

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Ли Кайжуй**

**Распространение трещины гидравлического разрыва  
в неоднородных средах**

Специальность 01.02.04 —  
механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре волновой и газовой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:

**Смирнов Николай Николаевич**

доктор физико-математических наук, профессор

**Киселев Алексей Борисович**

доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:**

**Кривцов Антон Мирославович,**

доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН

Санкт-Петербургский государственный политехнический

университет Петра Великого

Директор высшей школы теоретической механики

**Осипцов Андрей Александрович,**

доктор физико-математических наук, доцент,

Сколковский институт науки и технологий

Заведующий лабораторией моделирования многофазных систем

**Сахаров Александр Николаевич,**

Кандидат физико-математических наук, доцент,

Московский государственный

университет имени М.В. Ломоносова

механико-математический факультет

кафедра теории пластичности

Защита состоится 27 мая 2021 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, к. 208.

E-mail: [chist206@yandex.ru](mailto:chist206@yandex.ru)

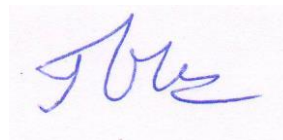
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/344127258/>

Автореферат разослан « 23 » апреля 2021 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.01.14,

кандидат физико-математических наук



П.В. Чистяков

# **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

## **Актуальность темы**

Процесс моделирования гидравлического разрыва пласта (ГРП) очень сложен и включает использование четырех различных разделов механики: механики твердого тела, отвечающей за деформацию пласта вокруг трещины; механики жидкости, отвечающей за движение жидкости и проппанта в трещине; механики разрушения, отвечающей за рост трещины; и термодинамики, отвечающей за обмен тепла между жидкостью и породой. Более того, все эти задачи связаны между собой и взаимозависимы. Модель роста трещины ГРП характеризуется сильной нелинейностью из-за кубической степенной зависимости давления от раскрытия трещины для ньютоновской жидкости – впрочем, для неньютоновской жидкости нелинейность модели становится ещё сильнее. Кроме того, сингулярность в кончике трещины всегда представляет трудность для расчета коэффициентов интенсивности напряжений. Таким образом, решение этой нелинейной связанной системы с сингулярностью в конце трещины будет основной задачей моделирования распространения трещины ГРП в неоднородных средах.

## **Цели диссертационной работы**

1. Исследовать эволюцию повторного открытия гидравлической трещины на ранней стадии, чтобы узнать зависимости длины области отставания жидкости и давления жидкости от различных значений величины напряжения в породе (горного давления).
2. Представить численный алгоритм для описания эволюции заранее-существующей трещины с зоной отставания жидкости.
3. Построить математическую модель для решения трехмерной задачи распространения плоской гидравлической трещины в пласте, характеризующемся неоднородной трещиностойкостью материала.
4. Проанализировать влияние ослабленных областей с меньшей трещиностойкостью и областей повышенной прочности с большей трещиностойкостью на эволюцию роста трещины.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Полученные результаты двумерной и плоско-трехмерной моделей имеют теоретическое и прикладное значение. Результаты в двумерной модели могут быть использованы для моделирования роста плоско-деформированной гидравлической трещины с зоной отставания жидкости. Плоско-трехмерная модель гидравлического разрыва пласта с неоднородной трещиностойкостью может быть использована в исследовании неравномерного роста трещины в горных породах. Результаты плоско-трехмерной модели могут помочь более глубоко понять закономерности распространения трещин в неоднородных средах.

## **Методология и методы исследования**

В диссертации используются методы аналитической и вычислительной математики и математического моделирования. Комплекс программ разработан в пакете Matlab.

## **Научная новизна**

1. Получены численные решения для начального состояния эволюции заранее-существующей трещины гидроразрыва.
2. Представлен новый неявный алгоритм с быстрой сходимостью и малой вычислительной погрешностью для описания эволюции заранее-существующей трещины с зоной отставания жидкости.
3. Построена модель для решения трехмерной задачи распространения плоской гидравлической трещины с учетом неоднородности пласта (неоднородная трещиностойкость материала).
4. Проведены сравнительные численные эксперименты по определению влияния на рост трещины размера, положения и соотношения областей различной трещиностойкости (ослабленные области с меньшей трещиностойкостью и области повышенной прочности с большей трещиностойкостью).

### **Достоверность**

Достоверность результатов работы обеспечена строгостью используемого механико-математического аппарата и подтверждается сравнением с известными результатами, полученными другими учеными. Результаты работы были доложены на ряде Всероссийских и Международных конференций, а также подвергнуты рецензированию при публикации в журналах, многократно доложены на научно-исследовательских и аспирантских семинарах кафедры волновой и газовой динамике.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Полученное автомодельное решение для случая высокого горного давления позволяет преодолевать сингулярность начального условия для модели роста трещины гидроразрыва.
2. Созданный новый алгоритм с быстрой сходимостью и малой вычислительной погрешностью, а также создана вычислительная программа дают возможность получать численное решение эволюции существующей плоско-двумерной трещины с зоной отставания жидкости.
3. Разработанная плоско-трехмерная модель распространения гидравлической трещины в пласте с неоднородной трещиностойкостью и созданная компьютерная программа позволяют описывать распространение трещины в пласте с неоднородной трещиностойкостью.
4. Показано, что наличие ослабленных областей способствует росту трещины в этих и примыкающих к ним областях, а на форму трещины существенно влияет перепад между трещиностойкостями различных областей, а также их взаимное расположение.

### **Личный вклад**

Теоретические и численные результаты, изложенные в первой и второй главах, получены соискателем самостоятельно.

Результаты, сформулированные в третьей и четвертой главах, получены соискателем совместно с младшим научным сотрудником Д.А. Пестовом.

Научные руководители доктора физико-математических наук Н.Н. Смирнов и А.Б. Киселев предложили постановки задач и оценили новые результаты в Главах 1, 2, 3, 4.

### **Апробация работы**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.И. Горбачева (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар лаборатории моделирования многофазных систем Сколковского института науки и технологий под руководством А.А. Осипцова (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар научно-образовательного центра «Газпромнефть-Политех» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого под руководством члена-корр. РАН А.М. Кривцова (2020 г.).
- ◆ международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ-2019».
- ◆ научная конференция «ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ-2019».
- ◆ международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышева, 2019 г., г. Обнинск, Россия.
- ◆ XLVII International conference “Advanced problems in Mechanics”. 2019, St. Petersburg, Russia.
- ◆ научная конференция «ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ-2020».
- ◆ XLVIII International conference “Advanced problems in Mechanics”. 2020, St. Petersburg, Russia.

### **Публикации**

Основное содержание диссертации представлено в 5 научных статьях, которые опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных RSCI, Web of Science, Scopus. Список публикаций приведен в конце автореферата.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа представлена на 153 страницах, содержит 94 иллюстрации и 10 таблиц. Список литературы включает 168 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, указывается цель работы, дается характеристика научной новизны диссертации и приводится обзор литературы по исследуемой теме.

В **первой главе** рассматриваются численные асимптотические решения для начального состояния повторного открытия заранее-существующей гидравлической трещины с зоной отставания жидкости.

В **разделах 1.1, 1.2 и 1.3** построена математическая модель. На рис. 1 (а) заранее-существующая трещина с полудлиной  $l_0$  сначала замкнута под действием горного давления  $\sigma_0$ , потом начинает открываться из-за закачки несжимаемой ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu$  в трещину с постоянной скоростью  $Q_0$ , см. рис. 1 (б). Открытая трещина состоит из двух зон: заполненная жидкостью зона с длиной  $l_f$  и давлением жидкости  $p_f(x, t)$ , и зона отставания жидкости с длиной  $l_{lag}$  и давлением  $p_{lag}(x, t)$ , незначительным по сравнению с горным давлением  $\sigma_0$ . Параметры пласта: модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

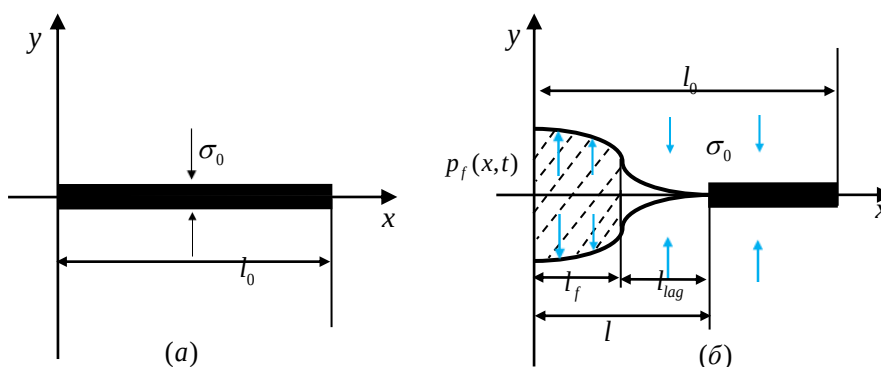


Рис. 1. Профили заранее-существующей трещины гидроразрыва: (а) полностью замкнутое состояние; (б) частично раскрытое состояние в некоторый момент.

Управляющие уравнения для раскрытия трещины [1] и движения жидкости [2] имеют вид:

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi E'} \left[ \int_0^{l_f} p(x', t) G(x, x') dx' - \sigma_0 \int_{l_f}^l G(x, x') dx' \right], \quad G(x, x') = \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 - x^2} + \sqrt{l^2 - x'^2}}{\sqrt{l^2 - x^2} - \sqrt{l^2 - x'^2}} \right| \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{l_f} w(x', t) dx' = q(x, t), \quad q(x, t) = -\frac{w(x, t)^3}{\mu'} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $l$  – длина открытой трещины,  $w$  – раскрытие трещины, коэффициент  $E' = E/(1 - \nu^2)$ ,  $q(x, t)$  – скорость потока на сечении трещины с единичной шириной,  $\mu' = 12\mu$ .

Основные граничные условия, включающие закон сохранения объема, условие постоянной скорости закачки на скважине, условие непрерывного давления на фронте жидкости и условие распространения трещины [3]:

$$\int_0^{l_f} w(x, t) dx = q_0 t, \quad (3)$$

$$q_0 = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x=0 \quad (4)$$

$$p(x, t) = -\sigma_0, \quad x=l_f \quad (5)$$

$$K_I = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ \int_0^{l_f} \frac{p(x, t)}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx - \sigma_0 \int_{l_f}^l \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx \right] = 0. \quad (6)$$

здесь  $q_0 = Q_0/2$  представляет собой скорость закачки в каждую сторону трещины.

В разделе 1.4 вводится метод масштабирования для решения модели. Безразмерная координата для трещины:  $\xi = x/l$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ).  $\xi_f = l_f/l$  является безразмерной координатой фронта жидкости. Безразмерная длина открытой трещины  $\gamma(t)$ , безразмерная длина заполненной жидкостью зоны  $\gamma_f(t)$ , безразмерное раскрытие трещины  $\Omega(\xi, t)$  и безразмерное избыточное давление  $\Pi(\xi, t)$  с двумя дополнительными параметрами (масштаб длины  $L(t)$  и малый параметр  $\varepsilon(t)$ ) определяются так [4]:

$$l(t) = \gamma(t)L(t), \quad l_f(t) = \gamma_f(t)L(t), \quad (7)$$

$$w(\xi, t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\xi, t), \quad p(\xi, t) = \varepsilon(t)E'\Pi(\xi, t), \quad (8)$$

$$\varepsilon L^2 = q_0 t, \quad \mu'/(E't\varepsilon^3) = 1. \quad (9)$$

Таким образом, система уравнений модели (1), (2), (3), (5) и (6) переписана следующим образом:

$$\left( \frac{2}{3} + \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) \xi \bar{\Omega} + \left( 2 \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + 1 \right) \int_{\xi}^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi' + t \frac{d\xi_f}{dt} \bar{\Omega}_{\xi=\xi_f} + t \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} d\xi' = -\bar{\Omega}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \quad (10)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\xi_f} \left[ \Pi(\xi', t) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon E'} \right] G(\xi, \xi') d\xi' - \pi \bar{\sigma} \sqrt{1 - \xi^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\gamma^2 \int_0^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi = 1, \quad (12)$$

$$\Pi(\xi_f, t) = -\bar{\sigma}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\xi_f} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} [\Pi(\xi, t) + \bar{\sigma}] d\xi = \frac{\pi}{2} \bar{\sigma}, \quad (14)$$

где безразмерное горное давление  $\bar{\sigma} = \sigma_0/(E'\varepsilon)$ .

В разделе 1.5 показана дискретизация трещины и давления, а также представлен итерационный алгоритм для численного расчета системы (10)–(14). Во избежание необходимости ставить начальное условие, используется метод возмущений для вычисления производных членов по времени  $\eta = (t/\gamma)(d\gamma/dt)$  и  $\Gamma = L_{34}/L_{12}$  в уравнении (10). Здесь  $L_{12}$  представляет собой сумму первого и второго членов уравнения (10), а  $L_{34}$  является суммой третьего и четвертого членов уравнения (10). В разделе 1.6 показаны численные результаты модели: безразмерное раскрытие трещины  $\Omega$ , безразмерное избыточное давление  $\Pi$  (рис. 2).

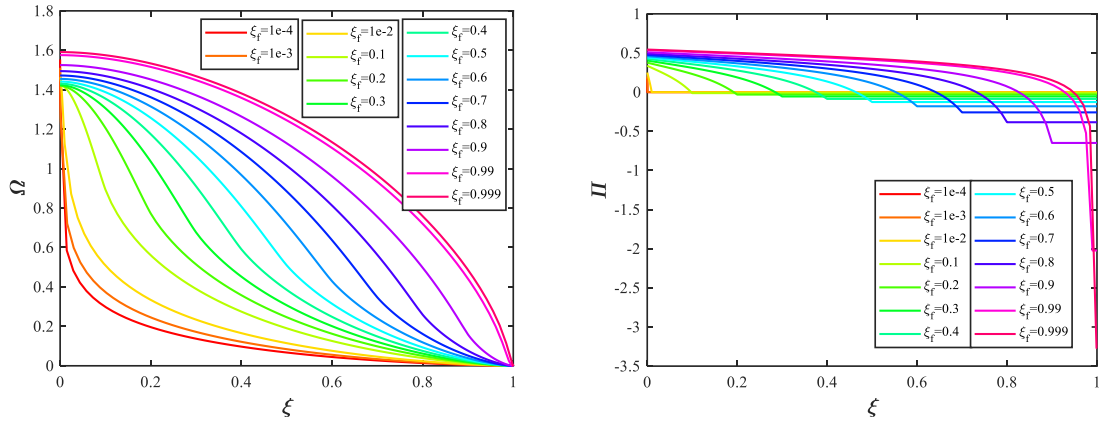


Рис. 2. Безразмерные раскрытия трещины  $\Omega$  (левый рисунок) и безразмерные избыточные давления  $\Pi$  (правый рисунок) при 14 различных координатах фронта жидкости  $\xi_f$  и фиксированном времени  $t^* = 10^{-4} \text{ s}$ .

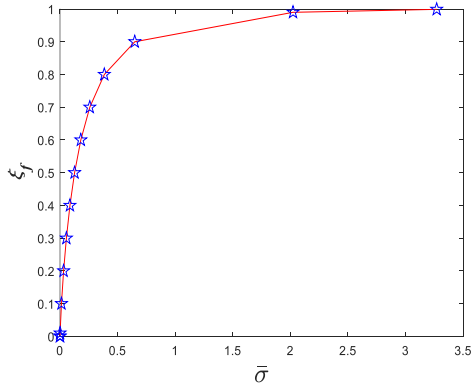


Рис. 3. Зависимость безразмерного горного давления  $\bar{\sigma}$  от координаты фронта жидкости  $\xi_f$ .

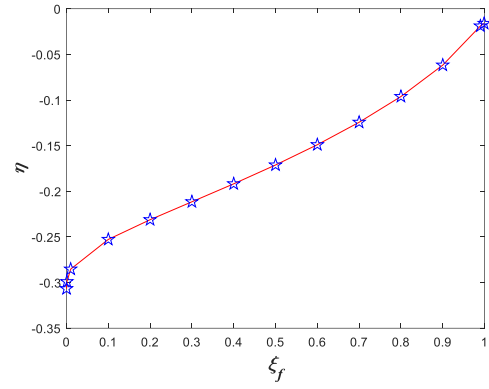


Рис. 4. Численные решения коэффициента  $\eta$  при 14 различных координатах фронта жидкости  $\xi_f$ .

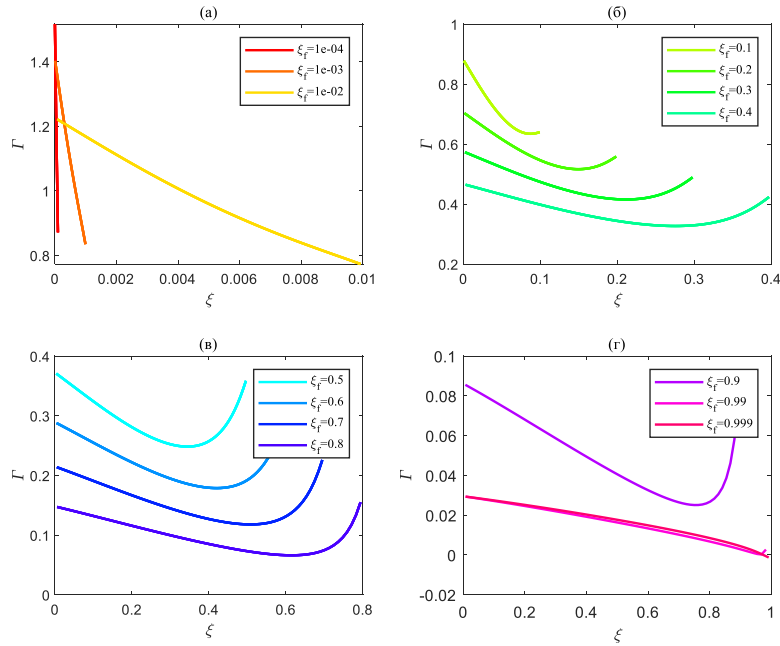


Рис. 5. Численные решения коэффициента  $\Gamma$  при 14 различных долях заполненной жидкостью зоны  $\xi_f$ .



Результаты на рис. 3 показывают, что для повторного открытия трещины заполненная жидкостью зона сильно зависит от горного давления: если  $\sigma_0$  мало, зона отставания жидкости занимает большую долю в трещине, в противном случае ( $\sigma_0$  велико), жидкость заполняет почти всю трещину. На рис. 4 и 5 представлены значения коэффициентов  $\eta = (t/\gamma)(d\gamma/dt)$  и  $\Gamma = L_{34}/L_{12}$  в зависимости от координаты фронта жидкости  $\xi_f$ . Они показывают, что с ростом заполненной жидкостью зоны коэффициенты  $\eta$  и  $\Gamma$  приближаются к нулю. Это значит, что при достаточно большом горном давлении  $\sigma_0$ ,  $\xi_f$  стремится к единице, и производными по времени членами в уравнении неразрывности можно пренебречь из-за достаточно малых  $\eta$  и  $\Gamma$ . В этом случае управляющее уравнение (10) можно упростить следующим образом:

$$\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega} + \int_{\xi}^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi' = -\bar{\Omega}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}. \quad (15)$$

Полученное уравнение не зависит от времени и имеет автомодельное решение.

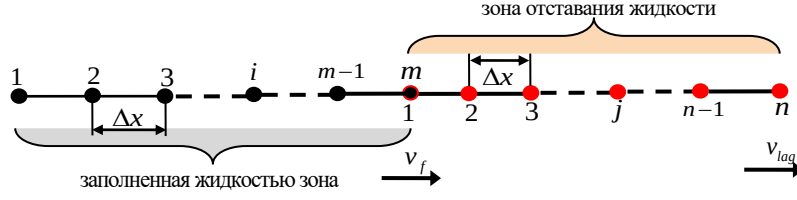
Во **второй главе** рассматривается численный алгоритм для повторного открытия заранее-существующей гидравлической трещины с зоной отставания жидкости. Самой трудной частью этой задачи является определение положений фронта жидкости и фронта трещины.

В **разделе 2.1** показана постановка модели, аналогичная постановке в первой главе (см. рис. 1). Начальное условие для численного расчета получается на основе результатов первой главы: когда горное давление  $\sigma_0$  мало, распределение давления жидкости приближенно линейно, см. правый рисунок на рис. 2, поэтому начальное условие задается так:

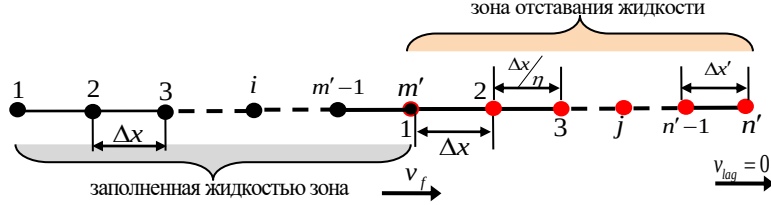
$$\begin{aligned} p_f(x, t) &= P_0 \left( 1 - \frac{x}{l_f^0} \right), & 0 \leq x \leq l_f^0, \\ p_{lag}(x, t) &= 0, & l_f^0 < x \leq l^0 \end{aligned} \quad (16)$$

где  $l^0$  представляет собой начальную длину открытой трещины,  $P_0$  – начальное давление на скважине.

В **разделе 2.2** представлен метод численного решения модели. Для описания движения двух фронтов (фронта жидкости и фронта трещины) на различных стадиях (первая стадия от начального открытия до полного открытия, вторая стадия от полного открытия до начального распространения) используются, соответственно, два разных разбиения трещины (см. рис. 6). На первой стадии используется равномерная подвижная сетка (см. рис. 6 (а)), а на второй стадии – равномерная подвижная сетка для заполненной жидкостью зоны и сетка со сгущающимися к кончику ячейками для зоны отставания жидкости (см. рис. 6 (б)).  $v_f$  и  $v_{lag}$  представляют скорость фронта жидкости и скорость фронта трещины соответственно. В **разделах 2.2.2 и 2.2.3** описывается дискретизация системы уравнений, включающей уравнение движения жидкости, уравнение упругости для раскрытия трещины и основные граничные условия.



(а) Равномерная подвижная сетка на первой стадии



(б) Равномерная подвижная сетка для заполненной жидкостью зоны и сетка со сгущающимися ячейками для зоны отставания жидкости на второй стадии

Рис. 6. Схема разбиения трещины на двух стадиях.

В разделе 2.3 подробно описан итерационный алгоритм для решения модели. В разделе 2.3.3 предлагаются меры для улучшения алгоритма. Первая мера состоит в том, чтобы точнее оценить положение фронта трещины, то есть определить количество точек сетки в зоне отставания жидкости, при условии нулевого раскрытия трещины на фронте трещины  $x = l^k$ :

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{x_i} + p_{x_{i+1}}}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(l^k, \zeta) d\zeta = \sigma_0 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(l^k, \zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Вторая мера – точнее оценить раскрытие трещины на текущем шаге по времени  $t_k$ . Мы предполагаем

$$w(x, t_k) = w\left(\frac{l_f^{k-1}}{l_f^k} x, t_{k-1}\right) M_k, \quad 0 \leq x \leq l_f^k, \quad (18)$$

где  $l_f^{k-1}$  и  $l_f^k$  представляют собой длины заполненной жидкостью зоны на предыдущем и текущем шагах по времени:  $t_{k-1}$  и  $t_k$ , соответственно.  $M_k$  представляет собой коэффициент пропорциональности между раскрытиями трещины в моменты  $t_{k-1}$  и  $t_k$  и определяется с помощью закона сохранения объема:

$$M_k = \frac{t_k l_f^{k-1}}{t_{k-1} l_f^k} > 1. \quad (19)$$

Третья мера заключается в том, чтобы точнее оценить положение фронта заполненной жидкостью зоны с помощью мгновенной скорости на фронте жидкости:

$$l_f^{k*} = l_f^{k-1} + v_f \Delta t, \quad v_f = \frac{w_{m,k-1}^2}{12\mu} \frac{p_{m-1,k-1} - p_{m,k-1}}{\Delta x}. \quad (20)$$

В разделе 2.3.4 представлено характерное время этой модели, которое сопоставимо с начальным временем  $t_0$ :

$$t_0 = \frac{2V_0}{Q_0} = \frac{2}{Q_0} \int_0^{l_f^0} w_0(x) dx, \quad (21)$$

где  $V_0$  – начальный объем жидкости в трещине,  $w_0$  – начальное раскрытие трещины,  $l_f^0$  – начальная длина заполненной жидкостью зоны.

В разделе 2.4.1 дано численное решение для начального условия. В разделе 2.4.2 показаны численные решения эволюции трещины. Рис. 7 показывает эволюцию раскрытия трещины на стадии от начального до полного открытия и на стадии от полного открытия до начального роста. Рис. 8 показывает соответствующие результаты эволюции давления жидкости. На рис. 9 представлены длина заполненной жидкостью зоны  $l_f$  и длина открытой трещины  $l$ . На рис. 10 представлена эволюция коэффициента интенсивности напряжений.

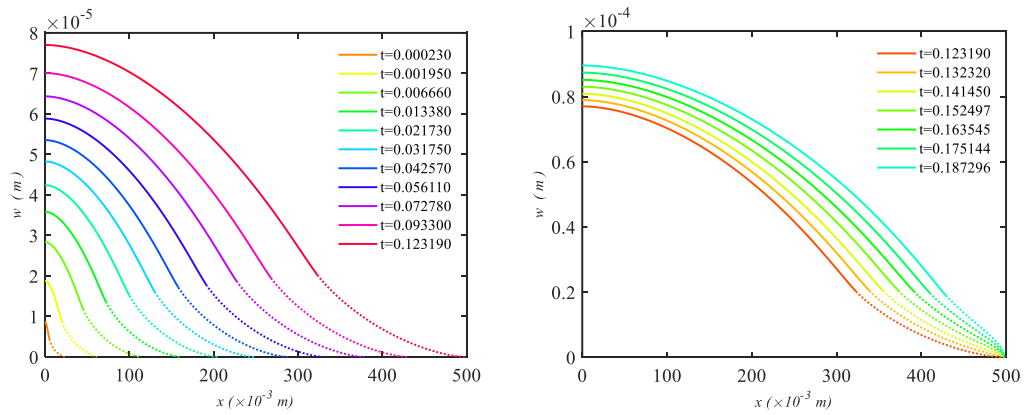


Рис. 7. Эволюция раскрытия трещины на первой стадии от начального до полного открытия (левый рисунок) и на второй стадии от полного открытия до начального роста (правый рисунок) при  $l_0 = 0.5$  м и  $K_{IC} = 0.5$  МПа  $\cdot$  м<sup>0.5</sup>.

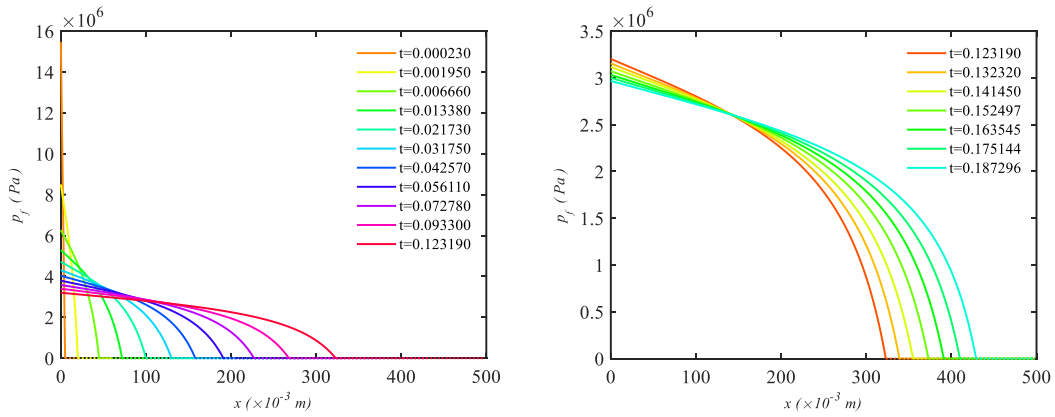


Рис. 8. Эволюция давления жидкости на первой стадии от начального до полного открытия (левый рисунок) и на второй стадии от полного открытия до начального роста (правый рисунок) при  $l_0 = 0.5$  м и  $K_{IC} = 0.5$  МПа  $\cdot$  м<sup>0.5</sup>.

В разделе 2.5 проанализирован численный алгоритм решения модели. На рис. 11–13 представлены сравнительные результаты трех улучшений алгоритма между оцененными значениями и численными решениями. Видно, что три способа улучшения алгоритма, предложенные в разделе 2.3, дают хороший эффект, особенно второй и третий (см. рис. 12, 13). Чем точнее оцененные

результаты совпадают с численными результатами, тем меньше итераций требуется. Как следует из рис. 14, число итераций сверх 30 отмечено только 3 раза, в основном число итераций около 10, почти в половине случаев число итераций менее 10. Этот улучшенный алгоритм имеет более высокую скорость сходимости, чем алгоритм в работе [5] со средним числом итераций, равным 60. На рис. 15 приведены относительные погрешности объема жидкости в расчете. Видно, что вначале относительная погрешность немного повышена, но держится на уровне  $\xi_k < 3.5\%$ , после изначальных шагов относительная погрешность не превосходит 0.5%. Из приведенных выше результатов видно, что этот неявный алгоритм не только гарантирует точность, но и значительно уменьшает число итераций и экономит время расчета путем получения значений, точнее соответствующих оцененным значениям для основных неизвестных в модели.

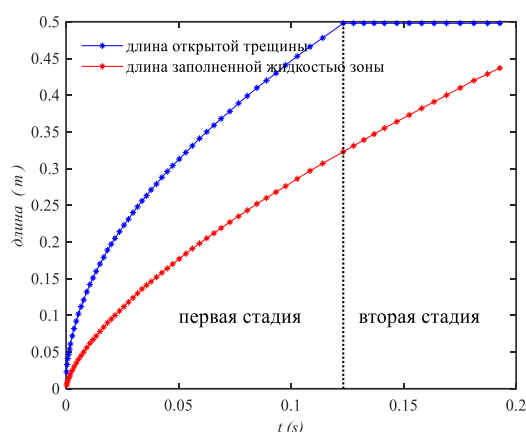


Рис. 9. Эволюция длины открытой трещины и длины заполненной жидкостью зоны на двух стадиях.

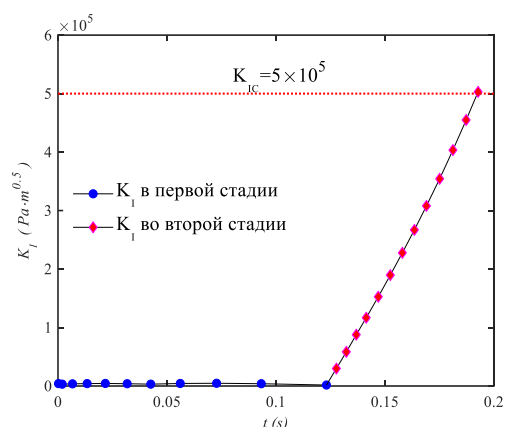


Рис. 10. Эволюция коэффициента интенсивности напряжений на двух стадиях.

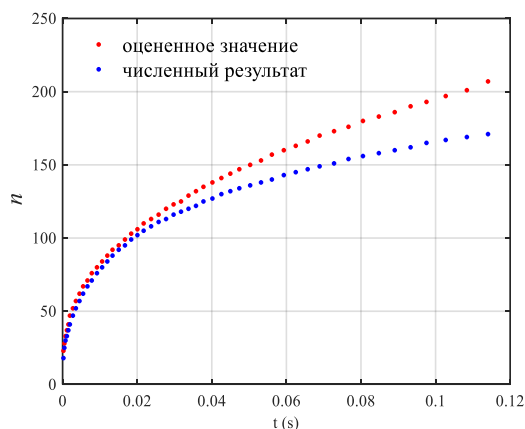


Рис. 11. Сравнительные результаты количества точек сетки  $n$  в зоне отставания жидкости.

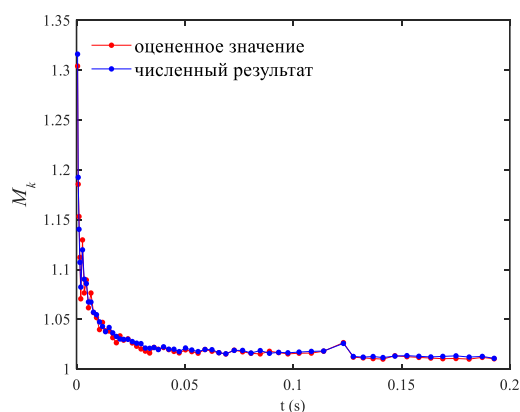


Рис. 12. Сравнительные результаты коэффициента пропорциональности  $M_k$  между раскрытиями трещины в моменты  $t_{k-1}$  и  $t_k$ .

В разделе 2.6 получены ограничивающие условия ( $1.01 < M_k < 1.03$  и  $\Delta l_k = v_f^k \cdot \Delta t \geq \Delta x$ ) на коэффициент пропорциональности  $M_k$  и длину сетки  $\Delta x$  для быстрой сходимости и высокой точности расчета. Эти два ограничивающих условия требуют непрерывного увеличения шага по времени  $\Delta t$  по мере расчета, поэтому в данной работе, для балансировки точности модели и сходимости

алгоритма, используется адаптивный шаг по времени  $\Delta t_k$ . На рис. 16 показан адаптивный шаг времени  $\Delta t_k$  по отношению к номеру шага по времени  $k$ .

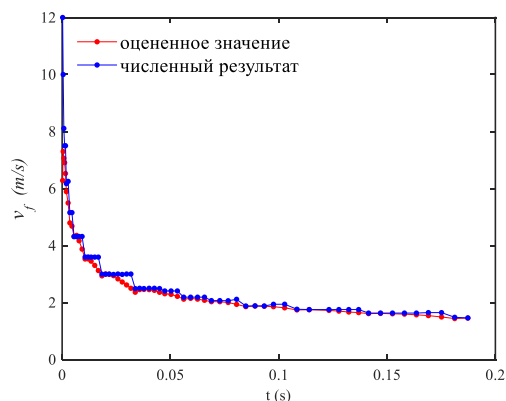


Рис. 13. Сравнительные результаты скорости фронта жидкости  $v_f$  на каждом шаге по времени.

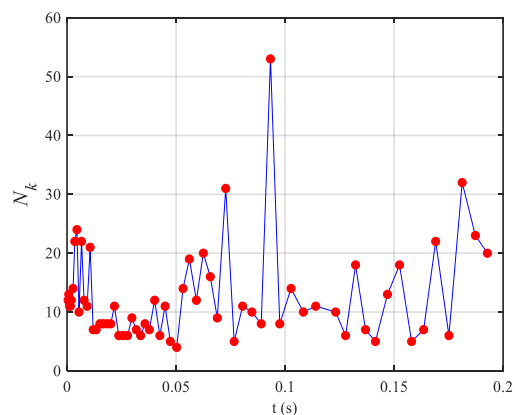


Рис. 14. Количество итераций  $N_k$  на каждом шаге по времени.

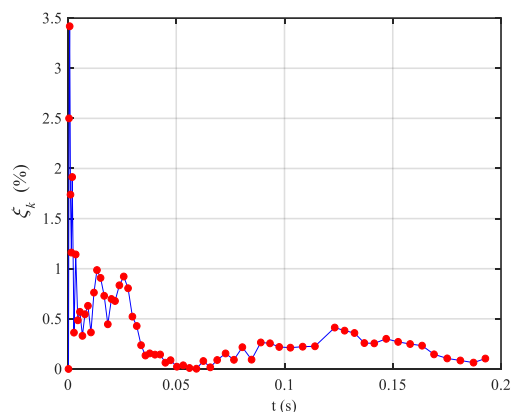


Рис. 15. Относительные погрешности  $\xi_k$  на каждом шаге по времени.

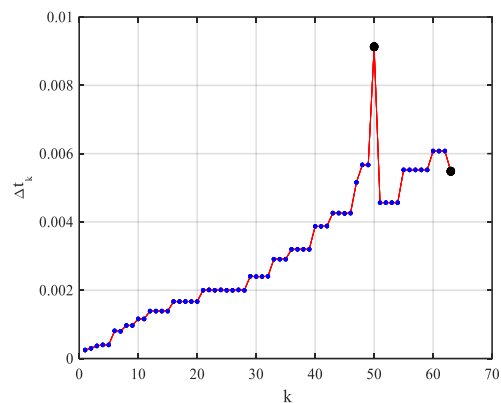


Рис. 16. Адаптивный шаг по времени  $\Delta t_k$  по отношению к номеру шага времени  $k$ .

В третьей главе представлена теоретическая часть плоско-трехмерной модели распространения гидравлической трещины в пласте, характеризующемся неоднородной трещиностойкостью материала. В разделе 3.1 показана постановка задачи с основными гипотезами. В разделе 3.2 описаны уравнения упругости, уравнение движения жидкости (22), граничные условия (23)–(25) и начальные условия.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rwu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(wu_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (22)$$

$$q = -\frac{w_0^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_0}{2\pi r_0}, \quad r = r_0 \quad (23)$$

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad r = R \quad (24)$$

$$w(r, \theta, t) = 0, \quad r = R \quad (25)$$

где  $u_r = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r}$  и  $u_\theta = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}$  представляют собой радиальную и кольцевую скорости жидкости,  $r_0$  – радиус скважины,  $R$  – радиус внешней границы трещины.

Следует отметить, что до роста трещины движение жидкости является одномерным из-за симметрии трещины относительно точки закачки. После роста трещины движение жидкости становится двумерным из-за наличия неравномерного роста трещины при неоднородной трещиностойкости материала  $K_{IC} = K_{IC}(\theta)$ . Следовательно, модель делится на два этапа: первый этап представляет собой эволюцию до роста трещины, второй этап является эволюцией роста трещины.

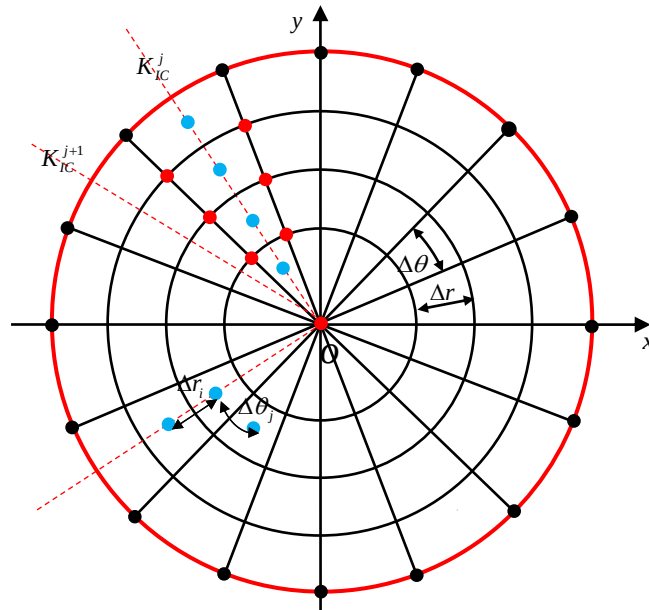


Рис. 17. Схема дискретизации трещины: красная кривая – фронт трещины, чёрные точки – граничные точки на фронте трещины, красные точки – это вершины ячеек, синие точки – центры ячеек, на которых задаются все параметры: номер ячейки, координаты, раскрытие и давление.

В разделе 3.3 подробно представлены методы построения решения модели. Задача упругости в модели решается трехмерным методом разрывных смещений [6, 7, 8], который также используется для нахождения коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  [9] в разделе 3.3.2. В разделе 3.3.3 преобразованы уравнения движения жидкости и граничные условия. Дискретизация трехмерной модели представлена в разделе 3.4. Схема дискретизации трещины показана на рис. 17. Области, состоящие из ячеек с одинаковыми кольцевыми координатами  $\theta_j$ , обозначим как «радиальная область  $\theta_j$ », а области, состоящие из ячеек с одинаковыми радиальными координатами  $r_i$ , будем называть «кольцевой областью  $r_i$ ».  $\Delta r$  и  $\Delta \theta$  являются, соответственно, шагами сетки по радиальному и кольцевому направлениям.  $K_{IC}^j$  – трещиностойкость радиальной области  $\theta = \theta_j$  (см. области, обозначенные красным пунктиром, на рис. 17).

В разделе 3.4.2 представлены дискретные формы трехмерного метода разрывных смещений для треугольной и трапециевидной ячеек. Раздел 3.4.3 показывает дискретную форму уравнения движения жидкости (22):

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta t} - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r_i} \left[ \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2,j,k+1} - \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2,j,k+1} \right] - \\ \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta \theta_j} \left[ \left( \frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j+1/2,k+1} - \left( \frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j-1/2,k+1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\Delta t$  – это шаг по времени; индексы  $(i, j)$  представляют собой двумерный номер ячейки,  $i$  – номер по радиальному направлению,  $j$  – номер по кольцевому направлению ( $j \leq n$ ), где  $n$  является количеством отрезков по кольцевому направлению;  $k$  – это номер шага по времени;  $r_i$  – радиальная координата вычисляемой ячейки (координата центра ячейки),  $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$  (см. рис. 17). Разделение по кольцевому направлению однородно:  $\Delta \theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j = \Delta \theta$ . Согласно методу конечных объемов члены с индексами  $i+1/2$ ,  $i-1/2$ ,  $j+1/2$ ,  $j-1/2$  определяются так:

$$\begin{aligned} \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2,j,k+1} &= r_{i+1/2} w_{i+1/2,j,k+1}^3 \frac{p_{i+1,j,k+1} - p_{i,j,k+1}}{\Delta r_i}, \\ \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2,j,k+1} &= r_{i-1/2} w_{i-1/2,j,k+1}^3 \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i-1,j,k+1}}{\Delta r_{i-1}}, \\ \left( \frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j+1/2,k+1} &= \frac{w_{i,j+1/2,k+1}^3}{r_i} \frac{p_{i,j+1,k+1} - p_{i,j,k+1}}{\Delta \theta_j}, \\ \left( \frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j-1/2,k+1} &= \frac{w_{i,j-1/2,k+1}^3}{r_i} \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j-1,k+1}}{\Delta \theta_{j-1}}, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $r_{i+1/2}$  представляет собой радиальную координату точки  $(i+1/2, j)$ ;  $r_{i-1/2}$  – радиальная координата точки  $(i-1/2, j)$ ;  $w_{i+1/2,j,k+1}$ ,  $w_{i-1/2,j,k+1}$ ,  $w_{i,j+1/2,k+1}$  и  $w_{i,j-1/2,k+1}$  являются раскрытиями на точках  $(i+1/2, j)$ ,  $(i-1/2, j)$ ,  $(i, j+1/2)$  и  $(i, j-1/2)$  на текущем шаге по времени, соответственно. Следует отметить, что  $r_{1-1/2} = r_0$  ( $r_0$  – радиус скважины). До роста трещины, ввиду отсутствия кольцевой скорости жидкости, в левой части уравнения (26) нет третьего члена.

В разделе 3.4.4 представлена дискретизация граничных условий, в том числе уравнения (23), которое принимает следующий вид:

$$\left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{1-1/2,j,k+1} = -\frac{Q_0 \mu'}{2\pi}. \quad (28)$$

Это уравнение можно прямо подставить в уравнение (26), и полученное таким образом уравнение не будет содержать  $r_0$  (радиус скважины). Это значит, что величина  $r_0$  не влияет на численные результаты, поэтому гипотеза точечного источника для скважины разумна.

Из этих же рассуждений следует, что граничное условие (24) на конце трещины можно переписать как

$$\left( rw^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/2, j, k+1} = 0, \quad (29)$$

где  $m$  – радиальный номер ячейки, включающей границу трещины. Это уравнение не может быть прямо подставлено в уравнение (26), как уравнение (28), поскольку это приведёт к сингулярности последней матрицы коэффициентов для уравнения (26) [10]. Чтобы этого избежать, мы выбираем точку  $(m+1/4, j)$  между точками  $(m, j)$  и  $(m+1/2, j)$  в качестве расчетной точки вместо  $(m+1/2, j)$ , и получаем:

$$\left( rw^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/4, j, k+1} = \frac{r_m + r_{m+1/2}}{2} \left( \frac{w_{m, j, k+1} + w_{m+1/2, j, k}}{2} \right)^3 \frac{p_{m+1/2, j, k+1} - p_{m, j, k+1}}{r_{m+1/2} - r_m}, \quad (30)$$

где  $r_{m+1/2} = R_j$  – радиальная координата точки  $(m+1/2, j)$ , то есть радиус трещины при  $\theta = \theta_j$ ,  $r_m$  – радиальная координата ячейки  $(m, j)$ .  $w_{m+1/2, j, k}$  – раскрытие на точке  $(m+1/2, j)$ , то есть раскрытие на границе трещины, равное нулю согласно условию (25),  $p_{m+1/2, j, k+1}$  – давление на точке  $(m+1/2, j)$ , то есть давление на границе трещины.

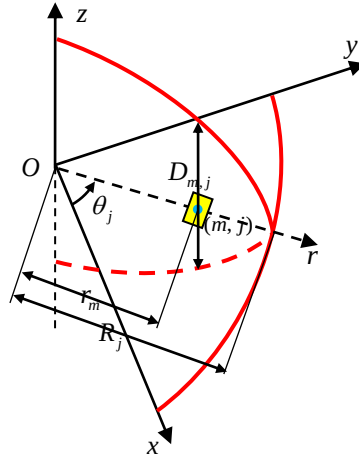


Рис. 18. Положение ячейки  $(m, j)$ , самой близкой к реальной границе трещины в направлении  $\theta = \theta_j$ .

В разделе 3.4.5 получена дискретная форма условия роста трещины. На рис. 18 красные кривые представляют собой трехмерный контур на границе трещины; жёлтая область – это ячейка  $(m, j)$ , самая близкая к реальной границе трещины в направлении  $\theta = \theta_j$ ;  $D_{m, j}$  – это раскрытие ячейки  $(m, j)$ ;  $r_m$  – радиальная координата ячейки  $(m, j)$ ;  $R_j$  – радиус трещины в направлении  $\theta = \theta_j$ . Мы используем раскрытие ячейки  $(m, j)$  и  $R_j - r_m$  вместо предельной величины раскрытия и радиуса на конце трещины, поэтому коэффициент интенсивности напряжений на границе трещины принимает вид:

$$K_I(\theta) = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{D_{m, j}}{\sqrt{R_j - r_m}}, \quad \theta = \theta_j \quad (31)$$



В разделе 3.5 описана дискретная система уравнений модели на этапе до роста трещины. На этом этапе присутствует только одномерное движение жидкости в радиальном направлении, и уравнение (26) переводится в

$$\frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta t} - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r_i} \left[ \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2,j,k+1} - \left( r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2,j,k+1} \right] = 0, \quad (32)$$

поэтому трещина дискретизируется одномерно по радиальному направлению (см. рис. 19, на котором представлено одно из радиальных сечений из рис. 17). Следует отметить, что кольцевые номера ячеек  $j$  на рис. 19 опущены, поскольку для всех радиальных областей  $\theta_j$  движение жидкости одинаково.

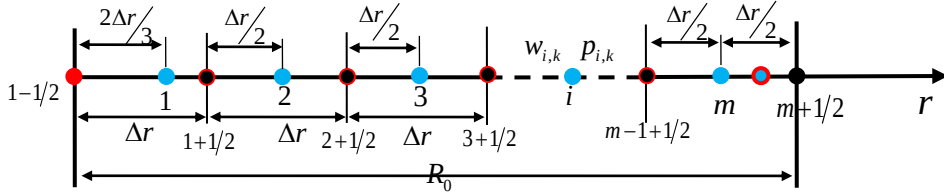


Рис. 19. Схема сетки для одномерного радиального движения жидкости на этапе до роста трещины: красная точка – точечный источник (скважина), её радиальный номер  $1-1/2$ ; синие точки – центры тяжести ячеек, их радиальные номера  $1, 2, 3, \dots, m$ ; черные точки с красной окантовкой – общие точки соседних ячеек, их номера  $i+1/2$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m-1$ ); черная точка – граничная точка трещины, номер  $m+1/2$ ; синяя точка с красной окантовкой – промежуточная точка  $(m+1/4, j)$ , которая вместо точки  $(m+1/2, j)$  входит в расчет для ячейки  $(m, j)$ .

В разделе 3.5.1 сформирована алгебраическая система уравнений движения жидкости (32) для каждой ячейки. В разделе 3.5.2 сформирована система давления жидкости и раскрытия трещины. В разделе 3.5.3 две указанные алгебраические системы соединены по матрице преобразования  $T^*$ . В итоге получена замкнутая нелинейная система уравнений  $F$ , содержащая  $m$  уравнений и  $m$  неизвестных ( $D_{s_i}^{k+1}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) – разрывные смещения ячеек трещины). В разделе 3.5.4 применен численный метод Ньютона для решения нелинейной системы уравнений  $F$ , а также дана матрица Якоби для этой нелинейной системы.

В разделе 3.6 приведена дискретная система уравнений модели на этапе роста трещины. Через несколько шагов по времени, коэффициенты интенсивности напряжений в одной или нескольких радиальных областях  $\theta_j$  трещины достигают или превосходят значения трещиностойкости ( $K_{IC}$ ):

$$K_I(\theta_j) \geq K_{IC}(\theta_j). \quad (33)$$

Это значит, что в данных радиальных областях трещина распространяется, в то время как в других фронт трещины остаётся на месте из-за неоднородных  $K_{IC}$ . Это приводит к неравномерному распространению фронта трещины.

В этой модели для удобства расчета мы предполагаем, что при росте трещины фронт трещины всегда находится на границе ячеек, тем самым контур трещины приблизительно рассматривается как кривая, соединяющая вершины внешних сторон самых внешних ячеек. Каждый раз, когда трещина продвигается на одну ячейку (как на рис. 20), часть граничных точек становится внутренними. Из-за асимметричного и неоднородного роста трещины по различным

радиальным направлениям появляется перепад давления по кольцевому направлению, что приводит к движению жидкости по кольцевому направлению. Поэтому в качестве уравнения движения жидкости для этого этапа вместо уравнения (32) используется уравнение (26).

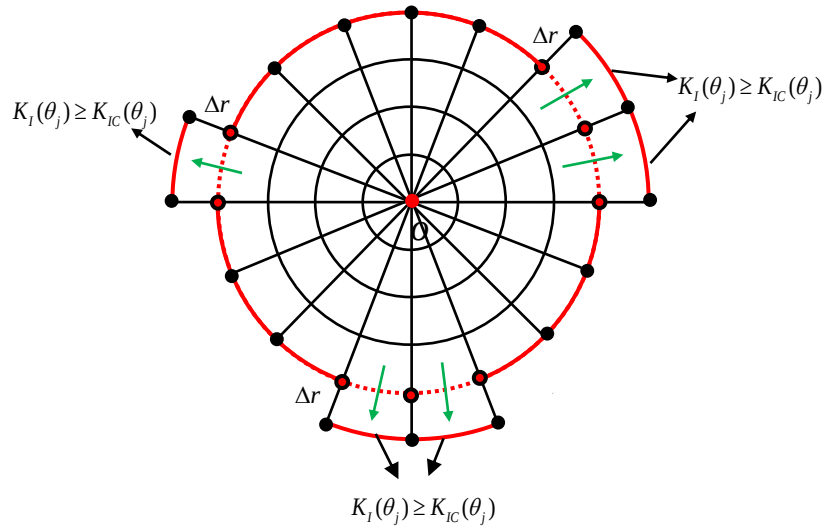


Рис. 20. Схема роста трещины при моделировании: красный пунктир – бывшая граница трещины, красные сплошные кривые – новый контур трещины; чёрные точки – граничные точки, красные точки с чёрным краем – бывшие граничные точки.

В разделах 3.6.2 и 3.6.3 представлены дискретная система уравнений движения жидкости и дискретная система давления жидкости и раскрытия трещины, соответственно. Следует отметить, что при росте трещины возможны четыре различных положения граничных ячеек и соседних с ними ячеек из-за неравномерного распространения – соответственно, имеется четыре разных вида уравнения движения жидкости на граничных ячейках. В разделе 3.6.4 описана соединенная система  $F$ , полученная из систем, представленных в разделах 3.6.2 и 3.6.3, с помощью матрицы преобразования  $T^*$ , а также дана матрица Якоби системы  $F$  для итерационного расчета. В разделе 3.7 дано несколько выводов.

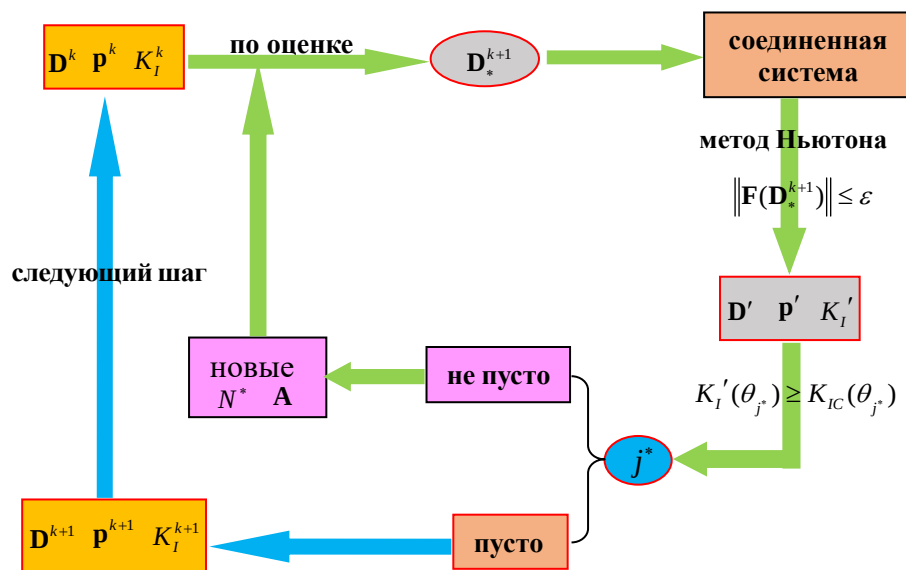


Рис. 21. Схема итерационного алгоритма для решения модели.

В четвертой главе представлены численные результаты плоско-трехмерной модели распространения гидравлической трещины в пласте, характеризующемся неоднородной трещиностойкостью материала. Кроме того, в этой главе показаны результаты сравнительных численных экспериментов для исследования неравномерного распространения трещины при неоднородной  $K_{IC}$  пласта. В разделе 4.1 представлен итерационный алгоритм для решения модели (см. рис. 21).

В разделе 4.2 представлены численные решения для распространения плоско-трехмерной трещины в пласте с парой симметричных ослабленных радиальных областей. В разделе 4.2.1 проведена проверка численных алгоритмов программы на примере круговой трещины под действием однородного давления жидкости.

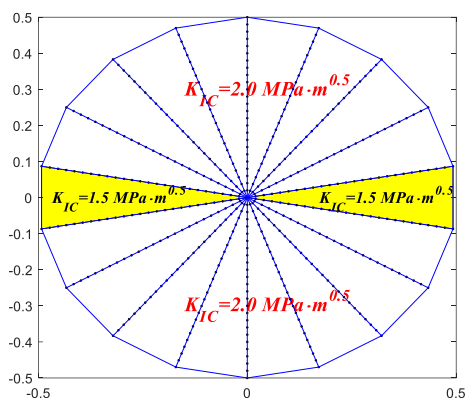


Рис. 22. Распределение неоднородной трещиностойкости пласта.

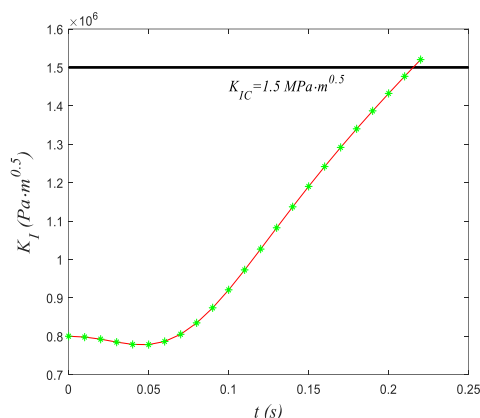


Рис. 23. Коэффициент интенсивности напряжений по времени с  $t = 0$  до  $t = 0.23$  с.

В разделе 4.2.2 представлены численные результаты при следующем неоднородном распределении трещиностойкости  $K_{IC}$  пласта (см. рис. 22): желтые области  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$  являются ослабленными радиальными областями. В момент  $t = 0.23$  с, происходит рост трещины по этим направлениям (см. рис. 23). Из-за симметрии  $K_{IC}$  и симметрии трещины результаты показываются только для радиальных областей из первой четверти, а именно:  $\theta = 0$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$ . Шаг по времени взят равным  $\Delta t = 0.01$  с.

На этапе роста трещины движение жидкости становится двумерной задачей из-за неоднородного распространения трещины. Результаты после первого роста радиальных областей  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$  представлены на рис. 24–26, где на рис. 24 и 25 показаны распределения давления жидкости до и после роста областей  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$ . Результаты показывают, что до начала роста распределение давлений в каждой радиальной области трещины одинаково (рис. 24 (а) и рис. 25 (а)), а после роста трещины возникают области пониженного давления на новых граничных ячейках в радиальных областях  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$  (красная кривая на рис. 24 (б) и рис. 25 (б)). Этот результат совпадает с результатами из работы [11]. Из-за роста радиальных областей  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$  около их концов образуется большой перепад давления по кольцевому направлению (см. рис. 24 (б))

и рис. 25 (б)), который приводит к возникновению кольцевых потоков в направлении концов распространяющихся радиальных областей.

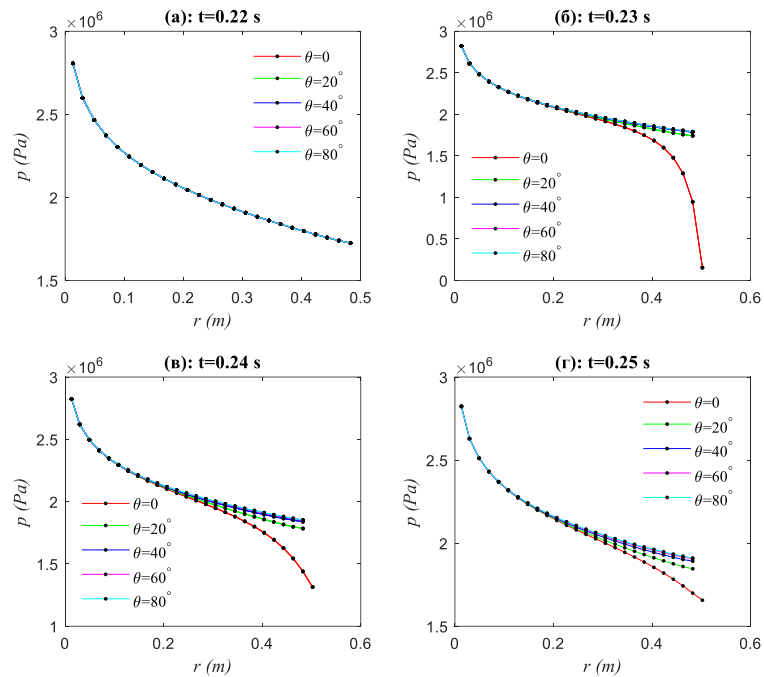


Рис. 24. Давления радиальных областей  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$  при  $t = 0.22 \text{ s}$  (до роста),  $t = 0.23 \text{ s}$  (момент роста),  $t = 0.24 \text{ s}$  и  $t = 0.25 \text{ s}$  (после роста).

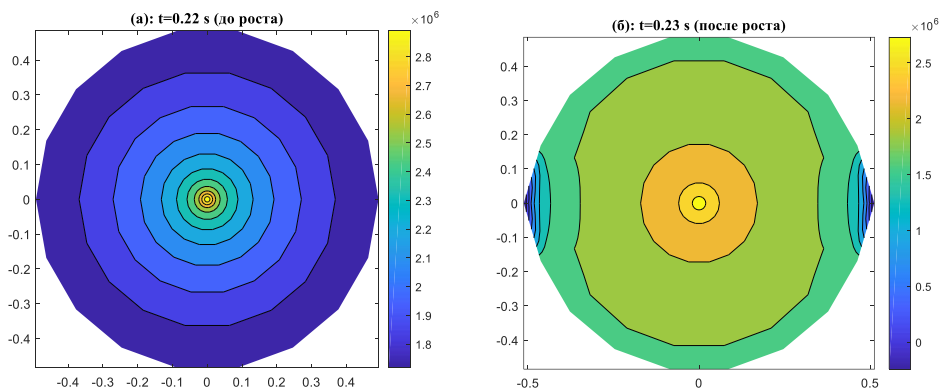


Рис. 25. Эквипотенциальные диаграммы давления жидкости в трещине, (а) до роста и (б) после роста радиальных областей  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$ .

Рис. 26 представляет сравнительные результаты раскрытия радиальных областей  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$  до и после роста ослабленных радиальных областей. После роста радиальных областей  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$  их раскрытие около кончика трещины больше, чем раскрытия других радиальных областей, и эта разность быстро увеличивается с притоком жидкости в концы распространяющихся областей. Раскрытия трещины в радиальных областях  $\theta = 20^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$  очень мало различаются между собой.

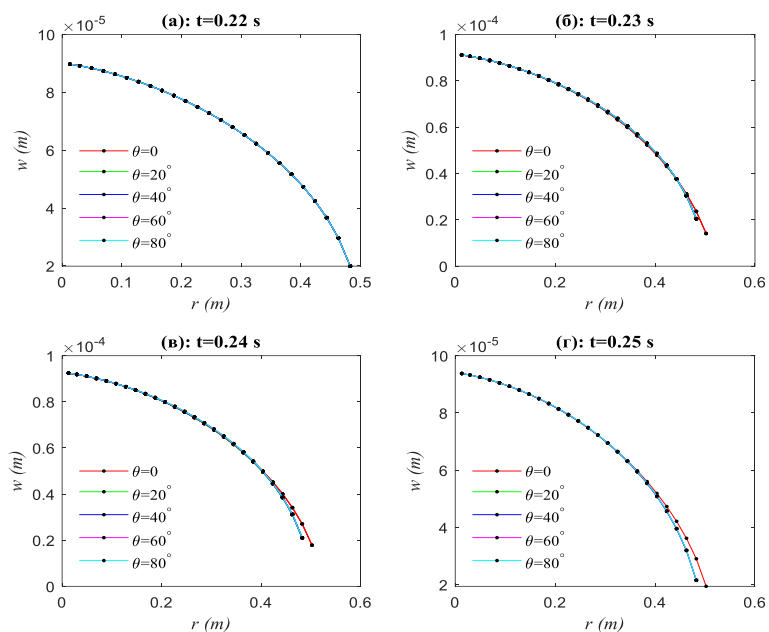


Рис. 26. Раскрытия радиальных областей  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$  при  $t = 0.22 \text{ s}$  (до роста),  $t = 0.23 \text{ s}$  (момент роста),  $t = 0.24 \text{ s}$  и  $t = 0.25 \text{ s}$  (после роста).

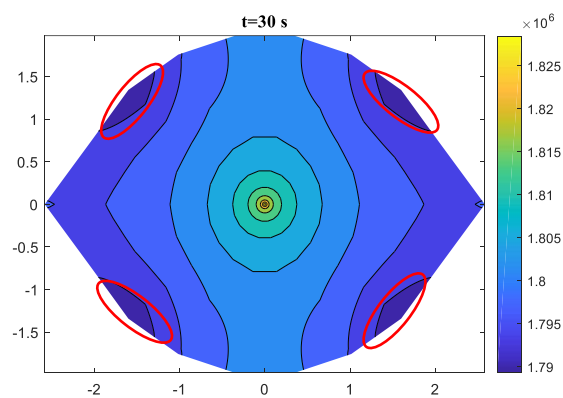


Рис. 27. Экипотенциальная диаграмма давления жидкости в трещине при  $t = 30 \text{ s}$ .

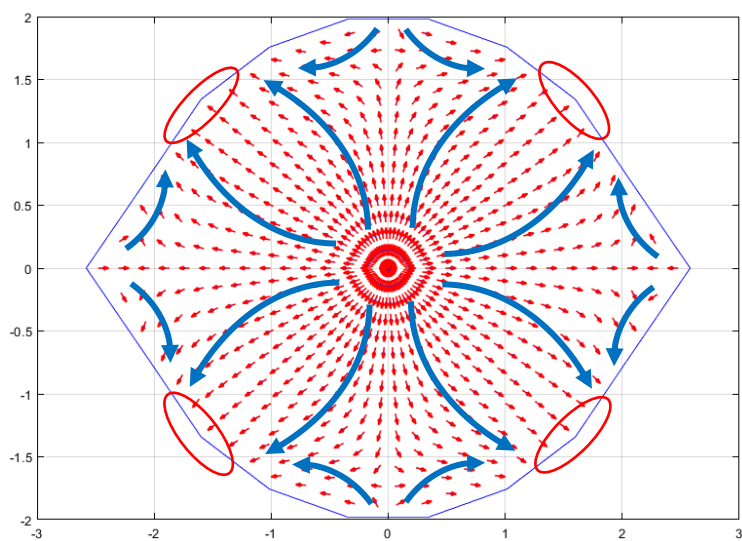


Рис. 28. Поле скорости жидкости в трещине при  $t = 30 \text{ s}$ .

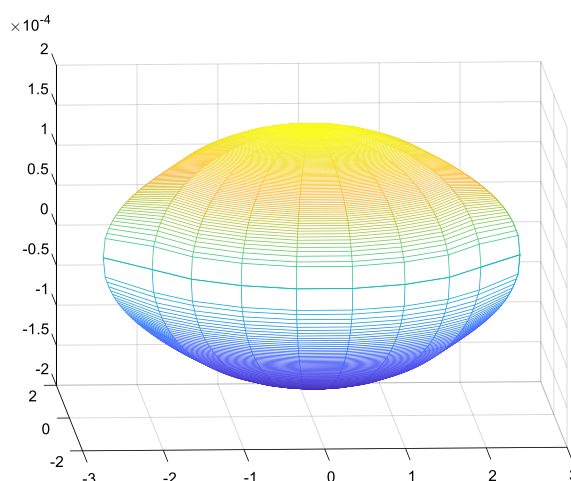


Рис. 29. Поверхности трещины в трехмерном пространстве при  $t = 30 \text{ s}$ .

На рис. 27–29 показаны результаты (давление жидкости, поле скоростей жидкости и раскрытие трещины) на конечный момент. На рис. 27 появляются четыре зоны пониженного давления, отмеченные красными эллипсами. Причина их возникновения в том, что эти четыре радиальные области были последними распространившимися на данный момент, в то время как другие области остались на месте. Поле скоростей жидкости в трещине в момент  $t = 30 \text{ s}$  представлено на рис. 28, из которого видно, что жидкость движется в направлении этих четырех зон (красные эллипсы). Следует отметить, что на находящихся далеко от зон слабого давления радиальных областях образуются два различных потока, особенно ясно различимых на областях  $\theta = 0$  и  $\theta = 80^\circ$  и на областях, симметричных им (см. стрелки на рис. 28). На рис. 29 показаны верхняя и нижняя поверхности трещины в трехмерном пространстве.

В разделе 4.3 проведен сравнительный анализ влияния неоднородной трещиностойкости материала на рост трещины по трём аспектам неоднородных трещиностойкостей: перепаду трещиностойкостей, ориентации областей неоднородной трещиностойкости и соотношению областей различной трещиностойкости. Сравнительный анализ по каждому аспекту разделен на два случая: в первом случае предполагается, что в пласте имеются малые ослабленные зоны, т. е. трещиностойкость на них меньше, чем на остальных областях пласта; во втором случае, наоборот, предполагается, что в пласте имеются зоны повышенной трещиностойкости. В разделе 4.3.1 исследовано влияние разницы трещиностойкости и положения ослабленных областей на распространение трещины. Для исследования влияния перепада трещиностойкости ослабленных областей выбраны четыре различных значения трещиностойкости для ослабленных зон (радиальных областей  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$ ):  $K_{IC} = 1.25 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 1.75 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ , в то время как трещиностойкость остальных областей постоянна:  $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$  (см. рис. 30). Случай, когда трещиностойкость ослабленных зон равна  $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ , представляет собой случай однородного пласта (см. рис. 30 (г)).

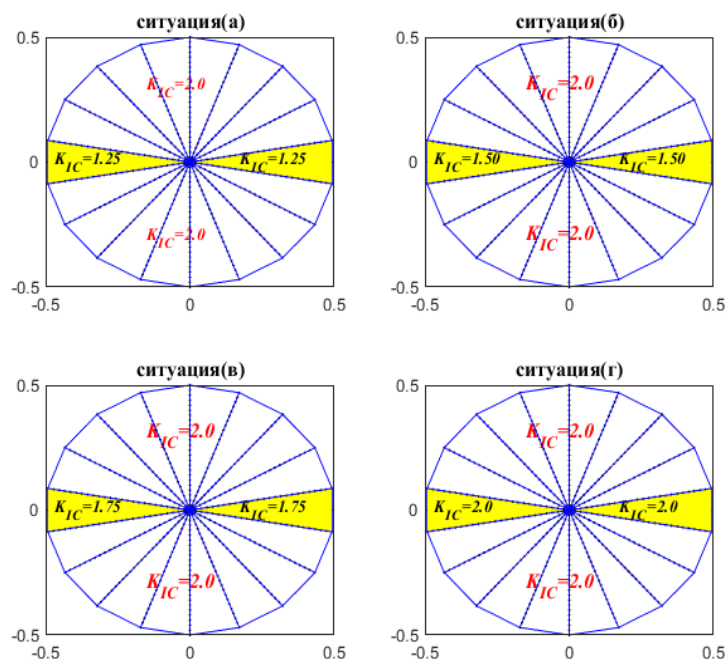


Рис. 30. Четыре выбранных распределения неоднородной трещиностойкости пласта.

На рис. 31 показаны профили трещины с учетом ослабленных зон с различными трещиностойкостями через 30 секунд закачки. Наименьшее кольцо в центре системы координат представляет собой начальный профиль трещины. Красное кольцо является профилем трещины при однородном распределении трещиностойкости пласта. Сравнение результатов показывает, что ослабленные зоны распространяются быстрее, чем области с большей трещиностойкостью. Кроме того, ослабленные зоны влияют на окружающие их области, и это влияние уменьшается с увеличением расстояния от ослабленных зон. Чем меньше трещиностойкость ослабленных зон, тем быстрее по ним распространяется трещина (см. профиль трещины для случая  $K_{IC} = 1.25 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ ). Это приводит к нерегулярной форме трещины (синяя кривая на рис. 31), напоминающей эллипс.

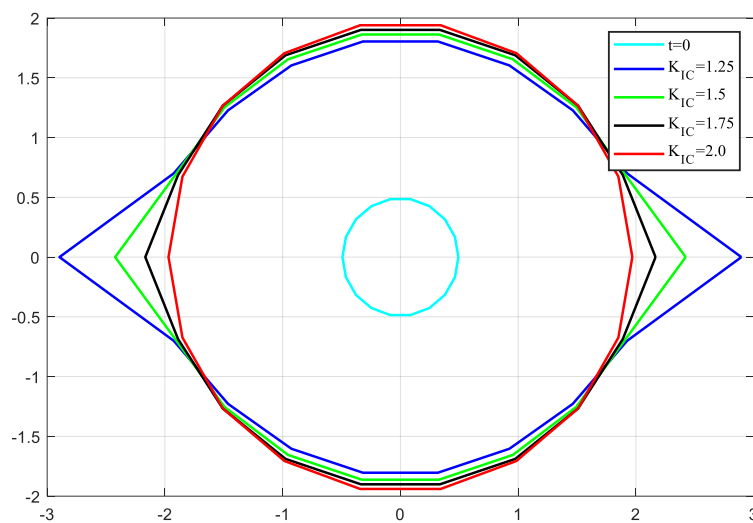


Рис. 31. Профили трещины при различных трещиностойкостях ослабленных зон в момент  $t = 30 \text{ s}$ .



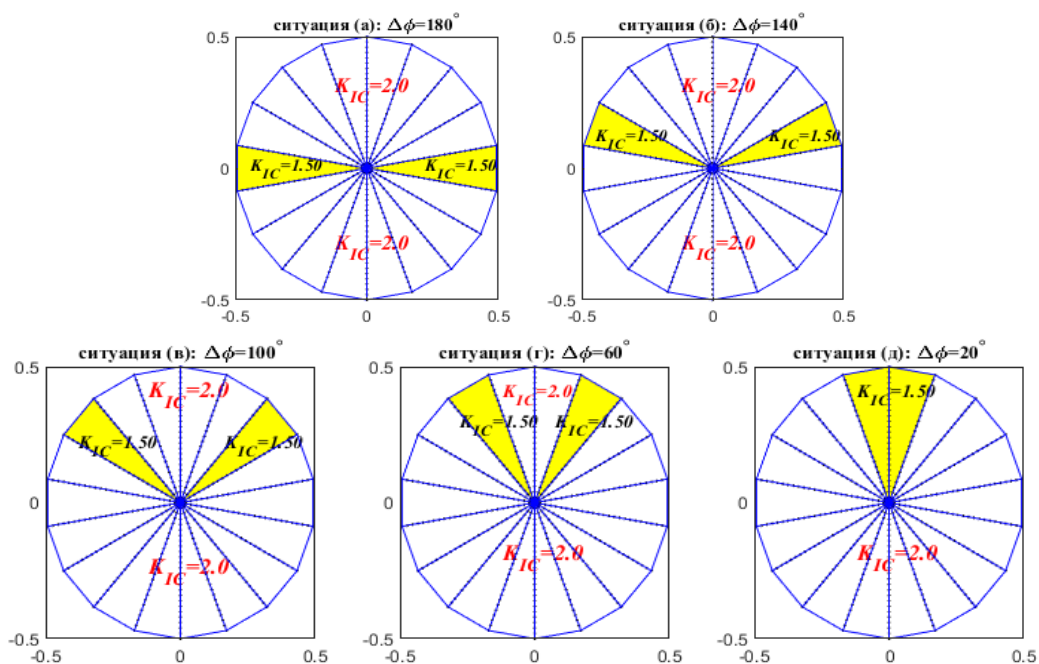


Рис. 32. Пять различных относительных положений двух радиальных ослабленных зон в пласте.

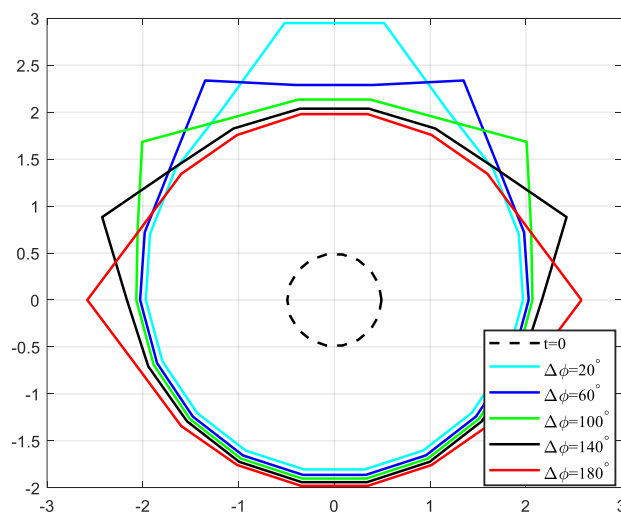


Рис. 33. Профили трещины при пяти различных относительных положениях двух радиальных ослабленных зон в момент  $t = 30 \text{ s}$ .

Во втором численном сравнительном эксперименте исследовано влияние положения ослабленных зон на профиль трещины и на скорости распространения различных радиальных областей. Для удобства вычисления мы по-прежнему выбираем симметричное распределение трещиностойкости пласта и оставляем постоянными трещиностойкости ослабленных и остальных областей:  $K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$  для ослабленных областей, и  $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$  для остальных областей. Изменяется только относительное положение двух симметричных ослабленных зон (рис. 32). Угол  $\Delta\phi$  представляет относительное положение радиальных ослабленных зон. Рассматриваем пять случаев  $\Delta\phi = 180^\circ, 140^\circ, 100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$ .



На рис. 33 показаны профили трещины при различных относительных положениях двух радиальных ослабленных зон в момент  $t = 30 \text{ s}$ . В центре системы координат малый круг, обозначенный пунктиром, представляет собой начальный профиль трещины. Как видно из рисунка, в целом ослабленные зоны растут быстрее остальных областей для каждого относительного положения, но скорости роста ослабленных зон при различных относительных положениях различны. Чем ближе ослабленные области ( $\Delta\phi$  меньше), тем нерегулярнее получается профиль трещины.

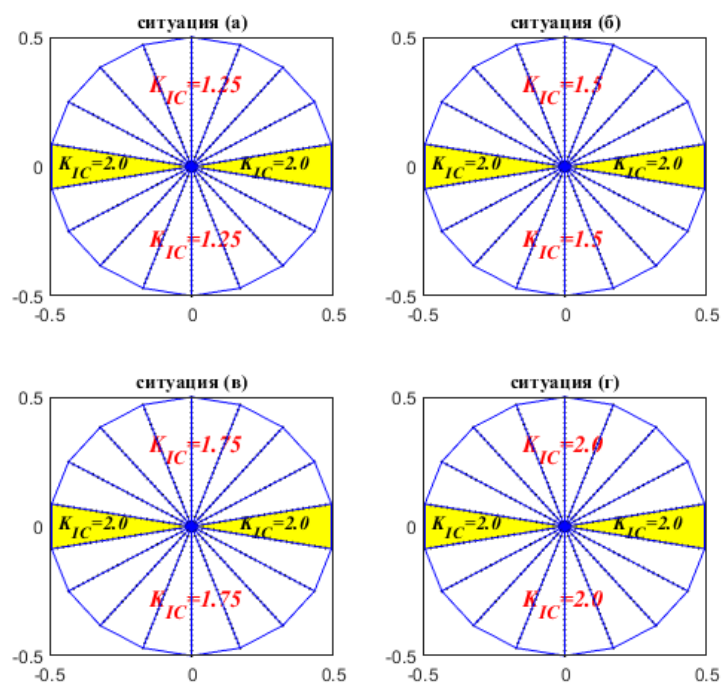


Рис. 34. Четыре выбранных распределения неоднородной трещиностойкости пласта для исследования влияния зон повышенной прочности.

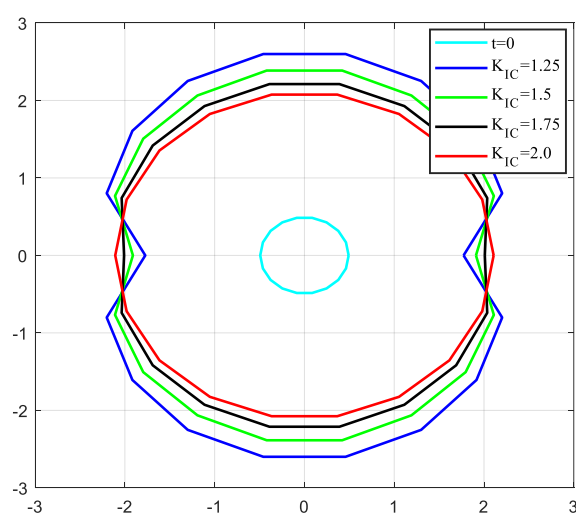


Рис. 35. Профили трещины при различных значениях трещиностойкости областей  $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq 180^\circ$  в момент  $t = 30 \text{ s}$ .

В разделе 4.3.2 исследовано влияние величины трещиностойкости и положения зон повышенной прочности на распространение трещины. Для исследования влияния величины трещиностойкости зон повышенной прочности мы поступаем обратно тому, что делали в разделе 4.3.1: фиксируя значение трещиностойкости зон повышенной прочности ( $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ ), изменяем трещиностойкости остальных областей, которая принимает четыре разных значения:  $K_{IC} = 1.25 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 1.75 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ ,  $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ , как на рис. 34.

На рис. 35 показаны профили трещины при различных трещиностойкостях областей  $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq 180^\circ$  в момент  $t = 30 \text{ с}$ . Красный профиль представляет собой результат однородного распространения трещины при однородной трещиностойкости пласта  $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ . По сравнению с красным профилем наличие зон повышенной прочности (области  $\theta = 0$  и  $\theta = 180^\circ$ ) препятствует распространению трещины в них и в окружающих их областях. Чем больше неоднородность трещиностойкости пласта (разность трещиностойкости между областями повышенной прочности и остальными областями), тем медленнее распространяются зоны повышенной прочности и окружающие их области.

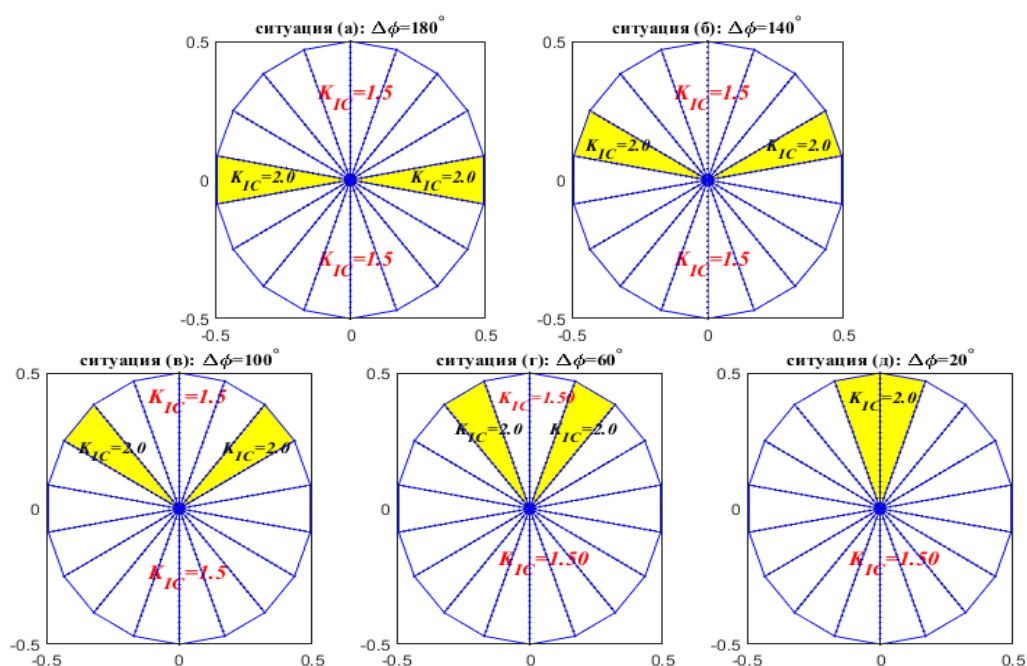


Рис. 36. Пять различных относительных положений двух симметричных областей повышенной прочности в пласте.

Кроме того, в этом разделе ещё проведены сравнительные численные эксперименты о положении областей повышенной прочности, аналогично разделу 4.3.1. Выбраны пять различных относительных положений для двух симметричных областей повышенной прочности, в то время как трещиностойкости областей повышенной прочности и остальных областей фиксированы и равны, соответственно,  $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$  и  $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$  (см. рис. 36, на котором желтые области представляют зоны повышенной прочности, а белые области – обычные зоны). Относительное положение  $\Delta\phi$

двух симметричных областей повышенной прочности принимает пять значений:  $\Delta\phi = 180^\circ, 140^\circ, 100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$ . Чем меньше значение  $\Delta\phi$ , тем ближе две симметричные области повышенной прочности. На рис. 37 представлены профили трещины при различных относительных положениях областей повышенной прочности в момент  $t = 30 \text{ s}$ . Видно, что области повышенной прочности заметно замедляют свой рост и несколько замедляют рост соседних областей (например, находящихся между ними), но практически не влияют на рост удаленных от них областей. Таким образом, влияние областей повышенной прочности не распространяется далеко от них самих.

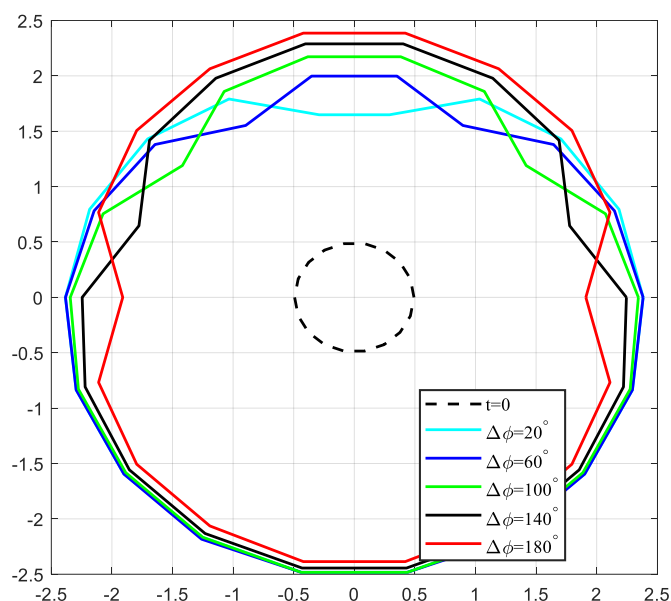


Рис. 37. Профили трещины для различных относительных положений областей повышенной прочности в момент  $t = 30 \text{ s}$ .

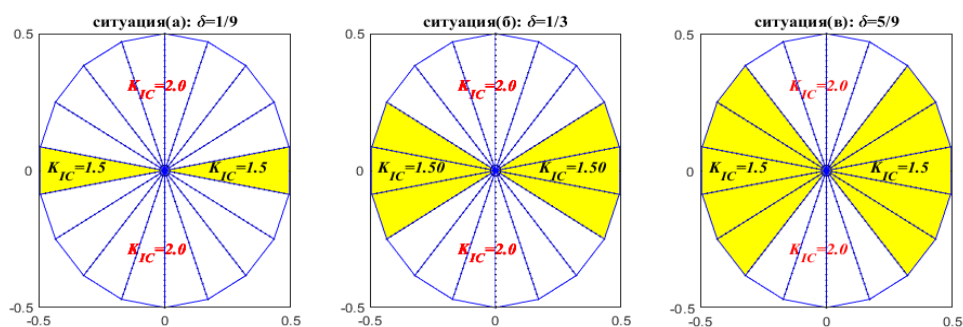


Рис. 38. Три различных доли ослабленных областей в полном пласте.

В разделе 4.3.3 рассматривается влияние доли ослабленных областей от общего объема на профиль и скорость роста трещины. С этой целью задаются три различных размера ослабленных областей (см. рис. 38). Желтые области представляют собой ослабленные области с постоянной трещиностойкостью  $K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ , белые являются областями с большей трещиностойкостью  $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ . Ослабленные области в ситуациях (а), (б) и (в) состоят из 1, 3 и 5 симметричных радиальных областей, соответственно. Их соответственные

доли в полном пласте  $\delta = 1/9, 1/3, 5/9$ . На рис. 39 показаны профили трещины для различных долей ослабленных областей в момент  $t = 30 \text{ s}$ . При ситуации (а) на рис. 38 ( $\delta = 1/9$ ) профиль трещины (зеленая кривая на рис. 39) напоминает эллипс, профиль трещины при  $\delta = 1/3, 5/9$  напоминает прямоугольник, который очень похож на профиль модели PKN: скорость роста трещины в горизонтальном направлении намного больше, чем скорость роста трещины в вертикальном направлении. Это значит, что помимо фактора «барьер напряжений» имеется еще фактор «наличие ослабленных областей в пласте», при определенных условиях тоже приводящий к распространению трещины, как в модели PKN. В разделе 4.4 приведены некоторые выводы.

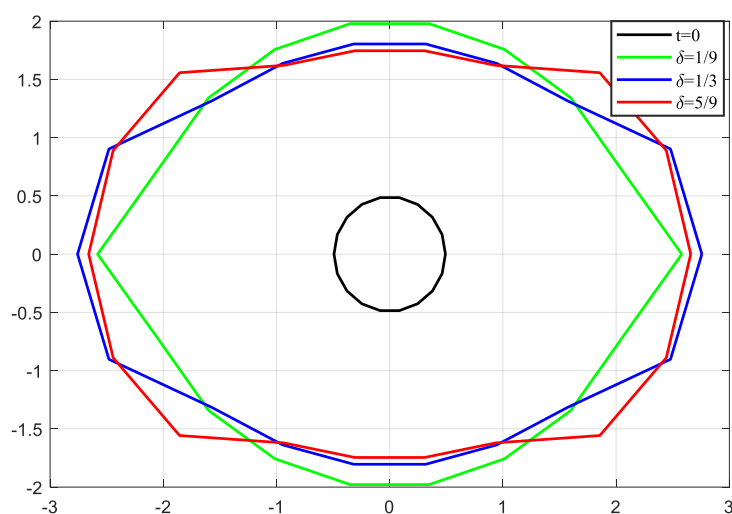


Рис. 39. Профили трещины для различных долей ослабленных областей в момент  $t = 30 \text{ s}$ .

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ РАБОТЫ

1. Исследовано распространение трещины гидравлического разрыва в средах, характеризующихся неоднородной трещиностойкостью материала. Получено асимптотическое решение для гидравлической трещины на раннем этапе закачки (решение начального уровня) и эволюционные решения повторного открытия и распространения гидравлической трещины.
2. Проведен анализ плоско-трехмерной модели распространения гидравлической трещины: рассмотрена теория построения трехмерной модели, описаны вычислительные методы моделирования, представлены численные решения, подробное сравнение и анализ численных экспериментов.
3. Для задачи двумерной модели роста трещины гидроразрыва пласта показано, что поскольку горное давление входит в уравнения упругости и определяет условия роста трещины при наличии зоны отставания жидкости, оно становится важным фактором при описании эволюции гидравлической трещины. При малом горном давлении гидравлическая жидкость занимает малую долю открытой трещины, и распределение давления жидкости является линейным, трещина характеризуется «острой» вершиной. При

высоком горном давлении жидкость заполняет почти всю открытую трещину и градиент давления на фронте жидкости приближается к отрицательной бесконечности, и трещина характеризуется «закругленной» вершиной.

4. В случае плоско-трехмерной модели роста трещины в неоднородных средах показано, что наличие ослабленных областей способствует росту трещины в этих направлениях и в прилегающих к ним областях, что приводит к локальной выпуклой форме трещины на ослабленных участках. Наличие областей повышенной прочности препятствует росту трещины в этих направлениях и примыкающих областях, что приводит к локальной вогнутой форме трещины в областях повышенной прочности. Чем меньше (больше) трещиностойкость областей, тем быстрее (медленнее) растут эти области, что приводит к неравномерному распространению трещины.

## БЛАГОДАРНОСТЬ

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям докторам физико-математических наук, профессорам *Смирнову Николаю Николаевичу* и *Киселеву Алексею Борисовичу* за постановку задач и постоянное внимание к работе, младшему научному сотруднику *Пестову Дмитрию Александровичу* за его руководство и помощь, а также профессору *Звягину Александру Васильевичу*, преподавателям *Тюренковой Веронике Валерьевне*, *Шаминой Анастасии Александровне* и *Коленкиной Евгении Игоревне*.

## Список публикаций в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science, RSCI:

1. Акулич А. В., Звягин А. В., Пестов Д. А., Тюренкова В. В., Ли Кайжуй. Взаимодействие статической трещины гидроразрыва, находящейся под постоянным давлением жидкости, с природным разломом // Математическое моделирование. 2018. № 7. С. 79-92. DOI: 10.31857/S023408790000576-7 (Импакт-фактор журнала в базе РИНЦ – 0.684)
2. Li Kairui, Smirnov N. N., Qi Chengzhi, Kiselev A. B., Wang Mingyang. An implicit algorithm with fast convergence for evolution of a pre-existing-closed plane-strain hydraulic fracture // WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS. 2019. Vol. 48. P. 359-372. <https://wseas.org/multimedia/journals/mathematics/2019/a845106-080.pdf> (SJR журнала в базе Scopus – 0.360)
3. Li K. R., Smirnov N. N., Qi C. Z., Pestov D.A., Kiselev A. B. An approximate analytical solution for hydraulic fracture opening under non-uniform internal pressure // Materials Physics and Mechanics. 2020. Vol. 44. P. 288-305. DOI: 10.18720/MPM.4432020\_2 (SJR журнала в базе Scopus – 0.570)
4. Li K. R., Smirnov N. N., Qi C. Z., Kiselev A. B., Pestov D. A. The numerical asymptotic solution to initial condition problem of pre-existing plane-strain hydraulic fracture with fluid lag // Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 239: 107296. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107296 (Импакт-фактор журнала в базе Web of Science – 3.270)

5. Киселев А.Б., Ли Кайжуй, Смирнов Н.Н., Пестов Д.А. Моделирование течения жидкости в трещине гидроразрыва неоднородно трещиностойкого пласта в плоско-трехмерной постановке // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2021. № 2. С. 15-28. DOI: [10.31857/S0568528121020055](https://doi.org/10.31857/S0568528121020055)(Импакт-фактор журнала в базе РИНЦ – 0.567)

## Список Литературы

1. Sneddon N. I., Lowengrub M. Crack problems in the classical theory of elasticity. New York: John Wiley & Sons, 1969.
2. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1967.
3. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture // Advanced Treatise. New York: Academic Press, 1968. Vol. 2. P. 191-311.
4. Detournay E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks // International Journal of Geomechanics. 2004. Vol. 4. P. 1-11.
5. Carbonell R., Desroches J., Detournay E. A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture // International Journal of Solid and Structures. 1999. N 36. P. 4869-4888.
6. Crouch S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1976. Vol. 10. P. 301-343.
7. Crouch S. L., Starfield A. M. Boundary element methods in solid mechanics. London: George Allen & Unwin, 1983.
8. Kuriyama K., Mizuta Y. Three-dimensional elastic analysis by the displacement discontinuity method with boundary division into triangular leaf elements // International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts. 1993. Vol. 30(2). P. 111-123.
9. Xiao H. T., Yue Z. Q. A three- dimensional displacement discontinuity method for crack problems in layered rocks // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 2011. Vol. 48. P. 412-420.
10. Sesetty V., Ghassemi A. A numerical study of sequential and simultaneous hydraulic fracturing in single and multi-lateral horizontal wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2015. Vol. 132. P. 65-76.
11. Savitski A. A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions // International Journal of Solid and Structures. 2002. Vol. 39. P. 6311-6337.