МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Дружков Константин Павлович

Законы сохранения и точные решения уравнений мелкой воды над неровным дном

Специальность 01.02.05 — «Механика жидкости, газа и плазмы»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:
Аксенов Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:
Смирнов Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры газовой и волновой динамики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.
Ильичев Андрей Теймуразович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова РАН.
Петров Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН.

Защита диссертации состоится 21 мая 2021 г. в 17 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.03 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ Механики МГУ, кинозал.

Email: pelevina.daria@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/335211665/.

Автореферат разослан 16 апреля 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.03,
кандидат физико-математических наук Д.А. Пелевина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Фундаментальные законы сохранения лежат в основе общих уравнений механики сплошной среды. Законы сохранения определяют характерные свойства математической модели и используются, например, при доказательстве теорем существования и единственности, при построении разрывных решений и для исследования их устойчивости.

Законы сохранения необходимы для построения консервативных разностных схем (Ю.П. Попов, А.А. Самарский (1969), А.А. Самарский (1977)). Активно развивается направление (В.А. Дородницын (2001), Dorodnitsyn, Kozlov, Meleshko (2019)), связанное с использованием симметрий и законов сохранения уравнений механики и математической физики при построении инвариантных разностных схем.

Симметрии математических моделей позволяют строить инвариантные решения, получать новые классы точных решений из уже известных и исследовать возможность сведения нелинейных уравнений к линейным с помощью точечных или контактных преобразований.

Построение точных решений дифференциальных уравнений необходимо для анализа соответствующих математических моделей физических явлений. Существует несколько основных методов построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. Широко применяются методы группового анализа дифференциальных уравнений (Л.В. Овсянников (1978)), метод неклассических симметрий (Bluman, Cole (1969)), прямой метод (Clarkson, Kruskal (1989), А.В. Аксенов, А.А. Козырев (2012)), метод дифференциальных связей (А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко (1984)), методы функционального (А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев (2012)) и обобщенного разделения переменных (Galaktionov, Svirshchevskii (2006)).

Актуальными являются следующие задачи:

- построение всех гидродинамических законов сохранения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды при различных профилях дна;
- групповая классификация одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном;
- определение всех профилей дна, при которых одномерная или двумерная система уравнений мелкой воды могут быть сведены к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований;
- построение решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном, описывающих набег на берег и отражение от него без об-

рушения волны в форме сглаженной “ступеньки”.

Цель диссертационной работы

Целью работы является получение всех гидродинамических законов сохранения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды при всевозможных профилях дна, исследование возможности сведения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды к линейным системам уравнений с помощью точечных преобразований, а также построение точных решений, которые могут описывать явления типа цунами. Для достижения цели работы были поставлены и решены следующие задачи:

- групповая классификация одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном;
- анализ возможности сведения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном к линейным системам уравнений с помощью точечных преобразований;
- получение всех гидродинамических законов сохранения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды для каждого профиля дна;
- построение трехпараметрического семейства точных решений линеаризованной системы уравнений одномерной мелкой воды над наклонным дном интегрированием по параметру точных решений, описывающих распространение локализованного возмущения в форме “шапочки”;
- исследование регулярности двухпараметрического семейства точных решений нелинейной одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном во всей рассматриваемой области для всех моментов времени.

Научная новизна

В работе получены следующие новые результаты:

- впервые решены задачи групповой классификации одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных и проведена групповая классификация контактных симметрий одномерного уравнения мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных; показано, что одномерная система уравнений мелкой воды может быть сведена к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и плоского наклонного профилей дна; показано, что одномерное уравнение мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных может быть сведено к линейному уравнению с помощью контактных преобразований также только в этих случаях; показано, что двумерная система уравнений мелкой воды не может быть сведена к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований ни при каком профиле дна;

- впервые проведены классификации гидродинамических законов сохранения одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных и классификация законов сохранения первого порядка одномерного уравнения мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных;
- построено новое трехпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном; показано, что решения из двухпараметрического семейства решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном, описывающих набег на берег и отражение от него волны в форме сглаженной "ступеньки", регулярны по пространству и по времени; получены нелинейный эффект заплеска и эффект усиления амплитуды набегающей волны при отражении ее от берега.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты групповых классификаций одномерной и двумерной систем уравнений мелкой воды над неровным дном могут быть использованы для построения инвариантных решений, получения новых классов решений из уже известных, построения инвариантных разностных схем. Построенные законы сохранения рассматриваемых уравнений могут быть использованы для введения потенциалов, анализа свойств решений и при построении консервативных разностных схем. Полученные точные решения могут быть использованы при описании явлений типа цунами.

Методология и методы исследования

Для решения задач классификации симметрий и определения профилей дна, при которых рассматриваемые уравнения могут быть сведены к линейным с помощью точечных или контактных преобразований, использованы методы группового анализа дифференциальных уравнений. Для нахождения гидродинамических законов сохранения был использован прямой метод их построения. При получении и исследовании точных решений были использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

1. Одномерная система уравнений мелкой воды над неровным дном в эйлеровых переменных может быть сведена к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и плоского наклонного профилей дна. Уравнение мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных может быть сведено к линейному уравнению с помощью контактных преобразований также только в этих случаях.

2. Одномерная система уравнений мелкой воды над наклонным дном обладает трехпараметрическим семейством решений. Решения из двухпараметрического семейства решений в форме сглаженной “ступеньки” являются регулярными по пространству и по времени. Имеют место нелинейный эффект заплеска и эффект усиления амплитуды набегающей волны при отражении ее от берега.
3. Двумерная система уравнений мелкой воды над неровным дном не может быть сведена к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований ни при каком профиле дна.
4. Одномерная и двумерная системы уравнений мелкой воды при любом профиле дна обладают гидродинамическим законом сохранения, аналогичным закону сохранения энергии. Нет других гидродинамических законов сохранения, имеющихся при произвольных профилях дна и отличных от аналогов законов сохранения массы, импульса и энергии.

Достоверность результатов

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

- использованием классических математических моделей;
- применением строгих аналитических методов исследования;
- сравнением полученных результатов с известными ранее частными результатами.

Апробация работы

Основные результаты работы представлены автором на 6 международных конференциях: 16–я Международная конференция «MOGRAN» (Уфа, Россия, 28 октября–2 ноября 2013); Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со стодесятилетием со дня его рождения (Москва, Россия, 13–15 ноября 2017); 7th International conference ”The Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling” (Moscow, Russia, 25–27 June 2018); International conference «Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications (Symmetry 2019)» (Nakhon Ratchasima, Thailand, January 14–18, 2019); IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ’19) (Москва, Россия, 19–21 июня 2019); VI Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2020» (Москва, Россия, 11–14 февраля 2020); и на 14 российских конференциях: «Ломоносовские чтения», секция «Механика» (Москва, Россия, 14–23 апреля 2014, 18–27 апреля 2016, 16–27 апреля 2018, 15–25 апреля 2019, 19–

27 октября 2020); «Теоретическая физика и математическое моделирование (прикладная математика)» (Москва, Россия, 2014); VI Конференция «Методы математической физики и математическое моделирование физических процессов» (Москва, Россия, 18–21 февраля 2015); Всероссийская конференция, посвященная 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова «Нелинейные волны: теория и новые приложения» (Новосибирск, Россия, 29 февраля–2 марта 2016); «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, Россия, 11–15 апреля 2016); «XXVI научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике» (Москва, Россия, 18–19 декабря 2017); Научные слушания, посвященные 110-летию со дня рождения С.А. Христиановича «Современные проблемы механики и математики» (Москва, Россия, 15–16 ноября 2018); Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию со дня рождения академика РАН Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (Новосибирск, Россия, 13–17 мая 2019); «XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики» (Уфа, Россия, 19–24 августа 2019); «Конференция-конкурс молодых учёных института механики МГУ» (Москва, Россия, 19–23 октября 2020).

Личный вклад

В диссертации приведены результаты, полученные автором лично или при его непосредственном участии. Научный руководитель принимал участие в формулировке постановок задач и обсуждении полученных результатов. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был определяющим. Подготовка текста диссертации выполнена автором. Вклад автора в работах [1], [8], [9] составляет 2/3.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 29 печатных изданиях, 9 из которых опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, 5 – в журналах, рекомендованных ВАК, 15 – в сборниках статей и тезисов докладов.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 124 страницы, включая 4 рисунка. Список литературы содержит 94 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цель и задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость.

В **первой главе** рассматривается система уравнений одномерной мелкой воды. Вопрос о возможности сведения данной системы уравнений к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований для каждого профиля дна решается с помощью классификации симметрий исследуемой системы уравнений.

В разделе 1.1 рассматривается система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + \eta_x = 0\,,\\ &\eta_t + ((\eta + h)u)_x = 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u = u(x,t)$ – средняя по глубине горизонтальная скорость; $\eta = \eta(x,t)$ – отклонение свободной поверхности; $z = -h(x)$ – профиль дна, $\eta + h(x)$ – глубина, $\eta + h(x) \geqslant 0$.

В разделе 1.2 получена система определяющих уравнений для нахождения алгебры Ли операторов симметрии системы уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном.

В разделе 1.3 получено решение системы определяющих уравнений. Показано, что ядро алгебры Ли операторов симметрии состоит из оператора

$$X_1 = \partial_t\,.$$

Расширение ядра алгебры Ли операторов симметрии системы уравнений мелкой воды имеется только в следующих пяти случаях:

Случай 1. $h = a_1x + a_2$. В этом случае алгебра Ли операторов симметрии бесконечномерна.

Случай 2. $h = a_1x^2 + a_2x + a_3$. В этом случае алгебра Ли операторов симметрии четырёхмерна.

Случай 3. $h = a_1|x + a_2|^{a_3} + a_4$, $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0, 1, 2$ или

$$h = a_1(x + a_2)^{a_3} + a_4, x > -a_2, a_1 \neq 0, a_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}\,.$$

В этом случае алгебра Ли операторов симметрии двумерна.

Случай 4. $h = a_1 e^{a_2 x} + a_3$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. В этом случае алгебра Ли операторов симметрии двумерна.

Случай 5. $h = a_1 \ln|x + a_2| + a_3$, $a_1 \neq 0$. В этом случае алгебра Ли операторов симметрии двумерна.

В разделе 1.4 на основании полученных результатов классификации симметрий одномерной системы уравнений мелкой воды сделан вывод о том, что данная система уравнений может быть сведена к линейной системе уравнений с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и плоского наклонного профилей дна.

В разделе 1.5 перечислены основные результаты главы 1.

Во **второй главе** находятся все гидродинамические законы сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды для всевозможных профилей дна. Рассматриваются гидродинамические законы сохранения системы уравнений (1), справедливые при любом профиле дна и дополнительные к ним гидродинамические законы сохранения, имеющиеся в некоторых случаях.

В разделе 2.1. второй главы получена система определяющих уравнений для нахождения гидродинамических законов сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном.

В разделе 2.2 найдены все гидродинамические законы сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды при всевозможных профилях дна. Показано, что законами сохранения, справедливыми при всех профилях дна, являются только законы сохранения, аналогичные законам сохранения массы, импульса и энергии. Данные законы сохранения могут быть записаны в виде дивергентных форм

$$D_x\Big(\frac{u^2}{2} + \eta\Big) + D_t(u)\,, \quad D_x((\eta + h)u) + D_t(\eta + h)\,,$$
$$D_x\big(u(\eta + h)(u^2 + 2\eta)\big) + D_t\big(u^2(\eta + h) + \eta^2\big)\,,$$

тождественно равных нулю на решениях системы уравнений (1). Здесь

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}\,, \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta}$$

– операторы полных производных по соответствующим переменным.

Дополнительные гидродинамические законы сохранения имеются только в следующих двух случаях:

Случай 1. $h = a_1 x + a_2$. В этом случае пространство гидродинамических законов сохранения бесконечномерно.

Случай 2. $h = a_1x^2 + a_2x + a_3$. В этом случае пространство гидродинамических законов сохранения пятимерно.

В разделе 2.3 показано, что закон сохранения

$$D_x\big(u(\eta+h)(u^2+2\eta)\big) + D_t\big(u^2(\eta+h)+\eta^2\big)$$

является аналогом закона сохранения энергии.

В разделе 2.4 перечислены основные результаты главы 2.

В **третьей главе** рассматривается трехпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном. Исследуется вопрос о регулярности решений исходной нелинейной системы уравнений, соответствующих решениям из двухпараметрического семейства решений линейной системы уравнений.

В разделе 3.1 рассматривается линеаризованная система уравнений мелкой воды над наклонным дном

$$\begin{aligned} &U_\tau + N_y = 0\,,\\ &N_\tau + (yU)_y = 0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

которая формально может быть получена из системы уравнений (1) отбрасыванием нелинейных слагаемых. Система уравнений (2) связана с системой уравнений (1) при $h = x$ точечным преобразованием

$$\begin{aligned} &x = y - N + \frac{1}{2}\,U^2, \qquad t = \tau + U,\\ &u = U, \qquad \eta = N - \frac{1}{2}\,U^2. \end{aligned} \tag{3}$$

В разделе 3.2 строится класс точных решений системы уравнений (2), имеющий вид

$$\begin{aligned} &U = 2\operatorname{Re}\frac{A(\tau+ib)}{y\sqrt{y-\dfrac{(\tau+ib)^2}{4}}} + 4\operatorname{Im}A\,\frac{\operatorname{sgn}b}{y},\\ &N = 4\operatorname{Re}\frac{A}{\sqrt{y-\dfrac{(\tau+ib)^2}{4}}}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $y \geqslant 0$, $A \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

В разделе 3.3 исследуются соответствующие решения исходной нелинейной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном. Рассматривается вопрос об области параметров, в которой якобиан преобразования полученного решения линейной системы не равен нулю всюду в рассматриваемой области во все моменты времени.

Сформулировано предложение об области параметров, в которой полученное решение линейной системы уравнений определяет решение исходной нелинейной системы уравнений в параметрической форме в случае $\operatorname{Im} A = 0$.

Предложение 1. *Для того, чтобы при* $A \in \mathbb{R}$ *якобиан преобразования* (3) *в силу решения* (4) *был отличен от* 0 *всюду при* $y \geqslant 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, *необходимо, чтобы было выполнено*

$$-|b|^3/16 < A < |b|^3/4\,.$$

Показано, что достаточность сформулированного условия следует из справедливости двух неравенств вида $f_\pm(\alpha,\beta) \geqslant 0$, где

$$y = \frac{\alpha^2\beta^2 b^2}{4}\,, \qquad \tau = b\sqrt{(\alpha^2+1)(\beta^2-1)}\,, \qquad \alpha > 0\,, \qquad \beta \geqslant 1\,,$$

$$f_\pm(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^3\beta^3}{4} + (\alpha^2-3\beta^2+4)\beta^2\Big(\beta\sqrt{\alpha^2+1} \pm \pm\,\alpha\sqrt{\beta^2-1}\Big) \pm 2\alpha(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{\beta^2-1}\,.$$

При этом графики функций f_+ и f_- имеют вид, приведённый на рис. 1 и рис. 2.

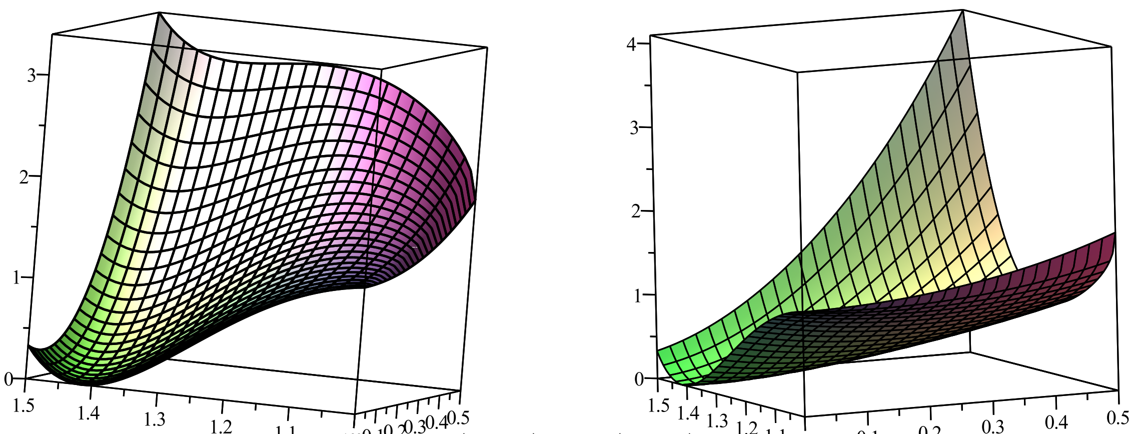

Рис. 1: Графики функций $f_+(\alpha,\beta)$, $f_-(\alpha,\beta)$ при $0 < \alpha \leqslant 0{,}5$; $1 < \beta \leqslant 1{,}5$.

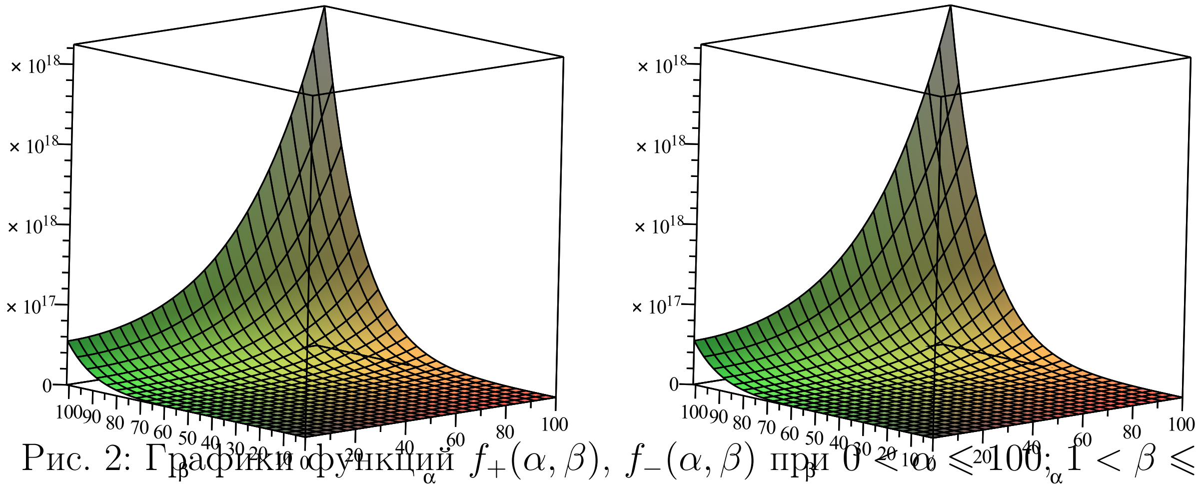

Рис. 2: Графики функций $f_+(\alpha, \beta)$, $f_-(\alpha, \beta)$ при $0 < \alpha \leqslant 100$, $1 < \beta \leqslant 101$.

Таким образом, достаточность сформулированного условия подтверждается по крайней мере численно.

Показана справедливость следующего предложения

Предложение 2. *Для решения* (4) *и соответствующего ему решения нелинейной системы уравнений при* $A \in \mathbb{R}$ *выполнены следующие соотношения:*

$$
\begin{aligned}
&N(y, \tau) = N(y, -\tau)\,, \quad U(y, \tau) = -U(y, -\tau)\,,\\
&\eta(x, t) = \eta(x, -t)\,, \quad u(x, t) = -u(x, -t)\,.
\end{aligned}
$$

В частности, $u(x, 0) = 0$. *При этом момент* $\tau = 0$ *в решении линейной системы уравнений соответствует моменту* $t = 0$ *в преобразованном решении нелинейной системы уравнений.*

Приводятся графики функций $N(y, \tau)$ и $\eta(x, t)$ для решения (4) при $A = 4$, $b = -4$ для двух значений переменной τ и двух значений переменной t (рис. 3, 4).

При отражении набегающей волны в момент времени $t = 0$ на рис. 4 наблюдаются нелинейный эффект заплеска, когда волна отражается от берега при $x < 0$, и эффект усиления амплитуды.

В разделе 3.4 перечислены основные результаты главы 3.

В **четвертой главе** рассматриваются законы сохранения первого порядка и контактные симметрии одномерного уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных. Вводится в рассмотрение промежуточная система уравне-

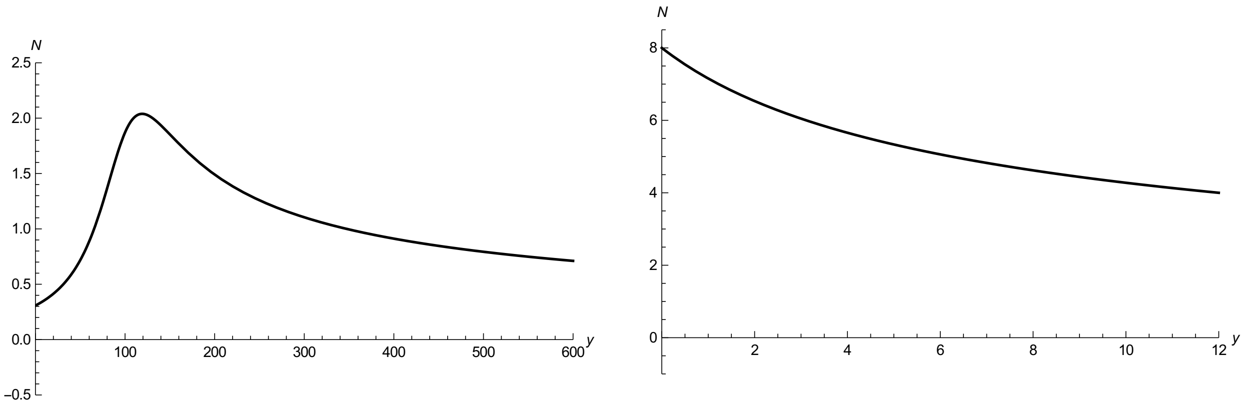

Рис. 3: Графики функции $N = N(y, \tau)$ при $\tau = -20$ (слева), $\tau = 0$ (справа); $A = 4$, $b = -4$.

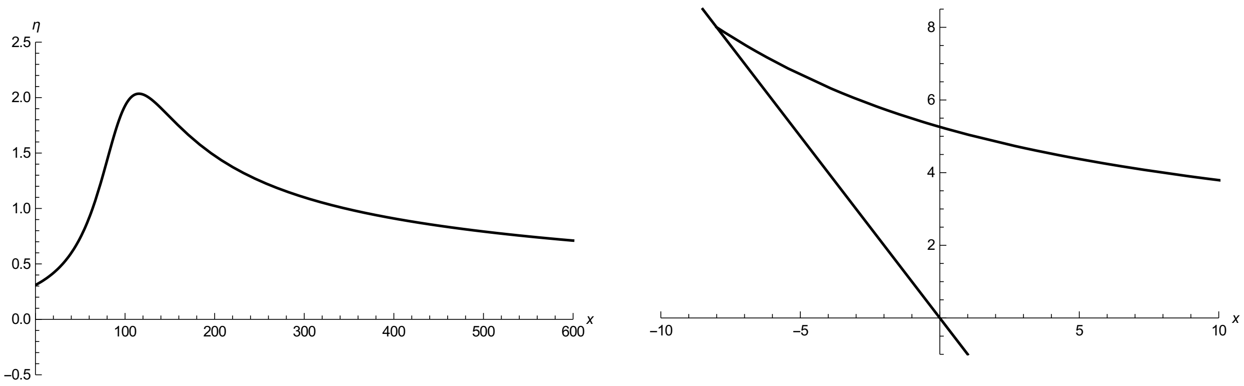

Рис. 4: Графики смещения свободной поверхности $\eta = \eta(x, t)$ в моменты времени $t = -20$ (слева), $t = 0$ (справа); $A = 4$, $b = -4$; профиль дна $z = -x$.

ний, решения которой одновременно описывают решения уравнений мелкой воды в эйлеровых и лагранжевых переменных. Вопрос о возможности сведения данного уравнения к линейному уравнению с помощью контактных преобразований для каждого профиля дна решается с помощью классификации симметрий исследуемого уравнения.

В разделе 4.1 вводится в рассмотрение промежуточная систе ма уравнений

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + \rho_x = h'(x)\,, \\ &m_x = \rho\,, \\ &m_t = -u\rho\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\rho = \eta + h(x)$, m – массовая лагранжева переменная. Вводится в рассмотрение уравнение одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных

$$x_{tt} - \frac{x_{mm}}{x_m^3} = h'(x)\,. \tag{6}$$

В разделе 4.2 находятся все гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений (5) при всевозможных профилях дна. Показано, что гидродинамическими законами сохранения системы уравнений (5), справедливыми при любом профиле дна, являются только аналоги законов сохранения импульса и энергии. Дополнительные гидродинамические законы сохранения имеются только в следующих трёх случаях:

Случай 1. $h = a_1 x + a_2$. В этом случае пространство гидродинамических законов сохранения промежуточной системы уравнений (5) бесконечномерно. Гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений (5), не соответствующие законам сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных, образуют трёхмерное подпространство.

Случай 2. $h = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$. В этом случае пространство гидродинамических законов сохранения промежуточной системы уравнений (5) четырёхмерно.

Случай 3. $h = a_1(x + a_2)^{-4/3} + a_3, \quad a_1 \neq 0, \quad x > -a_2$. В этом случае пространство гидродинамических законов сохранения промежуточной системы уравнений (5) трёхмерно. Гидродинамические законы сохранения промежуточной системы уравнений (5), не соответствующие законам сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды в эйлеровых переменных, образуют одномерное подпространство.

В разделе 4.3 приводится связь между гидродинамическими законами сохранения промежуточной системы уравнений (5) и законами сохранения первого порядка одномерного уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных (6). Полученные законы сохранения системы (5) записываются в терминах лагранжевых переменных.

В разделе 4.4 приводится классификация контактных симметрий уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных (6). На основании полученных результатов сделан вывод о том, что уравнение (6) может быть сведено к линейному уравнению с помощью контактных преобразований только в случаях горизонтального и плоского наклонного профилей дна.

В разделе 4.5 перечислены основные результаты главы 4.

В **пятой главе** рассматривается двумерная система уравнений мелкой воды над неровным дном. Вопрос о линеаризуемости данной системы уравнений для каждого профиля дна разрешается с помощью классификации симметрий исследуемой системы уравнений.

В разделе 5.1 рассматривается система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + vu_y + \eta_x = 0\,, \\ &v_t + uv_x + vv_y + \eta_y = 0\,, \\ &\eta_t + \big((\eta+h)u\big)_x + \big((\eta+h)v\big)_y = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $u = u(x,y,t), v = v(x,y,t)$ – компоненты средней по глубине горизонтальной скорости; $\eta = \eta(x,y,t)$ – отклонение свободной поверхности; $h = h(x,y)$; $z = -h$ – профиль дна; $\eta + h \geqslant 0$.

В разделе 5.2 получена система определяющих уравнений для нахождения алгебры Ли симметрий двумерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном.

В разделе 5.3 получено классифицирующее уравнение для симметрий двумерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном

$$\begin{aligned} \big(-\dot a x - 2By + 2k\big)h_x + \big(-\dot a y + 2Bx + 2l\big)h_y - (2\dot a + 4C)h = \\ = -\frac{x^2+y^2}{2}\ddot a + 2x\ddot k + 2y\ddot l - \dot f\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь функции $a = a(t)$, $k = k(t)$, $l = l(t)$, $f = f(t)$ и константы B, C определяют алгебры Ли симметрий при каждом профиле дна $h(x,y)$. Проводится анализ классифицирующего уравнения. Показано, что ядро алгебры Ли операторов симметрии системы уравнений (7) задаётся оператором

$$X_1 = \partial_t\,.$$

В разделе 5.4 получены расширения ядра алгебры Ли операторов симметрии двумерной системы уравнений мелкой воды при всевозможных профилях дна. Показано, что при всех профилях дна алгебра симметрий двумерной системы уравнений мелкой воды не более чем девятимерна. Расширения ядра алгебры Ли операторов симметрии имеются только в следующих случаях:

1. $h = H(x) + b_1 y^2 + b_2 xy + b_3 y$,
2. $h = H(y + b_0 x) + \dfrac{b_1}{b_0^2+1}(-x + b_0 y)^2 + \dfrac{b_2}{b_0^2+1}(-x + b_0 y)$, $H''' \neq 0$,
3. $h = \dfrac{1}{(x+a_1)^2} H\Big(\dfrac{x+a_1}{y+a_2}\Big) + a_3((x+a_1)^2 + (y+a_2)^2) + a_4$, $H \neq 0$,
4. $h = H\Big(\ln\big((x+b_1)^2 + (y+b_2)^2\big) + b_3 \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)\Big)\exp\Big(b_4 \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)\Big) + b_5$,

5. $h = H\Big(\ln\big((x+b_1)^2+(y+b_2)^2\big) + b_3 \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)\Big) + b_4 \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)$,
6. $h = H(x)\exp(b_1 y) + b_2,\ b_1 \neq 0$,
7. $h = H(y+b_1 x)\exp(b_2 x) + b_3,\ b_2 \neq 0$,
8. $h = H\Big(\dfrac{x+b_1}{y+b_2}\Big)(x+b_1)^{b_3} + b_4\,,\ b_3 \in \mathbb{Z}\setminus\{-2\}$,
   $h = H\Big(\dfrac{x+b_1}{y+b_2}\Big)|x+b_1|^{b_3} + b_4\,,\ b_3 \neq -2$,
9. $h = H\Big(\dfrac{x+b_1}{y+b_2}\Big) + b_3 \ln|x+b_1|$

и их различных подслучаях. При этом алгебра симметрий системы уравнений (7) девятимерна только при профилях дна вида

$$h = a_1(x^2+y^2) + a_4 x + a_5 y + a_6\,.$$

В разделе 5.5 на основании полученных результатов классификации симметрий сделан вывод о том, что в отличие от одномерной системы уравнений мелкой воды, двумерная система уравнений мелкой воды не может быть линеаризована с помощью точечных преобразований ни при каком профиле дна.

В разделе 5.6 перечислены основные результаты главы 5.

В **шестой главе** приводится классификация гидродинамических законов сохранения двумерной системы уравнений мелкой воды (7) в зависимости от профиля дна.

В разделе 6.1 найдена система определяющих уравнений для гидродинамических законов сохранения двумерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном (7).

В разделе 6.2 полученная система определяющих уравнений решается для всех профилей дна. Показано, что классифицирующее уравнение для гидродинамических законов сохранения системы уравнений (7) совпадает с классифицирующим уравнением (8), если в последнем положить $C = 0$. Таким образом, классификация гидродинамических законов сохранения системы уравнений (7) получается с помощью классификации её симметрий. Показано, что гидродинамическими законами сохранения системы (7), справедливыми при всех профилях дна, являются только аналоги законов сохранения массы и энергии. Дополнительные гидродинамические законы сохранения имеются только в следующих случаях:

1. $h = H(x) + b_1 y^2 + b_2 xy + b_3 y,$
2. $h = H(y + b_0 x) + \dfrac{b_1}{b_0^2+1}\,(-x + b_0 y)^2 + \dfrac{b_2}{b_0^2+1}\,(-x + b_0 y),\ H''' \neq 0,$
3. $h = \dfrac{1}{(x+a_1)^2}\,H\Big(\dfrac{x+a_1}{y+a_2}\Big) + a_3((x+a_1)^2 + (y+a_2)^2) + a_4,\ H \neq 0,$
4. $h = H\Big(\ln\big((x+b_1)^2+(y+b_2)^2\big)+b_3\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)\Big)\exp\Big(b_3\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)\Big)+a_4,$
5. $h = H((x+b_1)^2 + (y+b_2)^2)) + a_3\,\mathrm{arctg}\Big(\dfrac{y+b_2}{x+b_1}\Big)$

и их различных подслучаях. При всех профилях дна максимально возможная размерность пространства гидродинамических законов сохранения равна девяти. При этом пространство гидродинамических законов сохранения системы уравнений (7) девятимерно только при профилях дна вида

$$h = a_1(x^2 + y^2) + a_4 x + a_5 y + a_6\,.$$

В разделе 6.3 перечислены основные результаты главы 6.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Найдены все симметрии одномерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных при всех профилях дна. На основании полученных результатов сделан вывод о возможности линеаризации системы уравнений одномерной мелкой воды с помощью точечных преобразований только в случаях горизонтального и наклонного профилей дна.
2. Проведена классификация контактных симметрий одномерного уравнения мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных. На основании результатов полученной классификации сделан вывод о возможности линеаризации одномерного уравнения мелкой воды с помощью контактных преобразований только в случаях горизонтального и наклонного профилей дна.
3. Найдены все симметрии двумерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных при всех профилях дна. На основании полученных результатов сделан вывод о невозможности линеаризации системы уравнений двумерной мелкой воды с помощью точечных преобразований ни при каком профиле дна.

4. Показано, что законами сохранения одномерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных, справедливыми для любых профилей дна, являются только аналоги законов сохранения массы, импульса и энергии. При каждом профиле дна найдены все дополнительные гидродинамические законы сохранения.
5. Найдены все законы сохранения первого порядка одномерного уравнения мелкой воды в лагранжевых переменных при всех профилях дна.
6. Показано, что законами сохранения двумерной системы уравнений мелкой воды в эйлеровых переменных, справедливыми для любых профилей дна, являются только аналоги законов сохранения массы и энергии. При каждом профиле дна найдены все дополнительные гидродинамические законы сохранения.
7. Получено трехпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном. Исследовано двухпараметрическое семейство точных решений одномерной системы уравнений мелкой воды над наклонным дном, описывающее набег на берег и отражение от него волны в форме сглаженной "ступеньки". Описаны нелинейный эффект заплеска и эффект усиления амплитуды набегающей волны при ее отражении от берега.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus

1. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722. Pp. 1–7.
   Impact factor SJR: 0.227. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012001.
2. Аксенов А.В., Дружков К.П. Симметрии системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1565–1566.
   Impact factor JCR (WoS): 0.677. DOI: 10.1134/S0374064118110146.
3. Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П. Точные решения типа "ступеньки" одномерных уравнений мелкой воды над наклонным дном // Математические заметки. 2018. Т. 104. № 6. С. 930–936.
   Impact factor JCR (WoS): 0.626. DOI: 10.4213/mzm12100.
4. Аксенов А.В., Дружков К.П. Метод построения законов сохранения уравнения одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899–900.

Impact factor JCR (WoS): 0.677. DOI: 10.1134/S037406411806016X.

5. Аксенов А.В., Дружков К.П. Способ построения законов сохранения уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых и лагранжевых переменных // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1575–1576.
   Impact factor JCR (WoS): 0.677. DOI: 10.1134/S0374064119110128.
6. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Symmetries of the equations of two-dimensional shallow water over a rough bottom // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1205. № 012002. Pp. 1–7.
   Impact factor SJR: 0.227. DOI: 10.1088/1742-6596/1205/1/012002.
7. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Contact symmetries and conservation laws of the first order of the equation of one-dimensional shallow water over a rough bottom in Lagrange's variables // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1392. № 012001. Pp. 1–6.
   Impact factor SJR: 0.227. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012001.
8. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Group Classification of the System of Equations of Two-Dimensional Shallow Water over Uneven Bottom // Russian Journal of Mathematical Physics. 2020. V. 27. No 3. Pp. 277–298.
   Impact factor JCR (WoS): 1.292. DOI: 10.1134/S1061920820030012.
9. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Conservation laws of the equation of one-dimensional shallow water over uneven bottom in Lagrange's variables // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. V. 119. 103348. Pp. 1–8.
   Impact factor JCR (WoS): 2.313. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103348.

Статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки РФ

10. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения, симметрии и точные решения уравнений мелкой воды над неровным дном // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2016. Т. 5. № 1. С. 38–46.
11. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2018. Т. 7. № 3. С. 240–248.
12. Аксенов А.В., Дружков К.П. Групповая классификация системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2018. Т. 7. № 4. С. 335–340.

13. Аксенов А.В., Дружков К.П. Классификация законов сохранения системы уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2019. Т. 8. № 2. С. 132–140.
14. Аксенов А.В., Дружков К.П. Базовые законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2019. Т. 8. № 3. С. 248–252.

Другие научные труды

15. Аксенов А.В., Дружков К.П. Линеаризация одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Научная сессия НИЯУ МИФИ–2014", НИЯУ "МИФИ". Москва, 2014. Т. 2. С. 216.
16. Аксенов А.В., Дружков К.П. Групповая классификация системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Ломоносовские чтения–2014", Издательство Московского университета. Москва, 2014. С. 15.
17. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения и точные решения одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Научная сессия НИЯУ МИФИ–2015", НИЯУ "МИФИ". Москва, 2015. Т. 2. С. 234.
18. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения и симметрии системы уравнений мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Нелинейные волны: теория и новые приложения", посвященной 70-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова, Институт гидродинамики СО РАН. Новосибирск, 2016. С. 10–11.
19. Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П. Класс точных решений системы уравнений одномерной мелкой воды над наклонным дном // Тезисы конференции "XXVI научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике". Институт океанологии РАН. Москва, 2017. С. 5.
20. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Ломоносовские чтения–2018. Секция механики", Издательство Московского университета. Москва, 2018. С. 20.
21. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. Symmetries of the system of two-dimensional shallow water over a rough bottom // Тезисы конференции "7th International conference "Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling"", NRNU "MEPhI". Moscow, 2018. Pp. 14–16.

22. Аксенов А.В., Доброхотов С.Ю., Дружков К.П. Набегание и отражение от берега "ступеньки" на мелкой воде над наклонным дном // Тезисы конференции "Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред"", Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. Новосибирск, 2019. С. 21.
23. Аксенов А.В., Дружков К.П. Контактные симметрии и законы сохранения первого порядка уравнения одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // Тезисы IV международной научной конференции "Суперкомпьютерные технологии математического моделирования", Издательский дом СВФУ, Якутск, 2019. С. 24.
24. Аксенов А.В., Дружков К.П. Классификация контактных симметрий уравнения одномерной мелкой воды над неровным дном в лагранжевых переменных // Тезисы конференции "Ломоносовские чтения–2019. Секция механики", Издательство Московского университета. Москва, 2019. С. 23.
25. Аксенов А.В., Дружков К.П. Классификация законов сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Тезисы конференции "Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова "Математические проблемы механики сплошных сред"", Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. Новосибирск, 2019. С. 22.
26. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. The Two-Dimensional Shallow Water over a Rough Bottom. Group Classification // Тезисы конференции International conference "Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications (Symmetry 2019)", Suranaree University of Technology Nakhon Ratchasima. Thailand, 2019. Pp. 8.
27. Aksenov A.V., Druzhkov K.P. The Two-Dimensional Shallow Water System over a Rough Bottom. Conservation Laws // Тезисы конференции International conference "Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications (Symmetry 2019)", Suranaree University of Technology Nakhon Ratchasima. Thailand, 2019. Pp. 9.
28. Аксенов А.В., Дружков К.П. Законы сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном в эйлеровых и лагранжевых переменных // статья в сборнике "XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики". Сборник трудов в 4 томах, серия Механика жидкости и газа, РИЦ БашГУ Уфа. Т. 2. С. 42–43.
29. Аксенов А.В., Дружков К.П. Гидродинамические законы сохранения сис-

темы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном // Тезисы VI Международной конференции "Лазерные, плазменные исследования и технологии - ЛаПлаз–2020", НИЯУ "МИФИ". Москва, 2020. Ч. 1. С. 86–87.