilde{n} + 1$ элементов алгебры Ли L, получаем, что H-многочлен

f_0 не обращается в нуль при подстановке $z_1 = [\bar v_1, [\bar v_2, [\ldots, [\bar v_\theta, \varkappa(h'_1 b_1)] \ldots]$ для некоторых $\theta \geqslant n - \tilde n$, $\bar v_i \in L$; $z_i = \varkappa(h'_i b_i)$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = a_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \varkappa(\bar x_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar y_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar w_{i\ell}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f := \operatorname{Alt}_1 \operatorname{Alt}_2 \ldots \operatorname{Alt}_{2k} \Bigl[\Bigl[\gamma_1 \Bigl[y_{11}, [y_{12}, \ldots [y_{1\alpha_1}, \\ \bigl(h_1 f_1(\operatorname{ad} x_{11}, \ldots, \operatorname{ad} x_{1,2kd_1+m_1})\bigr) [w_{11}, [w_{12}, \ldots, [w_{1\theta_1}, \\ \bigl[v_1, [v_2, [\ldots, [v_{n-\tilde n}, z_1] \ldots] \ldots \bigr], u_{11}, \ldots, u_{1q_1} \Bigr], \\ \Bigl[\gamma_2 \Bigl[y_{21}, [y_{22}, \ldots [y_{2\alpha_2}, \\ \bigl(h_2 f_2(\operatorname{ad} x_{21}, \ldots, \operatorname{ad} x_{2,2kd_2+m_2})\bigr) [w_{21}, [w_{22}, \ldots, [w_{2\theta_2}, z_2] \ldots \Bigr], u_{21}, \ldots, u_{2q_2} \Bigr], \ldots, \\ \Bigl[\gamma_r \Bigl[y_{r1}, [y_{r2}, \ldots, [y_{r\alpha_r}, \\ \bigl(h_r f_r(\operatorname{ad} x_{r1}, \ldots, \operatorname{ad} x_{r,2kd_r+m_r})\bigr) [w_{r1}, [w_{r2}, \ldots, [w_{r\theta_r}, z_r] \ldots \Bigr], u_{r1}, \ldots, u_{rq_r} \Bigr] \Bigr] \end{aligned}$$

не обращается в нуль при подстановке $v_\ell = \bar v_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant n - \tilde n$,

$$z_1 = [\bar v_{n-\tilde n+1}, [\bar v_{n-\tilde n+2}, [\ldots, [\bar v_\theta, \varkappa(h'_1 b_1)] \ldots];$$

$z_i = \varkappa(h'_i b_i)$ при $2 \leqslant i \leqslant r$; $u_{i\ell} = a_{i\ell}$, $x_{i\ell} = \varkappa(\bar x_{i\ell})$, $y_{i\ell} = \bar y_{i\ell}$, $w_{i\ell} = \bar w_{i\ell}$. Теперь осталось заметить, что H-многочлен f принадлежит множеству V_n^H и удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Повторяя рассуждения леммы 7.26, получаем из леммы 8.53 следующее утверждение:

Лемма 8.54. *Пусть k, n_0 — числа из леммы 8.53. Тогда для любого $n \geqslant n_0$ существует такое разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash n$, где $\lambda_i > 2k - p$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d$, что $m(L, H, \lambda) \neq 0$. Здесь $p \in \mathbb{N}$ — такое число, что $N^p = 0$.*

Теперь мы можем доказать основной результат параграфа:

Доказательство теоремы 8.46. Пусть $K \supset F$ — некоторое расширение поля F. Тогда

$$(L \otimes_F K)/(N \otimes_F K) \cong (L/N) \otimes_F K$$

снова является полупростой алгеброй Ли, а идеал $N \otimes_F K$ по-прежнему нильпотентен. Как уже было неоднократно отмечено, H-коразмерности не меняются при расширении основного поля F. Отсюда без ограничения общности можно считать, что поле F алгебраически замкнуто. Теперь достаточно, использовав леммы 8.52 и 8.54, повторить рассуждения теоремы 7.27. $\square$

8.10 Примеры и критерии простоты

Пример 8.55. Пусть L — полупростая в обычном смысле H-модульная алгебра Ли над полем F характеристики 0 для некоторой алгебры Хопфа H. Тогда существуют такие $d \in \mathbb{Z}_+$, $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^H(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

причём если поле F алгебраически замкнуто, то $d = \max_{1\leqslant k\leqslant q} \dim B_k$, где B_i — конечномерные H-простые алгебры Ли из разложения $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма H-инвариантных идеалов), см. теорему 3.19.

Доказательство. Как и прежде, коразмерности не меняются при расширении основного поля F, откуда можно считать, что поле F алгебраически замкнуто. Теперь достаточно применить теорему 8.46. □

Отсюда получаем следующий критерий H-простоты:

Теорема 8.56. *Пусть L — полупростая или H-хорошая алгебра Ли для некоторой алгебры Хопфа H над алгебраически замкнутым полем F характеристики* 0. *Тогда* $\mathrm{PIexp}^H(L) = \dim L$, *если и только если алгебра Ли L полупроста и H-проста.*

Доказательство. В случае, когда L — H-простая полупростая алгебра Ли, равенство $\mathrm{PIexp}^H(L) = \dim L$ следует из примера 8.55.

Если L — полупростая алгебра Ли, не являющаяся H-простой, то в силу примера 8.55 справедливо неравенство $\mathrm{PIexp}^H(L) < \dim L$. Поэтому можно считать, что алгебра Ли L является H-хорошей. Пусть $\mathrm{PIexp}^H(L) = \dim L$. Обозначим через N нильпотентный радикал алгебры Ли L. Пусть $I_1, \ldots, I_r$, $J_1, \ldots, J_r$ — H-инвариантные идеалы алгебры Ли L, удовлетворяющие условиям 1–2 из §8.3. В силу леммы 8.24 справедливо включение $N \subseteq \mathrm{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(I_r/J_r)$, откуда $\mathrm{PIexp}^H(L) \leqslant (\dim L) - (\dim N)$. Следовательно, $N = 0$ и в силу предложения 2.1.7 из [7] выполняется условие $[L, R] \subseteq N = 0$, где R — разрешимый радикал алгебры Ли L. Отсюда $R = Z(L) \subseteq N = 0$ и алгебра Ли L полупроста. Этот случай был уже разобран выше. □

Обратимся теперь к случаю градуированных алгебр:

Пример 8.57. Пусть $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма G-градуированных идеалов), где B_i — конечномерные G-градуированно простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем F для некоторой группы G. Введём обозначение $d := \max_{1\leqslant k\leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $B_i^{(g)} \neq 0$ для некоторого $g \in G$ и $1 \leqslant k \leqslant q$. Тогда в силу своей градуированной простоты всякая алгебра Ли B_i представляется в виде суммы всевозможных ненулевых коммутаторов $[B_i^{(g)}, B_i^{(g_1)}, \ldots, B_i^{(g_t)}]$, где $t \in \mathbb{Z}_+$, а $g_i \in G$. В силу леммы 8.40 все такие элементы $g, g_1, \ldots, g_t$ коммутируют между собой, откуда g коммутирует со всеми элементами носителя градировки на B_i. В силу произвольности элемента g все элементы носителя градировки также коммутируют между собой. Следовательно, на любой из градуированно простых алгебр Ли B_i можно заменить градуирующую группу G на некоторую конечнопорождённую абелеву группу G_i, причём в силу леммы 6.22 градуированные коразмерности алгебры Ли B_i при этом не меняются. Из леммы 6.17 следует, что алгебры Ли B_i являются $F\hat{G}_i$-простыми. Отсюда из предложения 6.19 и примера 8.55 получаем, что

$$\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(B_i) = \mathrm{PIexp}^{G_i\text{-gr}}(B_i) = \mathrm{PIexp}^{F\hat{G}_i}(B_i) = \dim B_i.$$

Теперь достаточно применить теорему 8.10. □

Отсюда получаем следующий критерий градуированной простоты в терминах градуированных PI-экспонент:

Теорема 8.58. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, градуированная некоторой группой G. Тогда $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) = \dim L$, если и только если алгебра Ли L градуированно проста.*

Доказательство. Сперва предположим, что нильпотентный радикал N алгебры Ли L не равен 0, а градуирующая группа конечнопорождённая абелева. Пусть $I_1, \ldots, I_r$, $J_1, \ldots, J_r$ — $F\hat{G}$-инвариантные идеалы алгебры Ли L, удовлетворяющие условиям 1–2 из §8.3. В силу леммы 8.24

$$N \subseteq \mathrm{Ann}(I_1/J_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(I_r/J_r),$$

откуда в силу предложения 6.19 справедливо неравенство $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) \leqslant (\dim L) - (\dim N)$. В силу леммы 8.41 это неравенство справедливо и в случае произвольной градуирующей группы. Следовательно, в случае, когда $\mathrm{PIexp}^{G\text{-gr}}(L) = \dim L$, справедливо нильпотентный радикал N равен нулю и в силу предложения 2.1.7 из [7] выполняется условие $[L, R] \subseteq N = 0$, где R — разрешимый радикал алгебры Ли L. Отсюда $R = Z(L) \subseteq N = 0$ и алгебра Ли L полупроста. Теперь достаточно применить теорему 3.20 и воспользоваться примером 8.57. □

Обратимся теперь к алгебрам с G-действиями:

Пример 8.59. Пусть $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма G-инвариантных идеалов), где B_i — конечномерные G-простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем F с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В силу предложения 8.11 можно считать, что группа G действует только автоморфизмами. Теперь достаточно заметить, что радикалы инвариантны относительно всех автоморфизмов, и применить теорему 8.46. □

Отсюда получаем следующий критерий G-простоты:

Теорема 8.60. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с действием некоторой группы G автоморфизмами и антиавтоморфизмами. Тогда $\mathrm{PIexp}^G(L) = \dim L$, если и только если алгебра Ли L является G-простой.*

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 7.24 и теоремы 7.25, получаем, что если некоторая конечномерная (необязательно ассоциативная) алгебра A с обобщённым H-действием обладает H-инвариантным нильпотентным идеалом J, то $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \leqslant (\dim A) - (\dim J)$. Учитывая, что нильпотентный радикал N алгебры Ли L инвариантен относительно автоморфизмов и антиавтоморфизмов, получаем, что в случае $\mathrm{PIexp}^G(L) = \dim L$ справедливо равенство $N = 0$ и в силу предложения 2.1.7 из [7] выполняется условие $[L, R] \subseteq N = 0$, где R — разрешимый радикал алгебры Ли L. Отсюда $R = Z(L) \subseteq N = 0$ и алгебра Ли L полупроста. Теперь достаточно применить теорему 3.19 и воспользоваться примером 8.59. $\square$

Обратимся теперь к случаю действий алгебр Ли дифференцированиями:

Пример 8.61. Пусть $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_q$ (прямая сумма $\mathfrak{g}$-инвариантных идеалов), где B_i — конечномерные простые алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем F с действием некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями. Введём обозначение $d := \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \dim B_k$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{U(\mathfrak{g})}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Достаточно применить следствие 3.5 и теорему 8.46. $\square$

Выведем отсюда критерий простоты в терминах градуированных коразмерностей. (Напомним, что в силу теоремы 3.6 понятия простоты и дифференциальной простоты совпадают.)

Теорема 8.62. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 с действием некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями. Тогда $\operatorname{PIexp}^{U(\mathfrak{g})}(L) = \dim L$, если и только если алгебра Ли L является простой.*

Доказательство. В силу следствия 3.5 нильпотентный и разрешимы радикалы являются $\mathfrak{g}$-подмодулями. Теперь достаточно повторить доказательство теоремы 8.60, использовав вместо примера 8.59 пример 8.61. $\square$

Сформулируем теперь достаточные условие разрешимости алгебр Ли в терминах их PI-экспонент:

Теорема 8.63. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0 с обобщённым H-действием некоторой ассоциативной алгебры H с единицей, причём $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(L)} < 3$. Тогда алгебра Ли L разрешима.*

Доказательство. Если алгебра Ли L неразрешима, то она останется таковой и при расширении основного поля, откуда можно предполагать основное поле F алгебраически замкнутым. Рассмотрим обычное разложение Леви алгебры Ли L и предположим, что алгебра Ли L неразрешима. Тогда L содержит некоторую простую подалгебру B_0, причём $\dim B_0 \geqslant 3$. В силу примера 8.59 для $G = \langle 1 \rangle$ и предложения 6.10 существуют такие $C_1 > 0$ и $r_1 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} 3^n \leqslant C_1 n^{r_1} (\dim B_0)^n \leqslant c_n(B_0) \leqslant c_n(L) \leqslant c_n^H(L),$$

откуда неравенство $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^H(L)} < 3$ никак не может быть выполнено. $\square$

Теорема 8.64. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, градуированная произвольным множеством T, причём $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(L)} < 3$. Тогда алгебра Ли L разрешима.*

Доказательство. Достаточно повторить доказательство теоремы 8.63, использовав вместо предложения 6.10 предложение 6.14. $\square$

Приведём теперь пример неполупростой алгебры Ли, градуированной неабелевой группой:

Пример 8.65. Пусть F — поле характеристики 0, $G = S_3$, а $L = \mathfrak{gl}_2(F) \oplus \mathfrak{gl}_2(F)$. Рассмотрим на L следующую G-градуировку:

$$L^{(e)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right\},$$

$$L^{\left((12)\right)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus 0, \qquad L^{\left((23)\right)} = 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

остальные компоненты равны 0. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} 3^n \leqslant c_n^{G\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} 3^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как обычно, воспользуемся тем фактом, что коразмерности не меняются при расширении основного поля. При этом отметим, что при расширении поля алгебра Ли L остаётся алгеброй того же типа. Отсюда можно без ограничения общности считать основное поле F алгебраически замкнутым.

Воспользуемся разложением

$$L = \mathfrak{sl}_2(F) \oplus \mathfrak{sl}_2(F) \oplus Z(L),$$

где центр $Z(L)$ состоит из скалярных матриц из обеих копий алгебры Ли $\mathfrak{gl}_2(F)$. Отсюда

$$V_n^{G\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{G\text{-gr}}(L) = V_n^{G\text{-gr}} \cap \mathrm{Id}^{G\text{-gr}}\big(\mathfrak{sl}_2(F) \oplus \mathfrak{sl}_2(F)\big) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теперь достаточно заметить, что обе копии простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(F)$ являются градуированными идеалами алгебры Ли L, и воспользоваться примером 8.57. $\square$

Приведём теперь два примера с метабелевыми алгебрами Ли:

Пример 8.66. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $G \subseteq S_m$ — некоторая подгруппа, а O_i — орбиты G-действия на множестве

$$\{1, 2, \ldots, m\} = \coprod_{i=1}^{s} O_i.$$

Введём обозначение

$$d := \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |O_i|.$$

Обозначим через L алгебру Ли над произвольным полем F характеристики 0 с базисом $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$, где $\dim L = 2m$, и коммутатором, заданным формулами $[a_i, a_j] = [b_i, b_j] = 0$ и

$$[a_i, b_j] = \begin{cases} b_j & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Предположим, что группа G действует на L следующим образом: $\sigma a_i := a_{\sigma(i)}$ и $\sigma b_j := b_{\sigma(j)}$ для всех $\sigma \in G$. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, если

$$G = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}),$$

где $\tau = (1\,2\,3\,\ldots\,m)$ (цикл длины m), то

$$C_1 n^{r_1} m^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} m^n.$$

В то же время $c_n(L) = n - 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если $K \supseteq F$ — расширение основного поля, то алгебра Ли $K \otimes_F L$ задаётся теми же формулами, что и алгебра Ли L. Поскольку при расширении основного поля коразмерности не меняются, можно без ограничения общности считать основное поле F алгебраически замкнутым.

Пусть $B_i := \langle b_j \mid j \in O_i \rangle_F$, где $1 \leqslant i \leqslant s$. Предположим, что I — некоторый G-инвариантный идеал алгебры Ли L. Если $b_i \in I$, то $b_{\sigma(i)} = \sigma b_i \in I$ для всех $\sigma \in G$. Отсюда если $i \in O_j$, то $b_k \in I$ для всех $k \in O_j$. Пусть $c := \sum\limits_{i=1}^{m} (\alpha_i a_i + \beta_i b_i) \in I$ для некоторых $\alpha_i, \beta_i \in F$. Тогда $\beta_i b_i = [a_i, c] \in I$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно, $I = A_0 \oplus B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_k}$ для некоторых $1 \leqslant i_j \leqslant s$ и $A_0 \subseteq \langle a_1, \ldots, a_m \rangle_F$.

Если $I, J \subseteq L$ — G-инвариантные идеалы, то $J \subseteq J + [L, L] \cap I \subseteq I$ также является G-инвариантным идеалом. Предположим, что I/J — неприводимый (G, L)-модуль. Тогда либо $[L, L] \cap I \subseteq J$ и $\operatorname{Ann}(I/J) = L$, либо $I \subseteq J + [L, L]$, где $[L, L] = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle_F$. Следовательно, в случае $\operatorname{Ann}(I/J) \neq L$ получаем, что $J = A_0 \oplus B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_k}$ и $I = B_\ell \oplus J$ для некоторого $1 \leqslant \ell \leqslant s$. В этом случае

$$\dim(L/\operatorname{Ann}(I/J)) = \dim\bigl(\langle a_j \mid j \in O_\ell \rangle_F\bigr) = |O_\ell|.$$

Заметим, что если $I_1 = B_{i_1} \oplus J_1$, а $I_2 = B_{i_2} \oplus J_2$, то

$$[[B_{i_1}, L, \ldots, L], [B_{i_2}, L, \ldots, L]] = 0.$$

Следовательно, G-инвариантные идеалы $I_1, \ldots, I_r$, $J_1, \ldots, J_r$ могут удовлетворять условиям 1–2 из §8.3 только при $r = 1$. Отсюда

$$d(L, FG) = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} |O_\ell|$$

и требуемые оценки следуют из теоремы 8.14.

Рассмотрим обычные полиномиальные тождества. Используя тождество Якоби, всякий одночлен из пространства $V_n := V_n^F$ можно представить в виде линейной комбинации левонормированных коммутаторов $[x_1, x_j, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n}]$. Поскольку в алгебре Ли L выполняется полиномиальное тождество

$$[[x, y], [z, t]] \equiv 0,$$

можно считать, что $i_3 < i_4 < \ldots < i_n$. Теперь осталось заметить, что одночлены

$$f_j = [x_1, x_j, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n}], \text{ где } 2 \leqslant j \leqslant n,$$

линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}(L)$. Действительно, если $\sum_{k=2}^n \alpha_k f_k \equiv 0$ для некоторых $\alpha_k \in F$, то при подстановке $x_j = b_1$ и $x_i = a_1$ при $i \neq j$ единственным слагаемым, которое не обратится в нуль будет слагаемое f_j. Отсюда $\alpha_j = 0$ и $c_n(L) = n - 1$. $\square$

Пример 8.67. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $L = \bigoplus\limits_{\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} L^{(\bar{k})}$ — $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли, где $L^{(\bar{k})} = \langle c_{\bar{k}}, d_{\bar{k}} \rangle_F$, $\dim L^{(\bar{k})} = 2$, коммутатор задан формулами $[c_{\bar{\imath}}, c_{\bar{\jmath}}] = [d_{\bar{\imath}}, d_{\bar{\jmath}}] = 0$ и $[c_{\bar{\imath}}, d_{\bar{\jmath}}] = d_{\bar{\imath}+\bar{\jmath}}$, а F — произвольное поле характеристики 0. Тогда существуют такие $C_1, C_2 > 0$ и $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} m^n \leqslant c_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\text{-gr}}(L) \leqslant C_2 n^{r_2} m^n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Как и прежде, можно без ограничения общности считать поле F алгебраически замкнутым. Пусть $\zeta \in F$ — примитивный корень из единицы степени m. Тогда для $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ справедливо равенство $\widehat{G} = \{\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}\}$, где $\psi_\ell(\bar{\jmath}) := \zeta^{\ell j}$. Оказывается, что алгебру Ли L из данного примера можно отождествить с алгеброй Ли из примера 8.66 при помощи формул $c_{\bar{\jmath}} = \sum_{k=1}^m \zeta^{-jk} a_k$ и $d_{\bar{\jmath}} = \sum_{k=1}^m \zeta^{-jk} b_k$. При этом $\hat{G}$-действию, отвечающему $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировке на L, соответствует $\langle \tau \rangle$-действие из примера 8.66: $\tau^\ell c_{\bar{\jmath}} = \zeta^{\ell j} c_{\bar{\jmath}} = \psi_\ell(\bar{\jmath}) c_{\bar{\jmath}}$ и $\tau^\ell d_{\bar{\jmath}} = \zeta^{\ell j} d_{\bar{\jmath}} = \psi_\ell(\bar{\jmath}) d_{\bar{\jmath}}$. В силу предложения 6.19 справедливо равенство $c_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\text{-gr}}(L) = c_n^{\langle \tau \rangle}(L)$, и оценки сверху и снизу получаются из примера 8.66. $\square$

Приведём теперь примеры существования PI-экспонент в алгебрах Ли, для которых не существует инвариантных разложений Леви:

Пример 8.68. Пусть

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; C \in \mathfrak{sl}_m(F), D \in M_m(F) \right\} \subseteq \mathfrak{sl}_{2m}(F), \;\; m \geqslant 2.$$

Тогда идеал

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; D \in M_m(F) \right\}$$

является разрешимым (и нильпотентным) идеалом алгебры Ли L. Определим $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$ по формуле

$$\varphi \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & C + D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда группа $G = \langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z}$ действует на L автоморфизмами, т.е. L является FG-модульной алгеброй. Как было показано в примере 3.30, для алгебры A не существует G-инвариантного разложения Леви. В то же время существуют такие константны $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1} (m^2 - 1)^n \leqslant c_n^G(L) \leqslant C_2 n^{r_2} (m^2 - 1)^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как уже было отмечено, коразмерности не меняются при расширении основного поля. Более того, при расширении основного поля алгебра Ли L остаётся алгеброй того же типа. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что основное поле алгебраически замкнуто.

Заметим, что

$$N = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & D \\ 0 & 0 \end{array} \right) \,\middle|\, D \in M_m(F) \right\}$$

является разрешимым и нильпотентным радикалом алгебры Ли L, причём $L/N \cong \mathfrak{sl}_m(F)$ — простая алгебра Ли. Отсюда $\mathrm{PIexp}^G(L) = \dim \mathfrak{sl}_m(F) = m^2 - 1$ в силу теоремы 8.46. □

Проводя аналогичные рассуждения, получаем следующий пример:

Пример 8.69. Пусть L — та же алгебра Ли, что и в предыдущем примере. Рассмотрим присоединённое представление алгебры Ли L на себе самой дифференцированиями. Тогда L оказывается $U(L)$-модульной алгеброй Ли. Как было показано в примере 3.31, в A не существует $U(L)$-инвариантного разложения Леви. В то же время существуют такие константны $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$C_1 n^{r_1}(m^2-1)^n \leqslant c_n^{U(L)}(L) \leqslant C_2 n^{r_2}(m^2-1)^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

8.11 Асимптотика $H_{m^2}(\zeta)$-коразмерностей $H_{m^2}(\zeta)$-простых алгебр Ли

До этого момента в этой главе изучалось асимптотическое поведение H-коразмерностей лишь H-модульных алгебр Ли с H-инвариантными радикалами. В данном параграфе доказывается, что если L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0, то $\mathrm{PIexp}^{H_{m^2}(\zeta)}(L) = \dim L$. (Напомним, что через $H_{m^2}(\zeta)$ обозначается алгебра Тафта.) В частности, $H_{m^2}(\zeta)$-PI-экспонента такой алгебры Ли L является целым числом, и для полиномиальных $H_{m^2}(\zeta)$-тождеств алгебры Ли L справедлив аналог гипотезы Амицура. При этом разрешимый радикал алгебры Ли L может и не являться $H_{m^2}(\zeta)$-подмодулем. (См. алгебры Ли $L(B, 0)$ из §3.9.)

Теорема 8.70. *Пусть L — конечномерная $H_{m^2}(\zeta)$-простая $H_{m^2}(\zeta)$-модульная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Тогда существуют такие $C > 0$ и $r \in \mathbb{R}$, что*

$$C n^r (\dim L)^n \leqslant c_n^{H_{m^2}(\zeta)}(L) \leqslant (\dim L)^{n+1} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, $\mathrm{PIexp}^{H_{m^2}(\zeta)}(L) = \dim L$, и для L справедлив аналог гипотезы Амицура.

Сперва докажем существование полилинейного H-многочлена, не являющегося полиномиальным H-тождеством, кососимметричного по достаточному числу наборов переменных:

Лемма 8.71. *Пусть L — конечномерная неполупростая $H_{m^2}(\zeta)$-простая Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0. Введём обозначение $\ell := \dim L^{(0)}$. Тогда* *существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant \ell m r+1$ существуют попарно непересекающиеся подмножества $X_1, \ldots, X_{kr} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $k := \left[\frac{n-1}{\ell m r}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{kr}| = \ell m$, и H-многочлен $f \in V_n^{H_{m^2}(\zeta)} \setminus \mathrm{Id}^{H_{m^2}(\zeta)}(L)$, кососимметричный по переменным каждого из множеств X_j.*

Доказательство. Поскольку алгебра Ли L не является полупростой, из теоремы 3.60 следует, что $L \cong L(B,0)$ для некоторой простой алгебры Ли B, где $\dim B = \ell$. Алгебра Ли $L(B,0)$ наделена $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-градуировкой $L = \bigoplus_{k=0}^{m-1} L^{(k)}$ (см. теорему 3.49), где компонента $L^{(0)}$ может быть отождествлена с B. В силу теоремы Ю. П. Размыслова [19, теорема 12.1] существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такой полилинейный ассоциативный многочлен

$$f_0 = f_0(x_{11}, \ldots, x_{1\ell}; \ldots; x_{kr,1}, \ldots, x_{kr,\ell}),$$

кососимметричный по переменным каждого из множеств $\{x_{i1}, \ldots, x_{i\ell}\}$, $1 \leqslant i \leqslant kr$, что $f_0(\operatorname{ad} a_1, \ldots, \operatorname{ad} a_\ell; \ldots; \operatorname{ad} a_1, \ldots, \operatorname{ad} a_\ell)$ является ненулевым скалярным оператором на B для любого базиса $a_1, \ldots, a_\ell$ алгебры Ли B.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $k := \left[\frac{n-1}{\ell m r}\right]$. Используя теорему Ю. П. Размыслова, выберем многочлен f_0, кососимметричный по ℓ переменным каждого из kr множеств, а также многочлен $\tilde{f}_0$, кососимметричный по mr множествам из ℓ переменных. Рассмотрим теперь полилинейный лиевский $H_{m^2}(\zeta)$-многочлен

$$f_1 := \tilde{f}_0(\operatorname{ad} y_{11}, \ldots, \operatorname{ad} y_{1\ell}; \ldots; \operatorname{ad} y_{mr,1}, \ldots, \operatorname{ad} y_{mr,\ell}) f_2,$$

где

$$f_2 = \left(\prod_{i=1}^{m} f_0(\operatorname{ad}(x_{11i}^{v^{i-1}}), \ldots, \operatorname{ad}(x_{1\ell i}^{v^{i-1}}); \ldots; \operatorname{ad}(x_{kr,1,i}^{v^{i-1}}), \ldots, \operatorname{ad}(x_{kr,\ell,i}^{v^{i-1}})) \right) z.$$

Пусть $b_1, \ldots, b_\ell$ — базис компоненты $L^{(m-1)}$. Тогда $v^{m-1}b_1, \ldots, v^{m-1}b_\ell$ является базисом алгебры Ли $L^{(0)} = B$. Следовательно, $H_{m^2}(\zeta)$-многочлен f_1 не обращается в нуль при подстановке $x_{jti} = v^{m-i}b_t$, $y_{jt} = v^{m-1}b_t$ и $z = \bar{z}$ для любого ненулевого элемента $\bar{z} \in B$. Фиксируем некоторый такой элемент $\bar{z}$ и обозначим это подстановку через Ξ. Пусть b — значение $H_{m^2}(\zeta)$-многочлена f_1 при подстановке Ξ. Рассмотрим теперь $H_{m^2}(\zeta)$-многочлен $f_3 := \mathrm{Alt}_1 \ldots \mathrm{Alt}_{kr} f_1$ где Alt_j — оператор альтернирования по переменным из множества $X_j = \{x_{jti} \mid 1 \leqslant t \leqslant \ell,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Заметим, что из $v^m = 0$ следует что все слагаемые, где x_{jti} заменяется при альтернировании на $x_{jt'i'}$ с $i' < i$, обращаются в нуль. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что при альтернировании переменные каждого из множеств $\{x_{jti} \mid 1 \leqslant t \leqslant \ell\}$ при фиксированных j и i перемешиваются между собой. Поскольку $H_{m^2}(\zeta)$-многочлен f_1 кососимметричен по переменным каждого из этих множеств, значение $H_{m^2}(\zeta)$-многочлена f_3 при подстановке Ξ равно $(\ell!)^{kmr} b \neq 0$.

Заметим, что $k\ell m r + 1 \leqslant n < \deg f_3 = (k+1)\ell m r + 1$. Расписывая $\tilde{f}_0$, представим f_3 в виде линейной комбинации одночленов

$$f_4 := \left[w_1, \left[w_2, \ldots, \left[w_{\ell m r}, \mathrm{Alt}_1 \ldots \mathrm{Alt}_{kr} \left(\prod_{i=1}^{m} f_0(\operatorname{ad}(x_{11i}^{v^{i-1}}), \ldots, \operatorname{ad}(x_{1\ell i}^{v^{i-1}}); \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left. \ldots; \operatorname{ad}(x_{kr,1,i}^{v^{i-1}}), \ldots, \operatorname{ad}(x_{kr,\ell,i}^{v^{i-1}})) \right) z \right] \ldots \right],$$

где переменные w_i — это переменные y_{jt}, взятые в некотором порядке в зависимости от слагаемого. Поскольку $f_3 \notin \mathrm{Id}^{H_{m^2}(\zeta)}(L)$, по крайней мере одно из слагаемых f_4 не обращается в нуль при подстановке Ξ. Тогда

$$f := \Biggl[w_{(k+1)\ell mr-n+2}, \Biggl[w_{(k+1)\ell mr-n+3}, \ldots, \Biggl[w_{\ell mr}, \mathrm{Alt}_1 \ldots \mathrm{Alt}_{kr} \left(\prod_{i=1}^{m} f_0(\mathrm{ad}(x_{11i}^{v^{i-1}}), \ldots, \mathrm{ad}(x_{1\ell i}^{v^{i-1}}); \right.$$
$$\left. \ldots; \mathrm{ad}(x_{kr,1,i}^{v^{i-1}}), \ldots, \mathrm{ad}(x_{kr,\ell,i}^{v^{i-1}}))\right) z\Biggr] \ldots\Biggr] \notin \mathrm{Id}^{H_{m^2}(\zeta)}(L).$$

Заметим, что $\deg f = n$ и если переименовать переменные $H_{m^2}(\zeta)$-многочлена f в $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то f удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 8.70. Оценка сверху $c_n^{H_{m^2}(\zeta)}(L) \leqslant (\dim L)^{n+1}$ следует из предложения 6.8.

Если алгебра Ли L полупроста, то оценка снизу следует из примера 8.55. Рассмотрим случай, когда алгебра Ли L неполупроста.

Пусть r — число из леммы 8.71. Введём обозначения $\ell := \frac{\dim L}{m}$ и $k := \left[\frac{n-1}{\ell mr}\right]$. Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $\lambda \vdash n$, что $m(L, H_{m^2}(\zeta), \lambda) \neq 0$ и $\lambda_i \geqslant kr$ для всех $1 \leqslant i \leqslant \ell m$. Рассмотрим H-многочлен f из леммы 8.71. Достаточно доказать, что $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^H(L)$ для некоторой таблицы Юнга T_λ требуемой формы λ. Известно (см., например, теорему 3.2.7 из [3]), что

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda},$$

где суммирование ведётся по множеству стандартных таблиц Юнга T_λ всевозможных форм $\lambda \vdash n$. Отсюда

$$FS_n f = \sum_{\lambda, T_\lambda} FS_n e^*_{T_\lambda} f \not\subseteq \mathrm{Id}^{H_{m^2}(\zeta)}(L)$$

и $e^*_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}^{H_{m^2}(\zeta)}(L)$ для некоторого $\lambda \vdash n$. Докажем, что разбиение λ имеет требуемый вид. Достаточно доказать, что $\lambda_{\ell m} \geqslant kr$, так как $\lambda_i \geqslant \lambda_{\ell m}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant \ell m$. В любой строчке таблицы T_λ содержится не более одного номера переменной из одного и того же множества X_i, поскольку $e^*_{T_\lambda} = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}$, а a_{T_λ} симметризует по переменным, отвечающим каждой строчке таблицы T_λ. Отсюда $\sum_{i=1}^{\ell m-1} \lambda_i \leqslant kr(\ell m - 1) + (n - k\ell mr) = n - kr$. Из леммы 6.26 следует, что если $\lambda \vdash n$ и $\lambda_{\ell m+1} > 0$, то $m(L, H_{m^2}(\zeta), \lambda) = 0$. Следовательно, $\lambda_{\ell m} \geqslant kr$.

Диаграмма Юнга D_λ содержит прямоугольную поддиаграмму D_μ, где $\mu = (\underbrace{kr, \ldots, kr}_{\ell m})$. Из правила ветвления для группы подстановок S_n следует, что если ограничить S_n-действие на $M(\lambda)$ до S_{n-1}, то $M(\lambda)$ оказывается прямой суммой всех неизоморфных FS_{n-1}-модулей $M(\nu)$, где $\nu \vdash (n-1)$ и всякая диаграмма Юнга D_ν получена из D_λ удалением одной клетки. В частности, $\dim M(\nu) \leqslant \dim M(\lambda)$. Применяя правило ветвления $(n - k\ell mr)$ раз, получаем неравенство $\dim M(\mu) \leqslant \dim M(\lambda)$. В силу формулы крюков

$$\dim M(\mu) = \frac{(k\ell mr)!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

где h_{ij} — длина крюка диаграммы D_μ с вершиной в (i,j). Согласно формуле Стирлинга

$$c_n^{H_{m^2}(\zeta)}(L) \geqslant \dim M(\lambda) \geqslant \dim M(\mu) \geqslant \frac{(k\ell mr)!}{((kr+\ell m)!)^{\ell m}} \sim$$
$$\sim \frac{\sqrt{2\pi(k\ell mr)}\left(\frac{k\ell mr}{e}\right)^{k\ell mr}}{\left(\sqrt{2\pi(kr+\ell m)}\left(\frac{kr+\ell m}{e}\right)^{kr+\ell m}\right)^{\ell m}} \sim C_1 k^{r_1}(\ell m)^{k\ell mr}$$

при $k \to \infty$ для некоторых констант $C_1 > 0$, $r_1 \in \mathbb{Q}$. (Как и прежде, мы пишем $f \sim g$, если $\lim \frac{f}{g} = 1$.) В силу того, что $k = \left[\frac{n-1}{\ell mr}\right]$, оценка снизу доказана. $\square$

Глава 9

Рост градуированных коразмерностей в ассоциативных алгебрах, градуированных полугруппами

В данной главе вычисляются градуированные PI-экспоненты для таких ассоциативных градуированно простых алгебр A, градуированных лентами правых нулей, что $A/J(A) \cong M_2(F)$ (теоремы 9.14 и 9.19), а в общем случае получается оценка сверху на градуированные коразмерности (теорема 9.8). При этом оказывается, что далеко не всегда градуированная PI-экспонента является целым числом. Для каждой из четырёх полугрупп из двух элементов, не являющихся группой (см. предложение 4.1), строится пример конечномерной градуированной ассоциативной алгебры с дробной градуированной PI-экспонентой (теоремы 9.22, 9.24, 9.26 и замечание 9.23). Для конечномерных ассоциативных алгебр, градуированных полугруппами с сокращениями (теорема 9.27), а также для конечномерных ассоциативных алгебр с 1, градуированных лентами левых и правых нулей (теорема 9.28), доказывается существование целой градуированной PI-экспоненты, причём оказывается, что в случае конечномерных ассоциативных алгебр с 1, градуированных лентами левых и правых нулей, градуированная PI-экспонента совпадает с обычной PI-экспонентой.

Результаты главы были опубликованы в работах [116, 118].

9.1 Оценка сверху для F^T-коразмерностей T-градуированно простых алгебр

Пусть $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — такая конечномерная ассоциативная T-градуированная алгебра над полем F характеристики 0 для некоторого множества T, что $A/J(A) \cong M_k(F)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и для всех $t \in T$ справедливо равенство $A^{(t)} \cap J(A) = 0$. (Последнее условие справедливо, например, в случае, когда алгебра A является T-градуированно простой, поскольку тогда ни один идеал не содержит ненулевых однородных элементов, так как любой однородный элемент порождает градуированный идеал.)

Напомним, что T-градуированные коразмерности алгебры A в силу предложения 6.15

совпадают с её F^T-коразмерностями, где алгебра F^T действует на A в соответствии с примером 5.4.

В данном параграфе доказывается оценка сверху для T-градуированных коразмерностей алгебры A.

Для всякого $t \in T$ выберем в пространстве $A^{(t)}$ некоторый базис $\mathcal{B}^{(t)}$. Тогда $\mathcal{B} = \bigcup_{t\in T} \mathcal{B}^{(t)}$ — базис в алгебре A. Фиксируем также изоморфизм $\psi\colon A/J(A) \xrightarrow{\sim} M_k(F)$, а через $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J(A)$ обозначим естественный сюръективный гомоморфизм. Обозначим через $\theta\colon \mathcal{B} \to \mathbb{Z}$ функцию, заданную равенством

$$\theta(a) = \min\left\{i - j \mid \alpha_{ij} \neq 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant k\right\},$$

где $\alpha_{ij} \in F$ определяются при помощи равенства $\psi\pi(a) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant k} \alpha_{ij} e_{ij}$.

Следующее утверждение играет центральную роль в данном параграфе:

Лемма 9.1. *Если для некоторого F^T-многочлена $f \in P_n^{F^T}$ и некоторых $a_i \in \mathcal{B}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, а $n \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \theta(a_i) \leqslant k - 1.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что f является линейной комбинацией одночленов $x^{q_{t_1}}_{\sigma(1)} x^{q_{t_2}}_{\sigma(2)} \ldots x^{q_{t_n}}_{\sigma(n)}$, где, как и прежде, $q_t \in F^T$ заданы формулами $q_t(s) := \left\{\begin{smallmatrix} 1 \text{ при } s=t, \\ 0 \text{ при } s\neq t, \end{smallmatrix}\right.$ $t_i \in \operatorname{supp}\Gamma$, $\sigma \in S_n$. Поскольку все элементы a_i однородны, значение одночлена $x^{q_{t_1}}_{\sigma(1)} x^{q_{t_2}}_{\sigma(2)} \ldots x^{q_{t_n}}_{\sigma(n)}$ равно $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)}$, если $a_{\sigma(i)} \in A^{(t_i)}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, и 0 в противном случае. Однако $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)}$ снова является однородным элементом. Напомним, что $J(A) \cap A^{(t)} = 0$ для всех $t \in T$. Следовательно, $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \neq 0$, если и только если

$$\psi\pi(a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)}) = \psi\pi(a_{\sigma(1)})\psi\pi(a_{\sigma(2)}) \ldots \psi\pi(a_{\sigma(n)}) \neq 0.$$

Заметим теперь, что $e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} \ldots e_{i_n j_n} \neq 0$ для некоторых $1 \leqslant i_\ell, j_\ell \leqslant k$, только если $j_1 = i_2$, $j_2 = i_3$, ..., $j_{n-1} = i_n$ и, в частности, $1 - k \leqslant \sum_{\ell=1}^n (i_\ell - j_\ell) = i_1 - j_n \leqslant k - 1$. Следовательно, $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \neq 0$, только если $\sum_{\ell=1}^n \theta(a_i) \leqslant k - 1$. □

Пусть $r := \dim A$. Определим

$$\beta_\ell := \min\left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \theta(a_i) \;\middle|\; a_i \in \mathcal{B},\ a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j \right\},$$

$$\gamma_\ell := \beta_\ell - \beta_{\ell-1}, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant r, \quad \beta_0 := 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_r)$, где

$$\theta(a_1) \leqslant \theta(a_2) \leqslant \ldots \leqslant \theta(a_r).$$

Тогда $\beta_\ell = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \theta(a_i)$, где $\gamma_\ell = \theta(a_\ell)$. В частности,

$$1-k = \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_r.$$

Равенство $\gamma_1 = 1-k$ следует из того, что матричная единица e_{1k}, которая должна входить с ненулевым коэффициентом в разложение элемента $\varphi\pi(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{B}$, имеет наименьшее значение $(i-j)$ среди всех матричных единиц e_{ij}.

Докажем теперь основное неравенство для F^T-кохарактеров алгебры A:

Лемма 9.2. *Пусть $f \in P_n^{F^T}$, а $\lambda \vdash n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причём $\sum_{i=1}^r \gamma_i\lambda_i \geqslant k$ или $\lambda_{r+1} > 0$. Тогда $e^*_{T_\lambda} f \in \mathrm{Id}^{F^T}(A)$ для любой таблицы Юнга T_λ формы λ.*

Доказательство. Заметим, что F^T-многочлен $e^*_{T_\lambda} f = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda} f$ кососимметричен по переменным, отвечающим любому столбцу таблицы T_λ. Для того, чтобы определить, является ли F^T-многочлен $e^*_{T_\lambda} f$ полиномиальным F^T-тождеством для алгебры A, достаточно подставлять в $e^*_{T_\lambda} f$ лишь элементы из базиса $\mathcal{B}$. Если вместо двух переменных, которые отвечают одному и тому же столбцу таблицы T_λ, подставить одинаковые значения, то в силу кососимметричности F^T-многочлена $e^*_{T_\lambda} f$ по таким переменным результат подстановки будет равен нулю. Отсюда при $\lambda_{r+1} > 0$ всегда выполняется условие $e^*_{T_\lambda} f \in \mathrm{Id}^{F^T}(A)$, так как в этом случае высота первого столбца больше, чем $\dim A = r$, и в его переменные подставляется как минимум два одинаковых элемента.

Предположим теперь, что $\sum_{i=1}^r \gamma_i\lambda_i \geqslant k$. Это неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{r} (\beta_i - \beta_{i-1})\lambda_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \geqslant k. \tag{9.1}$$

(В силу выше сказанного можно считать, что $\lambda_{r+1} = 0$.) Заметим, что число $(\lambda_i - \lambda_{i+1})$ равно числу столбцов высоты i в таблице T_λ. Предположим, что вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставляются элементы $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$. В силу замечания, сделанного выше, мы можем считать, что вместо переменных, индексы которых стоят в одном и том же столбце, подставляются разные элементы базиса. Из определения чисел β_i следует, что $\sum_{i=1}^n \theta(b_i) \geqslant \sum_{i=1}^r \beta_i(\lambda_i - \lambda_{i+1})$. С учётом (9.1) получаем, что $\sum_{i=1}^n \theta(b_i) \geqslant k$. Теперь из леммы 9.1 следует, что $(e^*_{T_\lambda} f)(b_1, \ldots, b_n) = 0$ и $e^*_{T_\lambda} f \in \mathrm{Id}^{F^T}(A)$. □

Из предложения 6.15 и лемм 6.30 и 9.2 получаем следующую оценку сверху на рост T-градуированных коразмерностей алгебры A:

Лемма 9.3. *Введём обозначение*

$$\Omega := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \mid \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 1,\ \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_r\alpha_r \leqslant 0\}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)} \leqslant \max_{x\in\Omega} \Phi(x),$$

где, как и прежде, $\Phi(x_1, \ldots, x_q) := \frac{1}{x_1^{x_1} \ldots x_s^{x_q}}$.

Оставшаяся часть параграфа посвящена вычислению максимума функции Φ. Начнём с самого простого многогранника ограничений:

Лемма 9.4. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, *а*

$$\Omega_0 := \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 1\right\}.$$

Тогда $\max_{x \in \Omega_0} \Phi(x) = r$, *а*

$$\operatorname*{argmax}_{x \in \Omega_0} \Phi(x) = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right).$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по r. Случай $r = 1$ тривиален. Предположим, что $r \geqslant 2$. Прежде всего выразим $\alpha_1 = 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i$ через $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ и изучим поведение функции $\Phi_1(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i\right)^{\left(1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i\right)} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_r^{\alpha_r}}$ на

$$\tilde{\Omega}_0 := \left\{(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\middle|\; \alpha_2, \ldots, \alpha_r \geqslant 0,\ 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i \geqslant 0\right\}.$$

Заметим, что функция Φ_1 непрерывна на компактном множестве $\tilde{\Omega}_0$ и дифференцируема во всех внутренних точках множества $\tilde{\Omega}_0$. Отсюда функция Φ_1 может достигать своего экстремума только в своих критических точках, являющихся внутренними для $\tilde{\Omega}_0$, и на границе $\partial\tilde{\Omega}_0$. В силу предположения индукции $\Phi_1(x) \leqslant r - 1$ для всех $x \in \partial\tilde{\Omega}_0$. Рассмотрим

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_\ell}(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \left(\ln\left(1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i\right) - \ln \alpha_\ell\right) \Phi_1(\alpha_2, \ldots, \alpha_r).$$

Тогда $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_\ell}(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) = 0$ для всех $2 \leqslant \ell \leqslant r$ только при $\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i = \frac{1}{r}$. Поскольку $\Phi\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right) = r > r - 1$, отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Положительный корень ζ многочлена P, определённого ниже, будет затем использован для получения оценки сверху для градуированных коразмерностей:

Лемма 9.5. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, *а* $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ *при* $1 \leqslant i \leqslant r$, *причём*

$$\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_r, \tag{9.2}$$

$\gamma_1 < 0$. *Рассмотрим уравнение*

$$P(\zeta) := \sum_{i=1}^r \gamma_i \zeta^{\gamma_i - \gamma_1} = 0, \tag{9.3}$$

где ζ *— неизвестное. Если* $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$, *то уравнение (9.3) имеет только один положительный корень* ζ, *причём оказывается, что* $\zeta \in (0; 1]$. *Если* $\sum_{i=1}^r \gamma_i < 0$, *то* $P(y) < 0$ *для всех* $y \in [0; 1]$.

Доказательство. Если $\gamma_r \leqslant 0$, то все ненулевые коэффициенты многочлена P отрицательны и $P(y) < 0$ для всех $y \in [0; 1]$.

Пусть $\gamma_r > 0$. Из неравенства (9.2) следует, что в последовательности коэффициентов многочлена P есть только одна перемена знака. Отсюда в силу теоремы Декарта уравнение (9.3) имеет только одно положительное решение ζ. Определим число $m \in \mathbb{N}$ при помощи условия

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_m < \gamma_{m+1}.$$

Заметим, что $P(0) = m\gamma_1 < 0$, а $P(1) = \sum_{i=1}^r \gamma_i$. Следовательно, если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$, то $\zeta \in (0;1]$. Если же $P(1) = \sum_{i=1}^r \gamma_i < 0$, то $\zeta > 1$ и $P(y) < 0$ для всех $y \in [0;1]$. $\square$

Оказывается, что корень ζ многочлена P является точкой экстремума функции Ψ, которая вводится ниже. Это свойство будет затем использовано при вычислении максимума функции Φ на многограннике Ω.

Лемма 9.6. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, а $\gamma_i \in \mathbb{Z}$ при $1 \leqslant i \leqslant r$, причём $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_r$, $\gamma_1 < 0$. Введём обозначение $\Psi(y) := \sum_{i=1}^r y^{\gamma_i}$. Тогда*

1. *если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$, то $\min_{y\in(0;1]} \Psi(y) = \Psi(\zeta)$, где $\zeta \in (0;1]$ — положительный корень многочлена (9.3);*

2. *если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \leqslant 0$, то $\min_{y\in(0;1]} \Psi(y) = r$.*

Доказательство. Заметим, что $\Psi'(y) = \sum_{i=1}^r \gamma_i y^{\gamma_i - 1}$. Отсюда во всех точках полуинтервала $(0;1]$ у функции $\Psi'(y)$ тот же знак, что и у многочлена $P(y) = \sum_{i=1}^r \gamma_i y^{\gamma_i - \gamma_1}$. Кроме того, $\lim_{y\to+0} \Psi(y) = +\infty$. Из леммы 9.5 следует, что если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$, то $\min_{y\in(0;1]} \Psi(y) = \Psi(\zeta)$, а если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \leqslant 0$, то $\min_{y\in(0;1]} \Psi(y) = \Psi(1) = r$. (В случае $\sum_{i=1}^r \gamma_i = 0$ справедливы равенства $\zeta = 1$ и $\Psi(\zeta) = r$.) $\square$

Теперь мы готовы вычислить максимум функции Φ. Для удобства мы заменим Ω на бóльшее множество $\tilde{\Omega}$, а затем покажем, что максимум на обоих множествах один и тот же.

Лемма 9.7. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, а $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, где $1 \leqslant i \leqslant r$, причём $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_r$, $\gamma_1 < 0$, $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$. Обозначим*

$$\Omega := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \mid \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 1,\ \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_r\alpha_r \leqslant 0\}$$

и

$$\tilde{\Omega} := \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 1,\ \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma_r\alpha_r \leqslant 0\}.$$

Тогда $\max_{x\in\Omega} \Phi(x) = \max_{x\in\tilde{\Omega}} \Phi(x) = \sum_{i=1}^r \zeta^{\gamma_i}$, где $\zeta \in (0;1]$ — положительный корень уравнения (9.3).

Доказательство. Как и в лемме 9.4, проведём доказательство индукцией по r. Из условий $\gamma_1 < 0$ и $\sum_{i=1}^r \gamma_i \geqslant 0$ следует, что $r \geqslant 2$.

База индукции не будет доказываться отдельно. Тем не менее из приводимых ниже рассуждений будет следовать справедливость утверждения леммы и при $r = 2$, поскольку в случае $r = 2$ предположение индукции не будет использовано.

Снова выразим $\alpha_1 = 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i$ через $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$ и исследуем поведение функции $\Phi_1(\alpha_2, \dots, \alpha_r) = \frac{1}{\left(1-\sum_{i=2}^r \alpha_i\right)^{\left(1-\sum_{i=2}^r \alpha_i\right)} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_r^{\alpha_r}}$ на множестве

$$\Omega_1 := \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\middle|\; \alpha_2, \dots, \alpha_r \geqslant 0,\ 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i \geqslant 0,\ \gamma_1 + \sum_{i=2}^r (\gamma_i - \gamma_1)\alpha_i \leqslant 0 \right\}.$$

Теперь из доказательства леммы 9.4 следует, что единственной критической точкой функции Φ_1 является точка $\left(\frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right)$. Эта точка принадлежит множеству Ω_1, если и только если $\sum_{i=1}^r \gamma_i \leqslant 0$. Если $\sum_{i=1}^r \gamma_i = 0$, то в силу леммы 9.4 справедливо равенство $\max_{x\in\Omega} \Phi(x) = r$. Поскольку в этом случае $\zeta = 1$, то лемма доказана.

Предположим теперь, что $\sum_{i=1}^r \gamma_i > 0$. Тогда непрерывная функция Φ_1 достигает своего максимума на границе $\partial\Omega_1$. Заметим, что $\partial\Omega_1 = \Omega_2 \cup \bigcup_{i=1}^r \Omega_{1i}$, где

$$\Omega_{11} = \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\middle|\; \alpha_2, \dots, \alpha_r \geqslant 0,\ 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i = 0,\ \gamma_1 + \sum_{i=2}^r (\gamma_i - \gamma_1)\alpha_i \leqslant 0 \right\},$$

$$\Omega_{1\ell} = \Bigg\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\Bigg|\; \alpha_2, \dots, \alpha_r \geqslant 0,\ \alpha_\ell = 0,$$
$$1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i \geqslant 0,\ \gamma_1 + \sum_{i=2}^r (\gamma_i - \gamma_1)\alpha_i \leqslant 0 \Bigg\} \text{ при } 2 \leqslant \ell \leqslant r,$$

$$\Omega_2 = \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\middle|\; \alpha_2, \dots, \alpha_r \geqslant 0,\ 1 - \sum_{i=2}^r \alpha_i \geqslant 0,\ \gamma_1 + \sum_{i=2}^r (\gamma_i - \gamma_1)\alpha_i = 0 \right\}.$$

Докажем, что

$$\max_{x\in\bigcup_{i=1}^r \Omega_{1i}} \Phi_1(x) < \sum_{j=1}^r \zeta^{\gamma_j}, \tag{9.4}$$

где $\zeta \in (0;1]$ — положительный корень уравнения (9.3). Переходя к переменным $\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_r$, получаем, что $\max_{x\in\Omega_{1i}} \Phi_1(x) = \max_{x\in\Omega_i'} \Phi(x)$ при $1 \leqslant i \leqslant r$, где

$$\Omega_i' = \Big\{ (\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r-1} \;\Big|\; \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_r \geqslant 0,$$
$$\alpha_1 + \ldots + \hat{\alpha}_i + \ldots + \alpha_r = 1,\ \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \widehat{\gamma_i\alpha_i} + \ldots + \gamma_r\alpha_r \leqslant 0 \Big\}.$$

(Для удобства будем обозначать функцию $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_m) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_1} \dots \theta_m^{\theta_m}}$ одной и той же буквой Φ для всех m.)

Заметим, что множество Ω_i' имеет тот же вид, что и множество $\tilde{\Omega}$ из формулировки леммы. Сперва рассмотрим случай, когда можно применить предположение индукции, т.е. когда $\sum\limits_{\substack{\ell=1,\\ \ell\neq i}}^r \gamma_\ell \geqslant 0$ и при этом либо $i \geqslant 2$, либо $\gamma_2 < 0$. (Ясно, что в этом случае $r \geqslant 3$.)

Применяя предположение индукции для $(r-1)$, получаем, что $\max_{x\in\Omega_i'} \Phi(x) = \sum\limits_{\substack{\ell=1,\\ \ell\neq i}}^r (\zeta')^{\gamma_\ell}$, где $\sum\limits_{\substack{\ell=1,\\ \ell\neq i}}^r \gamma_\ell\, (\zeta')^{\gamma_\ell - \gamma_1} = 0$ при $i > 1$ и $\sum_{\ell=2}^r \gamma_\ell\, (\zeta')^{\gamma_\ell - \gamma_2} = 0$ при $i = 1$. В силу леммы 9.6 справедливо равенство

$$\max_{x\in\Omega_{1i}}\Phi_1(x)=\max_{x\in\Omega_i'}\Phi(x)=\min_{y\in(0;1]}\sum_{\substack{\ell=1,\\ \ell\neq i}}^{r}y^{\gamma_\ell}<\min_{y\in(0;1]}\sum_{\ell=1}^{r}y^{\gamma_\ell}=\sum_{j=1}^{r}\zeta^{\gamma_j}. \tag{9.5}$$

Если $i=1$, а $\gamma_2\geqslant 0$, то в силу того, что для всех оставшихся $2\leqslant j\leqslant r$ выполнено условие $\gamma_j,\alpha_j\geqslant 0$, неравенство

$$\gamma_1\alpha_1+\ldots+\widehat{\gamma_i\alpha_i}+\ldots+\gamma_r\alpha_r\leqslant 0$$

равносильно равенству нулю всех α_j, для которых $\gamma_j\neq 0$. Отсюда

$$\Omega_i'=\Omega_1'=\left\{(\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^{r-1}\,\middle|\,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\geqslant 0,\right.$$
$$\left.\alpha_2+\ldots+\ldots+\alpha_r=1,\ \alpha_\ell=\alpha_{\ell+1}=\ldots=\alpha_r=0\right\},$$

где число $2\leqslant\ell\leqslant r$ задано условиями $\gamma_2=\ldots=\gamma_{\ell-1}=0$ и $\gamma_\ell>0$. Тогда из леммы 9.4 следует, что $\max_{x\in\Omega_1'}\Phi(x)=\ell-2$. Поскольку $\sum_{j=1}^{r}\zeta^{\gamma_j}>\sum_{j=2}^{\ell-1}\zeta^{\gamma_j}=\ell-2$, получаем, что $\max_{x\in\Omega_{11}}\Phi_1(x)<\sum_{j=1}^{r}\zeta^{\gamma_j}$.

Рассмотрим теперь последний случай, когда

$$\sum_{\substack{\ell=1,\\ \ell\neq i}}^{r}\gamma_\ell<0.$$

Тогда $\left(\frac{1}{r-1},\frac{1}{r-1},\ldots,\frac{1}{r-1}\right)\in\Omega_i'$, и в силу леммы 9.4 справедливо равенство

$$\max_{x\in\Omega_i'}\Phi(x)=r-1.$$

Снова применяя лемму 9.6, получаем неравенство (9.5). Таким образом, неравенство (9.4) доказано.

Докажем теперь, что $\max_{x\in\Omega_2}\Phi_1(x)=\sum_{i=1}^{r}\zeta^{\gamma_i}$, где $\zeta\in(0;1]$ — положительный корень уравнения (9.3).

Если $r=2$, то $\Omega_2=\left\{-\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}\right\}$, $\zeta=\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}}$,

$$\Phi_1\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}\right)=\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\right)^{-\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}}\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}}=$$
$$=(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_2^{-\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}}(-\gamma_1)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}}=\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}}+\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}}=\zeta^{\gamma_1}+\zeta^{\gamma_2}$$

Следовательно, без ограничения общности мы можем считать, что $r\geqslant 3$. Определим $1\leqslant m<r$ при помощи условия $\gamma_1=\ldots=\gamma_m<\gamma_{m+1}$. Тогда для всех $(\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\Omega_2$ получаем, что $\gamma_1+\sum_{i=m+1}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i=0$ и

$$\alpha_{m+1}=-\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right). \tag{9.6}$$

Подставим α_{m+1} и заметим, что $\max_{x\in\Omega_2}\Phi_1(x)=\max_{x\in\Omega_3}\Phi_2(x)$, где

$$\Phi_2(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)=\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),$$

$$\Omega_3:=\left\{(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^{r-2}\;\middle|\;\alpha_1,\ldots,\alpha_r\geqslant 0\right\},$$

$$\alpha_1=1-\sum_{\substack{i=2,\\ i\neq m+1}}^{r}\alpha_i+\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right),$$

а α_{m+1} задано равенством (9.6).

Рассмотрим частные производные

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)=\Bigg((-\ln\alpha_1-1)\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha_i}-\ln\alpha_i-1+$$
$$+(-\ln\alpha_{m+1}-1)\frac{\partial\alpha_{m+1}}{\partial\alpha_i}\Bigg)\Phi_2(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r).$$

При $2\leqslant i\leqslant m$ справедливы равенства $\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha_i}=-1$, $\frac{\partial\alpha_{m+1}}{\partial\alpha_i}=0$ и

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)=(\ln\alpha_1-\ln\alpha_i)\Phi_2(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r).$$

При $m+2\leqslant i\leqslant r$ справедливы равенства $\frac{\partial\alpha_1}{\partial\alpha_i}=\frac{\gamma_i-\gamma_{m+1}}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}$, $\frac{\partial\alpha_{m+1}}{\partial\alpha_i}=\frac{\gamma_1-\gamma_i}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}$ и

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)=$$
$$=\left(-\frac{\gamma_i-\gamma_{m+1}}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\ln\alpha_1-\ln\alpha_i-\frac{\gamma_1-\gamma_i}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\ln\alpha_{m+1}\right)\Phi_2(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)$$

Если $(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)\in\Omega_3$ является критической точкой для функции Φ_2, то

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\alpha_i}(\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_r)=0$$

для всех $2\leqslant i\leqslant m$ и $m+2\leqslant i\leqslant r$, что эквивалентно равенствам

$$\begin{cases}\alpha_i &= \alpha_1 & \text{при}\quad 2\leqslant i\leqslant m,\\ \alpha_i &= \alpha_1^{\left(\frac{\gamma_{m+1}-\gamma_i}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\right)}\alpha_{m+1}^{\left(\frac{\gamma_i-\gamma_1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\right)} & \text{при}\quad m+2\leqslant i\leqslant r,\\ \alpha_1 &= 1-\sum\limits_{\substack{i=2,\\ i\neq m+1}}^{r}\alpha_i+\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right), & \\ \alpha_{m+1} &= -\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right), & \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases}\alpha_i &= \alpha_1 & \text{при}\quad 2\leqslant i\leqslant m,\\ \alpha_i &= \alpha_1\left(\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_1}\right)^{\frac{\gamma_i-\gamma_1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}} & \text{при}\quad m+2\leqslant i\leqslant r,\\ \alpha_1 &= 1-\sum\limits_{\substack{i=2,\\ i\neq m+1}}^{r}\alpha_i+\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right), & \\ \alpha_{m+1} &= -\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}\left(\gamma_1+\sum_{i=m+2}^{r}(\gamma_i-\gamma_1)\alpha_i\right). & \end{cases}$$

Заметим, что поскольку нас интересуют только внутренние критические точки функции Φ_2 на множестве $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^{r-2}$, можно считать, что все $\alpha_i > 0$.

Совершая равносильные преобразования, получаем, что

$$\begin{cases} \alpha_i & = \alpha_1 \left(\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_1}\right)^{\frac{\gamma_i-\gamma_1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}} \quad \text{для всех } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i & = 1, \\ \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \alpha_i & = 0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Введём теперь дополнительную переменную $\xi := \left(\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}}$ и получим, что

$$\begin{cases} \xi & = \left(\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_{m+1}-\gamma_1}}, \\ \alpha_i & = \alpha_1 \xi^{\gamma_i-\gamma_1} \quad \text{для всех } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \alpha_1 \sum\limits_{i=1}^{r} \xi^{\gamma_i-\gamma_1} & = 1, \\ \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \xi^{\gamma_i-\gamma_1} & = 0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Заметим теперь, что первое уравнение является следствием второго уравнения при $i = m+1$. Следовательно, первоначальная система эквивалентна равенствам

$$\begin{cases} \alpha_i & = \frac{\xi^{\gamma_i-\gamma_1}}{\sum_{i=1}^{r} \xi^{\gamma_i-\gamma_1}} \quad \text{при } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \xi^{\gamma_i-\gamma_1} & = 0. \end{cases} \tag{9.9}$$

В силу леммы 9.5 последнее уравнение имеет единственное решение $\zeta \in (0; 1]$. Следовательно, точка

$$(\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_r),$$

заданная равенствами (9.9), является единственной внутренней критической точкой функции Φ_2. Используя (9.7) и (9.8), получаем, что

$$\Phi_2(\alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_r) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \frac{1}{\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_r^{\alpha_r}} =$$
$$= \frac{1}{\alpha_1^{\alpha_1+\ldots+\alpha_r} \zeta^{\alpha_1(\gamma_1-\gamma_1)} \ldots \zeta^{\alpha_r(\gamma_r-\gamma_1)}} = \frac{1}{\alpha_1 \zeta^{-\gamma_1}} = \sum_{i=1}^{r} \zeta^{\gamma_i}.$$

Заметим теперь, что значения функции Φ_2 на $\partial\Omega_3$ равны значениям функции Φ_1 в соответствующих точках множества $\bigcup_{i=1}^{r} \Omega_{1i}$. Следовательно,

$$\max_{x \in \tilde{\Omega}} \Phi(x) = \max_{x \in \Omega_1} \Phi_1(x) = \max_{x \in \Omega_3} \Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{r} \zeta^{\gamma_i}.$$

Поскольку из (9.9) следует, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r$, получаем, что

$$\max_{x \in \Omega} \Phi(x) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \Phi(x) = \sum_{i=1}^{r} \zeta^{\gamma_i}.$$

□

Отсюда сразу же получается требуемая оценка сверху:

Теорема 9.8. *Пусть* $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ *— такая конечномерная ассоциативная T-градуированная алгебра над полем F характеристики 0 для некоторого множества T, что $A/J(A) \cong M_k(F)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $A^{(t)} \cap J(A) = 0$ для всех $t \in T$. Предположим, что числа γ_ℓ, где $1 \leqslant \ell \leqslant r$, $r := \dim A$, введённые перед леммой 9.2, удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \geqslant 0$. Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \zeta^{\gamma_i},$$

где ζ — положительный корень уравнения (9.3).

Доказательство. Достаточно применить леммы 9.3 и 9.7. □

Замечание 9.9. Если A — конечномерная T-градуированно простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0 для некоторой конечной 0-простой полугруппы T с тривиальными максимальными подгруппами (например, для некоторой ленты правых нулей), то в силу лемм 4.15 и 4.26 для алгебры A существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $A/J(A) \cong M_k(F)$, и для всех $t \in T$ выполнены условия $A^{(t)} \cap J(A) = 0$.

9.2 Случай $A/J(A) \cong M_2(F)$ и $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \dim A$

Пусть $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — конечномерная T-градуированно простая алгебра над полем F характеристики 0 для некоторой ленты правых нулей T. В этом и следующем параграфах вычисляется $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A)$ в случае, когда $A/J(A) \cong M_2(F)$.

Для $t \in T$ введём обозначение $I_t := \pi(A^{(t)})$, где $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/J(A)$ — естественный сюръективный гомоморфизм.

Заметим, что, поскольку $\dim A < +\infty$, только конечное число левых идеалов I_t ненулевые. Введём обозначения $T_0 := \{t \in T \mid \dim I_t = 2\}$ и $T_1 = \{t \in T \mid I_t = A/J(A)\}$. При этом $I_t = 0$ для всех $t \notin T_0 \sqcup T_1$. Более того, из $A^{(t)} \cap \ker \pi = 0$ для всех $t \in T$ следует, что $r := \dim A = 2|T_0| + 4|T_1|$.

Введём на множестве T_0 следующее отношение эквивалентности: $t_1 \sim t_2$, если $I_{t_1} = I_{t_2}$. Поскольку $A/J(A) \cong M_2(F)$, все неприводимые $A/J(A)$-модули двумерны и изоморфны друг другу. Отсюда $A/J(A) = I_{t_1} \oplus I_{t_2}$ для всех $I_{t_1} \ne I_{t_2}$, $t_1, t_2 \in T_0$.

Покажем теперь, что если мощности классов эквивалентности удовлетворяют некоторой разновидности неравенства треугольника, то все элементы множества T_0 можно разбить по парам и, возможно, одной тройке так, что внутри каждой пары или тройки все элементы попарно неэквивалентны.

Лемма 9.10. *Пусть T_0 — конечное непустое множество, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. Предпололожим, что*

$$|\bar t_0| \leqslant \sum_{\substack{\bar t \in T_0/\sim,\\ \bar t \ne \bar t_0}} |\bar t| \text{ для всех } \bar t_0 \in T_0/\sim. \tag{9.10}$$

Тогда можно выбрать такие элементы t_i, что $\{t_1, \dots, t_{|T_0|}\} = T_0$ и

1. *при* $2 \mid |T_0|$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant \frac{|T_0|}{2}$ *выполнено условие* $t_{2i-1} \nsim t_{2i}$*;*

2. *при* $2 \nmid |T_0|$ *для всех* $1 \leqslant i \leqslant \frac{|T_0|-1}{2}$ *выполнено условие* $t_{2i-1} \nsim t_{2i}$*, а элементы* $t_{|T_0|-2}$*,* $t_{|T_0|-1}$*,* $t_{|T_0|}$ *попарно неэквивалентны.*

Замечание 9.11. Заметим, что условие (9.10) не выполняется, если и только если существует такой класс эквивалентности $\bar{t}_0 \in T_0/\sim$, что $|\bar{t}_0| > \frac{|T_0|}{2}$.

Доказательство леммы 9.10. Проведём доказательство индукцией по $|T_0|$.

Прежде всего заметим, что из (9.10) следует, что $|T_0/\sim| \geqslant 2$. Предположим, что $|T_0/\sim| = 2$. Тогда из (9.10) следует, что $|\bar{t}_1| = |\bar{t}_2|$, где $T_0/\sim = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2\}$. Следовательно, можно определить $\{t_1, \ldots, t_{|T_0|}\} = T_0$ при помощи равенств $\{t_1, t_3, \ldots, t_{|T_0|-1}\} := \bar{t}_1$ и $\{t_2, t_4, \ldots, t_{|T_0|}\} := \bar{t}_2$, и лемма доказана.

Если $|T_0| = 3$, то все элементы множества T_0 попарно неэквивалентны и лемма снова доказана.

Предположим теперь, что $|T_0| > 3$. Выберем классы $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$ с наибольшим числом элементов. Фиксируем произвольные элементы $t_1 \in \bar{t}_1$ и $t_2 \in \bar{t}_2$. Заметим, что для множества $T_0 \backslash \{t_1, t_2\}$ и прежнего отношения эквивалентности $\sim$ по-прежнему выполняется условие (9.10). В силу предположения индукции можно выбрать такие $\{t_3, \ldots, t_{|T|}\} = T_0 \backslash \{t_1, t_2\}$, что элементы $t_1, \ldots, t_{|T_0|}$ удовлетворяют всем условиям леммы. $\square$

Неравенство (9.10) будет использовано ниже для того, чтобы различать случаи $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \dim A$ и $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) < \dim A$.

Докажем сперва следующий вспомогательный результат, касающийся матричных единиц алгебры $M_2(F)$:

Лемма 9.12. *Пусть* $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in F$*. Тогда*

1. $$[\alpha e_{11} + \beta e_{12}, \alpha e_{21} + \beta e_{22}] = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

2. $$\begin{aligned} &[\alpha e_{11} + \beta e_{12}, \alpha e_{21} + \beta e_{22}][\tilde{\alpha} e_{11} + \tilde{\beta} e_{12}, \tilde{\alpha} e_{21} + \tilde{\beta} e_{22}] + \\ &+[\tilde{\alpha} e_{11} + \tilde{\beta} e_{12}, \tilde{\alpha} e_{21} + \tilde{\beta} e_{22}][\alpha e_{11} + \beta e_{12}, \alpha e_{21} + \beta e_{22}] = \\ &= -\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \end{vmatrix}^2 (e_{11} + e_{22}) \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство проверяется непосредственно.

Для доказательства второго равенство достаточно заметить, что

$$[\alpha e_{11} + \beta e_{12}, \alpha e_{21} + \beta e_{22}][\tilde\alpha e_{11} + \tilde\beta e_{12}, \tilde\alpha e_{21} + \tilde\beta e_{22}] =$$
$$= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde\beta & 0 \\ -\tilde\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde\alpha & \tilde\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\tilde\beta - \beta\tilde\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde\alpha & \tilde\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \tilde\alpha & \tilde\beta \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde\alpha & \tilde\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \tilde\alpha & \tilde\beta \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \tilde\alpha\beta & \beta\tilde\beta \\ -\alpha\tilde\alpha & -\alpha\tilde\beta \end{pmatrix}.$$

□

Теперь мы можем доказать существование полилинейного F^T-многочлена, не являющегося F^T-тождеством, с достаточным числом наборов переменных, по которым он кососимметричен:

Лемма 9.13. *Пусть $T_0, T_1 \subseteq T$ и $\sim$ — соответственно, подмножества и отношение эквивалентности, заданные в начале §9.2. Предположим, что либо справедливо неравенство (9.10), либо $T_0 = \varnothing$. Тогда можно выбрать такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют такие F^T-многочлен $f \in P_n^{F^T} \backslash \operatorname{Id}^{F^T}(A)$ и попарно непересекающиеся подмножества $X_1, \ldots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, что $k = \left[\frac{n-n_0}{2\dim A}\right]$, $|X_1| = \ldots = |X_{2k}| = \dim A$, а F^T-многочлен f кососимметричен по переменным каждого множества X_j.*

Доказательство. Заметим, что многочлен

$$f_0(x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4) = \sum_{\sigma,\rho \in S_4} \operatorname{sign}(\sigma\rho) x_{\sigma(1)}\ y_{\rho(1)}\ x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}\ y_{\rho(2)} y_{\rho(3)} y_{\rho(4)}$$

не является полиномиальным тождеством для алгебры $M_2(F)$, а его значения пропорциональны единичной матрице. (См., например, теорему 5.7.4 в [66].)

Введём обозначения

$$f_{t_1,t_2}(x_{t_1,1}, x_{t_1,2}, x_{t_2,1}, x_{t_2,2}) := \left[x^{q_{t_1}}_{t_1,1}, x^{q_{t_1}}_{t_1,2}\right]\left[x^{q_{t_2}}_{t_2,1}, x^{q_{t_2}}_{t_2,2}\right] + \left[x^{q_{t_2}}_{t_2,1}, x^{q_{t_2}}_{t_2,2}\right]\left[x^{q_{t_1}}_{t_1,1}, x^{q_{t_1}}_{t_1,2}\right]$$

и

$$f_{t_1,t_2,t_3}(x_{t_1,1}, x_{t_1,2}, x_{t_2,1}, x_{t_2,2}, x_{t_3,1}, x_{t_3,2}) := \left[x^{q_{t_1}}_{t_1,1}, x^{q_{t_1}}_{t_1,2}\right]\left[x^{q_{t_3}}_{t_3,1}, x^{q_{t_3}}_{t_3,2}\right]\left[x^{q_{t_2}}_{t_2,1}, x^{q_{t_2}}_{t_2,2}\right] -$$
$$- \left[x^{q_{t_2}}_{t_2,1}, x^{q_{t_2}}_{t_2,2}\right]\left[x^{q_{t_3}}_{t_3,1}, x^{q_{t_3}}_{t_3,2}\right]\left[x^{q_{t_1}}_{t_1,1}, x^{q_{t_1}}_{t_1,2}\right].$$

Пусть $\{t_1, \ldots, t_{|T_0|}\} = T_0$ — элементы из леммы 9.10.

В случае, когда $2 \mid |T_0|$, положим

$$f_1 := z_1 \ldots z_{n-(\dim A)2k} \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{t \in T_1} f_0(x^{q_t}_{i,t,1}, \ldots, x^{q_t}_{i,t,4}, y^{q_t}_{i,t,1}, \ldots, y^{q_t}_{i,t,4}) \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\prod_{\ell=1}^{\frac{|T_0|}{2}} f_{t_{2\ell-1},t_{2\ell}}(x_{i,t_{2\ell-1},1}, x_{i,t_{2\ell-1},2}, x_{i,t_{2\ell},1}, x_{i,t_{2\ell},2}) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot f_{t_{2\ell-1},t_{2\ell}}(y_{i,t_{2\ell-1},1}, y_{i,t_{2\ell-1},2}, y_{i,t_{2\ell},1}, y_{i,t_{2\ell},2}) \right).$$

В случае, когда $2 \nmid |T_0|$, положим

$$f_1 := z_1 \dots z_{n-(\dim A)2k} \prod_{i=1}^{k} \left(\prod_{t \in T_1} f_0(x^{q_t}_{i,t,1}, \dots, x^{q_t}_{i,t,4}, y^{q_t}_{i,t,1}, \dots, y^{q_t}_{i,t,4}) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\prod_{\ell=1}^{\frac{|T_0|-3}{2}} f_{t_{2\ell-1},t_{2\ell}}(x_{i,t_{2\ell-1},1}, x_{i,t_{2\ell-1},2}, x_{i,t_{2\ell},1}, x_{i,t_{2\ell},2}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f_{t_{2\ell-1},t_{2\ell}}(y_{i,t_{2\ell-1},1}, y_{i,t_{2\ell-1},2}, y_{i,t_{2\ell},1}, y_{i,t_{2\ell},2}) \right) \cdot$$

$$\cdot f_{t_{|T_0|-2},t_{|T_0|-1},t_{|T_0|}}(x_{i,t_{|T_0|-2},1}, x_{i,t_{|T_0|-2},2};\ x_{i,t_{|T_0|-1},1}, x_{i,t_{|T_0|-1},2};\ x_{i,t_{|T_0|},1}, x_{i,t_{|T_0|},2}) \cdot$$

$$\cdot f_{t_{|T_0|-2},t_{|T_0|-1},t_{|T_0|}}(y_{i,t_{|T_0|-2},1}, y_{i,t_{|T_0|-2},2};\ y_{i,t_{|T_0|-1},1}, y_{i,t_{|T_0|-1},2};\ y_{i,t_{|T_0|},1}, y_{i,t_{|T_0|},2}).$$

Докажем, что $f_1 \notin \mathrm{Id}^{F^T}(A)$. В случае, когда $2 \mid |T_0|$, в качестве ψ возьмём произвольный изоморфизм $A/J(A) \xrightarrow{\sim} M_2(F)$. В случае, когда $2 \nmid |T_0|$, определим ψ следующим образом. Во-первых, заметим, что из $t_{|T_0|-2} \nsim t_{|T_0|-1}$ следует, что $A/J(A) = I_{t_{|T_0|-2}} \oplus I_{t_{|T_0|-1}}$. В силу теоремы 4.19 существует такой изоморфизм $\psi\colon A/J(A) \xrightarrow{\sim} M_2(F)$, что $\psi(I_{t_{|T_0|-2}}) = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ и $\psi(I_{t_{|T_0|-1}}) = \langle e_{12}, e_{22} \rangle_F$. В случае, когда $2 \nmid |T_0|$, под ψ будем понимать изоморфизм, выбранный именно таким образом.

Из леммы 4.20 следует, что для любого $t \in T_0$ существуют такие $\alpha_t, \beta_t \in F$, что

$$\psi(I_t) = \langle \alpha_t e_{i1} + \beta_t e_{i2} \mid i = 1, 2 \rangle_F.$$

В случае, когда $2 \nmid |T_0|$, в силу выбора изоморфизма ψ можно считать, что

$$(\alpha_{t_{|T_0|-2}}, \beta_{t_{|T_0|-2}}) = (1, 0) \text{ и } (\alpha_{t_{|T_0|-1}}, \beta_{t_{|T_0|-1}}) = (0, 1).$$

Заметим при этом, что $I_{t_1} = I_{t_2}$, если и только если строки $(\alpha_{t_1}, \beta_{t_1})$ и $(\alpha_{t_2}, \beta_{t_2})$ пропорциональны.

Выберем некоторый такой элемент $e \in A$, что $\psi\pi(e)$ — единичная матрица. Подставим $z_1 = \ldots = z_{n-(\dim A)2k} = e$,

$$x_{i,t,1} = y_{i,t,1} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{11}),\ x_{i,t,2} = y_{i,t,2} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{12}),$$

$$x_{i,t,3} = y_{i,t,3} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{21}),\ x_{i,t,4} = y_{i,t,4} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{22})$$

для всех $t \in T_1$ и $1 \leqslant i \leqslant k$ и

$$x_{i,t,1} = y_{i,t,1} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_t e_{11} + \beta_t e_{12}),$$

$$x_{i,t,2} = y_{i,t,2} = \left(\pi\Big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_t e_{21} + \beta_t e_{22})$$

для всех $t \in T_0$ и $1 \leqslant i \leqslant k$.

Для того, чтобы показать, что F^T-многочлен f_1 не обращается в нуль при данной подстановке, применим к результату подстановки гомоморфизм $\psi\pi$. Значение F^T-многочлена $f_{t_{2\ell-1},t_{2\ell}}$ ненулевое, так как в силу леммы 9.12

$$\begin{aligned}[][\alpha_{t_{2\ell-1}}e_{11}+\beta_{t_{2\ell-1}}e_{12},\ \alpha_{t_{2\ell-1}}e_{21}+\beta_{t_{2\ell-1}}e_{22}][\alpha_{t_{2\ell}}e_{11}+\beta_{t_{2\ell}}e_{12},\ \alpha_{t_{2\ell}}e_{21}+\beta_{t_{2\ell}}e_{22}]+\\ +[\alpha_{t_{2\ell}}e_{11}+\beta_{t_{2\ell}}e_{12},\ \alpha_{t_{2\ell}}e_{21}+\beta_{t_{2\ell}}e_{22}][\alpha_{t_{2\ell-1}}e_{11}+\beta_{t_{2\ell-1}}e_{12},\ \alpha_{t_{2\ell-1}}e_{21}+\beta_{t_{2\ell-1}}e_{22}]=\\ =-\begin{vmatrix}\alpha_{t_{2\ell-1}} & \beta_{t_{2\ell-1}}\\ \alpha_{t_{2\ell}} & \beta_{t_{2\ell}}\end{vmatrix}^2(e_{11}+e_{22})\neq 0.\end{aligned}$$

F^T-многочлен $f_{t_{|T_0|-2},t_{|T_0|-1},t_{|T_0|}}$ не обращается в нуль при данной подстановке, так как в силу леммы 9.12

$$\begin{aligned}[][e_{11},e_{21}][\alpha_{t_{|T_0|}}e_{11}+\beta_{t_{|T_0|}}e_{12},\alpha_{t_{|T_0|}}e_{21}+\beta_{t_{|T_0|}}e_{22}][e_{12},e_{22}]-\\ -[e_{12},e_{22}][\alpha_{t_{|T_0|}}e_{11}+\beta_{t_{|T_0|}}e_{12},\alpha_{t_{|T_0|}}e_{21}+\beta_{t_{|T_0|}}e_{22}][e_{11},e_{21}]=-\alpha_{t_{|T_0|}}\beta_{t_{|T_0|}}(e_{11}+e_{22})\neq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $f_1\notin \mathrm{Id}^{F^T}(A)$. Определим теперь $f:=\mathrm{Alt}_1\dots\mathrm{Alt}_{2k}f_1$, где Alt_i — оператор альтернирования по множеству X_i, где

$$X_{2i-1}:=\{x_{i,t,j}\mid t\in T,\ 1\leqslant j\leqslant 2 \text{ при } t\in T_0,\ 1\leqslant j\leqslant 4 \text{ при } t\in T_1\},$$

а

$$X_{2i}:=\{y_{i,t,j}\mid t\in T,\ 1\leqslant j\leqslant 2 \text{ при } t\in T_0,\ 1\leqslant j\leqslant 4 \text{ при } t\in T_1\},$$

$1\leqslant i\leqslant 2k$. Заметим, что f не обращается в нуль при той же самой подстановке, которая использовалась для F^T-многочлена f_1, поскольку в случае, когда альтернирование заменяет x_{i,t_1,j_1} на x_{i,t_2,j_2} при $t_1\neq t_2$, значение выражения $x_{i,t_2,j_2}^{q_{t_1}}$ становится равным нулю и соответствующее слагаемое также обращается в нуль.

Переименуем теперь переменные F^T-многочлена f в $x_1,\dots,x_n$. Тогда F^T-многочлен удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Докажем, что в случае, когда справедливо неравенство (9.10), T-градуированная PI-экспонента алгебры A равна $\dim A$:

Теорема 9.14. *Пусть $A=\bigoplus_{t\in T}A^{(t)}$ — конечномерная T-градуированно простая алгебра над полем F характеристики 0 для некоторой ленты правых нулей T, причём $A/J(A)\cong M_2(F)$. Пусть $T_0,T_1\subseteq T$ и $\sim$ — соответственно, подмножества и отношение эквивалентности, заданные в начале §9.2. Предположим, что либо справедливо неравенство (9.10), либо $T_0=\varnothing$. Тогда существуют такие $C>0$ и $r\in\mathbb{R}$, что*

$$Cn^r(\dim A)^n\leqslant c_n^{T\text{-gr}}(A)\leqslant(\dim A)^{n+1}\ \textit{для всех}\ n\in\mathbb{N}.$$

В частности, $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A)=\dim A$.

Доказательство. В силу предложения 6.15 для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство $c_n^{T\text{-gr}}(A)=c_n^{F^T}(A)$. Теперь достаточно применить предложение 6.8, лемму 9.13 и теорему 7.27. $\square$

9.3 Случай $A/J(A) \cong M_2(F)$ и $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) < \dim A$

Пусть $A = \bigoplus_{t\in T} A^{(t)}$ — конечномерная T-градуированно простая алгебра над полем F характеристики 0 для некоторой ленты правых нулей T. Пусть $T_0, T_1 \subseteq T$ и $\sim$ — соответственно, подмножества и отношение эквивалентности, заданные в начале §9.2.

Предположим, что $T_0 \ne \varnothing$ и неравенство (9.10) для алгебры A не выполнено. Это эквивалентно существованию такого $t_0 \in T_0$, что $|\bar t_0| > \frac{|T_0|}{2}$. Используя теорему 4.19, фиксируем такой изоморфизм $\psi\colon A/J(A) \to M_2(F)$, что $\psi(I_{t_0}) = \langle e_{11}, e_{21}\rangle_F$. В силу леммы 4.20 для любого $t \in T_0$ можно выбрать такие $\alpha_t, \beta_t \in F$, что набор $(\alpha_t e_{i1} + \beta_t e_{i2} \mid 1 \leqslant i \leqslant 2)$ является базисом пространства $\psi(I_t)$. Без ограничения общности можно считать, что $(\alpha_t, \beta_t) = (1, 0)$ при $t \sim t_0$. Заметим, что если $I_t \ne I_{t_0}$, то $\beta_t \ne 0$.

Для каждого $t \in T_0$ выберем в компоненте $A^{(t)}$ базис

$$\left(\left(\pi\big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_t e_{i1} + \beta_t e_{i2}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant 2\right)$$

, а для каждого $t \in T_1$ выберем в компоненте $A^{(t)}$ базис

$$\left(\left(\pi\big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{ij}) \;\middle|\; 1 \leqslant i, j \leqslant 2\right).$$

Определим базис $\mathcal{B}$ в алгебре A как объединение базисов компонент $A^{(t)}$, выбранных выше.

Вычислим теперь числа γ_i, введённые в начале §9.1. Заметим, что

$$\theta\left(\left(\pi\big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_t e_{i1} + \beta_t e_{i2})\right) = i - 2$$

при $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $t \in T_0$, $t \nsim t_0$. Отсюда

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|T_0|+2|T_1|}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{|T_1|+|\bar t_0|}), \tag{9.11}$$

и разбиения $\lambda \vdash n$, отвечающие неприводимым S_n-характерам, встречающимся в разложении T-градуированного кохарактера алгебры A, удовлетворяют неравенству из леммы 9.2.

Ниже доказываются три леммы, которые позволят выбрать элементы $b_1, \ldots, b_m$, которые затем будут подставлены вместо переменных с номерами из заданного столбца некоторой диаграммы Юнга. При выборе элементов $b_1, \ldots, b_m$ важно контролировать значение суммы $\sum_{j=1}^m \theta(b_i)$.

Лемма 9.15. *Пусть* $1 \leqslant m \leqslant r$. *Тогда*

$$m - \sum_{j=1}^m \gamma_j \leqslant 3|T_0| + 4|T_1| - 2|\bar t_0|.$$

Доказательство. Если $m \leqslant |T_0| + |T_1| - |\bar t_0|$, то $\gamma_j = -1$ при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $\sum_{j=1}^m \gamma_j = -m$. Следовательно,

$$m - \sum_{j=1}^m \gamma_j = 2m \leqslant 2|T_0| + 2|T_1| - 2|\bar t_0| \leqslant 3|T_0| + 4|T_1| - 2|\bar t_0|.$$

Если $|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0| \leqslant m \leqslant 2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0|$, то $\gamma_j = 0$ при $|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0| < j \leqslant m$ и $\sum_{j=1}^m \gamma_j = -(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)$. Следовательно,

$$m - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = m + (|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) \leqslant 3|T_0| + 4|T_1| - 2|\bar{t}_0|.$$

Если $m \geqslant 2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0|$, то из равенства $\gamma_j = 1$ при $j > 2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0|$ следует, что

$$m - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 3|T_0| + 4|T_1| - 2|\bar{t}_0|.$$

□

Лемма 9.16. *Пусть* $\sum_{j=1}^m \gamma_j > 0$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда существуют такие* $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$, *где* $b_i \neq b_j$ *при* $i \neq j$, *что* $\sum_{j=1}^m \theta(b_j) = \sum_{j=1}^m \gamma_j$ *и*

- *если* $\{b_1, \ldots, b_m\} \cap A^{(t)} = \{b_i\}$ *для некоторых* $1 \leqslant i \leqslant m$ *и* $t \in T_0 \sqcup T_1$, *то* $t \in T_0$, $t \sim t_0$ *и* $b_i = \left(\pi\big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{11})$;
- *если* $\{b_1, \ldots, b_m\} \cap A^{(t)} = \{b_i, b_j\}$ *для некоторых* $1 \leqslant i, j \leqslant m$ *и* $t \in T_0 \sqcup T_1$, *то либо* $\theta(b_i) \neq 0$, *либо* $\theta(b_j) \neq 0$.

Доказательство. В силу определения чисел γ_i (см. начало §9.1), существуют такие $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$, где $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$, что $\sum_{j=1}^m \theta(b_j) = \sum_{j=1}^m \gamma_j$ и $\sum_{j=1}^m \theta(a_j) \geqslant \sum_{j=1}^m \gamma_j$ для всех $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{B}$, где $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Поскольку $\sum_{j=1}^m \gamma_j > 0$, из минимальности $\sum_{j=1}^m \theta(b_j)$ следует, что множество $\{b_1, \ldots, b_m\}$ содержит все элементы $b \in \mathcal{B}$ с $\theta(b) \leqslant 0$. Теперь утверждение леммы следует из выбора множества $\mathcal{B}$. □

Лемма 9.17. *Пусть* $\sum_{j=1}^m \gamma_j \leqslant q \leqslant 0$ *для некоторых* $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$. *Тогда существуют такие* $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$, *где* $b_i \neq b_j$ *при* $i \neq j$, *что* $\sum_{j=1}^m \theta(b_j) = q$ *и*

- *если* $\{b_1, \ldots, b_m\} \cap A^{(t)} = \{b_i\}$, $\theta(b_i) = 0$ *для некоторых* $1 \leqslant i \leqslant m$ *и* $t \in T_0 \sqcup T_1$, *то* $t \in T_0$, $t \sim t_0$ *и* $b_i = \left(\pi\big|_{A^{(t)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{11})$;
- *если* $\{b_1, \ldots, b_m\} \cap A^{(t)} = \{b_i, b_j\}$ *для некоторых* $1 \leqslant i, j \leqslant m$ *и* $t \in T_0 \sqcup T_1$, *то либо* $\theta(b_i) \neq 0$, *либо* $\theta(b_j) \neq 0$.

Доказательство. Напомним, что

$$|\{b \in \mathcal{B} \mid \theta(b) = -1\}| = |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|,$$

$$|\{b \in \mathcal{B} \mid \theta(b) = 0\}| = |T_0| + 2|T_1|,$$

$$|\{b \in \mathcal{B} \mid \theta(b) = 1\}| = |T_1| + |\bar{t}_0|.$$

Пусть $\{t_1, \ldots, t_{|T_1|}\} := T_1$, $\{\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_{|T_0| - |\bar{t}_0|}\} := T_0 \backslash \bar{t}_0$, $\{\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_{|\bar{t}_0|}\} := \bar{t}_0$.

Выделим следующие два случая:

1. Пусть $m < 2(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) + q$. Положим $\ell = \left[\frac{m+q}{2}\right]$. Заметим, что тогда

$$\ell - q \leqslant \frac{m-q}{2} < |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|$$

и $\ell \leqslant \ell - q < |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0| < |T_1| + |\bar{t}_0|$. Из этих неравенств будет следовать, что ниже у нас окажется достаточно элементов из $(T_0 \backslash \bar{t}_0) \sqcup T_1$ и $\bar{t}_0 \sqcup T_1$, соответственно.

Предположим сперва, что $m = 2\ell - q$. Если $\ell \leqslant |T_1| + q$, то возьмём

$$\{b_1, \ldots, b_m\} = \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{12}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell - q \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell \right\}.$$

Если же $|T_1| + q < \ell \leqslant |T_1|$, то возьмём

$$\{b_1, \ldots, b_m\} = \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{12}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant |T_1| \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i} e_{11} + \beta_{\tilde{t}_i} e_{12}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell - q - |T_1| \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell \right\}.$$

При $\ell > |T_1|$ возьмём

$$\{b_1, \ldots, b_m\} = \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{12}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant |T_1| \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i} e_{11} + \beta_{\tilde{t}_i} e_{12}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell - q - |T_1| \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant |T_1| \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\hat{t}_i)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant \ell - |T_1| \right\}.$$

При $m = 2\ell - q + 1$ в каждом из трёх случаев, рассмотренных выше, добавим элемент $\left(\pi\big|_{A^{(\hat{t}_1)}}\right)^{-1} \psi^{-1}(e_{11})$.

2. Пусть $m \geqslant 2(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) + q$.

В силу леммы 9.15

$$m - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \leqslant 3|T_0| + 4|T_1| - 2|\bar{t}_0|.$$

Следовательно,

$$m - q - 2(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) \leqslant |T_0| + 2|T_1|$$

и можно выбрать такие

$$0 \leqslant k, \ell \leqslant |T_1|, \qquad 0 \leqslant s \leqslant |\bar{t}_0|, \qquad 0 \leqslant u \leqslant |T_0| - |\bar{t}_0|,$$

что $2(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) + q + k + \ell + s + u = m$.

Заметим, что

$$(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) + q \geqslant (|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \geqslant 0.$$

Если $(|T_0|+|T_1|-|\bar{t}_0|)+q \leqslant |T_1|$, определим

$$\begin{aligned}\{b_1,\dots,b_m\} = \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{12}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant |T_1| \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{11}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant k \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant (|T_0|+|T_1|-|\bar{t}_0|)+q \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{22}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant \ell \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i}e_{11}+\beta_{\tilde{t}_i}e_{12}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant |T_0|-|\bar{t}_0| \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i}e_{21}+\beta_{\tilde{t}_i}e_{22}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant u \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\hat{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{11}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant s \right\}.\end{aligned}$$

При $(|T_0|+|T_1|-|\bar{t}_0|)+q > |T_1|$ определим

$$\begin{aligned}\{b_1,\dots,b_m\} = \left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{12}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant |T_1| \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{11}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant k \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant |T_1| \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{22}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant \ell \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i}e_{11}+\beta_{\tilde{t}_i}e_{12}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant |T_0|-|\bar{t}_0| \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\tilde{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(\alpha_{\tilde{t}_i}e_{21}+\beta_{\tilde{t}_i}e_{22}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant u \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(\hat{t}_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{11}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant s \right\}\cup\\ \cup\left\{ \left(\pi\big|_{A^{(t_i)}}\right)^{-1}\psi^{-1}(e_{21}) \;\middle|\; 1\leqslant i\leqslant (|T_0|-|\bar{t}_0|)+q \right\}.\end{aligned}$$

□

В лемме ниже доказывается существование F^T-многочлена, который не является F^T-тождеством, но в то же время кососимметричен по достаточному числу наборов переменных. Этот F^T-многочлен и будет порождать FS_n-подмодуль с размерностью, достаточной для доказательства оценки снизу.

Лемма 9.18. *Пусть* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\vdash n$ *для некоторого* $n\in\mathbb{N}$. *Если* $\sum_{i=1}^r \gamma_i\lambda_i \leqslant 0$ *и* $2\mid\lambda_i$ *при* $i\geqslant 2$, *то существует диаграмма Юнга* T_λ *формы* λ *и* F^T*-многочлен* $f\in P_n^{F^T}$ *такой, что* $b_{T_\lambda}f=\sum_{\sigma\in C_{T_\lambda}}(\operatorname{sign}\sigma)\sigma f\notin \operatorname{Id}^{F^T}(A)$.

Доказательство. Обозначим через μ_i число клеток в i-м столбце таблицы T_λ. Пусть $m_i:=\sum_{j=1}^{\mu_i}\gamma_j$ для $1\leqslant i\leqslant\lambda_1$.

Заметим, что в силу того, что число $(\lambda_i-\lambda_{i+1})$ равно числу столбцов высоты i (полагаем $\lambda_{r+1}:=0$), а λ_1 равно числу всех столбцов, неравенство $\sum_{i=1}^r\gamma_i\lambda_i\leqslant 0$ может быть переписано как

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{i}\gamma_j-\sum_{j=1}^{i-1}\gamma_j\right)\lambda_i=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{i}\gamma_j\right)(\lambda_i-\lambda_{i+1})=\sum_{i=1}^{\lambda_1}m_i\leqslant 0. \tag{9.12}$$

В силу леммы 9.1, если сумма значений функции θ на элементах базиса, подставленных вместо переменных некоторого полилинейного F^T-многочлена больше, чем 1, такой F^T-многочлен обращается в нуль. Ниже будут выбраны такие элементы $b_{itj} \in A^{(t)} \cap \mathcal{B}$, что сумма значений на них функции θ равна 0. В случае, когда $m_i > 0$ для некоторого i, нам потребуется сделать сумму значений функции θ на элементах, подставляемых в некоторые другие столбцы, отрицательной.

Определим число $1 \leqslant \ell \leqslant \lambda_1$ при помощи условий $m_\ell > 0$ и $m_{\ell+1} \leqslant 0$. Поскольку $2 \mid \lambda_i$ для всех $i \geqslant 2$, для всех $1 \leqslant j \leqslant \frac{\lambda_2}{2}$ выполняется равенство $m_{2j-1} = m_{2j}$. Напомним, что $m_i = -1$ при $\lambda_2 + 1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$. Отсюда $\ell \leqslant \lambda_2$, $2 \mid \ell$ и $2 \mid \sum_{i=1}^{\ell} m_i$. В силу (9.12)

$$2\sum_{i=1}^{\lambda_2/2} m_{2i} - (\lambda_1 - \lambda_2) = \sum_{i=1}^{\lambda_1} m_i \leqslant 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{\lambda_2/2} m_{2i} - \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right] \leqslant 0.$$

Отсюда можно выбрать такие числа N и k_{2i}, где $\ell < 2i \leqslant \lambda_2$, что $0 \leqslant N \leqslant \left[\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right]$, $m_{2i} \leqslant k_{2i} \leqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{\ell/2} m_{2i} + \sum_{i=\ell/2+1}^{\lambda_2} k_{2i} - N = 0$. Пусть $k_{2i-1} := k_{2i}$ при $\frac{\ell}{2} < i \leqslant \frac{\lambda_2}{2}$, $k_i := -1$ при $\lambda_2 + 1 \leqslant i \leqslant \lambda_2 + 2N$, $k_i := 0$ при $\lambda_2 + 2N + 1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \sum_{i=\ell+1}^{\lambda_1} k_i = 0. \tag{9.13}$$

Теперь для всякого $1 \leqslant i \leqslant \ell$ воспользуемся леммой 9.16, положив $m = \mu_i$, а для всякого $\ell + 1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$ воспользуемся леммой 9.17, положив $m = \mu_i$ и $q = k_i$. Отсортируем получившиеся элементы b_j в соответствии с теми однородными компонентами $A^{(t)}$, которым эти элементы принадлежат. Для всякого $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$ получим элементы $b_{itj} \in A^{(t)} \cap \mathcal{B}$, где $t \in T_0 \sqcup T_1$, $1 \leqslant j \leqslant n_{it}$, общее число элементов b_{itj} при фиксированных i и t равно $n_{it} \geqslant 0$,

$$\sum_{t \in T_0 \sqcup T_1} n_{it} = \mu_i,$$

$$b_{it_1j_1} \ne b_{it_2j_2} \text{ при } (t_1, j_1) \ne (t_2, j_2),$$

$$\sum_{t \in T_0 \sqcup T_1} \sum_{j=1}^{n_{it}} \theta(b_{itj}) = m_i \text{ при } m_i > 0$$

и

$$m_i \leqslant \sum_{t \in T_0 \sqcup T_1} \sum_{j=1}^{n_{it}} \theta(b_{itj}) = k_i \leqslant 0 \text{ при } m_i \leqslant 0.$$

В силу (9.13) справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\lambda_1} \sum_{t \in T_0 \sqcup T_1} \sum_{j=1}^{n_{it}} \theta(b_{itj}) = 0. \tag{9.14}$$

Поскольку для всех $2i \leqslant \lambda_2$ справедливы равенства $k_{2i-1} = k_{2i}$ и $\mu_{2i-1} = \mu_{2i}$, можно считать, что $n_{2i-1,t} = n_{2i,t}$, $b_{2i-1,t,j} = b_{2i,t,j}$ для всех $1 < 2i \leqslant \lambda_2$, $t \in T_0 \sqcup T_1$, $1 \leqslant j \leqslant n_{2i,t}$.

Элементы b_{itj} будут впоследствии подставляться вместо тех переменных, номера которых находятся в i-м столбце таблицы T_λ.

Обозначим через W_{-1} множество всех таких пар (i,t), где $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$, $t \in T_0 \sqcup T_1$, что $\theta(b_{itj}) \leqslant 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n_{ti}$, причём для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n_{ti}$ справедливо равенство $\theta(b_{itj}) = -1$. Через W_1 обозначим множество всех таких пар (i,t), где $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$, $t \in T_0 \sqcup T_1$, что $\theta(b_{itj}) \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n_{ti}$, причём для некоторого $1 \leqslant j \leqslant n_{ti}$ справедливо равенство $\theta(b_{itj}) = 1$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$ определим $W_1^{(i)} := \{t \in T_0 \sqcup T_1 \mid (i,t) \in W_1\}$ и и $W_0^{(i)} := \{t \in T_0 \sqcup T_1 \mid (i,t) \notin W_{-1} \sqcup W_1, n_{it} > 0\}$.

В силу (9.14) справедливо равенство $|W_{-1}| = |W_1|$. Следовательно, существуют такие отображения $\varkappa\colon W_1 \to \{1,\dots,\lambda_1\}$ и $\rho\colon W_1 \to T_0 \sqcup T_1$, что $(i,t) \mapsto (\varkappa(i,t), \rho(i,t))$ является биекцией $W_1 \to W_{-1}$.

Определим теперь многочлены f_{it} и $\tilde f_{it}$, где $1 \leqslant i \leqslant \lambda_2$, а $t \in T_0 \sqcup T_1$, следующим образом.

При $n_{it} = 1$ положим $f_{it}(x_1) := x_1$.

При $n_{it} = 2$ положим $f_{it}(x_1, x_2) := x_1 x_2 - x_2 x_1$.

При $n_{it} = 3$ положим $f_{it}(x_1, x_2, x_3) := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$.

При $1 \leqslant n_{it} \leqslant 3$ положим

$$\tilde f_{it}(x_1, \dots, x_{n_{it}}; y_1, \dots, y_{n_{it}}) := f_{it}(x_1, \dots, x_{n_{it}}) f_{it}(y_1, \dots, y_{n_{it}}).$$

При $n_{it} = 4$ положим

$$\tilde f_{it}(x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_4) := \sum_{\sigma,\tau \in S_4} \operatorname{sign}(\sigma\tau) x_{\sigma(1)}\ y_{\tau(1)}\ x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}\ y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} y_{\tau(4)}.$$

Напомним, что такой многочлен не является для алгебры $M_2(F)$ полиномиальным тождеством, а его значения пропорциональны единичной матрице. (См., например, [66, теорема 5.7.4].)

Пусть $X_i := \{x_{itj} \mid 1 \leqslant j \leqslant n_{it},\ t \in T_0 \sqcup T_1\}$, $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$. Обозначим через Alt_i оператор альтернирования по переменным из множества X_i.

Положим

$$\begin{aligned}
f := \operatorname{Alt}_1 \operatorname{Alt}_2 \dots \operatorname{Alt}_{\lambda_1} \prod_{i=1}^{\lambda_2/2} \Biggl(\prod_{t \in W_0^{(2i-1)}} \tilde f_{2i-1,t}\bigl(x^{q_t}_{2i-1,t,1}, \dots, x^{q_t}_{2i-1,t,n_{2i-1,t}};\ x^{q_t}_{2i,t,1}, \dots, x^{q_t}_{2i,t,n_{2i,t}}\bigr) \cdot \\
\cdot \Biggl(\prod_{t \in W_1^{(2i-1)}} f_{\varkappa(2i-1,t)\rho(2i-1,t)} \left(x^{q_{\rho(2i-1,t)}}_{\varkappa(2i-1,t)\rho(2i-1,t)1}, \dots, x^{q_{\rho(2i-1,t)}}_{\varkappa(2i-1,t)\rho(2i-1,t)n_{\varkappa(2i-1,t)\rho(2i-1,t)}} \right) \cdot \\
\cdot\ f_{2i-1,t}\bigl(x^{q_t}_{2i-1,t,1}, \dots, x^{q_t}_{2i-1,t,n_{2i-1,t}}\bigr) \cdot \\
\cdot f_{\varkappa(2i,t)\rho(2i,t)} \left(x^{q_{\rho(2i,t)}}_{\varkappa(2i,t)\rho(2i,t)1}, \dots, x^{q_{\rho(2i,t)}}_{\varkappa(2i,t)\rho(2i,t)n_{\varkappa(2i,t)\rho(2i,t)}} \right) \cdot \\
\cdot\ f_{2i,t}\bigl(x^{q_t}_{2i,t,1}, \dots, x^{q_t}_{2i,t,n_{2i,t}}\bigr)\Biggr)\Biggr) \prod_{\substack{i=\lambda_2+1,\\ t \in W_0^{(i)}}}^{\lambda_1} x^{q_t}_{it1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу лемм 9.16 и 9.17 в случае, когда $(i,t) \in W_{-1}$, множество $\{\psi\pi(b_{it1}),\ldots,\psi\pi(b_{itn_{it}})\}$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{e_{12}\}$, $\{\alpha_t e_{11}+\beta_t e_{12}\}$, $\{e_{12},e_{22}\}$, $\{e_{11},e_{12}\}$, $\{\alpha_t e_{11}+\beta_t e_{12}, \alpha_t e_{21}+\beta_t e_{22}\}$, $\{e_{11},e_{12},e_{22}\}$.

Если $t \in W_0^{(i)}$, то $\{\psi\pi(b_{it1}),\ldots,\psi\pi(b_{itn_{it}})\}$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{e_{11}\}$, $\{e_{12},e_{21}\}$, $\{e_{12},e_{22},e_{21}\}$, $\{e_{11},e_{12},e_{21}\}$, $\{e_{11},e_{12},e_{22},e_{21}\}$.

Если $t \in W_1^{(i)}$, то $\{\psi\pi(b_{it1}),\ldots,\psi\pi(b_{itn_{it}})\}$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{e_{21}\}$, $\{e_{22},e_{21}\}$, $\{e_{21},e_{11}\}$, $\{e_{22},e_{21},e_{11}\}$.

В силу леммы 9.12 и всех замечаний, сделанных выше, значение F^T-многочлена f при подстановке $x_{itj}=b_{itj}$, где $1 \leqslant i \leqslant \lambda_1$, $t \in T_0 \sqcup T_1$, $1 \leqslant j \leqslant n_{it}$, не обращается в нуль под действием гомоморфизма $\psi\pi$, поскольку если для каких-то $t_1 \ne t_2$ альтернирование заменяет x_{i,t_1,j_1} на x_{i,t_2,j_2}, то значение выражения $x^{q_{t_1}}_{i,t_2,j_2}$ нулевое и всё соответствующее слагаемое обращается в нуль. Переименуем теперь для удобства переменные F^T-многочлена f в $x_1,\ldots,x_n$. Тогда f удовлетворяет всем требования данной леммы. $\square$

Теперь мы готовы вычислить $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A)$ в случае, когда неравенство (9.10) не выполнено:

Теорема 9.19. *Пусть A — конечномерная T-градуированно простая алгебра над полем F характеристики 0 для некоторой ленты правых нулей T, причём $A/J(A) \cong M_2(F)$. Пусть $T_0, T_1 \subseteq T$ и $\sim$ — соответственно, подмножества и отношение эквивалентности, заданные в начале §9.2. Предположим, что $|\bar t_0| > \frac{|T_0|}{2}$ для некоторого $\bar t_0 \in T_0/\sim$. Тогда*

$$\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = |T_0| + 2|T_1| + 2\sqrt{(|T_1|+|\bar t_0|)(|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|)} < 2|T_0| + 4|T_1| = \dim A.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — базис алгебры A, выбранный в начале §9.3 Из равенства (9.11) следует, что $0 < \zeta = \sqrt{\frac{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|}{|T_1|+|\bar t_0|}} < 1$ является корнем уравнения (9.3).

Пусть

$$\Omega = \left\{ (\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \mathbb{R}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1,\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^r \gamma_i \alpha_i \leqslant 0 \right\}.$$

В силу леммы 9.7

$$d := \max_{x\in\Omega} \Phi(x) = \sum_{i=1}^r \zeta^{\gamma_i} = |T_0| + 2|T_1| + 2\sqrt{(|T_1|+|\bar t_0|)(|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|)}. \tag{9.15}$$

Обозначим через $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \Omega$ такую точку, что $\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) = d$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $\mu \vdash n$ при помощи равенств $\mu_i := 2\left[\frac{\alpha_i n}{2}\right]$ при $2 \leqslant i \leqslant r$ и $\mu_1 := n - \sum_{i=2}^r \mu_i$.

В силу (9.7) справедливо равенство $\sum_{i=1}^r \gamma_i \alpha_i = 0$. Поскольку

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|} = -1,$$

$$\gamma_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \gamma_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} = 0,$$

и

$$\gamma_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \gamma_r = 1,$$

из (9.8) следует, что

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|},$$

$$\alpha_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \alpha_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|},$$

$$\alpha_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \alpha_r,$$

откуда

$$\alpha_1 n - 2 \leqslant \mu_2 = \ldots = \mu_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|} \leqslant \alpha_1 n,$$

$$\alpha_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1} n - 2 \leqslant \mu_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} \leqslant \alpha_{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1} n,$$

$$\alpha_r n - 2 \leqslant \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1} = \ldots = \mu_r \leqslant \alpha_r n.$$

Теперь из $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ следует, что $\alpha_1 n \leqslant \mu_1 \leqslant \alpha_1 n + 2r$.

Заметим, что

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^r \gamma_i \mu_i = -\left(n - \sum_{i=2}^r \mu_i\right) - \sum_{i=2}^{|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|} \mu_i + \sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1}^{r} \mu_i = \\ = \left(\sum_{i=|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1}^{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} \mu_i\right) + 2\left(\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1}^{r} \mu_i\right) - n \leqslant \\ \leqslant n\left(\sum_{i=|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1}^{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} \alpha_i\right) + 2n\left(\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1}^{r} \alpha_i\right) - n\sum_{i=1}^r \alpha_i = n\sum_{i=1}^r \gamma_i\alpha_i = 0.\end{gathered} \tag{9.16}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^r \gamma_i \mu_i = \left(\sum_{i=|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1}^{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} \mu_i\right) + 2\left(\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1}^{r} \mu_i\right) - n \geqslant \\ \geqslant n\left(\sum_{i=|T_0|+|T_1|-|\bar t_0|+1}^{2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|} \alpha_i\right) + 2n\left(\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar t_0|+1}^{r} \alpha_i\right) - n\sum_{i=1}^r \alpha_i - 4r = \\ = n\sum_{i=1}^r \gamma_i\alpha_i - 4r = -4r.\end{gathered} \tag{9.17}$$

Из (9.16) и леммы 9.18 следует, что $b_{T_\mu} f \notin \mathrm{Id}^{F^T}(A)$ для некоторого $f \in P_n^{F^T}$. Обозначим через $\bar f$ образ F^T-многочлена f в факторпространстве $\frac{P_n^{F^T}}{P_n^{F^T} \cap \mathrm{Id}^{F^T}(A)}$. Рассмотрим подмодуль $FS_n b_{T_\mu} \bar f \subseteq \frac{P_n^{F^T}}{P_n^{F^T} \cap \mathrm{Id}^{F^T}(A)}$. Поскольку все S_n-представления над полями характеристики 0 вполне приводимы,

$$FS_n b_{T_\mu} \bar f \cong FS_n e_{T_{\lambda^{(1)}}} \oplus \ldots \oplus FS_n e_{T_{\lambda^{(s)}}}$$

для некоторых $\lambda^{(i)} \vdash n$ и некоторых таблиц Юнга $T_{\lambda^{(i)}}$ формы $\lambda^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $s \in \mathbb{N}$. В частности, $e^*_{T_{\lambda^{(1)}}} FS_n b_{T_\mu} \neq 0$.

Теперь заметим, что из $e^*_{T_{\lambda^{(1)}}} FS_n b_{T_\mu} \neq 0$ следует, что $a_{T_{\lambda^{(1)}}} \sigma b_{T_\mu} = \sigma a_{\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}} b_{T_\mu} \neq 0$ для некоторой подстановки $\sigma \in S_n$. В силу того, что $a_{\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}}$ является оператором симметризации по числам из строк таблицы Юнга $\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}$, а b_{T_μ} является оператором альтернирования по числам из столбцов таблицы Юнга T_μ, все числа из первой строчки таблицы $\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}$ должны находиться в разных столбцах таблицы T_μ. Отсюда $\left(\lambda^{(1)}\right)_1 \leqslant \mu_1$. Более того, все числа из каждого из μ_r первых столбцов таблицы T_μ должны находиться в разных строчках таблицы $\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}$. Поскольку в силу леммы 9.2 справедливо равенство $\left(\lambda^{(1)}\right)_{r+1} = 0$, получаем отсюда, что $\left(\lambda^{(1)}\right)_r \geqslant \mu_r$.

Теперь из (9.17) и того, что $\mu_1 - \mu_i \leqslant 2(r+1)$ для всех $2 \leqslant i \leqslant |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|$, следует, что

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \left(\lambda^{(1)}\right)_i \geqslant \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \left(\lambda^{(1)}\right)_i - \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mu_i - 4r =$$
$$= \sum_{i=1}^{|T_0|+|T_1|-|\bar{t}_0|} \left(\mu_i - \left(\lambda^{(1)}\right)_i\right) + \sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|+1}^{r} \left(\left(\lambda^{(1)}\right)_i - \mu_i\right) - 4r \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{|T_0|+|T_1|-|\bar{t}_0|} \left(\mu_1 - \left(\lambda^{(1)}\right)_i\right) + \sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|+1}^{r} \left(\left(\lambda^{(1)}\right)_i - \mu_r\right) - 6r - 2r^2$$

Поскольку в силу леммы 9.2 справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \left(\lambda^{(1)}\right)_i \leqslant 1$ и оба числа $\left(\mu_1 - \left(\lambda^{(1)}\right)_i\right)$ и $\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_i - \mu_r\right)$ неотрицательные, получаем, что $\mu_1 - (2r^2+6r+1) \leqslant \left(\lambda^{(1)}\right)_i \leqslant \mu_1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|$ и $\mu_r \leqslant \left(\lambda^{(1)}\right)_i \leqslant \mu_r + (2r^2 + 6r + 1)$ для всех $2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0| + 1 \leqslant i \leqslant r$.

Напомним, что из $a_{\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}} b_{T_\mu} \neq 0$ следует, что все числа из любого столбца таблицы T_μ находятся в разных строчках таблицы $\sigma^{-1}T_{\lambda^{(1)}}$. Применяя это свойство к первым $\mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|}$ столбцам, получаем, что в последних $|\bar{t}_0| + |T_1| + 1$ строчках таблицы $T_{\lambda^{(1)}}$ находятся как минимум $\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|}^{r} \mu_i$ клеток и

$$\sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|}^{r} \left(\lambda^{(1)}\right)_i \geqslant \sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|}^{r} \mu_i = (|\bar{t}_0| + |T_1|)\mu_r + \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|}.$$

Следовательно,

$$\lambda^{(1)}_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|} \geqslant (|\bar{t}_0| + |T_1|)\mu_r + \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|} - \sum_{i=2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|+1}^{r} \left(\lambda^{(1)}\right)_i \geqslant$$
$$\geqslant \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|} - (2r^3 + 6r^2 + r)$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, где

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu_1 - (2r^2 + 6r + 1) & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|, \\ \mu_{2|T_0|+3|T_1|-|\bar{t}_0|} - (2r^3 + 6r^2 + r) & \text{при} \quad |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0| + 1 \leqslant i \leqslant 2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0|, \\ \mu_r & \text{при} \quad 2|T_0| + 3|T_1| - |\bar{t}_0| + 1 \leqslant i \leqslant r. \end{cases}$$

Введем обозначение $n_1 := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$. Тогда $n - (2r^4 + 6r^3 + r^2) \leqslant n_1 \leqslant n$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ справедливы неравенства $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$ и $\Phi\left(\frac{\lambda_1}{n_1}, \ldots, \frac{\lambda_r}{n_1}\right) > d - \varepsilon$. Поскольку D_λ является поддиаграммой диаграммы Юнга $D_{\lambda^{(1)}}$, справедливо неравенство $c_n^{F^T}(A) \geqslant \dim M_\lambda$ и в силу формулы крюков и формулы Стирлинга существуют такие $C_1 > 0$ и $r_1 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{gathered} c_n^{F^T}(A) \geqslant \dim M(\lambda) = \frac{n_1!}{\prod_{i,j} h_{ij}} \geqslant \frac{n_1!}{(\lambda_1 + r - 1)! \ldots (\lambda_r + r - 1)!} \geqslant \\ \geqslant \frac{n_1!}{n_1^{r(r-1)} \lambda_1! \ldots \lambda_r!} \geqslant \frac{C_1 n_1^{r_1} \left(\frac{n_1}{e}\right)^{n_1}}{\left(\frac{\lambda_1}{e}\right)^{\lambda_1} \ldots \left(\frac{\lambda_r}{e}\right)^{\lambda_r}} \geqslant \\ \geqslant C_1 n_1^{r_1} \left(\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1}{n_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{n_1}} \ldots \left(\frac{\lambda_r}{n_1}\right)^{\frac{\lambda_r}{n_1}}} \right)^{n_1} \geqslant C_1 n_1^{r_1} (d - \varepsilon)^{n - (2r^4 + 6r^3 + r^2)}. \end{gathered} \tag{9.18}$$

Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{F^T}(A)} \geqslant d - \varepsilon$. Из произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{F^T}(A)} \geqslant d$. В силу предложения 6.15 и (9.15)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)} \geqslant |T_0| + 2|T_1| + 2\sqrt{(|T_1| + |\bar{t}_0|)(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)}.$$

Применяя теорему 9.8 и (9.15), получаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)} \leqslant |T_0| + 2|T_1| + 2\sqrt{(|T_1| + |\bar{t}_0|)(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)}.$$

Из условия $|\bar{t}_0| > \frac{|T_0|}{2}$ следует, что $|T_1| + |\bar{t}_0| > |T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|$,

$$2\sqrt{(|T_1| + |\bar{t}_0|)(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)} < (|T_1| + |\bar{t}_0|) + (|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{T\text{-gr}}(A)} = |T_0| + 2|T_1| + 2\sqrt{(|T_1| + |\bar{t}_0|)(|T_0| + |T_1| - |\bar{t}_0|)} < 2|T_0| + 4|T_1| = \dim A.$$

$\square$

Замечание 9.20. Конечномерная T-градуированно простая алгебра A с заданными $|T_0|$, $|T_1|$ и $\frac{|T_0|}{2} < |\bar{t}_0| \leqslant |T_0|$ существует в силу предложения 4.30.

Замечание 9.21. Алгебра A из теоремы 9.19 не содержит единицу, поскольку иначе в силу предложения 4.6 существовал бы изоморфизм $A \cong M_2(F)$, откуда в силу предложения 6.14 и теоремы 7.38 (применённой для тривиальной группы G) было бы справедливо равенство

$$\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \mathrm{PIexp}(A) = \dim A = 4.$$

Вообще, как мы увидим чуть ниже в теореме 9.28, если алгебра, градуированная лентой правых нулей является алгеброй с единицей, её градуированная PI-экспонента всегда целая и совпадает с её обычной PI-экспонентой.

Напомним, что в §4.1 через Q_3 была обозначена лента правых нулей, состоящая из двух элементов. Пользуясь теоремой 9.19, мы можем построить пример такой конечномерной Q_3-простой алгебры A, что $\mathrm{PIexp}^{Q_3\text{-gr}}(A) < \dim A$ и не является целым числом:

Теорема 9.22. *Пусть F — поле характеристики 0. Обозначим через I неприводимый левый $M_2(F)$-модуль, изоморфный минимальному левому идеалу $\langle e_{12}, e_{22}\rangle_F \subset M_2(F)$. Пусть $A = M_2(F) \oplus I$ (прямая сумма левых идеалов), где $IM_2(F) := 0$, а $I^2 := 0$. Определим на A градуировку полугруппой Q_3 при помощи равенств $A^{(e_1)} = (M_2(F), 0)$, $A^{(e_2)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in I\}$, где $\varphi\colon I \hookrightarrow M_2(F)$ — естественное вложение, которое является гомоморфизмом $M_2(F)$-модулей. Тогда алгебра A является Q_3-градуированно простой и существует*

$$\mathrm{PIexp}^{Q_3\text{-gr}}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_3\text{-gr}}(A)} = 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}8284\ldots$$

Замечание 9.23. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_3^{\mathrm{op}}\text{-gr}}(A^{\mathrm{op}})} = 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}8284\ldots$

Доказательство теоремы 9.22. Сперва заметим, что $J(A) = I$. Предположим, что $W \neq 0$ — некоторый градуированный идеал алгебры A. Тогда существует ненулевой однородный элемент $(a_1, b_1) \in W$, где $a_1 \in M_2(F)$, а $b_1 \in I$. Поскольку I не содержит ненулевых однородных элементов, выполнено условие $a_1 \neq 0$. Тогда $(a_1, b_1)(E, 0) = (a_1, 0) \in (M_2(F), 0) \cap W$. Поскольку W является двусторонним идеалом, а алгебра $M_2(F)$ — проста, справедливо включение $(M_2(F), 0) \subseteq W$. Более того, $(0, I) = (M_k(F), 0)(0, I) \subseteq W$. Отсюда $W = A$, и алгебра A действительно Q_3-градуированно проста.

Определяя множества T_0 и T_1 так, как было указано в начале §9.2, получаем, что $T_0 = \{e_2\}$, $T_1 = \{e_1\}$. Отсюда согласно теореме 9.19 справедливо равенство

$$\mathrm{PIexp}^{Q_3\text{-gr}}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_3\text{-gr}}(A)} = 3 + 2\sqrt{2} = 5{,}8284\ldots$$

□

9.4 Q_1- и Q_2-градуированные алгебры с нецелой градуированной PI-экспонентой

Напомним, что в §4.1 были введены полугруппы $Q_1 = (\{0,1\}, \cdot)$ и $Q_2 = \{0, v \mid v^2 = 0\}$. В данном параграфе строятся примеры конечномерных Q_1- и Q_2-градуированно простых алгебр с дробной градуированной PI-экспонентой.

Теорема 9.24. *Пусть $A = M_2(F) \oplus \mathrm{UT}_2(F)$ (прямая сумма идеалов), где F — поле характеристики 0. Зададим на A градуировку полугруппой Q_1 равенствами $A^{(0)} = (M_2(F), 0)$ и $A^{(1)} = \{(\varphi(a), a) \mid a \in \mathrm{UT}_2(F)\}$, где $\varphi\colon \mathrm{UT}_2(F) \hookrightarrow M_2(F)$ — естественное вложение. Другими словами, A является алгеброй из примера 4.2 при $k = 2$. Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_1\text{-gr}}(A)} = 4 + 2\sqrt{2} = 6{,}8284\ldots$$

Для того, чтобы доказать теорему 9.24, нам потребуется следующая лемма. Будем для краткости опускать φ и писать (e_{ij}, e_{ij}) вместо $(e_{ij}, \varphi^{-1}(e_{ij}))$.

Лемма 9.25. *Пусть* $\lambda \vdash n$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_8 = 0$, *а* $\lambda_6 + \lambda_7 \leqslant \lambda_1$. *Тогда* $m(A, F^{Q_1}, \lambda) \neq 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для некоторых $f \in P_n^{F^{Q_1}}$ и T_λ выполнено условие $e_{T_\lambda} f \not\equiv 0$ на A.

Заметим, что $e_{T_\lambda} f$ кососимметричен по λ_7 попарно непересекающимся множествам переменных, каждое из которых состоит из 7 переменных. Из леммы 9.1 следует, что каждый такой столбец будет вносить вклад как минимум 1 в сумму значений функции θ на элементах, которые подставляются вместо переменных множества $e_{T_\lambda} f$. Следовательно, это вклад нужно будет компенсировать.

Пусть $\beta_2 = \lambda_6 - \lambda_7$. Выберем произвольные числа $\beta_3, \ldots, \beta_{12} \geqslant 0$ такие, что

$$\beta_3 + \beta_5 + \beta_7 + \beta_9 + \beta_{11} = \lambda_7, \quad \beta_3 + \beta_4 = \lambda_5 - \lambda_6, \quad \beta_5 + \beta_6 = \lambda_4 - \lambda_5,$$

$$\beta_7 + \beta_8 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad \beta_9 + \beta_{10} = \lambda_2 - \lambda_3 \quad \text{и} \quad \beta_{11} + \beta_{12} = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Другими словами,

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{\lambda_7} & \multicolumn{1}{c}{\beta_2} & \multicolumn{1}{c}{\beta_3} & \multicolumn{1}{c}{\beta_4} & \multicolumn{1}{c}{\beta_5} & \multicolumn{1}{c}{\beta_6} & \multicolumn{1}{c}{\beta_7} & \multicolumn{1}{c}{\beta_8} & \multicolumn{1}{c}{\beta_9} & \multicolumn{1}{c}{\beta_{10}} & \multicolumn{1}{c}{\beta_{11}} & \multicolumn{1}{c}{\beta_{12}} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cline{1-10}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cline{1-8}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cline{1-6}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\cline{1-4}
\ldots & \ldots \\
\cline{1-2}
\ldots \\
\cline{1-1}
\end{array}.$$

(Здесь числа β_i означают число столбцов в каждом блоке.)

Каждый из λ_7 первых столбцов будет вносить вклад 1 в θ, который будет компенсироваться столбцами, помеченными числами β_3, β_5, β_7, β_9 и β_{11}. Столбцы, помеченные β_2, β_3, β_4, β_6, β_8, β_{10} и β_{12} будут давать в θ нулевой вклад.

Выберем некоторую таблицу Юнга T_λ формы λ, заполненную числами от 1 до n. Для каждого столбца таблицы T_λ определим полилинейный кососимметричный F^{Q_1}-многочлен, зависящий от переменных с индексами из этого столбца. Для краткости будем обозначать F^{Q_1}-многочлены, отвечающие столбцам блока с номером i одним и тем же символом f_i. Через $(i_1, \ldots, i_\ell)$ обозначим набор, состоящий из чисел, записанных в клетках соответствующего столбца, взятых сверху вниз. Обозначим через $S\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ группу подстановок на множестве $i_1, \ldots, i_\ell$. Положим

$$f_1 := \sum_{\sigma \in S\{i_1, \ldots, i_7\}} (\operatorname{sign} \sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_3)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_6)} x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_5)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)} x^{q_1}_{\sigma(i_7)},$$

$$f_2 := \sum_{\sigma \in S\{i_1, \ldots, i_6\}} (\operatorname{sign} \sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_3)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_6)} x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_5)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)},$$

$$f_3 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,\dots,i_5\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_5)} x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_3)},$$

$$f_4 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,\dots,i_5\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_3)} x^{q_1}_{\sigma(i_5)} x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)},$$

$$f_5 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,\dots,i_4\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_3)},$$

$$f_6 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,\dots,i_4\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_1}_{\sigma(i_3)} x^{q_1}_{\sigma(i_4)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)},$$

$$f_7 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,i_2,i_3\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_1)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_3)}, \qquad f_8 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,i_2,i_3\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_1}_{\sigma(i_2)} x^{q_1}_{\sigma(i_3)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)},$$

$$f_9 := \sum_{\sigma \in S\{i_1,i_2\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_1)} x^{q_1}_{\sigma(i_2)}, \qquad f_{10} := \sum_{\sigma \in S\{i_1,i_2\}} (\operatorname{sign}\sigma) x^{q_0}_{\sigma(i_2)} x^{q_0}_{\sigma(i_1)},$$

$$f_{11} := x^{q_0}_{i_1}, \qquad f_{12} := x^{q_1}_{i_1}.$$

Теперь определим следующий F^{Q_1}-многочлен:

$$f = (f_1 f_3)^{\beta_3} (f_1 f_5)^{\beta_5} (f_1 f_7)^{\beta_7} (f_1 f_9)^{\beta_9} (f_1 f_{11})^{\beta_{11}} f_2^{\beta_2} f_4^{\beta_4} f_6^{\beta_6} f_8^{\beta_8} f_{10}^{\beta_{10}} f_{12}^{\beta_{12}} \in P_n.$$

Как было уже отмечено, различные копии F^{Q_1}-многочлена f_i зависят от разных переменных.

Копии F^{Q_1}-многочлена f_1 являются кососимметричными F^{Q_1}-многочленами степени 7, отвечающими первым λ_7 столбцам высоты 7.

Копии F^{Q_1}-многочлена f_2 являются кососимметричными F^{Q_1}-многочленами степени 6, отвечающими следующим β_2 столбцам высоты 6.

...

Копии F^{Q_1}-многочлена f_{12} являются F^{Q_1}-многочленами степени 1, индексы переменных которых принадлежат последним β_{12} столбцам высоты 1.

Докажем, что $e_{T_\lambda} f \not\equiv 0$. Для того, чтобы это проверить, заполним диаграмму D_λ определёнными однородными элементами и обозначим получившуюся таблицу через τ. (См. рис. 9.1.)

Рис. 9.1: Подстановка элементов алгебры A вместо переменных многочлена $e_{T_\lambda} f$.

$\tau =$

λ_7	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	$(e_{21}, 0)$	(e_{11}, e_{11})
(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	(e_{11}, e_{11})	$(e_{12}, 0)$		
$(e_{11}, 0)$	$(e_{11}, 0)$	$(e_{11}, 0)$	$(e_{11}, 0)$	$(e_{11}, 0)$	(e_{12}, e_{12})	$(e_{11}, 0)$	(e_{12}, e_{12})				
(e_{22}, e_{22})	(e_{22}, e_{22})	(e_{22}, e_{22})	(e_{22}, e_{22})	(e_{22}, e_{22})	(e_{22}, e_{22})						
$(e_{22}, 0)$	$(e_{22}, 0)$	$(e_{22}, 0)$	(e_{12}, e_{12})								
$(e_{12}, 0)$	$(e_{12}, 0)$										
(e_{12}, e_{12})											

(Здесь в i-м блоке имеется β_i столбцов с одними и теми же значениями. Для краткости запишем всякое значение для каждого блока один раз. При этом таблица τ остаётся таблицей формы λ.)

Теперь подставим в каждую переменную значение из соответствующей клетки таблицы τ. При такой подстановке F^{Q_1}-многочлен f не обращается в нуль.

Напомним, что $e_{T_\lambda} = a_{T_\lambda} b_{T_\lambda}$, где a_{T_λ} — оператор симметризации по переменным каждой строчки, а b_{T_λ} — оператор альтернирования по переменным каждого столбца. Поскольку F^{Q_1}-многочлены f_i кососимметричные, F^{Q_1}-многочлен $b_{T_\lambda} f$ равен F^{Q_1}-многочлену f, умноженному на ненулевой коэффициент.

Второй строчке таблицы T_λ отвечает два подмножества переменных. В переменные первого подмножества подставляются переменные $(e_{11}, e_{11}) \in A^{(1)}$, а в переменные второго подмножества — переменные $(e_{12}, 0) \in A^{(0)}$. Отсюда, если некоторое слагаемое элемента a_{T_λ} перемешивает переменные из этих двух подмножеств, по крайней мере одна переменная из второй группы (она входит в f_{10}) заменяется на переменную из первой группы. Однако F^{Q_1}-многочлен f_{10} обращается в нуль, если вместо хотя бы одной из его переменных подставляется элемент из $A^{(1)}$, поскольку к обеим переменным F^{Q_1}-многочлена применяется оператор q_0. Отсюда все слагаемые F^{Q_1}-многочлена $a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} f$, в которых переменные из этих двух групп перемешиваются друг с другом, обращаются при подстановке, заданной таблицей τ, в нуль.

Отсюда, если некоторое слагаемое элемента a_{T_λ} переводит одну из переменных первых двух столбцов в переменную с другим значением из таблицы τ, вместо переменных F^{Q_1}-многочленов f_1 и f_2 подставляется слишком много элементов из $A^{(1)}$ и результат такой подстановки равен нулю из-за действия оператора q_0. Следовательно, все слагаемые F^{Q_1}-многочлена $a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} f$, в которых переменные с разными значениями меняются местами, обращаются в нуль. Продолжая эту процедуру, в конце концов получаем, что если слагаемое элемента a_{T_λ} не переводит множества переменных с одними и теми же значениями из таблицы τ в себя, соответствующее слагаемое в $a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} f$ обращается в нуль. Отсюда значение F^{Q_1}-многочлена $a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} f$ пропорционально значению F^{Q_1}-многочлена $b_{T_\lambda} f$ с ненулевым коэффициентом, т.е. также не равно нулю. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 9.24. В обозначениях §9.1

$$\gamma_1 = -1,\ \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0,\ \gamma_6 = \gamma_7 = 1,\ r = 7,$$

откуда в силу леммы 9.2 для всех $\lambda \vdash n$, где $n \in \mathbb{N}$, таких, что $m(A, F^{Q_1}, \lambda) \neq 0$, выполнены условия $\lambda_8 = 0$ и $\lambda_6 + \lambda_7 \leqslant \lambda_1 + 1$. Кроме того, $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и для

$$\Omega := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_7) \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{7} \alpha_i = 1,\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_7 \geqslant 0,\ \alpha_7 + \alpha_6 \leqslant \alpha_1 \right\}$$

в силу леммы 9.7 справедливо равенство $d := \max_{x \in \Omega} \Phi(x) = 4 + 2\sqrt{2} = 6{,}8284\ldots$ Обозначим через $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7) \in \Omega$ такую точку, что $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_7) = d$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ зададим $\mu \vdash n$ при помощи равенств $\mu_i = [\alpha_i n]$ при $2 \leqslant i \leqslant 7$ и $\mu_1 = n - \sum_{i=1}^{7} \mu_i$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\Phi\left(\frac{\mu_1}{n}, \ldots, \frac{\mu_7}{n}\right) > d - \varepsilon$. В силу леммы 9.25 выполнено условие $m(A, F^{Q_1}, \mu) \neq 0$. Применяя формулу крюков и формулу

Стирлинга, получаем, что существуют такие $C_1 > 0$ и $r_1 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} c_n^{FQ_1}(A) \geqslant \dim M(\mu) = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}} \geqslant \frac{n!}{(\mu_1+6)!\dots(\mu_7+6)!} \geqslant \\ \geqslant \frac{n!}{n^{42}\mu_1!\dots\mu_7!} \geqslant \frac{C_1 n^{r_1}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{\mu_1}{e}\right)^{\mu_1}\dots\left(\frac{\mu_7}{e}\right)^{\mu_7}} \geqslant \\ \geqslant C_1 n^{r_1}\left(\frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{n}\right)^{\frac{\mu_1}{n}}\dots\left(\frac{\mu_7}{n}\right)^{\frac{\mu_7}{n}}}\right)^n \geqslant C_1 n^{r_1}(d-\varepsilon)^n. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Отсюда $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{FQ_1}(A)} \geqslant d - \varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольным, справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{FQ_1}(A)} \geqslant d,$$

которое в силу предложения 6.15 эквивалентно неравенству

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_1\text{-gr}}(A)} \geqslant d.$$

Из теоремы 9.8 следует неравенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_1\text{-gr}}(A)} \leqslant d,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_1\text{-gr}}(A)} = 4 + 2\sqrt{2} = 6{,}8284\dots$$

□

Приведём теперь пример Q_2-градуированной алгебры с нецелой градуированной PI-экспонентой:

Теорема 9.26. *Пусть $A_2 = M_2(F) \oplus Fj_{11} \oplus Fj_{12} \oplus Fj_{22}$ (прямая сумма идеалов), где $\langle j_{11}, j_{12}, j_{22}\rangle_F^2 = 0$, а F — поле характеристики 0. Зададим на A градуировку полугруппой Q_2 равенствами $A_2^{(0)} = (M_2(F), 0)$, $A_2^{(v)} = \langle (e_{11}, j_{11}), (e_{12}, j_{12}), (e_{22}, j_{22})\rangle$. Тогда существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{Q_2\text{-gr}}(A_2)} = 4 + 2\sqrt{2} = 6{,}8284\dots$$

Доказательство. Обозначим через A алгебру из теоремы 9.24. Зададим линейную биекцию $\psi\colon A \xrightarrow{\sim} A_2$ формулами $\psi(e_{ij}, e_{k\ell}) = (e_{ij}, j_{k\ell})$ и $\psi(e_{ij}, 0) = (e_{ij}, 0)$. Тогда $\psi(A^{(0)}) = A_2^{(0)}$ и $\psi(A^{(1)}) = A_2^{(v)}$. Определим теперь изоморфизм алгебр $\Theta\colon F\langle X^{Q_1\text{-gr}}\rangle \to F\langle X^{Q_2\text{-gr}}\rangle$ при помощи равенств $\Theta(x_i^{(0)}) = x_i^{(0)}$ и $\Theta(x_i^{(1)}) = x_i^{(v)}$. Докажем, что

$$\Theta(\mathrm{Id}^{Q_1\text{-gr}}(A)) = \mathrm{Id}^{Q_2\text{-gr}}(A_2). \tag{9.20}$$

Поскольку характеристика поля F равна 0, оба идеала $\mathrm{Id}^{Q_1\text{-gr}}(A)$ и $\mathrm{Id}^{Q_2\text{-gr}}(A_2)$ порождены как идеалы градуированных тождеств полилинейными многочленами. (Доказательство этого факта повторяет доказательство теоремы 1.3.8 из [66].) Другими словами, для того, чтобы доказать равенство (9.20), достаточно показать, что если $f \in F\langle X^{Q_1\text{-gr}}\rangle$ полилинеен как обычный многочлен от переменных $x_1^{(t_1)}, x_2^{(t_2)}, \dots, x_n^{(t_n)}$, где $t_i \in Q_1$, то $f \in \mathrm{Id}^{Q_1\text{-gr}}(A)$, если и только если $\Theta(f) \in \mathrm{Id}^{Q_2\text{-gr}}(A_2)$. Напомним, что для проверки градуированного тождества подставляются только однородные элементы. Заметим, что $\pi\psi(a) = \pi(a)$, где π — проекция на первую компоненту: $\pi(a, b) = a$ для всех $(a, b) \in A$ и $(a, b) \in A_2$. Более того, если $a \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$, то $\pi(a) = 0$, если и только если $a = 0$. Поскольку обе полугруппы Q_1 и Q_2 коммутативны, значение градуированного многочлена f при подстановке однородных элементов снова является однородным элементом. Применяя π, получаем, что $f \in P_n^{Q_1\text{-gr}}$ обращается в нуль при подстановке однородных элементов $a_i^{(t_i)} \in A^{(t_i)}$, где $t_i \in Q_1$, если и только если $\Theta(f)$ обращается в нуль при подстановке элементов $\psi\left(a_i^{(\tilde{t}_i)}\right) \in A_2^{(\tilde{t}_i)}$. (Здесь $\tilde{0} = 0$, а $\tilde{1} = v$.) Следовательно, справедливо равенство (9.20), откуда

$$c_n^{Q_1\text{-gr}}(A) = c_n^{Q_2\text{-gr}}(A_2) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Теперь достаточно применить теорему 9.24. □

9.5 Достаточные условия справедливости аналога гипотезы Амицура для полиномиальных T-градуированных тождеств

Напомним, что под справедливостью аналога гипотезы Амицура понимается существование целой градуированной PI-экспоненты. Одно семейство алгебр, градуированных лентами правых нулей, с целой градуированной PI-экспонентой уже было построено в теореме 9.14. Приведём теперь другие достаточные условия справедливости аналога гипотезы Амицура.

Теорема 9.27. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, градуированная некоторой полугруппой T с сокращениями. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{T\text{-gr}}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{T\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В частности, для любой такой алгебры A существует $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) \in \mathbb{Z}_+$ и, таким образом, справедлив аналог гипотезы Амицура.

Доказательство. Как обычно (см., например, [66, теорема 4.1.9]), коразмерности не меняются при расширении основного поля, поэтому без ограничения общности можно считать, что основное поле F алгебраически замкнуто.

Согласно следствию 4.1 из [77] идеал $J(A)$ является градуированным. В силу предложения 4.12 факторалгебра $A/J(A)$ раскладывается в прямую сумму T-градуированных идеалов, являющихся T-градуированно простыми алгебрами. Теперь достаточно применить теоремы 5.17, 7.4 и 7.10 и предложение 6.15. □

Если конечномерная алгебра с единицей градуирована лентой левых или правых нулей, то её градуированная PI-экспонента совпадает с обычной:

Теорема 9.28. *Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над полем F характеристики 0, градуированная некоторой лентой T левых или правых нулей. Тогда*

1. *либо существует такое n_0, что $c_n^{T\text{-gr}}(A) = 0$ при всех $n \geqslant n_0$;*

2. *либо существуют такие константы $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leqslant c_n^{T\text{-gr}}(A) \leqslant C_2 n^{r_2} d^n \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

где число $d = \mathrm{PIexp}(A)$ является обычной PI-экспонентой алгебры A. В частности, для любой такой алгебры A справедлив аналог гипотезы Амицура.

Доказательство. Поскольку алгебра A конечномерна, можно без ограничения общности считать, что полугруппа T конечна. Кроме того, можно снова предполагать основное поле F алгебраически замкнутым.

В силу предложения 4.6 радикал Джекобсона $J(A)$ является градуированным идеалом. В силу теоремы 4.11 можно выбрать такую максимальную градуированную подалгебру B, что $A = B \oplus J(A)$ (прямая сумма градуированных подпространств). Пусть $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$ (прямая сумма идеалов) для некоторых простых алгебр B_i. В силу предложения 4.6 идеалы B_i градуированные, а из теорем 7.4, 7.15 и предложения 6.15 следует, что для

$$d := \max \dim \left(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_r} \;\middle|\; r \geqslant 1,\ B_{i_1} J(A)\, B_{i_2} J(A) \ldots B_{i_{r-1}} J(A)\, B_{i_r} \neq 0 \right)$$

справедливы неравенства из формулировки теоремы. При этом $d = \mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$, поскольку алгебры B_i просты как обычные алгебры. □

Замечание 9.29. Равенство $\mathrm{PIexp}^{T\text{-gr}}(A) = \mathrm{PIexp}(A)$ не означает равенства коразмерностей. Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $A = M_k(F)$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$, где $t_i t_\ell = t_\ell$ для всех $1 \leqslant i, \ell \leqslant k$, а $A^{(t_i)} = \langle e_{1i}, \ldots, e_{ki} \rangle_F$. Тогда элементы $x_1^{(t_i)}$ линейно независимы по модулю $\mathrm{Id}^{T\text{-gr}}(A)$. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно подставить $x_1^{(t_i)} = e_{ii}$. Отсюда $c_1(A) = 1 < c_1^{T\text{-gr}}(A) = k$.

Заключение

Таким образом, в диссертации были получены результаты, касающиеся структуры (ко)модульных алгебр и их обобщений, а также асимптотического поведения числовых характеристик соответствующих полиномиальных тождеств:

1. получены достаточные условия H-коинвариантности радикала Джекобсона в H-комодульных ассоциативных алгебрах;

2. получены достаточные условия H-(ко)инвариантности радикалов в H-(ко)модульных алгебрах Ли;

3. доказан H-(ко)инвариантный аналог теоремы Леви;

4. классифицированы конечномерные ассоциативные алгебры и алгебры Ли, простые по отношению к действию алгебр Тафта;

5. классифицированы конечномерные ассоциативные градуированно простые алгебры, градуированные конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами;

6. доказаны аналоги гипотезы Амицура для важных классов дополнительных структур на конечномерных алгебрах;

7. построена серия конечномерных градуированно простых ассоциативных алгебр, градуированных лентами правых нулей, с дробной градуированной PI-экспонентой (полученные примеры являются первыми примерами ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, в которых экспонента роста коразмерностей соответствующих тождеств является нецелым числом);

8. доказано существование градуированной PI-экспоненты у любой конечномерной градуированно простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H-PI-экспоненты у любой конечномерной H-простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H-действием.

В частности, для ассоциативных H-модульных алгебр в случае, когда алгебра Хопфа H либо полупроста и конечномерна, либо получена при помощи (возможно, многократного) расширения Оре конечномерной полупростой алгебры Хопфа косопримитивными элементами, и в случае, когда H — произвольная алгебра Хопфа, а радикал Джекобсона $J(A)$ является H-подмодулем, доказана гипотеза Амицура — Бахтурина.

Данные исследования могут получить следующее развитие.

Во-первых, остаётся недоказанным существание разложения конечномерной H-модульной алгебры Ли, не содержащей ненулевых H-инвариантных нильпотентных идеалов, в прямую сумму H-простых идеалов в случае, когда алгебра Хопфа H является неполупростой, например, когда H — алгебра Тафта.

Во-вторых, гипотеза Амицура — Бахтурина для конечномерных H-модульных ассоциативных алгебр по-прежнему остаётся открытой в случае произвольных алгебр Хопфа H. В случае произвольных алгебр Хопфа H остаётся открытым и аналог гипотезы Амицура для конечномерных H-модульных алгебр Ли.

В-третьих, представляет интерес вопрос о существовании PI-экспоненты у конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли с произвольной дополнительной структурой.

В-четвертых, до сих пор неизвестны примеры конечномерных ассоциативных алгебр и алгебр Ли с действием некоторой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ дифференцированиями (в силу теорем 7.31 и 8.16 такая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не может быть полупростой), у которых экспонента роста коразмерностей дифференциальных тождеств не совпадает с экспонентой роста коразмерностей обычных тождеств.

Литература

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2003, 416 с.

[2] Атья М., Макдональд И. Ввведение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972, 160 с.

[3] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985, 448 с.

[4] Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечномерные простые градуированные алгебры. *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 21–40.

[5] Веревкин, А. Б., Зайцев М. В., Мищенко С. П. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр. *Вестн. Моск. ун-та.* Сер. 1. Матем., мех., №2 (2011), 36–39.

[6] Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]] = 0$ над полем характеристики нуль. *Сиб. матем. журн.*, **25**:3 (1984), 40–54.

[7] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981, 334 с.

[8] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964, 356 с.

[9] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: в 3 т. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[10] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли. *Изв. РАН, сер. матем.*, **66**:3 (2002), 23–48.

[11] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. Т.1. М.: Мир, 1972, 287 с.

[12] Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: Физматлит, 2004, 352 с.

[13] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.

[14] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975, 400 с.

[15] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997, 336 с.

[16] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986, 543 с.

[17] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 312 с.

[18] Постников М. М. Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр V. М.: Наука, 1982.

[19] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989, 432 с.

[20] Сидоров А. В. Об отщеплении радикала в конечномерных H-модульных алгебрах. *Алгебра и логика*, **28**:3 (1989), 324–336.

[21] Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983, 272 с.

[22] Фултон У. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М.: МЦНМО, 2006, 328 с.

[23] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980, 400 с.

[24] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003, 216 с.

[25] Харченко В. К. Дифференциальные тождества полупервичных колец. *Алгебра и логика*, **18**:1 (1979), 86–119.

[26] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972, 192 с.

[27] Abe, E. Hopf algebras. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[28] Aljadeff, E., David, O. On regular G-gradings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **367** (2015), 4207–4233.

[29] Aljadeff, E., Giambruno, A. Multialternating graded polynomials and growth of polynomial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141** (2013), 3055–3065.

[30] Aljadeff, E., Giambruno, A., La Mattina, D. Graded polynomial identities and exponential growth. *J. reine angew. Math.*, **650** (2011), 83–100.

[31] Aljadeff, E., Kanel-Belov, A. Hilbert series of PI relatively free G-graded algebras are rational functions. *Bull. London Math. Soc.*, **44**:3 (2012), 520–532.

[32] Andruskiewitsch, N., Schneider, H.-J. Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3. *J. Algebra*, **209** (1998), 658–691.

[33] Bahturin, Yu. A., Giambruno, A., Zaicev, M. V. G-identities on associative algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:1 (1999), 63–69.

[34] Bahturin, Yu. A., Drensky, V. Graded polynomial identities of matrices. *Linear Algebra Appl.*, **357**:1–3 (2002), 15–34.

[35] Bahturin, Yu. A., Linchenko, V. Identities of algebras with actions of Hopf algebras. *J. Algebra* **202**:2 (1998), 634–654.

[36] Bahturin, Yu. A., Montgomery, S. Group gradings and actions of pointed Hopf algebras. `arXiv:2006.14777 [math.QA] 15 Jul 2020`

[37] Bahturin, Yu. A., Zaicev, M. V., Group gradings on matrix algebras. *Canad. Math. Bull.*, **45**:4 (2002), 499–508.

[38] Bahturin, Yu. A., Zaicev, M. V. Identities of graded algebras and codimension growth. *Trans. Amer. Math. Soc.* **356**:10 (2004), 3939–3950.

[39] Bahturin, Yu. A., Zaicev, M. V., Semigroup gradings on associative rings. *Adv. in Appl. Math.* **37**:2 (2006), 153–161.

[40] Beattie, M., Dăscălescu, S., Grünenfelder, L. On the number of types of finite dimensional Hopf algebras. *Inv. Math.*, **136** (1999), 1–7.

[41] Beattie, M., Dăscălescu, S., Grünenfelder, L. Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions. *J. Algebra*, **225** (2000), 743–770.

[42] Benanti, F., Giambruno, A., Pipitone, M. Polynomial identities on superalgebras and exponential growth. *J. Algebra*, **269**:2 (2003), 422–438.

[43] Berele, A. Cocharacter sequences for algebras with Hopf algebra actions. *J. Algebra*, **185** (1996), 869–885.

[44] Bergman, G. On Jacobson radicals of graded rings. 1973. (Препринт.)

[45] Calinescu, C., Dăscălescu, S., Masuoka, A., Menini, C. Quantum lines over non-cocommutative cosemisimple Hopf algebras. *J. Algebra*, **273** (2004), 753–779.

[46] Clase, M. V., Jespers, E. On the Jacobson radical of semigroup graded rings. *J. Algebra*, **169**:1 (1994), 79–97.

[47] Clase, M. V., Jespers, E., Del Río, Á. Semigroup-graded rings with finite support. *Glasgow Math. J.*, **38** (1996), 11–18.

[48] Cohen, M., Montgomery, S. Group graded rings, smash products, and group actions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282**:1 (1984), 237–258.

[49] Connes, A., Marcolli, M. Quantum fields, noncommutative spaces and motives. (Книга готовится к печати, электронная версия https://www.alainconnes.org/docs/bookwebfinal.pdf)

[50] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., Del Río, Á., Van Oystaeyen, F. Gradings of finite support. Application to injective objects. *J. of Pure and Applied Algebra*, **107** (1996), 193–206.

[51] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C., Raianu, Ş. Hopf algebras: an introduction. New York, Marcel Dekker, Inc., 2001.

[52] Donatsos, D., Daskaloyannis, C. Quantum groups and their applications in nuclear physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **43** (1999), 537–618.

[53] dos Santos, R. B. $*$-Superalgebras and exponential growth. *J. Algebra*, **473** (2017), 283–306.

[54] Elduque, A., Kochetov M. V. Gradings on simple Lie algebras. *AMS Mathematical Surveys and Monographs.* **189**, Providence, R.I., Halifax, NS, 2013, 336 pp.

[55] Etingof, P., Ostrik, V. Finite tensor categories. *Moscow Math. J.*, **4**:3 (2004), 627–654.

[56] Fulton, W., Harris, J. Representation theory: a first course. Springer-Verlag: New York – Berlin – Heidelberg, 1991, 551 pp.

[57] Giambruno, A., Ioppolo, A., La Mattina, D. Varieties of algebras with superinvolution of almost polynomial growth. *Algebr. Represent. Theory*, **19** (2016), 599–611.

[58] Giambruno, A., Ioppolo, A., La Mattina, D. Superalgebras with involution or superinvolution and almost polynomial growth of the codimensions. *Algebr. Represent. Theory*, **22** (2019), 961–976.

[59] Giambruno, A., La Mattina, D. Graded polynomial identities and codimensions: computing the exponential growth. *Adv. Math.*, **225** (2010), 859–881.

[60] Giambruno, A., Mishchenko, S. P., Zaicev, M. V. Algebras with intermediate growth of the codimensions. *Adv. Appl. Math.*, **37** (2006) 360–377.

[61] Giambruno, A., Mishchenko, S. P., Zaicev, M. V. Codimensions of algebras and growth functions. *Adv. Math.*, **217** (2008), 1027–1052.

[62] Giambruno, A., Polcino Milies, C., Valenti, A. Star-polynomial identities: computing the exponential growth of the codimensions. *J. Algebra*, **469** (2017), 302–322.

[63] Giambruno, A., Shestakov, I. P., Zaicev, M. V. Finite-dimensional non-associative algebras and codimension growth. *Adv. Appl. Math.* **47** (2011), 125–139.

[64] Giambruno, A., Zaicev, M. V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate. *Adv. Math.*, **142**:2 (1999), 221–243.

[65] Giambruno, A., Zaicev, M. V. Involution codimensions of finite dimensional algebras and exponential growth. *J. Algebra*, **222** (1999), 471–484.

[66] Giambruno, A., Zaicev, M. V. Polynomial identities and asymptotic methods. *AMS Mathematical Surveys and Monographs.* **122**, Providence, R.I., 2005, 352 pp.

[67] Giambruno, A., Zaicev, M. V. On codimension growth of finite-dimensional Lie superalgebras. *J. London Math. Soc.*, **85**:2 (2012), 534–548.

[68] Haag, R. Local quantum physics: fields, particles, algebras. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.

[69] Haag, R., Kastler, D. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 848–861.

[70] Hochschild, G. Basic theory of algebraic groups and Lie algebras. *Graduate texts in mathematics.* **75**, Springer-Verlag, New York, 1981.

[71] Ioppolo, A. The exponent for superalgebras with superinvolution. *Linear Algebra Appl.*, **555** (2018), 1–20.

[72] Ioppolo, A., Martino, F. Varieties of algebras with pseudoinvolution and polynomial growth. *Linear Multilinear Algebra*, **66** (2018), 2286–2304.

[73] Jespers, E., Puczyłowski, E. R. The Jacobson and Brown-McCoy radicals of rings graded by free groups. *Comm. Algebra*, **19** (1991), 551–558.

[74] Kaku, M. Introduction to superstrings and M-theory. Springer-Verlag, New York, 1999.

[75] Karasik, Ya. Kemer's theory for H-module algebras with application to the PI exponent. *J. Algebra*, **457** (2016), 194–227.

[76] Kelarev, A. V. On semigroup graded PI-algebras. *Semigroup Forum*, **47**:3 (1993), 294–298.

[77] Kelarev, A. V. Ring constructions and applications. *Series in Algebra.* **9**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2002.

[78] Kelarev, A. V., Okniński, J. The Jacobson radical of graded PI-rings and related classes of rings. *J. Algebra*, **186**:3 (1996), 818–830.

[79] Kinser, R., Walton, C. Actions of some pointed Hopf algebras on path algebras of quivers. *Algebra and Number Theory*, **10**:1 (2016), 117–154.

[80] Linchenko, V. Nilpotent subsets of Hopf module algebras. *Groups, rings, Lie, and Hopf algebras*, Proc. 2001 St. John's Conference, ed. Yu. Bahturin (Kluwer, 2003), 121–127.

[81] Linchenko, V., Montgomery, S. Semiprime smash products and H-stable prime radicals for PI-algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:10 (2007), 3091–3098.

[82] Linchenko, V., Montgomery, S., Small, L. Stable Jacobson radicals and semiprime smash products. *Bull. London Math. Soc.*, **37** (2005), 3091–3098.

[83] Majid, S. Foundations of quantum group theory. Cambridge University Press, 1995.

[84] Martínez, C., Zelmanov, E. Representation theory of Jordan superalgebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:2 (2010), 815–846.

[85] Mishchenko, S. P., Zaicev M. V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent. *J. Math. Sci. (New York)*, **93**:6 (1999), 977–982.

[86] Montgomery, S. Hopf algebras and their actions on rings. CBMS Lecture Notes **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[87] Montgomery, S., Schneider, H.-J. Skew derivations of finite-dimensional algebras and actions of the double of the Taft Hopf algebra. *Tsukuba J. Math.*, **25**:2 (2001), 337–358.

[88] Nagata, M. Complete reducibility of rational representations of a matrix group. *J. Math. Kyoto Univ.*, **1** (1961), 87–99.

[89] Nystedt, P., Öinert, J. Simple rings and degree maps. *J. Algebra*, **401** (2014), 201–219.

[90] Pagon, D., Repovš, D., Zaicev, M. V. Group gradings on finite dimensional Lie algebras. *Alg. Colloq.*, **20**:4 (2013), 573–578.

[91] Racine, M. L. Primitive superalgebras with superinvolution. *J. Algebra*, **206** (1998), 588–614.

[92] Regev, A. Existence of identities in $A \otimes B$. *Israel J. Math.*, **11** (1972), 131–152.

[93] Regev, A. The representation of S_n and explicit identities for P.I. algebras. *J. Algebra*, **51** (1978), 25–40.

[94] Regev, A. Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal. *Israel J. Math.*, **48**:2–3 (1984), 246–250.

[95] Repovš, D., Zaicev, M. V. Identities of graded simple algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, **65**:1 (2017), 44–57.

[96] Skryabin, S. M. Structure of H-semiprime Artinian algebras. *Algebra and Representation Theory*, **14** (2011), 803–822.

[97] Skryabin, S. M., Van Oystaeyen, F. The Goldie theorem for H-semiprime algebras. *J. Algebra*, **305** (2006), 292–320.

[98] Ştefan, D., Van Oystaeyen, F. The Wedderburn — Malcev theorem for comodule algebras. *Comm. in Algebra*, **27**:8 (1999), 3569–3581.

[99] Sweedler, M. E. Hopf Algebras. W. A. Benjamin, New York, 1969.

[100] Taft, E. J. Invariant Wedderburn factors. *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 565–573.

[101] Wauters, P., Jespers, E. Rings graded by an inverse semigroup with finitely many idempotents. *Houston J. Math.*, **15**:2 (1989), 291–304.

[102] Zaicev, M. V. On existence of PI-exponents of codimension growth. *Electron. Res. Announc. in Math. Sci.*, **21** (2014), 113–119.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[103] Гордиенко А.С. Критерий конечности и асимптотика коразмерностей обобщенных тождеств. *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 681–685.
Перевод: Gordienko, A. S. A finiteness criterion and asymptotics for codimensions of generalized identities. *Mathematical Notes*, **86**:5 (2009), 645–649.

[104] Гордиенко А.С. Коразмерности обобщенных полиномиальных тождеств. *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 79–94.
Перевод: Gordienko, A. S. Codimensions of generalized polynomial identities. *Sbornik: Mathematics*, **201**:2 (2010), 235–251.

[105] Gordienko, A. S. Graded polynomial identities, group actions, and exponential growth of Lie algebras. *J. Algebra*, **367** (2012), 26–53.

[106] Gordienko, A. S. Codimensions of polynomial identities of representations of Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141** (2013), 3369–3382.

[107] Gordienko, A. S. Amitsur's conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action. *J. Pure and Appl. Alg.*, **217**:8 (2013), 1395–1411.

[108] Gordienko, A. S. Structure of H-(co)module Lie algebras. *J. Lie Theory*, **23**:3 (2013), 669–689.

[109] Gordienko, A. S. On a formula for the PI-exponent of Lie algebras. *J. Alg. Appl.*, **13**:1 (2013), 1350069-1 – 1350069-18.

[110] Gordienko, A. S. Asymptotics of H-identities for associative algebras with an H-invariant radical. *J. Algebra*, **393** (2013), 92–101.

[111] Gordienko, A. S., Janssens, G. $\mathbb{Z}S_n$-modules and polynomial identities with integer coefficients. *Int. J. of Algebra and Computation*, **23**:8 (2013), 1925–1943.

[112] Gordienko, A. S., Kochetov, M. V. Derivations, gradings, actions of algebraic groups, and codimension growth of polynomial identities. *Algebras and Representation Theory*, **17**:2 (2014), 539–563.

[113] Gordienko, A. S. Amitsur's conjecture for polynomial H-identities of H-module Lie algebras. *Tran. Amer. Math. Soc.*, **367**:1 (2015), 313–354.

[114] Gordienko, A. S. Algebras simple with respect to a Sweedler's algebra action. *J. Alg. Appl.*, **14**:1 (2015), 1450077-1 – 1450077-15.

[115] Gordienko, A. S. Algebras simple with respect to a Taft algebra action. *J. Pure and Appl. Alg.*, **219**:8 (2015), 3279–3291.

[116] Gordienko, A. S. Semigroup graded algebras and codimension growth of graded polynomial identities. *J. Algebra*, **438** (2015), 235–259.

[117] Gordienko, A. S. Co-stability of radicals and its applications to PI-theory. *Algebra Colloquium*, **23**:3 (2016), 481–492.

[118] Gordienko, A. S., Janssens, G., Jespers, E. Semigroup graded algebras and graded PI-exponent. *Israel J. Math.*, **220**:1 (2017), 387–452.

[119] Gordienko, A. S. Actions of Ore extensions and growth of polynomial H-identities. *Comm. in Algebra*, **46**:7 (2018), 3014–3032.

[120] Gordienko, A. S., Schnabel, O. On weak equivalences of gradings. *J. Algebra*, **501** (2018), 435–457.

[121] Gordienko, A. S. Lie algebras simple with respect to a Taft algebra action. *J. Algebra*, **517** (2019), 249–275.

[122] Gordienko, A. S. On H-simple not necessarily associative algebras. *J. Alg. Appl.*, **18**:9 (2019), 1950162-1 – 1950162-20.

[123] Gordienko, A. S., Schnabel, O. Categories and weak equivalences of graded algebras. *Algebra Colloquium*, **26**:4 (2019), 643 – 664.