

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Ли Кайжуй

**Распространение трещины гидравлического разрыва
в неоднородных средах**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор
Смирнов Николай Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор
Киселев Алексей Борисович

Москва – 2021

Оглавление

Введение	5
Обзор литературы и общая характеристика диссертационного исследования	9
Глава 1. Численное асимптотическое решение для определения начального условия модели раскрытия существующей закрытой гидравлической трещины плоской деформации	28
1.1. Постановка задачи	29
1.2. Основные уравнения.....	30
1.3. Граничные условия	31
1.4. Масштабирование модели	32
1.4.1. Масштабирование координат	32
1.4.2. Масштабирование решений модели.....	32
1.5. Метод численного решения	34
1.5.1. Дискретизация плоско-деформированной трещины и давления	34
1.5.2. Система уравнений для численных решений	35
1.5.3. Итерационный алгоритм для η и Γ	36
1.6. Численные результаты и обсуждение	37
1.7. Выводы	44
Приложение 1.1.....	45
Приложение 1.2.....	45
Приложение 1.3.....	46
Глава 2. Неявный алгоритм с быстрой сходимостью для эволюции заранее-существующей гидравлической трещины плоской деформации.....	48
2.1. Математическая модель	49
2.2. Метод численного решения.....	50
2.2.1. Дискретизация плоско-деформированной трещины.....	50
2.2.2. Дискретизации основных уравнений и граничных условий.....	51
2.2.3. Дискретизация уравнений упругости	53
2.3. Итерационный алгоритм решения.....	53
2.3.1. Алгоритм решения начального условия.....	53
2.3.2. Полный алгоритм решения модели	54
2.3.3. Улучшение итерационного алгоритма.....	54
2.3.4. Выбор шага по времени.....	56

2.4. Численные результаты	56
2.4.1. Численное решение начального условия и шаг по времени	56
2.4.2. Численные решения эволюции открытия трещины.....	57
2.5. Анализ алгоритма.....	61
2.6. Анализ длины ячеек и шага по времени	64
2.7. Выводы.....	66

Глава 3. Плоско-трехмерное моделирование распространения

гидравлического разрыва в неоднородных средах: теоретическая часть	68
3.1. Постановка задачи.....	69
3.2. Построение математической модели задачи.....	70
3.2.1. Уравнения упругости	70
3.2.2. Уравнение движения жидкости в трещине	71
3.2.3. Граничные условия модели	72
3.2.4. Начальные условия модели	73
3.2.5. Условие роста трещины.....	74
3.3. Метод построения решения	75
3.3.1. Трехмерный метод разрывных смещений (3-DDM)	75
3.3.2. Коэффициенты интенсивности напряжений трехмерной трещины	77
3.3.3. Обработка уравнения движения жидкости и граничных условий.....	78
3.4. Дискретизация трехмерной модели.....	79
3.4.1. Дискретизация трещины.....	79
3.4.2. Трехмерный метод разрывных смещений при дискретизированной трещине.....	80
3.4.3. Дискретизация уравнений движения жидкости	81
3.4.4. Дискретизация граничных условий.....	82
3.4.5. Дискретизация условия роста трещины.....	83
3.5. Численное решение на этапе до роста трещины.....	84
3.5.1. Формирование системы уравнений движения жидкости	85
3.5.2. Формирование системы давления жидкости и раскрытия трещины.....	86
3.5.3. Соединение двух систем.....	87
3.5.4. Численный метод решения замкнутой системы.....	89
3.6. Численное решение на этапе роста трещины.....	90
3.6.1. Начальный рост трещины.....	90
3.6.2. Формирование системы уравнений движения жидкости	91
3.6.3. Формирование системы давления жидкости и раскрытия трещины.....	94
3.6.4. Соединение двух систем.....	94
3.7. Вывод.....	99
Приложение 3.1. Матрица Якоби системы уравнений на этапе до роста трещины.....	99
Приложение 3.2. Матрица Якоби системы уравнений на этапе роста трещины.....	101

Глава 4. Плоско-трехмерное моделирование распространения гидравлического разрыва в неоднородных средах:

часть численных решений и сравнительных анализов	108
4.1. Численный алгоритм.....	108
4.2. Численные решения для пары симметричных ослабленных радиальных областей.....	110
4.2.1. Проверка численных алгоритмов программы	110
4.2.2. Численные решения эволюции распространения трещины.....	112
4.3. Сравнительный анализ по численным результатам	121
4.3.1. Влияние ослабленных зон на распространение трещины.....	122
4.3.2. Влияние зон повышенной прочности на рост трещины.....	130
4.3.3. Влияние долей ослабленных зон и зон повышенной прочности на рост трещины.....	138
4.4. Выводы.....	142
Заключение	143
Список литературы	144

Введение

Актуальность темы исследования

Процесс моделирования гидравлического разрыва пласта (ГРП) очень сложен и включает использование четырех различных разделов механики: механики твердого тела, отвечающей за деформацию пласта вокруг трещины; механики жидкости, отвечающей за движение жидкости и проппанта в трещине; механики разрушения, отвечающей за рост трещины; и термодинамики, отвечающей за обмен тепла между жидкостью и породой. Более того, все эти задачи связаны между собой и взаимозависимы. Модель роста трещины ГРП характеризуется сильной нелинейностью из-за кубической степенной зависимости давления от раскрытия трещины для ньютоновской жидкости – впрочем, для неньютоновской жидкости нелинейность модели становится ещё сильнее. Кроме того, сингулярность в кончике трещины всегда представляет трудность для расчета коэффициентов интенсивности напряжений. Таким образом, решение этой нелинейной связанной системы с сингулярностью в конце трещины будет основной задачей моделирования распространения трещины ГРП в неоднородных средах.

Цели диссертационной работы

1. Исследовать эволюцию повторного открытия гидравлической трещины на ранней стадии, чтобы узнать зависимости длины области отставания жидкости и давления жидкости от различных значений величины напряжения в породе (горного давления).
2. Представить численный алгоритм для описания эволюции заранее-существующей трещины с зоной отставания жидкости.
3. Построить математическую модель для решения трехмерной задачи распространения плоской гидравлической трещины в пласте, характеризующемся неоднородной трещиностойкостью материала.
4. Проанализировать влияние ослабленных областей с меньшей трещиностойкостью и областей повышенной прочности с большей трещиностойкостью на эволюцию роста трещины.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Полученные результаты двумерной и плоско-трехмерной моделей имеют теоретическое и прикладное значение. Результаты в двумерной модели могут быть использованы для моделирования роста плоско-деформированной гидравлической трещины с зоной отставания жидкости. Плоско-трехмерная модель гидравлического разрыва пласта с неоднородной трещиностойкостью может быть использована в исследовании неравномерного роста трещины в горных породах. Результаты плоско-трехмерной модели могут помочь более глубоко понять закономерности распространения трещин в неоднородных средах.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы аналитической и вычислительной математики и математического моделирования. Комплекс программ разработан в пакете Matlab.

Научная новизна

1. Получены численные решения для начального состояния эволюции заранее-существующей трещины гидроразрыва.
2. Представлен новый неявный алгоритм с быстрой сходимостью и малой вычислительной погрешностью для описания эволюции заранее-существующей трещины с зоной отставания жидкости.
3. Построена модель для решения трехмерной задачи распространения плоской гидравлической трещины с учетом неоднородности пласта (неоднородная трещиностойкость материала). Проведены сравнительные численные эксперименты по определению влияния на рост трещины размера, положения и соотношения областей различной трещиностойкости (ослабленные области с меньшей трещиностойкостью и области повышенной прочности с большей трещиностойкостью).

Достоверность результатов

Достоверность результатов диссертационного исследования обеспечена строгостью используемого механико-математического аппарата и подтверждается сравнением с известными результатами, полученными другими учеными.

Положения, выносимые на защиту

1. Полученное автомодельное решение для случая высокого горного давления позволяет преодолевать сингулярность начального условия для модели роста трещины гидроразрыва.
2. Созданный новый алгоритм с быстрой сходимостью и малой вычислительной погрешностью, а также создана вычислительная программа дают возможность получать численное решение эволюции существующей плоско-двумерной трещины с зоной отставания жидкости.
3. Разработанная плоско-трехмерная модель распространения гидравлической трещины в пласте с неоднородной трещиностойкостью и созданная компьютерная программа позволяют описывать распространение трещины в пласте с неоднородной трещиностойкостью.
4. Показано, что наличие ослабленных областей способствует росту трещины в этих и примыкающих к ним областях, а на форму трещины существенно влияет перепад между трещиностойкостями различных областей, а также их взаимное расположение.

Личный вклад автора

Теоретические и численные результаты, изложенные в первой и второй главах, получены соискателем самостоятельно.

Результаты, сформулированные в третьей и четвертой главах, получены соискателем совместно с младшим научным сотрудником Д.А. Пестовом.

Научные руководители доктора физико-математических наук Н.Н. Смирнов и А.Б. Киселев предложили постановки задач и оценили новые результаты в Главах 1, 2, 3, 4.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены в форме докладов на следующих научных семинарах и конференциях:

- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.И. Горбачева (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар лаборатории моделирования многофазных систем Сколковского института науки и технологий под руководством А.А. Осипцова (2020 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар научно-образовательного центра «Газпромнефть-Политех» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого под руководством члена-корр. РАН А.М. Кривцова (2020 г.).
- ◆ международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ-2019».
- ◆ научная конференция «ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ-2019».
- ◆ международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П. Л. Чебышева (2019, г. Обнинск, Россия).
- ◆ XLVII International conference “Advanced problems in Mechanics” (2019, St. Petersburg, Russia).
- ◆ научная конференция «ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ-2020».
- ◆ XLVIII International conference “Advanced problems in Mechanics” (2020, St. Petersburg, Russia).

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертационного исследования изложено в пяти статьях: [1], [2], [3], [167] и [168], которые опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах RSCI, Web of Science, SCOPUS.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы. Работа представлена на 153 страницах, содержит 94 иллюстрации и 10 таблиц. Список литературы включает 168 наименований.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям докторам физико-математических наук, профессорам *Смирнову Николаю Николаевичу* и *Киселеву Алексею Борисовичу* за постановку задач и постоянное внимание к работе; младшему научному сотруднику *Пестову Дмитрию Александровичу* за его руководство и помощь, а также профессору *Звягину Александру Васильевичу*, преподавателям *Тюренковой Веронике Валерьевне*, *Шаминой Анастасии Александровне* и *Коленкиной Евгении Игоревне*.

Обзор литературы и общая характеристика диссертационного исследования

Технология гидроразрыва. В настоящее время одной из актуальных проблем фундаментальных научных исследований является гидроразрыв как способ повышения нефтеотдачи скважин. В 1947 году на Хоутонском месторождении нефти (Hugoton Field) в США было проведено первое успешное применение гидроразрыва для увеличения добычи нефти [4]. Основные этапы проведения гидроразрыва (рисунок 1): с помощью мощных насосных станций на земле гидравлическая жидкость (вода, гель, кислота для карбонатных пород и т. д.) закачивается в скважину. Если скорость закачки жидкости больше, чем скорость просачивания жидкости в пласт, повышается давление гидравлической жидкости, с ростом которого происходит разрушение горной породы вокруг скважины под действием кольцевых напряжений, возникающих из-за давления жидкости. По мере продолжения закачки жидкости разрыв породы расширяется внутрь пласта, образуется сквозная трещина. В результате формируется новый высокопроницаемый канал с определенными длиной, шириной и высотой (геометрия трещины) между месторождением и скважиной, что существенно повышает продуктивность скважины.

Однако поскольку рост трещины вызывает открытие новых свободных поверхностей породы, через которые гидравлическая жидкость может утекать в пласт, трещина закроется с прекращением закачки. Для поддержания трещины в открытом состоянии, после закачки простой водой на ранних этапах, в трещину закачивается жидкость с расклинивающим агентом – проппантом (обычно песок или его высокопрочный гранулированный заменитель), цель которого заключается в том, что, с одной стороны, трещина может продолжать расширяться вперед, с другой стороны, трещина не будет закрыта после утечек всех жидкостей в пласт, поскольку проппант остается в трещине и не дает ей схлопнуться.

Технология гидроразрыва используется обычно со следующими целями [5]: 1) для преодоления поврежденной зоны около скважины и, тем самым, возвращения продуктивности скважины, поскольку около скважины могут быть повреждения, вызванные процессом бурения скважины или естественными процессами (изменение насыщенности или закрытие порового пространства); эти повреждения препятствуют движению нефти или газа к скважине; 2) для роста сквозного пути, который не только преодолевает повреждения около скважины, но и уходит глубоко в пласт и далее стимулирует продуктивность сверх ее естественных пределов; 3) для изменения течения нефти или газа в пласте, что позволяет уменьшить число скважин благодаря созданию в твёрдой породе длинных гидравлических трещин, которые изменяют распределение давления нефти или газа в месторождении.

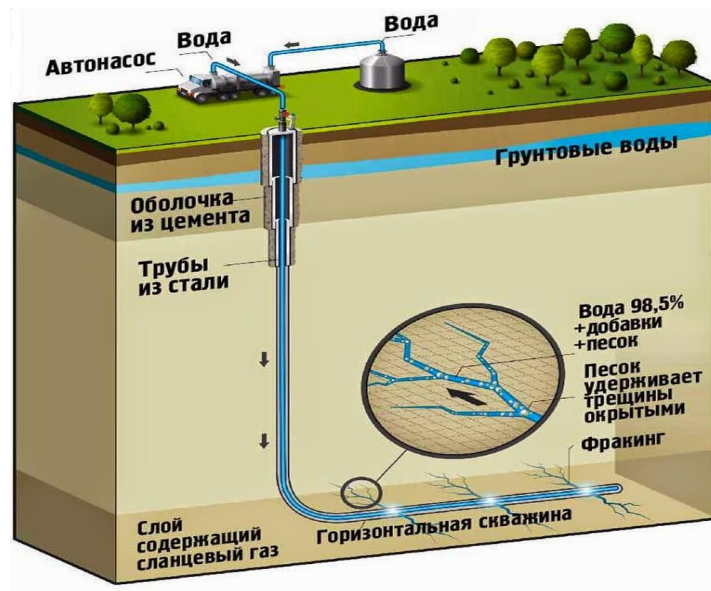


Рисунок 1. Общая схема принципа работы гидроразрыва

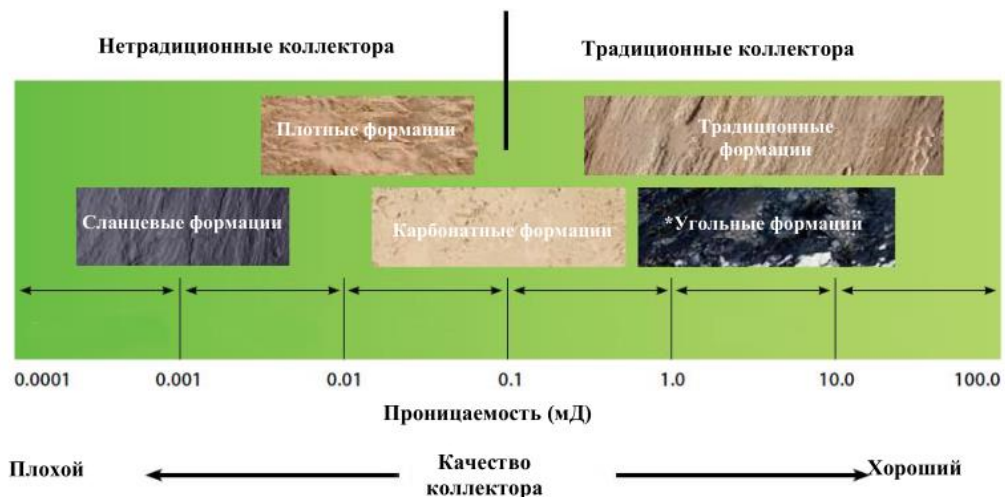


Рисунок 2. Классифицирование сланцевых формаций для добычи [6]

Причины применения технологии гидроразрыва. На рисунке 2 показана классификация качества нефтесодержащих формаций по их проницаемости [6]. Мы знаем, что традиционным месторождениям, имеющим отличные условия добычи (высокая проводимость между месторождением и скважиной), не нужна технология гидроразрыва для создания новых искусственных проводящих каналов (гидравлические трещины), потому что эти формации имеют высокую проводимость благодаря природным трещинам. Пористость подобных пластов большая, естественные каналы легко формируются, и нефть и газ могут свободно двигаться по ним.

Однако в настоящее время разведаны многие нетрадиционные месторождения, ранее считавшиеся нерентабельными из-за крайне малой пористости и крайне низкой проницаемости. Эти формации представляют собой слоистые, мелкозернистые глины и алевролиты (сланец), имеющие общие важные характеристики: малые размеры частиц, малые

Нетрадиционные месторождения нефти и газа в мире. По мере роста потребности в ископаемом топливе традиционные нефтегазовые резервуары перестают удовлетворять требованиям, и многие страны в настоящее время изучают и эксплуатируют нетрадиционные резервуары (в частности, сланцевые формации) для добычи нефти и газа. Чтобы узнать глобальные запасы, распределение и эксплуатацию сланцевой нефти и сланцевого газа, 137 сланцевых формаций из 41 страны, кроме США, были проанализированы и исследованы Управлением энергетической информации США (U.S. Energy Information Administration) в 2011 и 2013 годах [7]. Отчет 2013 года является дополнением к предыдущему отчету 2011 года. На рисунке 3 показано распределение глобальных формаций сланцевой нефти и сланцевого газа. Согласно данным отчета [7], суммарные запасы сланцевых нефти и газа достигают, предположительно, 345 миллиардов баррелей и 7299 триллионов кубических футов соответственно. Пропорции сланцевых нефти и газа от общего запаса нефти и газа оцениваются в 10% и 32%. Новая глобальная оценка запасов сланцевого газа в 2013 году на 10% выше оценки в отчете 2011 года. Вполне вероятно, что эти доли будут продолжать расти с развитием технологий. В таблицах 1 и 2 представлены списки 10 стран, обладающих крупнейшими запасами сланцевых нефти и газа соответственно. Данные в скобках представляют собой оценки Advanced Resources International (ARI), который входит в состав Управления энергетической информации США (EIA).

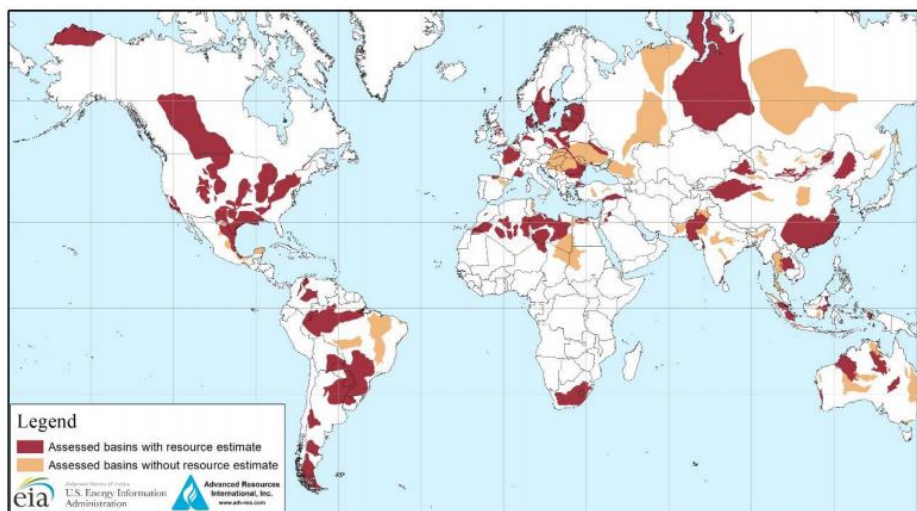


Рисунок 3. Карта распределения бассейнов сланцевых нефти и газа в мире

Таблица 1

Топ-10 стран с извлекаемыми сланцевыми нефтяными ресурсами

Ранг	Страна	Запасы (млн. бар.)
1	Россия	75
2	США	58 (48)
3	Китай	32
4	Аргентина	27
5	Ливия	26
6	Австралия	18
7	Венесуэла	13
8	Мексика	13
9	Пакистан	9
10	Канада	9
Сумма		345 (335)

Таблица 2

Топ-10 стран с извлекаемыми сланцевыми газовыми ресурсами

Ранг	Страна	Запасы (три. фут ³)
1	Китай	1115
2	Аргентина	802
3	Алжир	707
4	США	665 (1161)
5	Канада	573
6	Мексика	545
7	Австралия	437
8	Южная Африка	390
9	Россия	285
10	Бразилия	245
Сумма		7299 (7795)

Согласно вышеприведенной статистической информации, мы знаем, что запасы нефти и газа в нетрадиционных коллекторах в мире довольно обильны, особенно много сланцевого газа, который составляет треть суммарных запасов природного газа. В области эксплуатации нетрадиционных коллекторов нефти и газа на данный момент лидируют США. На рисунке 4 представлена добыча сланцевой нефти и сланцевого газа в сравнении с добычей других видов нефти и газа с 2000 по 2050 год [8], где данные за период 2000–2019 годов точны, а показатели на 2020–2050 годы вычисляются по математической модели. Эти данные показывают, что, по мере развития технологии добычи, доли сланцевой нефти и сланцевого газа будут увеличиваться и играть большую и важную роль в добыче всех видов нефти и газа как в США, так и во всем мире.

Помимо основного применения в разработке нетрадиционных месторождений технология ГРП также применяется в измерении горных давлений [9, 10] и геотермальной энергетике [11,

12]. В связи с этим исследование механизма и процедуры ГРП и внедрение этой технологии в промышленное производство приобретают особенную важность и актуальность.

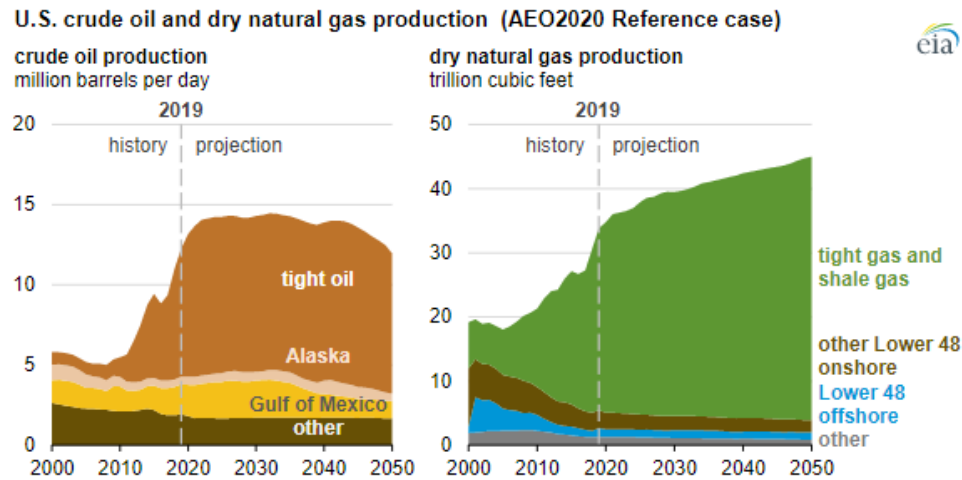


Рисунок 4. Данные о добыче сланцевой нефти и сланцевого газа по сравнению с добычей других видов нефти и газа в 2000–2019 годах и прогноз добычи сланцевой нефти и сланцевого газа на 2020–2050 годы в США [8]

История возникновения и развития технологии гидроразрыва. До появления технологии ГРП взрывной метод обычно использовался для увеличения добычи на месторождениях. В 30-х годах XX века химическая компания «Dow» [13] обнаружила, что давление жидкости на скважине может деформировать породы пласта и генерировать гидравлические трещины, тем самым повышая эффективность кислотной обработки скважины. Концепция ГРП появилась в нефтяной промышленности в 1947 году [4] в США, в штате Канзас. 23 скважины были выбраны для сравнительных экспериментов между ГРП с кислотной обработкой и просто кислотной обработкой. Четыре нефтяные скважины Хоутонского месторождения и две нефтяные скважины месторождения в штате Вайоминг (Frannie, Wyoming) показали существенное увеличение добычи при применении технологии ГРП.

С 1950-х годов технология ГРП начинает развиваться, в конце 1970-х годов она вступает в период бурного развития: процедуры ГРП совершенствуются и оптимизируются, она эволюционирует от простого и небольшого средства стимуляции до высокоинженерной сложной технологии [14, 15]. В конце 1980-х годов технология ГРП начала экономически оптимизироваться, включая несколько важных аспектов: характерные параметры трещины (длина, ширина и высота), проводимость трещины, транспорт проппанта и т. д. [16]. После этого исследования по ГРП были в основном сосредоточены на изучении механики жидкости [17], например проблема очистки в скважине и трещине [18-20]). В начале XXI века, благодаря быстрому развитию вычислительной техники, изучение ГРП стало более сложным и тщательным: модели теперь учитывают много факторов (утечка жидкости в пласт [21], характер гидравлической жидкости [22, 23], характер пласта [24] и т. д.), разрабатываются

сложные модели с многослойными сетками трещин гидроразрыва [25, 26]. С тех пор стали ясны многие механизмы процесса гидроразрыва, которые уже успешно применяются на практике. Однако из-за сложности реальной геологии в пласте и сложности решения многопрофильной задачи гидроразрыва еще многие аспекты следует исследовать и уточнить.

Двумерные модели трещины ГРП. Как известно, в технологии ГРП раскрытие трещины является самым важным параметром, который определяет качество гидравлической трещины. Иан Снеддон (Ian Sneddon) внес большой вклад в решение раскрытия двумерной и трехмерной трещин [27-30], особенно для моделей ГРП на раннем этапе. В работе [27] получено решение раскрытия двумерной плоско-деформированной трещины при любом распределении внутреннего давления. Под постоянным давлением трещина имеет эллиптическую форму, когда длина трещины представляет собой большую ось эллипса, а раскрытие является малой осью эллипса. В работе [28] решена задача раскрытия трехмерной дискообразной трещины под действием любого распределения внутреннего давления, а также дано решение для исключительного случая под однородным давлением.

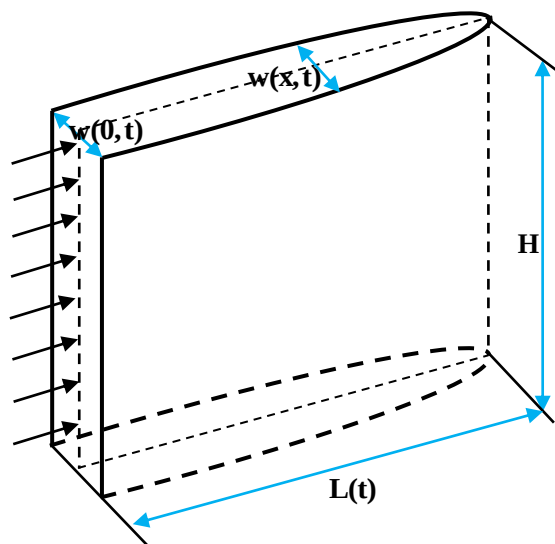


Рисунок. 5 Модель трещины Христиановича и Желтова (KGD)

Первая в мире модель трещины гидроразрыва была предложена в 1955 году советским ученым – академиком Сергеем Алексеевичем Христиановичем [31]. В этой модели предполагается, что трещина находится в бесконечной, изотропной и однородной среде и растет только по длине и ширине, а высота трещины постоянна и намного больше, чем длина и ширина. Геометрия такой трещины показана на рисунке 5. В таких условиях зависимость между шириной трещины и давлением жидкости была получена в рамках теории плоской деформации с некоторыми упрощающими предположениями о течении жидкости, а длина была найдена за счет использования закона сохранения объема жидкости. Стоит отметить, что концепция «отставания жидкости», или «лага», тоже впервые предложена в этой модели – согласно условию конечного растягивающего напряжения в кончике трещины. Это явление

было позднее подтверждено в ходе экспериментов [32-34]. В 1969 году Гиртсма и де Клерк (Geertsma and de Klerk) [35] добавили течение жидкости в трещине и утечку жидкости в пласт в эту модель и ввели граничное условие в конце трещины (гладкое закрытие двух поверхностей трещины). В 1973 году Ali A. Daneshy добавил течение степенной жидкости в эту модель [36], которая известна как модель «KGD» – по первым буквам фамилий её создателей.

Самая ранняя дискообразная (радиальная) модель ГРП представлена Снеддоном [28] в максимально простой постановке (постоянное давление, однородный пласт). Геометрия такой трещины представлена на рисунке 6. В 1985 году Спенс и Шарп [37] ввели коэффициент интенсивности напряжений в модели KGD и дискообразной модели, но не учитывали отставание жидкости для автомодельного решения двумерной модели трещины ГРП. В 2001 году Savitski и Detournay [38] разрешили радиальную модель в однородном пласте при нулевом коэффициенте интенсивности напряжений и получили автомодельное решение.

Третья важная двумерная модель была создана Перкинсом (Perkins), Керном (Kern) и Нордгреном (Nordgren) [39, 40] и также называется моделью «PKN» по фамилиям этих ученых. Перкинс и Керн [39] предположили, что трещина ограничена одним пластом и деформации в каждом сечении, ортогональном направлению распространения трещины, не зависят друг от друга. Это означает, что для данной модели трещины реализуется плоская деформация перпендикулярно направлению роста трещины, что отличается от модели KGD, где плоская деформация реализуется перпендикулярно высоте трещины. Геометрия трещины PKN представлена на рисунке 7. Модель PKN в основном сосредоточена на течении гидравлической жидкости (ньютоновская и неньютоновская жидкости, ламинарный и турбулентный потоки) и, в отличие от модели KGD, не учитывает механику трещины. Кроме того, давление жидкости изменяется только вдоль направления роста трещины и постоянно по вертикальному направлению, вследствие чего профиль каждого сечения имеет эллиптическую форму [27]. В модели [39] длина трещины не вычисляется непосредственно как часть решения. В 1972 году Нордгрэн [40] на основе работы Перкинса и Керна ввел уравнения неразрывности жидкости с учетом утечки жидкости в пласт и получил решение длины и раскрытия трещины от времени.

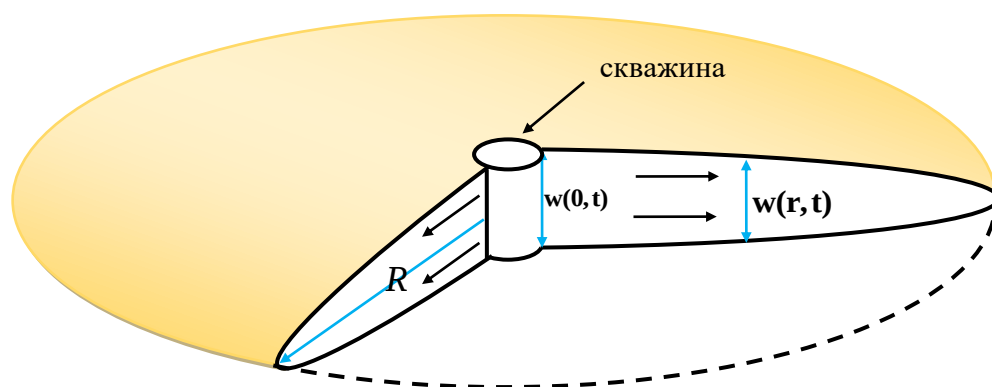


Рисунок. 6 Модель дискообразной трещины ГРП

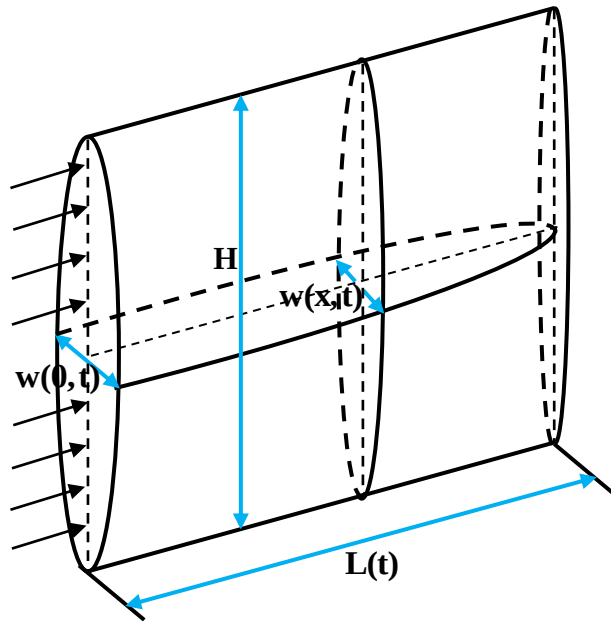


Рисунок. 7 Модель трещины PKN

В 1979 году Geertsma и Naafkens [41] детально сравнили геометрии, используемые в моделях KGD и PKN, с учетом различных условий и проанализировали сходства и различия между этими двумя моделями. Как в модели KGD, так и в модели PKN геометрия трещины рассчитывается согласно двумерной линейной теории упругости, и течение в трещине считается одномерным. Модель PKN более применима, когда длина трещины больше её высоты, а модель KGD более подходит для случаев, когда высота трещины больше её длины. До 1990-х годов модели KGD, PKN и радиальной трещины повсеместно использовались для моделирования гидроразрыва. В дальнейшем Киселев [42] построил модель криволинейных трещин гидроразрыва с явным выделением берегов, используя лагранжевый подход. В этой модели определяющие уравнения для модели пласта учитывали тепловые эффекты, вязко-упруго-пластический характер деформирования и накопление повреждений в пласте. По сравнению с традиционными линейными моделями трещин криволинейная модель трещин более сложна и более реалистична.

Квазитрехмерные и трехмерные модели трещины ГРП. Строгость предположения о фиксированной высоте трещин в моделях KGD и PKN привела к тому, что для более точного моделирования реальных условий ГРП было создано множество квазитрехмерных и даже трехмерных моделей ГРП. В работе [43] модель PKN расширена в квазитрехмерную с получением симметричного трехслойного решения для роста высоты под действием неоднородного вдоль высоты трещины главного горного давления. Cleary [44] проанализировал псевдотрехмерную модель PKN по некоторым природным характеристикам (горное давление, коэффициент интенсивности напряжений, проницаемость). Van Eekelen [45] исследовал влияние модуля Юнга и горизонтального горного давления на рост высоты

трещины на основе модели PKN, а также получил условие распространения трещины в вертикальном направлении в трехслойной системе пласта. Meyer [46] разработал аналитическое решение псевдотрехмерной модели PKN при бесконечной, большой и нулевой разностях горизонтальных горных давлений для степенной жидкости и произвел сравнительный анализ решения с моделями PKN и KGD. Advani и Lee [47] ввели коэффициент интенсивности напряжений в качестве критерия роста трещины в вертикальном направлении, а также учили неоднородность по слоям пласта для квазитрехмерной модели PKN.

Объединив двумерную модель KGD для определения высоты и раскрытия трещины и двумерную модель PKN для определения её длины, Settari и Cleary [48] создали псевдотрехмерную модель ГРП (P3D), в которой ввели коэффициент геометрии трещины для учета того, что высота и ширина трещины входят в уравнение неразрывности. Изменение высоты находится в рамках автомодельного однонаправленного распространения в двумерной модели KGD, распределение давления по направлению длины трещины вычисляется решением уравнения непрерывности, после чего длина трещины получается из закона сохранения объемов. Геометрия трещины представлена на рисунке 8, где плоскость трещины из модели PKN разбивается на несколько прямоугольников, а в уравнении движения жидкости используются показатели давления в центральной точке каждого прямоугольника (красные точки на рисунке 8(а)). Каждый прямоугольник, в свою очередь, рассчитывается согласно модели KGD, как на рисунке 8(б). На основе этой псевдотрехмерной модели (P3D) Morales [49] разработал решение для трещины, растущей по длине и высоте в пласте с тремя или более слоями. В работе [50] было применено полуаналитическое решение [51] для раскрытия линейно-двумерной трещины, показанной на рисунке 8(б).

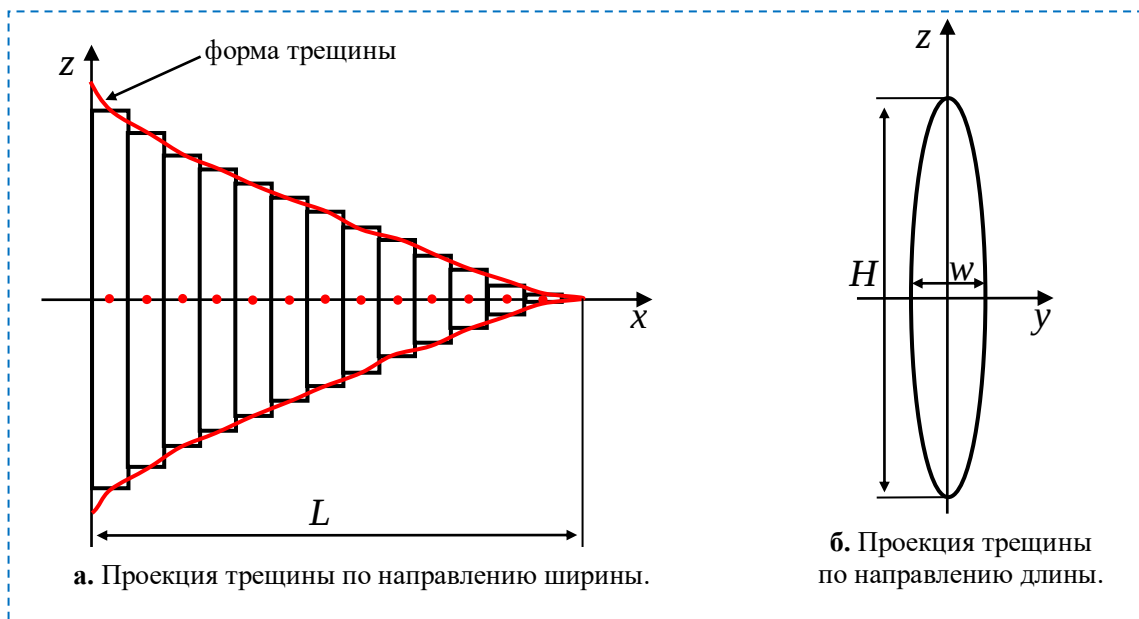


Рисунок 8. Плоско-трехмерная модель трещины ГРП с одномерным течением

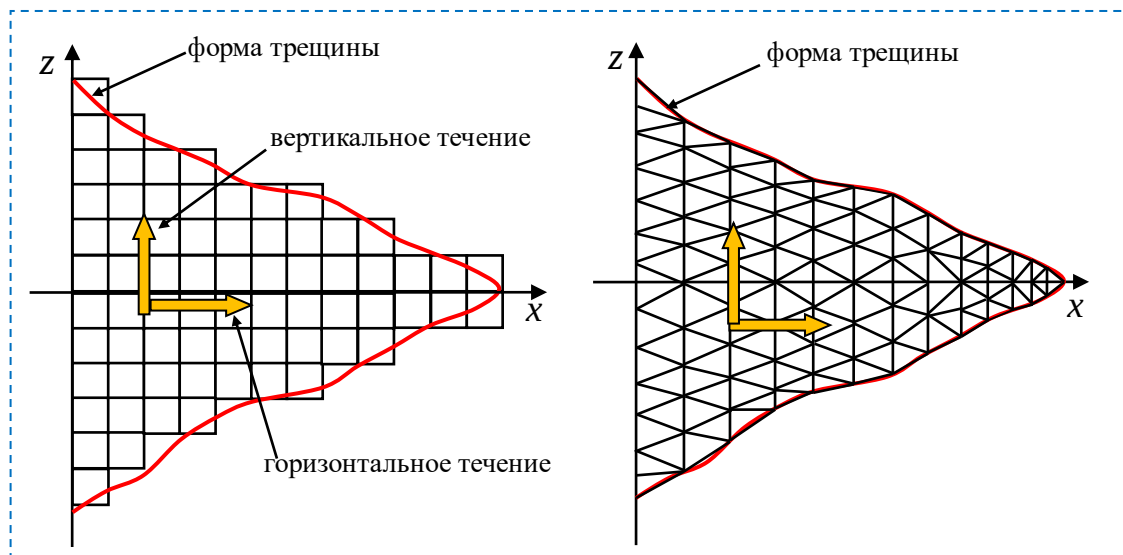


Рисунок 9. Плоско-трехмерная модель трещины ГРП с двумерным течением

Несмотря на то что в этих моделях реализовалось трехмерное решение (рост трещины по длине и высоте), зависимость раскрытия от давления осталась одномерной. Впоследствии многие ученые различными методами расширяли одномерную зависимость раскрытия от давления до двумерной. Bargee [52] использовал решение смещения поверхности в полубесконечном пространстве под действием сосредоточенной силы для двумерной зависимости раскрытия от давления. Это метод является одним из ранних видов метода граничных элементов. В работе [53] был использован вариационный подход для двумерной зависимости раскрытия от давления, но такой подход очень вычислительно сложен. Поскольку не только зависимость раскрытия от давления в таком случае оказывается двумерной, но и течение жидкости нельзя считать одномерным, одномерная сетка, то есть вертикальные прямоугольники на рисунке 8(а), принимает вид двумерной сетки, состоящей из маленьких прямоугольников или маленьких треугольников, для моделирования двумерного движения жидкости, как на рисунке 9. Advani, Lee и Lee [54] использовали интегральное решение [55] зависимости раскрытия трещины любой двумерной формы от давления, чтобы связать течение неньютоновской жидкости и критерии роста трещины. Они успешно моделировали плоское распространение трещины в слоистых средах. В таких моделях трещина распространяется только в плоскости и имеет только нормальные смещения, поэтому подобные модели называются «плоско-трехмерными» моделями трещины ГРП (PL3D).

Для того чтобы описать касательные смещения поверхностей трещины и реализовать действительно трехмерное распространение трещины, то есть возможность роста трещины вне плоскости, Naceur, Thiercelin и Touboul [56] использовали обобщенную вариационную технику для интегрального вида разрывных смещений элементов трещины и получили трехмерную зависимость раскрытия (смещения по трем ортогональным направлениям) от давления. Vandamme и Curran [57] применили трехмерный метод разрывных смещений для трехмерной зависимости раскрытия трещины от давления, потом связывали течение жидкости и критерий роста трещины для создания настоящей трехмерной модели. Siebrits и Peirce [58]

использовали эту трехмерную модель для решения роста трещины в неоднородном многослойном пласте. Из-за симметрии относительно плоскости $z=0$ поверхности трещины не имеют касательных смещений, тем самым трещина не распространяется вне плоскости. Пример роста плоско-трехмерной трещины в многослойном пласте представлен в работе [59], где проанализированы недостатки и преимущества модели PL3D для трещины ГРП. Модели PL3D более точны, но и гораздо более вычислительно затратны по времени и требуемой памяти, чем модели P3D. Причины создания моделей PL3D заключаются в том, что в многослойных пластах горное давление слоя изменяется немонотонно от глубины, или даже независимо от глубины, что может приводить к неограниченному росту высоты трещины при использовании моделей P3D.

Кроме того, в окрестностях нагнетательных горизонтальных скважин часто наблюдаются множественные неплоские гидравлические трещины. Причина заключается в том, что на плоскости между верхними и нижними поверхностями трещины появляются касательные сдвиговые напряжения и возникает второй тип коэффициента интенсивности напряжений (K_{II}) из-за асимметричной деформации около трещины. В случае пласта, содержащего только одну трещину, трещина распространяется в одной плоскости из-за того, что отличен от нуля только первый коэффициент интенсивности напряжений (K_I), отвечающий за нормальный разрыв. Чтобы изучить эти явления и их механизм, ученые создали модели множественных параллельных трещин ГРП [60-72], общая геометрия которых представлена на рисунке 10.

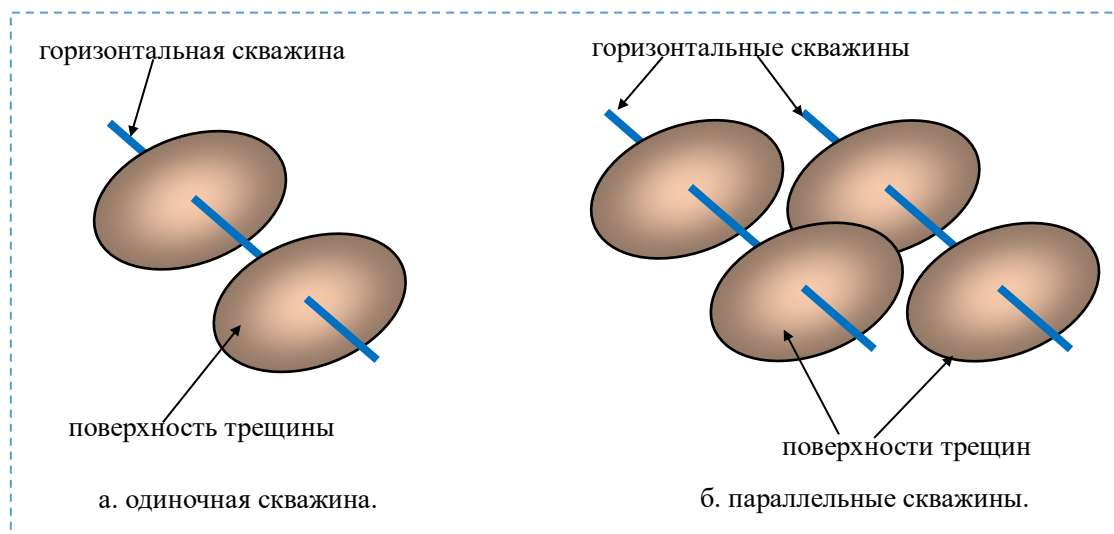


Рисунок 10. Схема трехмерной модели трещины ГРП: а. Одна скважина с параллельными трещинами; б. Параллельные скважины с параллельными трещинами

В 2004 году Yamamoto, Shimamoto и Sukemura [60] представили одну полноценно трехмерную модель роста многослойных трещин ГРП, которая удовлетворяет равновесию напряжений и внутренних давлений на всей поверхности многослойных трещин за счет использования трехмерного метода разрывных смещений. Раскрытие трещины и относительное смещение её берегов определяется из давления и напряженного состояния вокруг трещин. В этой модели только первый тип коэффициента интенсивности напряжений

(K_I) связан с ростом трещины. Тем не менее влияние поперечного сдвига (K_{II}) и продольного сдвига (K_{III}) учитываются для определения направления роста трещины. В статье [61] исследовано влияние давления жидкости, расстояния между трещинами и расстояния между скважинами на изменение анизотропии напряжений и геометрии трещины на основе модели KGD с двумерным методом разрывных смещений. Bungier и Peirce [62] разработали полностью связанную параллельно-плоскую трехмерную модель, цель которой заключается в том, чтобы определить количество трещин и расстояния между трещинами для оптимизации операции ГРП. В этих двух моделях [61, 62] не учитывается направление роста трещины из-за применения плоской трехмерной модели на основе моделей KGD и PKN. В работе [63] представлен новый метод на основе трехмерного метода разрывных смещений для определения зависимости раскрытия от внутренних давлений в параллельных трещинах, который позволяет свести двумерную сетку для трещины до одномерной и упрощает расчеты. На основе этого нового метода в рассматриваемой работе исследуется одновременное распространение множественных параллельных трещин вдоль горизонтальных скважин для обеспечения более равномерного роста трещин. Также проанализировано и влияние скорости закачки жидкости в трещины. Работа [64] представляет полностью трехмерную модель роста множественных параллельных трещин вдоль горизонтальных скважин. В этой модели использован трехмерный метод разрывных смещений для раскрытий трещины и максимальное главное напряжение около конца трещины для определения направления роста трещины, а также эквивалентный коэффициент интенсивности напряжений для критерия роста трещины в комбинированном режиме (типы I и II разрыва). В этой модели пласт предполагается однородным и изотопным, без напряженных барьеров, поэтому все трещины растут радиально, а изменение направления роста и геометрия трещин симметричны. В работах [65-72] представлены различные трехмерные модели роста трещины ГРП в пространстве. В этих моделях имеются три основные задачи, требующие решения: трехмерная зависимость раскрытий трещин от внутренних давлений в трещинах; двумерные движения жидкости в трещинах; критерии распространения трещины в пространстве. В работе [65] используется метод конечных элементов для решения раскрытия трещины, и модель сцепления вводится для критерия роста трещины в пространстве. В работе [66] трехмерный метод разрывных смещений применяется для раскрытий трещин, течение жидкости описывается методом конечных объемов и комбинацией методов быстрой прогонки и асимптотического решения в конце трещины для роста трещины. На основе модели PKN в работе [67] решается раскрытие трещин с помощью формулы Ингланда и Грина (England и Green), движение в трещине считается одномерным, критерий описывается скоростью высвобождения энергии на поверхностях трещины, и ориентация распространения трещины определяется перпендикулярно направлению максимального окружного растягивающего напряжения. Работа [68] использует метод конечных элементов для определения трехмерной деформации пласта с множественными параллельными трещинами с двумерным движением жидкости в трещине. Эквивалентный коэффициент интенсивности напряжений вводится как критерий роста трещины, и направление роста трещины определяется перпендикулярно

направлению максимального окружного растягивающего напряжения. В работе [69] используется метод конечных элементов со связующими элементами, повреждение которых представляет распространение трещины. Связующие элементы также позволяют моделировать течение жидкости в трещине и утечку жидкости в пласт. Критерий роста трещины основан на критерии смешанной энергии разрушения. В работе [70] используется упрощенный трехмерный метод разрывных смещений для раскрытия трещины большой высоты подобной модели KGD с использованием смешанного коэффициента интенсивности напряжений из-за появления двух типов разрыва (типы I и II), направление роста трещины перпендикулярно направлению максимального окружного растягивающего напряжения. В работе [71] метод расширенных конечных элементов (XFEM), метод сцепления и теория пластичности Мора – Кулона используются для моделирования появления и роста трещины в плоско-трехмерной сетке. Смешанная энергия высвобождения из-за двух типов разрыва применяется в качестве критерия роста трещины. В работе [72] создана трехмерная комплексная модель трещины ГРП методом дискретных элементов на основании теории прочности материала для сети трещин ГРП. В этой модели учитываются природные трещины в пласте, для пластической деформации пласта вводится модель пластичности Друкера – Праги.

Из вышеизложенного анализа следует, что различие между двумерной моделью, плоско-трехмерной моделью и полностью трехмерной моделью ГРП заключается в том, что в двумерной модели трещина растет только по направлению длины трещины при фиксированной высоте (обычно равной толщине месторождения) или по направлению радиуса трещины. Зависимость раскрытия трещины от давления жидкости и течение жидкости в трещине одномерны, и для трещины реализуется только нормальный разрыв K_I . В плоско-трехмерной модели зависимость раскрытия трещины от давления жидкости становится плоско-двумерной, и жидкость может двигаться по всей плоскости трещины (двумерно), тем самым трещина может распространяться как по направлению длины трещины, так и по направлению высоты трещины. В трещине также реализуется только нормальный разрыв (K_I). Настоящая трехмерная модель на самом деле является суперпозицией нескольких плоско-трехмерных трещин. Из-за асимметрии нормальной деформации двух поверхностей каждой трещины, в полностью трёхмерной модели возникают поперечное и продольное разрывное смещения, что приводит к поперечному сдвигу и продольному сдвигу на плоскости трещины. В итоге это приводит к тому, что направление роста окажется вне изначальной плоскости трещины, и таким образом трещина станет «кривой трещиной».

Исследования ГРП по полевым и модельным экспериментам. На ранних этапах разработки из-за ограниченных возможностей измерительной техники и испытательного оборудования было трудно получить точные данные в экспериментах по трещине ГРП. В 1957 году Hubbert и Willis [73] провели серию простых лабораторных опытов, которые показали, что полученные гидравлические трещины должны быть примерно перпендикулярны направлению минимального главного напряжения. В работах [74, 75] проведены

эксперименты с трещинами ГРП, их результаты показали, что минимальное горное давление на месторождении является основным фактором, влияющим на геометрию трещины ГРП. Фрикционные границы в пласте могут влиять на рост трещины, а разность горных давлений между продуктивной зоной и пограничными слоями является наиболее важным фактором, определяющим высоту трещины. Medlin [32] провел лабораторные эксперименты с трещинами ГРП, в которых высота трещины фиксирована, раскрытие трещины получено ёмкостным методом, давление на скважине напрямую измерено датчиком давления, а длина трещины вычислена при помощи ультразвуковых сигналов. Результаты экспериментов показали, что существует отставание жидкости около конца трещины. Длина и ширина трещины, а также давление на скважине следуют степенным отношениям относительно времени, которые отличаются от решений модели PKN.

В работе [76] проанализированы данные мониторинга избыточного давления в трещине на местах (Wattenberg field of Denver basin, Cotton Valley of east Texas) и представлено понятие «мощность давления формации» (formation's pressure capacity). Указано, что каждому месторождению соответствует своя мощность давления, и если давление в трещине превышает эту мощность, то это может привести к неэффективному росту по направлению высоты трещины. В исследовании [77] проведены полевые эксперименты в Берридж (Belridge) с использованием трех техник контроля трещины: микросейсмического мониторинга на скважине гидроразрыва (treatment-well microseismic monitoring), микросейсмического мониторинга на соседней скважине (remote-well microseismic monitoring) и оттенения поперечной волны (shear-wave shadowing). В ходе этих экспериментов получено много информации о геометрии и росте гидравлической трещины. Однако эту информацию трудно преобразовать в точные данные (геометрия трещины и давление), её можно использовать только как качественный анализ для трещины ГРП. В работе [78] проведены эксперименты по росту трещины на цементном блоке и на плотном песчанике под действием малого и большого горного давления. Результаты экспериментов на цементном блоке согласуются с численными результатами из теории упругости и механики линейного упругого разрушения, а результаты экспериментов на песчанике больше, чем численные результаты.

В работе [79] проведены сравнительные тесты при различной вязкости гидравлической жидкости (одна из жидкостей – простая вода, другая – сшитый гель с проппантом) для изучения влияния гидравлической жидкости на геометрию трещины в подземных угольных шахтах в Queensland и South Wales. Результаты тестов показывают, что все произведенные трещины являются преимущественно вертикальными, но трещины, произведенные сшитым гелем, растут в большей степени на дно месторождения, а трещины, произведенные водой, растут вдоль горизонтальной плоскости. Механизм образования столь различных форм трещины для разных жидкостей можно объяснить движением проппанта под действием силы тяжести. В работах [33, 80-82] представлен метод ультразвуковых наблюдений с замедленной съемкой (Time-Lapse Ultrasonic Measurements) для роста лабораторной трещины ГРП. Преимущество наблюдения с замедленной съемкой заключается в том, что можно зафиксировать отклик трещины на звук, поэтому таким образом не только обнаруживается

гидравлическая трещина, но становится возможным измерить её форму и геометрию во время её роста за счет совместного анализа информации от продольной и поперечной волн. Эта измерительная техника используется для процессов распространения, откачки и повторного открытия трещины ГРП. На основании того факта, что затухание и задержка времени продольной волны пропорциональны раскрытию трещины, при помощи этой техники возможно не только точно измерить ширину трещины, но и обнаружить отставание жидкости около кончика трещины. В работе [83] описаны лабораторные эксперименты для изучения распределения раскрытия трещины около конца трещины при различных критических значениях коэффициента интенсивности напряжений и различных вязкостях жидкости. Результаты показывают, что параметры критического значения коэффициента интенсивности напряжений и вязкости жидкости играют важную роль в определении ширины трещины около конца трещины. Длина отставания жидкости также зависит от этих двух параметров. В исследованиях [84, 85] проведены испытания трещины ГРП для изучения влияния разности трех главных напряжений на рост трещины. Результаты в работе [84] показывают, что если разность между вертикальным и наибольшим горизонтальным напряжениями большая, трещина обычно вертикальна. В работе [85] получен вывод, что неоднородность между двумя главными горизонтальными напряжениями полезна для образования единой основной трещины, распространяющейся в направлении наибольшего горизонтального напряжения. В работах [86, 87] представлены разработанные эксперименты по трехосному сжатию образцов породы с существующей малой трещиной. При закачке гидравлической жидкости трещина начинает расти с нефиксированным направлением из-за различных горизонтальных напряжений и постепенно отклоняется в направлении максимального горизонтального напряжения. Чем больше разность двух горизонтальных напряжений, тем больше скорость изменения направления.

В целом, из-за сложности процесса ГРП, неопределенности геонапряжения в залежах и неоднородности породных материалов, сложно получить точные результаты из полевых и модельных испытаний. Это, а также высокие требования к экспериментальному оборудованию и средствам мониторинга для испытания ГРП вынуждают большинство ученых перейти к теоретическому анализу и вычислительному моделированию.

Численные методы моделирования ГРП. Для всех физических и математических явлений аналитические решения, конечно, идеальны. Но, к сожалению, большинство явлений очень сложны и нахождение аналитических решений для них – трудная задача. Например, для ГРП аналитические решения в работах [31, 35, 39, 40, 88] получены при многих предположениях, которые существенно отличаются от реальной ситуации. В связи с широкой доступностью компьютеров использование численных методов для более сложных моделей позволяет получить лучшие результаты ГРП, чем использование точных аналитических решений упрощенных моделей. Примерами численных методов решения задачи ГРП могут служить: метод конечных элементов (FEM), расширенный метод конечных элементов (XFEM),

метод дискретных элементов (DEM), двумерный метод разрывных смещений (2-DDM), трехмерный метод разрывных смещений (3-DDM) и т. д.

Наиболее широко используемым методом для моделирования ГРП является метод конечных элементов [47, 74, 75, 84, 89-94]. Метод конечных элементов (FEM) изначально разработан для задач, не содержащих разрывов (деформации непрерывны), но вдоль поверхности трещины происходит разрыв смещений, поэтому сам по себе метод конечных элементов не подходит для моделирования подобных задач. Чтобы преодолеть эту трудность, элементы на поверхностях трещины нуждаются в особом подходе, особенно в области около кончика трещины, потому что точность вычисления связана с размерами сетки. Сингулярность на конце трещины влияет на точность результатов расчета и даже приводит к отсутствию сходимости вычислений. Кроме того, задача ГРП не имеет фиксированного характерного размера, при росте трещины требует перестроения сетки FEM. Это вместе с большим количеством ячеек FEM, необходимым для высокой точности, и большим количеством итераций для связи задачи упругости с задачей движения жидкости приводит к низкой эффективности метода и большой вычислительной сложности.

Расширенный метод конечных элементов (XFEM) впервые был представлен в 1999 году [95], чтобы помочь исправить недостатки метода конечных элементов, из-за чего тот плохо подходит для задач с разрывами. Согласно традиционному методу конечных элементов дополнительный член, характеризующий разрывное смещение элемента сетки, вводится в формулу смещения. Таким образом, форма смещения элемента делится на две части: непрерывная часть и разрывная часть, которая характеризует разрывное смещение поверхностей трещины. В последние годы, благодаря уникальным преимуществам, заключающимся в том, что в процессе динамического распространения трещины не требуется перестроения сетки, что значительно уменьшает объем расчета, XFEM широко используется в задачах распространения трещины, а также в моделировании ГРП [71, 96-102] и показывает хорошие результаты. Следует отметить, что в работе [98] предлагаются два варианта члена разрывного смещения (XFEM-t, XFEM-s) специально для расчета кончика трещины ГРП, с использованием которых получают хорошую сходимость и точность решения.

Метод дискретных элементов (DEM) [103] впервые представлен для решения задач механики горных пород. На основе второго закона Ньютона вычисляются скорости, ускорения элементов, потом через итерацию все элементы достигают равновесия или стабильного состояния. При решении задач гидравлического разрыва порода рассматривается как множество дискретных элементов, которые связаны пружинами с определенной жесткостью. Когда жидкость закачивается в пласт, напряжение каждого элемента изменяется и между элементами могут появиться разрывы. Жидкость движется вдоль этих проводящих разрывов, и давление жидкости действует на прилегающие элементы. Несмотря на то что использование DEM позволяет симулировать рост трещины ГРП [72, 104], этот метод не самый лучший выбор для моделирования ГРП из-за сложности построения связи между деформацией твердого тела и движением жидкости; кроме того, определение направления роста трещины представляет в нём сложную задачу.

Метод разрывных смещений (DDM), впервые предложенный Краучем в 1976 году [105, 106], представляет собой один из методов граничных элементов на основе аналитического решения, разработанным для задачи постоянного смещения вдоль конечного отрезка или конечной плоскости в бесконечной упругой твердой среде. Метод разрывных смещений включает двумерный вид (2-DDM) и трехмерный вид (3-DDM). Преимущества этого метода состоят в том, что DDM позволяет уменьшить размерность расчетной модели: двумерная плоская модель трещины может быть упрощена до одномерной линейной модели, а трехмерная пространственная модель упрощается до плоской двумерной или поверхностной двумерной модели относительно зависимости раскрытия трещины от давления жидкости в трещине. Следовательно, надо разделить на ячейки только область трещины, другие зоны пласта не входят в расчет и не требуют сетки. Кроме того, зависимость раскрытия трещины от давления определяется только одним простым коэффициентом жесткости, что существенно облегчает расчеты. Благодаря огромному преимуществу DDM ученые значительно усовершенствовали этот метод для трехмерного вида (3-DDM) [107-113], чтобы повысить его точность и сделать его более пригодным для анализа распространения трещин в пространстве.

Благодаря своим многочисленным преимуществам, таким как простота моделирования, малое количество ячеек в сетках, высокая точность расчета, в настоящее время он широко используется как в двумерных плоско-деформированных моделях трещины ГРП [61, 114-116] и в плоских трехмерных моделях [58, 66, 117], так и в настоящих трехмерных моделях [57, 60, 63, 64, 118-122] трещины ГРП, а также для расчета коэффициента интенсивности напряжений трещины [123].

Сложности в моделировании гидроразрыва. Как было показано выше, независимо от того, идёт ли речь о двумерной или трехмерной модели, расширенный метод конечных элементов и метод разрывных смещений имеют преимущество для решения задачи механики твердого тела при моделировании ГРП, особенно метод разрывных смещений, которому нужно меньше ячеек. Движение жидкости обычно определяется согласно теории смазки [124] и закону Пуазейля [125]. Уравнение неразрывности можно дискретизировать в форме конечных разностей или в форме конечных объемов. Основные трудности сосредоточены в расчете коэффициентов интенсивности напряжений (K_I , K_{II} , K_{III}) и направления роста трещины с ненулевыми K_{II} , K_{III} . Расчет коэффициентов интенсивности напряжений обычно производится методами J-интеграла или М-интеграла (энергетический метод) [126-128], связанными с методом конечных элементов и расширенным методом конечных элементов, и методом относительного смещения (методом определения) [123, 129], основанным на методе разрывных смещений. Следует отметить, что при моделировании роста трещины в месторождении нефти или газа термодинамика обычно не учитывается, и лишь в случае месторождений для добычи тепла нужно учитывать термодинамику [130-132].

Новые задачи в ГРП. Несмотря на то что благодаря развитию компьютерной техники и вычислительных методов ученые меняют направление исследований ГРП с двумерных

плоско-деформированных моделей (модели KGD и PKN) на псевдотрехмерные и трехмерные модели, в области двумерных моделей еще есть аспекты, которые не исследованы до сих пор, например влияние горного давления на процесс повторного открытия гидравлической трещины с искусственно-неоднородной трещиностойкостью, особенно на эволюцию области отставания жидкости, которая может дать важную информацию для измерения горного давления [99, 133].

Первое открытие трещины ГРП, то есть процесс образования трещины, приводит к неоднородности пласта по трещиностойкости материала. В случае если процесс гидроразрыва прерывается, трещина закрывается из-за просачивания жидкости в пласт или флегмы в скважину. Когда проводится повторное открытие, у трещины есть два критических значения коэффициента интенсивности напряжений (K_{IC}): в интервале замкнутой трещины $K_{IC} = 0$ для процесса повторного открытия, когда трещина не растёт вне этого интервала, и $K_{IC} \neq 0$ для процесса дальнейшего распространения (трещиностойкость пласта обычно не равна нулю). В процессе повторного открытия трещины горное давление играет важную роль, особенно для области отставания жидкости из-за нулевого коэффициента интенсивности напряжений [134]. Таким образом, эволюция повторного открытия плоско-деформированной трещины под действием различных горных давлений представляет собой важный объект для исследования, особенно на ранней стадии (early-time stage), поскольку на этой стадии явление отставания жидкости более существенно, в то время как на поздней стадии область отставания жидкости становится всё меньше и меньше и влияние горного давления также уменьшается, что является причиной получения автомодельного решения без учета области отставания жидкости на поздней стадии [37].

В первой главе диссертации исследуется эволюция повторного открытия гидравлической трещины на ранней стадии, чтобы узнать зависимость длины области отставания жидкости, давления скважины от различных горных давлений.

Во второй главе диссертации в основном исследуется итерационный алгоритм с быстрой сходимостью для эволюции повторного открытия гидравлической трещины на ранней стадии. Как было показано выше, при повторном открытии из-за $K_I = 0$ на ранней стадии горное давление сильно влияет на длину области отставания жидкости, поэтому область отставания жидкости является основным параметром в этой модели. Таким образом, положение фронта жидкости и длина открытого участка трещины учитываются и добавляются в решение в качестве неизвестных. Кроме них неизвестными являются избыточное давление и раскрытие трещины. В таких условиях автомодельные аналитические решения, не учитывающие отставание жидкости [37, 135, 136], в этой модели неприменимы. Следовательно, требуется численный алгоритм для решения эволюции отставания жидкости, ключ к которой заключается в необходимости найти два положения фронта (фронт жидкости для определения интервала уравнения непрерывности и фронт открытой трещины для определения интервала уравнения упругости) в каждый момент. Установление способов более точного и более быстрого определения этих двух фронтов и анализ качества численного алгоритма выступают основными задачами во второй главе диссертационного исследования.

Материал горной породы состоит из различных видов минеральных частиц, и в нём образуется множество естественных стратификаций и мелких естественных трещин, поэтому в дополнение к модулю Юнга и коэффициенту Пуассона прочность горных пород также демонстрирует сильную неоднородность. Однако в предыдущих квазитрехмерных или трехмерных моделях [52, 54, 58, 59, 123, 137-139] исследование неоднородности было в основном сосредоточено на модуле Юнга, коэффициенте Пуассона для пласта и различных горных давлениях на различных слоях пласта. Неоднородность прочности пород мало исследована в моделях роста трещины ГРП. Кроме того, во многих трехмерных моделях РКН [63, 72] начальная геометрия трещины обычно задается так: высота трещины равна толщине продуктивной зоны (большой размер); длина трещины намного больше, чем высота трещины; эволюция того, как трещина растет из какой-то малой геометрии до такой начальной геометрии, в подобных моделях не учитывается. Или, например, в моделях [61, 101, 102, 114] просто предполагается плоская деформация в направлении высоты, и ранняя стадия роста трещины также не рассматривается. Таким образом, исследование эволюции трехмерного распространения трещины в условиях неоднородных прочностей на ранней стадии является дополнением к вышеприведенным моделям.

В третьей и четвертой главах диссертации представлено плоско-трехмерное моделирование распространения трещины ГРП в неоднородном пласте. Неоднородность отражается в различных критических значениях коэффициента интенсивности напряжений для разных областей пласта. Третья глава в основном сосредоточена на теоретической части плоско-трехмерного моделирования распространения гидравлического разрыва в средах, характеризующихся неоднородной трещиностойкостью. В этой главе представлены построение модели и дискретизация модели, и также численный метод для решения модели. Четвертая глава в основном сосредоточена на численных результатах и численно-сравнительных экспериментах по размеру трещиностойкости, положению и соотношению областей различной трещиностойкости (ослабленные области с меньшей трещиностойкостью и области повышенной прочности с большей трещиностойкостью) для плоско-трехмерной модели распространения гидравлического разрыва.

Главная цель диссертационного исследования заключается в том, чтобы выяснить влияние неоднородности прочности пласта на скорость распространения трещины в различных направлениях, за счет сравнения результатов для пласта с ослабленными зонами с результатами пласта, имеющего зоны с повышенной прочностью.

Глава 1. Численное асимптотическое решение для определения начального условия модели раскрытия существующей закрытой гидравлической трещины плоской деформации

Как было отмечено во Введении, исследования о распространении гидравлической трещины пласта развиваются очень быстро от самых ранних двумерных моделей KGD [31, 35] и PKN [39, 40] к сложным двумерным моделям [140-143] и затем к современным псевдотрехмерным [58, 59] и трехмерным [63, 66] моделям. Модели становятся все более сложными с учетом различных факторов (проницаемость [144], неоднородность [24, 142], вязкость [22, 145], инерция [136, 146], поток проппанта [147-149] и т. д.). Хорошо известно, что как двумерные, так и трехмерные модели роста гидравлической трещины редко поддаются аналитическому решению, поэтому исследования ГРП (гидравлического разрыва пласта) в основном сосредоточены на численном моделировании, для которого необходима одна жизненно важная предпосылка: начальное условие модели обязательно должно быть заранее задано. Для гидроразрыва пласта абсолютное начальное условие при $t=0$ является сингулярным в математическом смысле, поскольку при $t=0$ ГРП представляет собой процесс перехода от состояния «нет трещины» с нулевым раскрытием и нулевой длиной трещины до состояния «существующей трещины» с определенным раскрытием и некоторой длиной трещины. Таким образом, это сингулярное условие в абсолютный начальный момент ($t=0$) непригодно не только для теоретического анализа, но и для численного моделирования. Чтобы избежать сингулярности начального момента, в аналитических исследованиях вводятся некоторые дополнительные ограничения модели для получения автомодельных решений: например, условие отсутствия зоны отставания жидкости [22, 136], условие устойчивого распространения трещины [150, 151], условие нулевого горного давления [134], в то время как в численном моделировании используются некоторые прямые допущения для начального условия: например, гипотеза линейного распределения давления жидкости [143], гипотеза статического равномерного распределения давления жидкости [144], гипотеза фиксированной ширины трещины [152]. С инженерной точки зрения эти допущения и ограниченные условия подходят для изучения влияния различных параметров материала и окружающих геологических сред на геометрию трещины и поток жидкости, а также подходят для дальнейшего руководства инженерной практикой. Однако с математической точки зрения эти допущения и дополнительные условия не очень строги и точны для решения модели.

Реальное исследование асимптотического решения задач начального состояния ГРП выполнено Garagash [134], который продемонстрировал раннее решение для плоско-деформированной трещины гидроразрыва пласта при различных уровнях трещиностойкости горных пород. В этом асимптотическом решении одним сосредоточенным безразмерным параметром, состоящим из горного давления и времени, пренебрегается из-за допущения

малого горного давления. В действительности в большинстве ситуаций применения ГРП горное давление, как правило, велико и не может быть проигнорировано [67, 102], особенно для гидравлической трещины пласта с зоной отставания жидкости, потому что горное давление сильно влияет на зону отставания жидкости и геометрию трещины. Кроме того, влияние горного давления очень существенно для эволюции гидравлического разрыва при некоторых конкретных условиях или обстоятельствах: например, для вскрытия и распространения заранее-существующей трещины гидроразрыва или естественной трещины горное давление играет очень важную роль, потому что для заранее-существующей трещины гидроразрыва или естественной трещины трещиностойкость горных пород равна нулю и вязкость гидравлической жидкости постоянна, следовательно, горное давление является главным параметром, определяющим длину зоны отставания жидкости и контур трещины около вершины трещины. Таким образом, мы хотим изучить асимптотическое решение для начального состояния заранее-существующей трещины гидроразрыва с учетом зоны отставания жидкости под действием непренебрегаемого горного давления, т. е. раннее решение модели ГРП с учетом зоны отставания жидкости, в которой нельзя пренебрегать членами с параметром времени. Результаты в этой главе опубликованы в работе автора [1, 2, 167].

Сложность этой задачи состоит в том, что необходимо решить члены, производные по времени, в управляющих уравнениях без начального условия. С этой целью используется метод возмущения для вычисления членов, производных по времени, на основе определения производной, которое не требует начального условия. Для поиска точных значений двух видов членов, производных по времени, в управляющих уравнениях применяется метод двойных итераций. Кроме того, приведены модельные решения при различных уровнях горного давления для получения зависимости между горным давлением и решением модели (длинами заполненной жидкостью зоны и зоны отставания жидкости, раскрытием трещины и давлением жидкости).

1.1. Постановка задачи

На рисунке 1.1 (а) показана заранее-существующая трещина (плоская деформация) гидроразрыва с полудлиной l_0 в полубесконечной, однородной, изотропной, линейно-упругой твердой среде с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и нулевой трещиностойкостью вследствие закрытого состояния трещины под действием горного давления σ_0 , перпендикулярного плоскости трещины. Замкнутая трещина начинает открываться из-за закачки несжимаемой ньютоновской гидравлической жидкости с вязкостью μ в трещину с постоянным расходом Q_0 , см. рисунок 1.1 (б). Открытая часть трещины состоит из двух зон: первая зона, заполненная гидравлической жидкостью, с длиной l_f и давлением жидкости $p_f(x, t)$, и вторая зона, заполненная парами жидкости или пластовой жидкостью, с длиной l_{lag} и давлением $p_{lag}(x, t)$, которое незначительно по сравнению с

горным давлением σ_0 . Трещина симметрична относительно начала системы координат, поэтому на рисунке 1.1 показана только половина трещины.

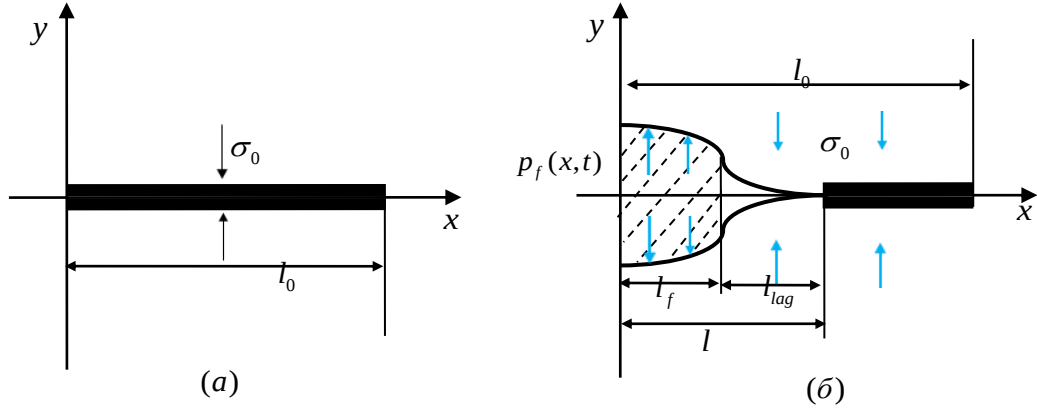


Рисунок 1.1. Профили заранее-существующей трещины гидроразрыва:

(а) полностью замкнутое состояние трещины;

(б) частично раскрытое состояние трещины в некоторый момент

1.2. Основные уравнения

Используя линейную теорию упругости и предполагая нулевое сдвиговое напряжение жидкости на поверхностях трещины, отмечаем, что раскрытие трещины $w(x, t)$ может быть связано с избыточным давлением $p(x, t) = p_f(x, t) - \sigma_0$ в заполненной жидкостью зоне и с избыточным давлением $p(x, t) = 0 - \sigma_0$ в зоне отставания жидкости одним сингулярным интегральным уравнением [30]:

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi E'} \left[\int_0^{l_f} p(x', t) G(x, x') dx' - \sigma_0 \int_{l_f}^l G(x, x') dx' \right], \quad (1.1)$$

где $E' = E/(1-\nu^2)$, и функция G определяется так:

$$G(x, x') = \ln \left| \frac{\sqrt{l^2 - x^2} + \sqrt{l^2 - x'^2}}{\sqrt{l^2 - x^2} - \sqrt{l^2 - x'^2}} \right|, \quad (1.2)$$

где l – это длина открытой части трещины. На точках $x=0$ и $x=l$ функция G сингулярна. Согласно теории смазки [124], течение несжимаемой ньютоновской жидкости в узкой трещине задается законом Пуазейля:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(w\vec{u}) = 0, \quad \vec{u} = -\frac{w^2}{12\mu} \nabla p \quad (1.3)$$

где $\vec{u}$ представляет вектор скорости жидкости в трещине. Для одномерного течения это уравнение можно представить так:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_f \quad (1.4)$$

где $q(x, t)$ – это скорость потока на сечении трещины с единичной шириной, которая определяется так:

$$q(x, t) = -\frac{w(x, t)^3}{\mu'} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (1.5)$$

где $\mu' = 12\mu$. При условии $q(l_f, t) = 0$ интегральная форма уравнения (1.4) такова:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{l_f} w(x', t) dx' = q(x, t), \quad (1.6)$$

где l_f – это длина заполненной жидкостью зоны трещины.

1.3. Граничные условия

Глобальное уравнение неразрывности, а именно закон сохранения объема, записывается в виде:

$$\int_0^{l_f} w(x, t) dx = q_0 t, \quad (1.7)$$

где $q_0 = Q_0/2$ представляет собой скорость закачки для каждой стороны трещины, т. е. постоянную скорость закачки на скважине. Согласно уравнению (1.5) мы получим

$$q_0 = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x = 0 \quad (1.8)$$

Поскольку давление в зоне отставания жидкости не учитывается, согласно условию непрерывности давления вдоль всей трещины, для избыточного давления на фронте жидкости выполняется условие:

$$p(x, t) = -\sigma_0, \quad x = l_f \quad (1.9)$$

При условии плоской деформации коэффициент интенсивности напряжений на кончике трещины состоит из двух частей: первая часть определяется избыточным давлением в заполненной гидравлической жидкостью зоне, вторая часть – избыточным давлением в зоне отставания жидкости. В работе [153] показано конкретное выражение коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_I = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[\int_0^{l_f} \frac{p(x, t)}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx - \sigma_0 \int_{l_f}^l \frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}} dx \right]. \quad (1.10)$$

Когда гидравлическая жидкость закачивается в трещину, мы предполагаем, что процесс раскрытия трещины всегда находится в состоянии подвижного равновесия, поэтому критерием для движения конца открытой части трещины является

$$K_I = K_{IC} = 0, \quad (1.11)$$

где K_{IC} представляет собой трещиностойкость материала. Таким образом, эта задача с четырьмя неизвестными ($w(x, t)$, $p(x, t)$, l_f , l) замкнута двумя управляющими уравнениями (1.1) и (1.4), и четырьмя условиями (1.7) – (1.9) и (1.11), где условия (1.7) и (1.8) эквивалентны.

1.4. Масштабирование модели

1.4.1. Масштабирование координат

Чтобы более четко проанализировать решение этой задачи, вводим безразмерную координату:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (1.12)$$

где вся открытая часть трещины находится в пределах $[0, 1]$. $\xi_f = l_f / l$ является безразмерной координатой фронта жидкости. Таким образом, уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) могут быть переписаны в безразмерных координатах, соответственно, как

$$w(\xi, t) = \frac{4l}{\pi E'} \left\{ \int_0^{\xi_f} p(\xi', t) G(\xi, \xi') d\xi' - \sigma_0 \int_{\xi_f}^1 G(\xi, \xi') d\xi' \right\}, \quad (1.13)$$

$$G(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\xi'^2}} \right|, \quad (1.14)$$

$$\frac{dl}{dt} \xi w + l \frac{d\xi_f}{dt} w_{\xi=\xi_f} + \frac{dl}{dt} \int_{\xi}^{\xi_f} w d\xi' + l \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\partial w}{\partial t} d\xi' = - \frac{w^3}{\mu' l} \frac{\partial p}{\partial \xi}. \quad (1.15)$$

Граничные условия (1.6), (1.8) и (1.9) переписываются, соответственно, следующим образом:

$$l \int_0^{\xi_f} w(\xi, t) d\xi = q_0 t, \quad (1.16)$$

$$p(\xi, t) = -\sigma_0, \quad \xi = \xi_f, \quad (1.17)$$

$$\int_0^{\xi_f} \frac{p(\xi, t) + \sigma_0}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2} \sigma_0. \quad (1.18)$$

1.4.2. Масштабирование решений модели

Чтобы масштабировать решения этой задачи, мы вводим безразмерную длину открытой части трещины $\gamma(t)$, безразмерную длину заполненной гидравлической жидкостью зоны $\gamma_f(t)$, безразмерное раскрытие трещины $\Omega(\xi, t)$ и безразмерное избыточное давление $\Pi(\xi, t)$ с двумя дополнительными параметрами: масштаб длины $L(t)$ и малый параметр $\varepsilon(t)$. Такая форма масштабирования для решений плоско-деформированной модели ГРП впервые была предложена ученым Detournay [154], а затем широко применялась для анализа

плоско-деформированных моделей ГРП [134, 136, 140]. Конкретная форма масштабирования решений выглядит так:

$$l(t) = \gamma(t)L(t), \quad (1.19)$$

$$l_f(t) = \gamma_f(t)L(t), \quad (1.20)$$

$$w(\xi, t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\xi, t), \quad (1.21)$$

$$p(\xi, t) = \varepsilon(t)E'\Pi(\xi, t), \quad (1.22)$$

где два дополнительных параметра $L(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют двум следующим дополнительным условиям для обеспечения замкнутости модели [134]:

$$\varepsilon L^2 = q_0 t, \quad (1.23)$$

$$\frac{\mu'}{E't\varepsilon^3} = 1. \quad (1.24)$$

Подставляя безразмерные решения (1.19)–(1.22) в уравнение (1.15), упрощая и комбинируя соответствующие члены, получаем

$$\left(\frac{t}{L} \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{t}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \xi \frac{\Omega}{\gamma} + t \frac{\partial \xi_f}{\partial t} \frac{\Omega_{\xi=\xi_f}}{\gamma} + \left(\frac{t}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + 1 \right) \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\Omega}{\gamma} d\xi' + \frac{t}{\gamma} \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\partial \Omega}{\partial t} d\xi' = - \frac{E'\varepsilon^3 t \Omega^3}{\mu' \gamma^3} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}. \quad (1.25)$$

Из уравнений (1.23) и (1.24) мы получаем следующие отношения:

$$\frac{t}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{2}{3}, \quad \frac{t}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{3}. \quad (1.26)$$

Один новый параметр $\bar{\Omega} = \Omega/\gamma$ вводится для упрощения уравнения (1.25). Подставляя (1.26) и $\bar{\Omega}$ в уравнение (1.25), получаем:

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \right) \xi \bar{\Omega} + \left(2 \frac{t}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + 1 \right) \int_{\xi}^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi' + t \frac{d\xi_f}{dt} \bar{\Omega}_{\xi=\xi_f} + t \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} d\xi' = -\bar{\Omega}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}. \quad (1.27)$$

Подробный процесс выведения уравнений (1.25) и (1.27) представлен в Приложении 1.1. Затем уравнения (1.13), (1.16) – (1.18) переписываются в безразмерном виде, соответственно:

$$\bar{\Omega} = \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\xi_f} \left[\Pi(\xi', t) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon E'} \right] G(\xi, \xi') d\xi' - \pi \bar{\sigma} \sqrt{1 - \xi^2} \right\}, \quad (1.28)$$

$$\gamma^2 \int_0^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi = 1, \quad (1.29)$$

$$\Pi(\xi_f, t) = -\bar{\sigma}, \quad (1.30)$$

$$\int_0^{\xi_f} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} [\Pi(\xi, t) + \bar{\sigma}] d\xi = \frac{\pi}{2} \bar{\sigma}, \quad (1.31)$$

где безразмерное горное давление $\bar{\sigma} = \sigma_0/(E'\varepsilon)$. Таким образом, получается безразмерная замкнутая система для решения модели, состоящая из уравнений (1.27) – (1.31).

1.5. Метод численного решения

1.5.1. Дискретизация плоско-деформированной трещины и давления

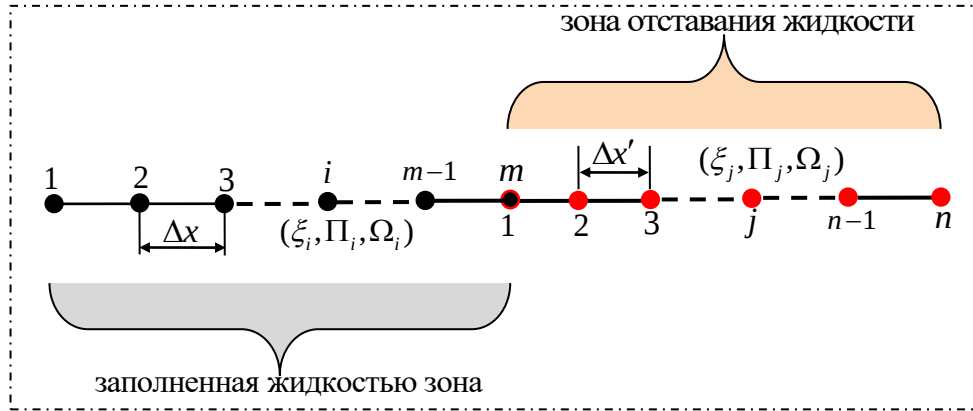


Рисунок 1.2. Равномерные подвижные сетки для заполненной жидкостью зоны и зоны отставания жидкости

В силу симметрии относительно точки закачки, достаточно рассмотреть только половину трещины, как это показано на рисунке 1.1. Для того чтобы сетки подходили для разных масштабов зоны, заполненной гидравлической жидкостью, применяются различные размеры ячеек Δx и $\Delta x'$ для заполненной жидкостью зоны и зоны отставания жидкости, соответственно. Их соответственные количества ячеек равняются $m-1$ и $n-1$, общее количество точек сетки $N = m + n - 1$, см. рисунок 1.2. На каждой точке сетки имеются три безразмерных физических параметра: безразмерная координата ξ_i , безразмерное давление Π_i и безразмерное раскрытие Ω_i .

Известно, что распределение избыточного давления на каждой ячейке заполненной гидравлической жидкостью зоны можно рассматривать как линейное, если длина каждой ячейки достаточно мала, поэтому мы можем использовать кусочно-линейные функции для представления избыточного давления в заполненной жидкостью зоне. В свою очередь избыточное давление в зоне отставания жидкости имеет однородное распределение $p(x,t) = -\sigma_0$. Таким образом, неизвестный безразмерный параметр $\Pi(\xi, t)$ вдоль всей открытой части трещины выражается единой кусочно-линейной формулой:

$$\Pi(\xi, t) = a_i \xi + b_i, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \quad i = 1, 2, 3, \dots, m + n - 1. \quad (1.32)$$

где a_i , b_i сформулированы как

$$a_i = \begin{cases} -\frac{\Pi_i}{(\xi_{i+1} - \xi_i)} + \frac{\Pi_{i+1}}{(\xi_{i+1} - \xi_i)}, & 1 \leq i \leq m \\ 0, & i > m \end{cases}, \quad (1.33)$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{\Pi_i \xi_{i+1}}{(\xi_{i+1} - \xi_i)} - \frac{\Pi_{i+1} \xi_i}{(\xi_{i+1} - \xi_i)}, & 1 \leq i \leq m \\ -\sigma_0, & i > m \end{cases}. \quad (1.34)$$

Подставляя уравнения (1.32) – (1.34) в уравнение (1.28), получаем дискретную форму раскрытия трещины $\bar{\Omega}$, на основе избыточных давлений Π_i ($i=1, 2, 3, \dots, m+n-1$):

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = \frac{4}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{m-1} (a_i I_1(\xi, \xi') + (b_i + \bar{\sigma}) I_2(\xi, \xi')) \Big|_{\xi'=\xi_i}^{\xi'=\xi_{i+1}} - \pi \bar{\sigma} I_3(\xi) \right), \quad (1.35)$$

где функции $I_1(\xi, \xi')$, $I_2(\xi, \xi')$ и $I_3(\xi)$ представляют собой интегралы функции $G(\xi, \xi')$, их конкретные выражения см. в Приложении 1.2.

1.5.2. Система уравнений для численных решений

Анализируя основное управляющее уравнение (1.27), находим, что в левой части этого уравнения есть четыре производных члена по времени. Для получения асимптотического решения начального условия этой модели производные по времени члены не могут быть вычислены обычным методом, который требует начального условия. Чтобы разрешить это противоречие, здесь используется метод возмущений для получения значений членов производной по времени, а затем применяется итерационный метод для получения более точных значений членов производной по времени. Для удобства изложения обозначим левые члены уравнения (1.27) как L_1 , L_2 , L_3 , L_4 слева направо, и правый член как R^* , соответственно. В членах L_1 и L_2 есть тот же член производной по времени, обозначаемый как $\eta = (t/\gamma)(d\gamma/dt)$. В работах [36, 134, 155-157] получены автомодельные решения, независимые от времени, поскольку производные по времени члены L_3 , L_4 и η исключены из уравнения (1.27). Мы попытаемся использовать идею, изложенную в работах [36, 134, 155-157] для автомодельных решений, чтобы исключить члены, содержащие производные по времени, для получения решения начального условия в этой модели.

Известно, что если заданы время t и безразмерная координата ξ_i , то $L_1(\xi_i, t)$, $L_2(\xi_i, t)$, $L_3(\xi_i, t)$, $L_4(\xi_i, t)$ становятся известными. Поэтому когда задается $t = t^*$ ($t^* \rightarrow 0$), суммарные члены $L_{12} = L_1 + L_2$, $L_{34} = L_3 + L_4$ в левой части уравнения (1.27) для каждой координаты ξ_i являются известными, и на точке $\xi = \xi_i$ уравнение (1.27) преобразуется как

$$L_{12}(\xi_i, t^*) + L_{34}(\xi_i, t^*) = R^*(\xi_i, t^*). \quad (1.36)$$

Чтобы исключить члены L_3 и L_4 из уравнения (1.36), введем коэффициент $\Gamma(\xi, t)$, который определяется как

$$L_{34} = \Gamma \cdot L_{12}, \quad t = t^*. \quad (1.37)$$

Таким образом, уравнение (1.36) примет вид:

$$[\Gamma(\xi_i, t^*) + 1] L_{12}(\xi_i, t^*) = R^*(\xi_i, t^*). \quad (1.38)$$

Это успешно исключает члены L_3 и L_4 , и в члене L_{12} в уравнении (1.38) только один неизвестный член η зависит от времени t . По сравнению с моделями в работах [36, 134, 155-157], в уравнении (1.38) есть еще две неизвестных: $\eta(t)$ и $\Gamma(\xi_i, t)$, которые можно найти с

помощью метода возмущений и итерационного метода, где метод возмущений используется для вычисления членов производной по времени в соответствии с определением производной, а итерационный метод – для поиска уточненных численных значений η и Γ .

Уравнение (1.38) дискретизируется за счет того, что левая сторона равна правой стороне в средней точке каждой сетки, поэтому для заполненной жидкостью зоны существуют $m-1$ алгебраических уравнений

$$\left[\Gamma(\lambda_i, t^*) + 1 \right] L_{12}(\lambda_i, t^*) = R^*(\lambda_i, t^*), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1, \quad (1.39)$$

где λ_i – это безразмерная координата средней точки каждой ячейки в заполненной жидкостью зоне, т. е. $\lambda_i = (\xi_i + \xi_{i+1})/2$. Конкретные выражения для $L_{12}(\lambda_i, t^*)$ и $R^*(\lambda_i, t^*)$ показаны в Приложении 1.3. И еще два дополнительных уравнения из граничных условий (1.30) и (1.31) представляются в дискретном виде :

$$\Pi_m = -\bar{\sigma}, \quad (1.40)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[a_i \left(-\sqrt{1-\xi^2} \right) + (b_i + \bar{\sigma}) \arcsin \xi \right]_{\xi=\xi_i}^{\xi=\xi_{i+1}} = \frac{\pi}{2} \bar{\sigma}, \quad (1.41)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$. Подробный процесс вывода для (1.40) и (1.41) приведён в Приложении 1.3. Эти $m+1$ уравнений (уравнения (1.39) – (1.41)) составляют замкнутую нелинейную систему с $m+1$ неизвестными $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_m, \bar{\sigma}$.

1.5.3. Итерационный алгоритм для η и Γ

Среди параметров начального времени t^* , безразмерного положения фронта жидкости ξ_f и горного давления σ_0 только два независимы. Начальное время обязательно заранее задается для решения начального состояния на этот момент. Из параметров ξ_f и σ_0 мы выбираем координату фронта жидкости ξ_f , а не горное давление σ_0 в качестве начального известного параметра для этого алгоритма, потому что если ξ_f полагается известным, вычислительная зона для уравнения (1.39) и вычислительная зона для расчета раскрытия трещины из уравнения (1.35) определены, после чего σ_0 легко определяется из ξ_f , а если задаётся σ_0 , для определения неизвестного ξ_f нужно ещё и проводить дополнительный сложный итерационный расчет.

Таким образом, во-первых, задаётся координата фронта жидкости в момент $t^* (t^* \rightarrow 0)$, обозначим её ξ_f^* . Оценки для η и коэффициента Γ в средней точке λ_i каждой сетки в момент времени t^* принимаются как η' , $\Gamma'(\lambda_i, t^*)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$, соответственно. Затем, подставляя эти известные t^* , ξ_f^* и предполагаемые оценки η' , Γ' в систему (1.39) – (1.41), получаем значения горного давления σ_0^* и безразмерной длины открытой трещины γ^* . А затем, фиксируя значение σ_0^* и делая небольшое возмущение δ около ξ_f^* , получаем два возмущенных значения, а именно: $\xi_f' = \xi_f^* - \delta$, $\xi_f'' = \xi_f^* + \delta$. При двух парах известных (ξ_f', σ_0^*) и (ξ_f'', σ_0^*) получаем две новые пары значений (γ', t') , (γ'', t'') для параметров γ и t

из системы (1.39) – (1.41). Таким образом, новое значение для параметра η при $\xi_f = \xi_f^*$ получается определением производной:

$$\eta'' = \frac{t^*}{\gamma^*} \frac{\gamma' - \gamma''}{t' - t''}. \quad (1.42)$$

Если $|\eta' - \eta''| > \varepsilon_1$ (ε_1 является расчетным допуском), то пусть $\eta' = (\eta' + \eta'')/2$, и продолжаем эту внутреннюю итерацию для уточнения значения η . Если $|\eta' - \eta''| \leq \varepsilon_1$, это означает, что результат внутренней итерации η'' удовлетворяет точности расчета, и вычисление переходит к внешней итерации для параметра Γ : через два вышеупомянутых возмущения ξ_f' и ξ_f'' мы также можем получить соответствующие безразмерные раскрытия трещины $\bar{\Omega}'$ и $\bar{\Omega}''$. Таким образом, члены $d\xi_f/dt$ и $\partial\bar{\Omega}/\partial t$ в L_3 и L_4 (уравнение (1.27)) могут быть вычислены по определению производной:

$$\frac{d\xi_f}{dt} = \frac{\xi_f' - \xi_f''}{t' - t''}, \quad \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial t} = \frac{\bar{\Omega}' - \bar{\Omega}''}{t' - t''}. \quad (1.43)$$

Подставляя результаты уравнения (1.43) в L_3 и L_4 , получаем новое значение для коэффициента Γ из уравнения (1.37):

$$\Gamma''(\lambda_i, t^*) = \frac{L_{34}(\lambda_i, t^*)}{L_{12}(\lambda_i, t^*)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1, \quad (1.44)$$

если $\|\Gamma' - \Gamma''\| > \varepsilon_2$ (ε_2 является расчетным допуском), то пусть $\Gamma' = (\Gamma' + \Gamma'')/2$, и из внешней итерации вновь переходим во внутреннюю итерацию для получения нового точного значения η . Если $\|\Gamma' - \Gamma''\| \leq \varepsilon_2$, выходим из двойной итерации. Таким образом, получаем значения (η'', Γ'') , являющиеся численными решениями для параметров η и Γ .

1.6. Численные результаты и обсуждение

Для численного расчета берутся следующие параметры материала: модуль Юнга $E = 30 \text{ GPa}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, вязкость гидравлической жидкости $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ и начальное время для асимптотического решения модели фиксировано $t^* = 10^{-4} \text{ s}$. Поскольку при фиксированном времени имеется однозначное соответствие между горным давлением σ_0 и безразмерной длиной заполненной жидкостью зоны ξ_f , выбираются 14 различных размеров положения фронта гидравлической жидкости: $\xi_f = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99, 0.999$ – для изучения влияния разных уровней горного давления σ_0 на решения модели. Расчетные допуски задаются как $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$. Полная нелинейная система (1.39) – (1.41) решается итерационным методом Ньютона.

В таблице 1.1 приведены частичные численные решения (горное давление σ_0 , соответствующее возмущению время t' и t'' и безразмерные длины γ_f и γ) при 14 различных значениях ξ_f с соответственным возмущением δ . Последний столбец показывает вычислительную ошибку алгоритма, определяемую как

$$e = \int_0^{\xi_f} \left| \frac{R^* - (\Gamma + 1)L_{12}}{R^*} \right| d\xi, \quad (1.45)$$

которая представляет собой кумулятивную ошибку для всех ячеек вдоль заполненной жидкостью зоны.

Результаты, представленные в таблице 1.1, показывают, что при малом горном давлении доля заполненной жидкостью зоны ξ_f мала, а доля зоны отставания жидкости $1 - \xi_f$ велика. При увеличении горного давления ξ_f увеличивается, $1 - \xi_f$ уменьшается. Из времени возмущения t' и t'' находим, что скорость открытия трещины уменьшается с увеличением горного давления.

Таблица 1.1

Частичные численные результаты для 14 различных уровней ξ_f
при фиксированном времени $t^* = 10^{-4}$ s

ξ_f	δ	σ_0 (MPa)	t' (10^{-4} s)	t'' (10^{-4} s)	γ_f	γ	e
10^{-4}	10^{-8}	0.00027	0.99967900	1.0003202	0.682	6823.2	2.1×10^{-9}
10^{-3}	10^{-8}	0.0032	0.99996727	1.0000328	0.712	712.5	3.5×10^{-11}
10^{-2}	10^{-8}	0.041	0.99999660	1.0000034	0.755	75.52	7.0×10^{-13}
0.1	10^{-7}	0.62	0.99999623	1.0000038	0.824	8.24	2.2×10^{-12}
0.2	10^{-7}	1.53	0.99999795	1.0000021	0.855	4.27	1.0×10^{-12}
0.3	10^{-6}	2.71	0.99998515	1.0000149	0.877	2.92	6.3×10^{-11}
0.4	10^{-6}	4.22	0.99998773	1.0000123	0.893	2.23	2.1×10^{-13}
0.5	10^{-6}	6.19	0.99998897	1.0000110	0.906	1.81	2.2×10^{-13}
0.6	10^{-6}	8.84	0.99998935	1.0000107	0.913	1.52	1.8×10^{-13}
0.7	10^{-6}	12.66	0.99998887	1.0000111	0.918	1.31	2.0×10^{-13}
0.8	10^{-6}	18.82	0.99998695	1.0000131	0.922	1.15	2.2×10^{-13}
0.9	10^{-5}	31.76	0.99980266	1.0001974	0.912	1.01	2.3×10^{-13}
0.99	10^{-5}	98.99	0.99895775	1.0010440	0.887	0.89	3.5×10^{-13}
0.999	10^{-5}	160.01	0.99724801	1.0027659	0.87	0.873	2.0×10^{-12}

На рисунке 1.3 и рисунке 1.4 приведены численные решения безразмерного раскрытия и безразмерного избыточного давления при различных значениях ξ_f (различных горных давлениях σ_0). Рисунок 1.3 показывает, что при нулевой трещиностойкости пласта ($K_{IC} = 0$ для заранее-существующей трещины) малое горное давление приводит к малой заполненной жидкостью зоне (ξ_f мало), и открытая часть трещины характеризуется «острой» вершиной: градиенты кривых безразмерного раскрытия при малых ξ_f стремятся к нулю; а большее горное давление приводит к большей заполненной жидкостью зоне (ξ_f велико), и открытая часть трещины характеризуется приблизительно «круговой» вершиной: градиенты кривых безразмерного раскрытия стремятся к бесконечности. На рисунке 1.4 показано, что при малых значениях σ_0 и ξ_f распределение избыточного давления в заполненной жидкостью зоне в начальный момент является приблизительно линейным (кривые давления при $\xi_f = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2}). Градиент кривых избыточного давления на фронте гидравлической жидкости уменьшается с увеличением σ_0 и ξ_f . Мы можем указать, что если $\xi_f \rightarrow 1$ ($\sigma_0 \rightarrow \infty$), то

градиент кривой давления на фронте жидкости будет уменьшаться до отрицательной бесконечности.

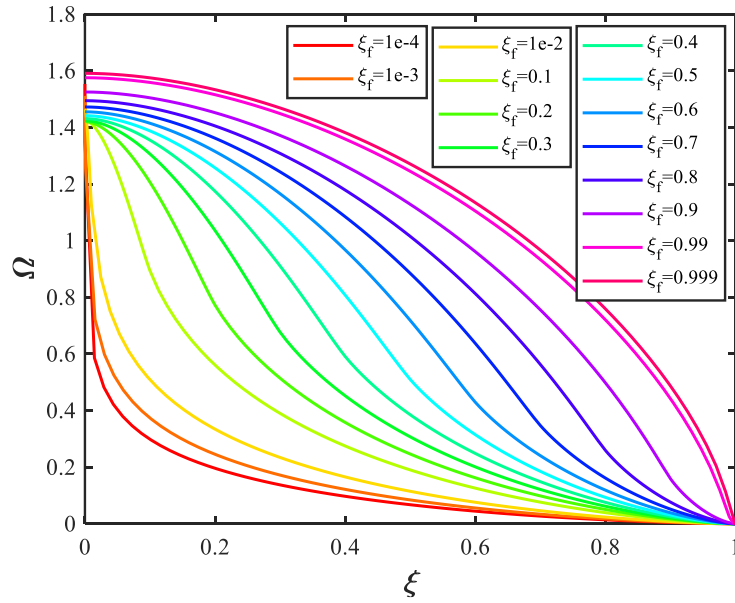


Рисунок 1.3. Результаты безразмерного раскрытия трещины при 14 различных долях заполненной жидкостью зоны ξ_f и фиксированном времени $t^* = 10^{-4}$ s

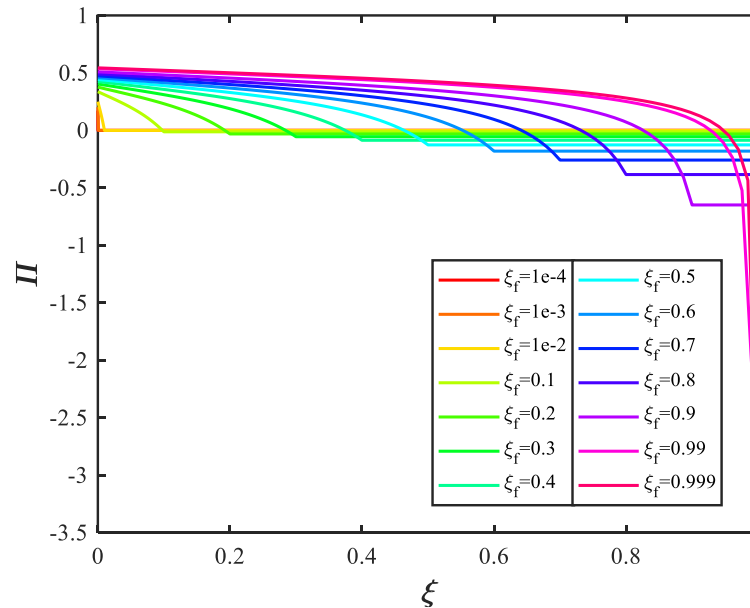


Рисунок 1.4. Результаты безразмерного избыточного давления жидкости при 14 различных долях заполненной жидкостью зоны ξ_f и фиксированном времени $t^* = 10^{-4}$ s

Рисунок 1.5 показывает зависимость длины заполненной жидкостью зоны от земного давления в начальный момент. Из рисунка видно, что для повторного вскрытия трещины горное давление σ_0 играет важную роль в определении доли заполненной жидкостью зоны и доли зоны отставания жидкости. При условии $K_{IC} = 0$ (для заранее-существующей трещины) горное давление является определяющим фактором: если σ_0 мало, зона

отставания жидкости занимает большую долю в трещине, в противном случае (σ_0 велико) гидравлическая жидкость заполняет почти всю трещину.

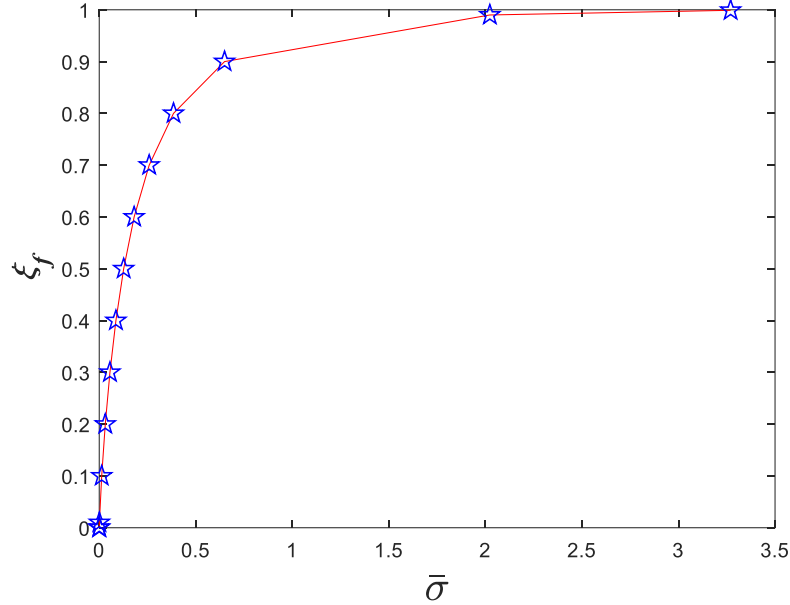


Рисунок 1.5. Зависимость доли заполненной жидкостью зоны ξ_f от безразмерного земного давления $\bar{\sigma}$ при фиксированном времени $t^* = 10^{-4}$ s

На рисунке 1.6 и рисунке 1.7 приведены численные результаты для коэффициентов производных по времени η и Γ . Когда ξ_f мало, стремится к нулю, коэффициент $\eta = (t/\gamma)(d\gamma/dt)$ сопоставим со значением $-1/3$. А когда $\xi_f \rightarrow 1$, значение коэффициента η становится ближе к нулю. На рисунке 1.7 мы находим ту же особенность для коэффициента Γ , когда $\xi_f \leq 10^{-2}$, $\Gamma \geq 0.8$ для всех точек заполненной жидкостью зоны, см. рисунок 1.7 (а). Это означает, что члены L_3 и L_4 в уравнении (1.27) сопоставимы с членами L_1 и L_2 . Когда $\xi_f \geq 0.9$, $\Gamma < 0.1$ для всех точек, см. рисунок 1.7 (г). Такое поведение коэффициентов η и Γ дает нам новую идею, как упростить эту модель при большем горном давлении (высоком значении ξ_f), а именно когда горное давление σ_0 большое (гидравлическая жидкость заполняет большую часть трещины), члены производной по времени (η и Γ) можно исключить из-за их малых значений по сравнению с другими членами в уравнении (1.27). Таким образом, при большом горном давлении уравнение (1.27) можно упростить так:

$$\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega} + \int_{\xi}^{\xi_f} \bar{\Omega} d\xi' = -\bar{\Omega}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}, \quad (1.46)$$

что вместе с уравнениями (1.28) – (1.31) образует новую систему уравнений для модели, независимую от времени и имеющую автомодельное решение.

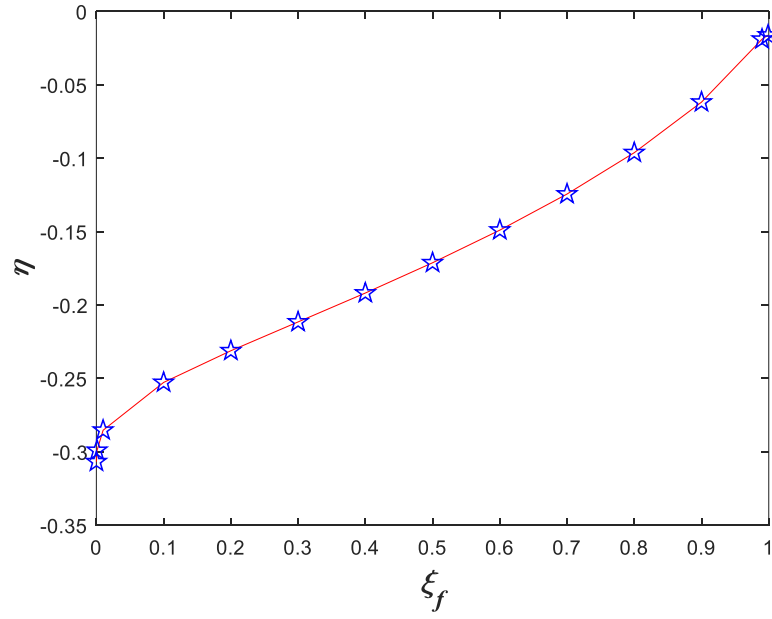


Рисунок 1.6. Численные решения коэффициента $\eta = (t/\gamma)(d\gamma/dt)$ для 14 различных долей заполненной жидкостью зоны ξ_f

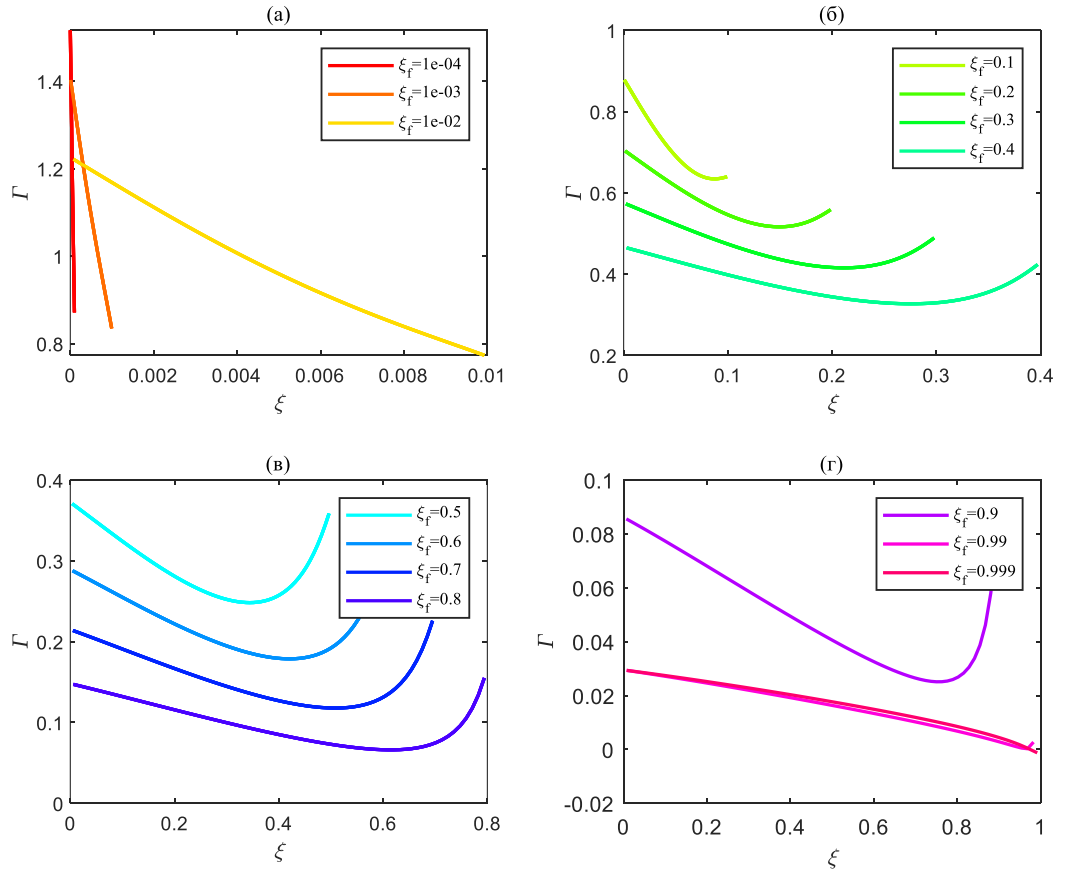


Рисунок 1.7. Численные решения коэффициента $\Gamma = L_{34}/L_{12}$ для 14 различных долей заполненной жидкостью зоны ξ_f

Сравнительные результаты безразмерного раскрытия и безразмерного давления между полной системой (1.27) – (1.31) и упрощенной системой (1.46) и (1.28) – (1.31) показаны на

рисунках 1.8 – 1.11. Найдено, что при малых значениях $\xi_f = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ результаты упрощенной модели ($\Gamma = 0, \eta = 0$) значительно отличаются от результатов полной модели ($\Gamma \neq 0, \eta \neq 0$), см. рисунок 1.8 (а), (б), (в). По мере увеличения значения ξ_f разницы между результатами упрощенной модели и результатами полной модели становятся всё меньше и меньше, как результаты на рисунках 1.9 и 1.10, соответствующие $\xi_f = 0.1, 0.2, 0.3$ и $\xi_f = 0.6, 0.7, 0.8$. Когда значение ξ_f стремится к единице, разницы между результатами двух моделей ($\Gamma = 0, \eta = 0$ и $\Gamma \neq 0, \eta \neq 0$) стремятся к нулю, как результаты при $\xi_f = 0.9, 0.99, 0.999$ на рисунке 1.11. Из сравнительных результатов (рисунки 1.8 – 1.11) видно, что ошибка упрощенной модели становится всё меньше и меньше с увеличением ξ_f . Это означает, что представленная упрощенная модель может использоваться при большинстве моделирований открытия заранее-существующей гидравлической трещины, поскольку большинство гидроразрывов осуществляется в пласте с высоким горным давлением, которое приводит к большому значению ξ_f ($\xi_f \rightarrow 1$).

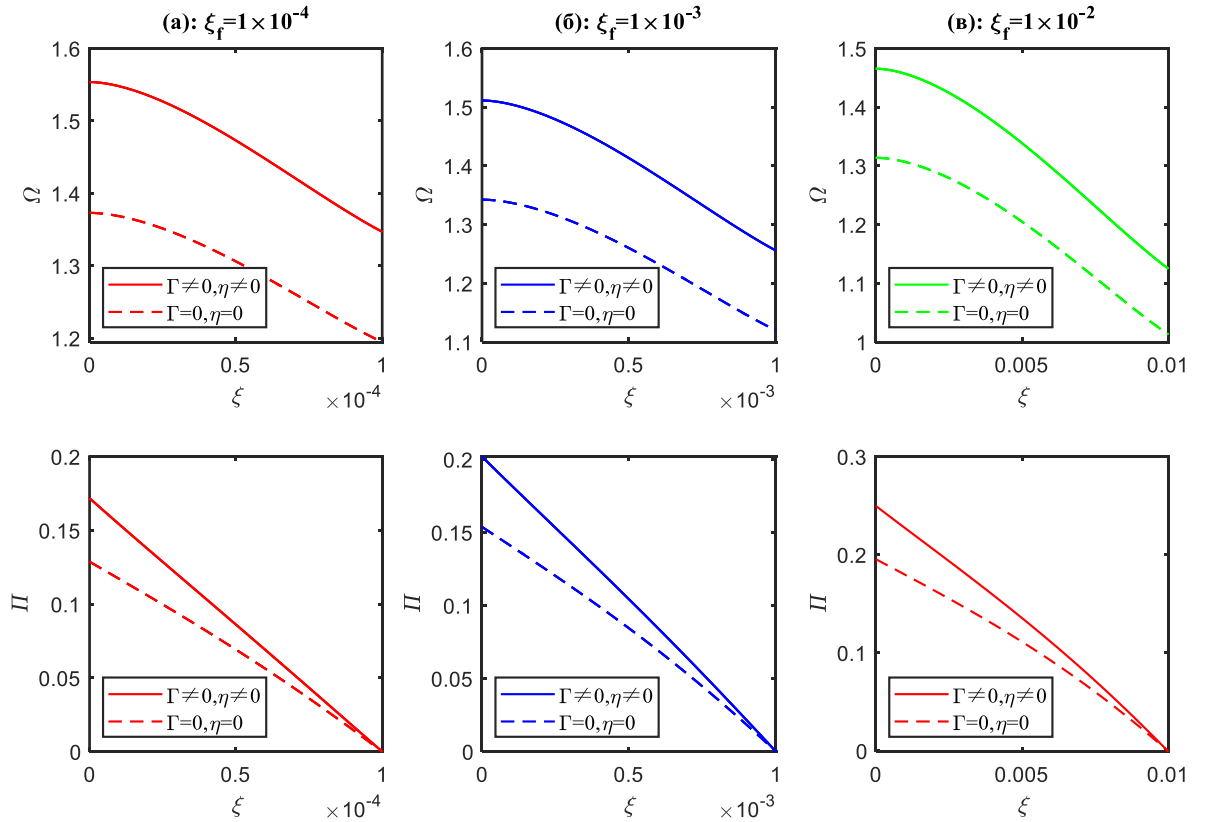


Рисунок 1.8. Результаты безразмерного раскрытия Ω и безразмерного давления Π для полной и упрощенной систем при $\xi_f = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$

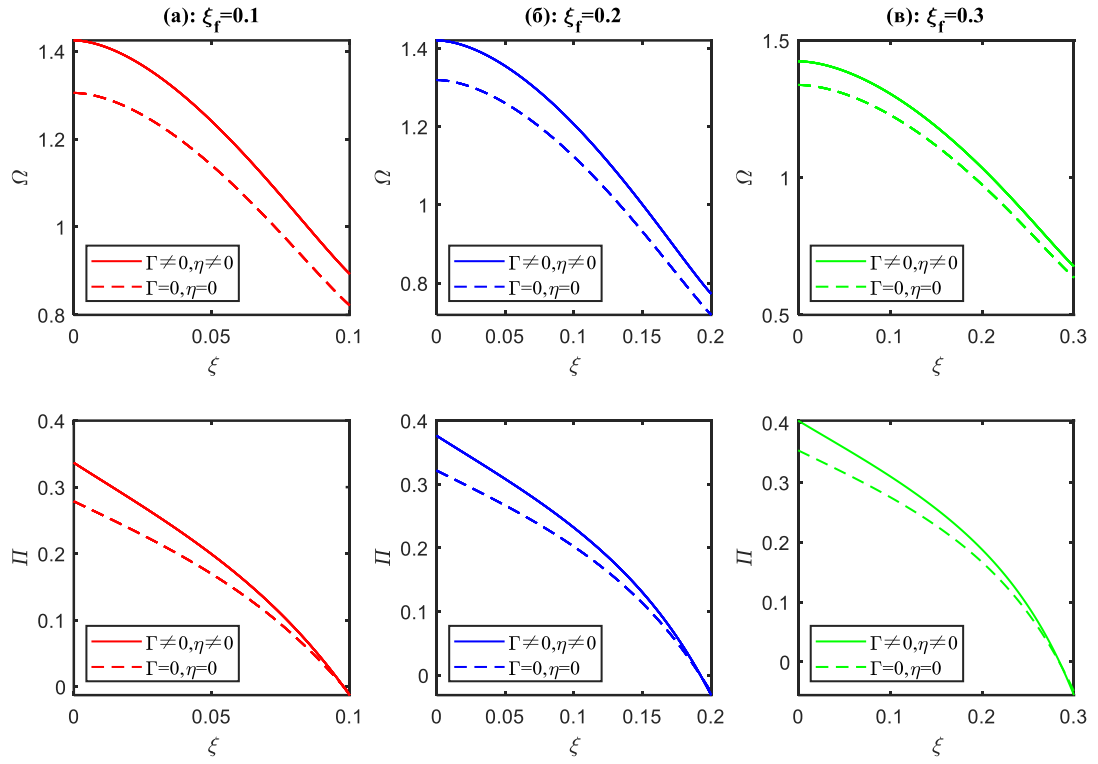


Рисунок 1.9. Результаты безразмерного раскрытия Ω и безразмерного давления Π для полной и упрощенной систем при $\xi_f = 0.1, 0.2, 0.3$

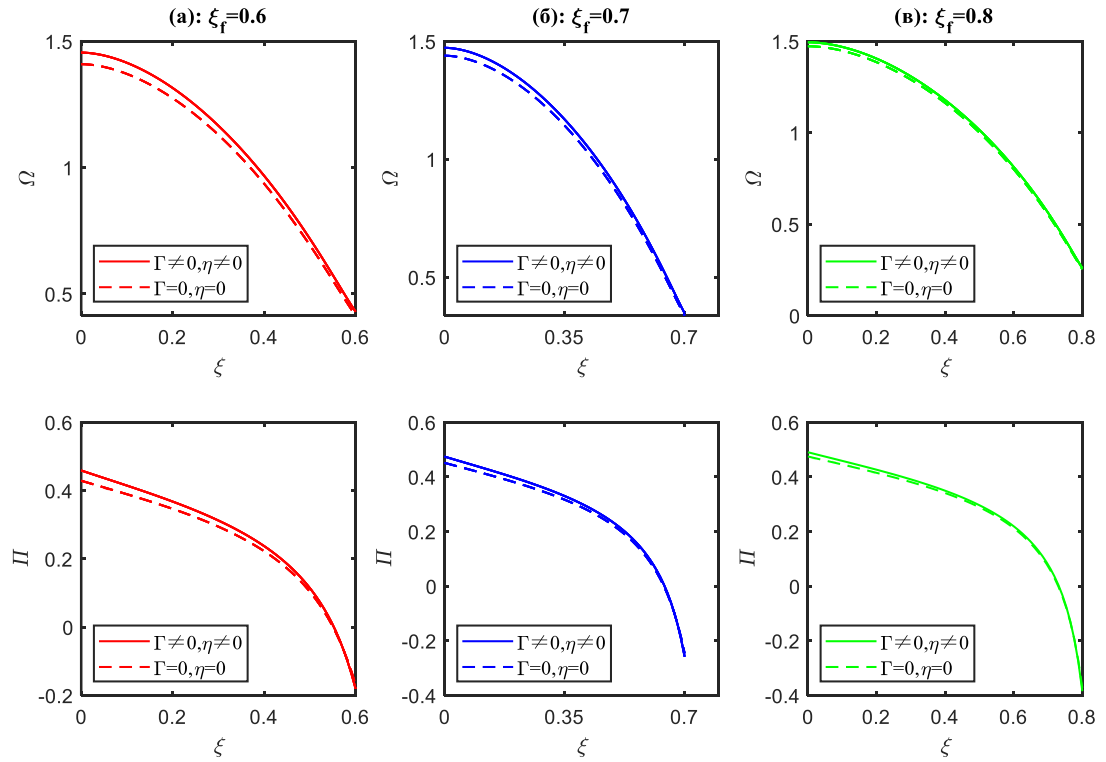


Рисунок 1.10. Результаты безразмерного раскрытия Ω и безразмерного давления Π для полной и упрощенной систем при $\xi_f = 0.6, 0.7, 0.8$

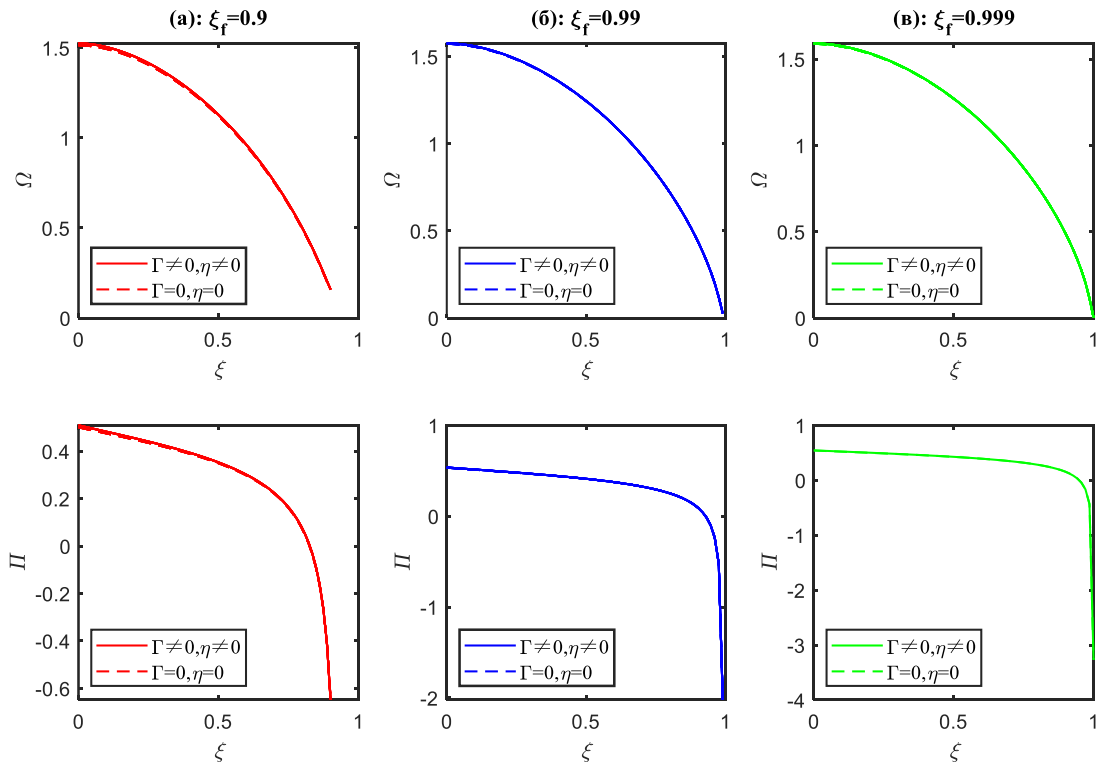


Рисунок 1.11. Результаты безразмерного раскрытия Ω и безразмерного давления Π для полной и упрощенной систем при $\xi_f = 0.9, 0.99, 0.999$

1.7. Выводы

Численные асимптотические решения для начального состояния повторного открытия заранее-существующей трещины гидроразрыва получены, в том числе, с использованием метода возмущений для вычисления членов, содержащих производную по времени, чтобы избежать требования начального условия при решении управляющих уравнений, и метода двойных итераций (внутренняя и внешняя итерации) для уточнения численных решений производных по времени членов. Эти численные решения могут обеспечить относительно точное начальное условие для моделирования гидравлической трещины пласта.

Кроме того, полученные результаты показывают, что горное давление играет определенную роль в начальном состоянии заранее-существующей трещины ($K_{IC} = 0$). При малом горном давлении гидравлическая жидкость занимает малую долю открытой трещины, т. е. малое значение ξ_f , и распределение давления жидкости кажется линейным, трещина характеризуется «острой» вершиной. При высоком горном давлении жидкость заполняет почти всю открытую трещину, т. е. $\xi_f \rightarrow 1$, градиент давления на фронте жидкости приближается к отрицательной бесконечности, и трещина характеризуется «круговой» вершиной.

Поскольку производными по времени членами можно пренебречь при большом горном давлении, получено одно новое упрощенное автомодельное решение – модель без производных по времени. Она описывается уравнениями (1.46) и (1.28) – (1.31). Эта

упрощенная модель может быть использована для большинства заранее-существующих трещин при начале гидроразрыва, так как горное давление обычно велико и гидравлическая жидкость заполняет почти всю трещину.

Приложение 1.1

Подставляя уравнения (1.19), (1.21) и (1.22) в уравнение (1.15), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\gamma \frac{\partial L}{\partial t} + L \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \xi \varepsilon L \Omega + \gamma L \frac{\partial \xi_f}{\partial t} \varepsilon L \Omega_{\xi=\xi_f} + \left(\gamma \frac{\partial L}{\partial t} + L \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \int_{\xi}^{\xi_f} \varepsilon L \Omega d\xi' + \\ & \gamma L \int_{\xi}^{\xi_f} \left(\Omega \frac{\partial(\varepsilon L)}{\partial t} + \varepsilon L \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) d\xi' = - \frac{(\varepsilon L \Omega)^3}{\mu' \gamma L} \frac{E' \varepsilon \partial \Pi}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (\text{п. 1.1})$$

которое переводится через объединение однородных элементов:

$$\left(\gamma \frac{\partial L}{\partial t} + L \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \xi \varepsilon L \Omega + \gamma L \frac{\partial \xi_f}{\partial t} \varepsilon L \Omega_{\xi=\xi_f} + \frac{\partial(\gamma \varepsilon L^2)}{\partial t} \int_{\xi}^{\xi_f} \Omega d\xi' + \gamma \varepsilon L^2 \int_{\xi}^{\xi_f} \frac{\partial \Omega}{\partial t} d\xi' = - \frac{E' \varepsilon^4 L^2 \Omega^3}{\mu' \gamma} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}. \quad (\text{п. 1.2})$$

Подставляя уравнения (1.23) в (п. 1.2), и деля его на γ^2/q_0 , получаем уравнение (1.25). Вводя новый параметр $\bar{\Omega} = \Omega/\gamma$ и подставляя уравнения (1.24) и (1.26) в уравнение (1.25), получаем уравнение (1.27).

Приложение 1.2

Уравнение (1.13) можно представить как

$$w(\xi, t) = \frac{4l}{\pi E'} \left\{ \int_0^{\xi_f} [p(\xi', t) + \sigma_0] G(\xi, \xi') d\xi' - \sigma_0 \int_0^1 G(\xi, \xi') d\xi' \right\}, \quad (\text{п. 1.3})$$

потом подставляя (1.19) – (1.22) в (п. 1.3), получаем:

$$\varepsilon L \Omega = \frac{4L\gamma}{\pi E'} \left(\int_0^{\xi_f} (\varepsilon E' \Pi + \sigma_0) G(\xi, \xi') d\xi' - \sigma_0 \int_0^1 G(\xi, \xi') d\xi' \right), \quad (\text{п. 1.4})$$

вводя параметр $\bar{\Omega}$, получаем:

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\gamma} = \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\xi_f} \left(\Pi + \frac{\sigma_0}{\varepsilon E'} \right) G(\xi, \xi') d\xi' - \frac{\sigma_0}{\varepsilon E'} \int_0^1 G(\xi, \xi') d\xi' \right). \quad (\text{п. 1.5})$$

Безразмерное давление Π в уравнении (п. 1.5) выражается кусочно-линейными функциями (1.32), поэтому уравнение (п. 1.5) принимает вид:

$$\bar{\Omega} = \frac{4}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (a_i \xi' + b_i + \bar{\sigma}) G(\xi, \xi') d\xi' - \bar{\sigma} \int_0^1 G(\xi, \xi') d\xi' \right), \quad (\text{п. 1.6})$$

где $\bar{\sigma} = \sigma_0/(\varepsilon E')$. В уравнении (п. 1.6) есть три интеграла от функции G , которые имеют следующие выражения:

$$I_1(\xi, \xi') = \int \xi' G(\xi, \xi') d\xi' = \frac{1}{2}(\xi'^2 - \xi^2) G(\xi, \xi') - \sqrt{1 - \xi'^2} \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (\text{п. 1.7})$$

$$I_2(\xi, \xi') = \int G(\xi, \xi') d\xi' = 2\sqrt{1 - \xi^2} \arcsin \xi' + \xi' G(\xi, \xi') + \xi \left(\ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi + \xi'} \right| + F(\xi, \xi') \right), \quad (\text{п. 1.8})$$

$$I_3(\xi) = \int_0^1 G(\xi, \xi') d\xi' = \pi \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (\text{п. 1.9})$$

где функция $F(\xi, \xi') = \ln \frac{1 + \xi\xi' + \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi'^2}}{1 - \xi\xi' + \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi'^2}}$. Потом подставляем (п. 1.7) – (п. 1.9) в уравнение (п. 1.6), получаем дискретное выражение раскрытия трещины (1.35).

Приложение 1.3

Подставляя уравнение (1.35) в (1.39), получаем три новых интеграла в члене L_{12} : $\int I_1 d\xi$, $\int I_2 d\xi$ и $\int I_3 d\xi$, которые выражаются следующим образом:

$$J_1(\xi, \xi') = \int I_1(\xi, \xi') d\xi = \frac{1}{6} \xi'^2 (\xi' f(\xi, \xi') + 3\xi' F(\xi, \xi') + 3\xi G(\xi, \xi')) + \\ + \frac{1}{3} \left(-\xi \sqrt{1 - \xi'^2} \sqrt{1 - \xi^2} - 2(1 - \xi'^2)^{\frac{3}{2}} \arcsin \xi \right) - \frac{1}{6} \xi^3 G(\xi, \xi') + \frac{2}{3} \xi'^3 \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi + \xi'} \right|, \quad (\text{п. 1.10})$$

$$J_2(\xi, \xi') = \int I_2(\xi, \xi') d\xi = \frac{1}{2} \xi'^2 f(\xi, \xi') + \frac{1}{2} (2\xi'^2 + \xi^2) F(\xi, \xi') + \xi \xi' G(\xi, \xi') + \\ + \xi' \sqrt{1 - \xi'^2} \arcsin \xi + \arcsin \xi' \left(\xi \sqrt{1 - \xi^2} + \arcsin \xi \right) + \frac{1}{2} (3\xi'^2 + \xi^2) \ln \left| \frac{\xi - \xi'}{\xi + \xi'} \right|, \quad (\text{п. 1.11})$$

$$J_3(\xi) = \int I_3(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(\arcsin \xi + \xi \sqrt{1 - \xi^2} \right), \quad (\text{п. 1.12})$$

где $f(\xi, \xi') = \ln \frac{1 + \xi\xi' - \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi'^2}}{1 - \xi\xi' - \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \xi'^2}}$. В итоге $L_{12}(\xi, t)$ успешно дискретизируется так:

$$L_{12} = \left(\frac{2}{3} + \eta \right) \frac{4}{\pi} \xi \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} [a_i I_1(\xi, \xi') + (b_i + \bar{\sigma}) I_2(\xi, \xi')]_{\xi'=\xi_i}^{\xi'=\xi_{i+1}} - \pi \bar{\sigma} I_3(\xi) \right\} + \\ + (1 + 2\eta) \frac{4}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} [a_i (J_1(\xi_f, \xi') - J_1(\xi, \xi')) + (b_i + \bar{\sigma}) (J_2(\xi_f, \xi') - J_2(\xi, \xi'))]_{\xi'=\xi_i}^{\xi'=\xi_{i+1}} - (J_3(\xi_f) - J_3(\xi)) \right\} \quad (\text{п. 1.13})$$

где $\xi = \lambda_i$, а именно координата средней точки каждой ячейки заполненной жидкостью зоны. Потом правая часть $R^*(\lambda_i, t)$ уравнения (1.39) преобразовывается так:

$$R^*(\lambda_i, t) = -a_i \bar{\Omega}(\lambda_i, t)^3 = \left(\frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} \Pi_i - \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} \Pi_{i+1} \right) \bar{\Omega}(\lambda_i, t)^3, \quad (\text{п. 1.14})$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$. Наконец, подставляя уравнение (п. 1.13) в уравнение (1.39), получаем алгебраическое дискретное выражение уравнения непрерывности (1.4).

Подставляя кусочно-линейное выражение давления (1.32) в критерий роста открытой трещины (1.31), получаем

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} (a_i \xi + b_i + \bar{\sigma}) d\xi = \frac{\pi}{2} \bar{\sigma}, \quad (\text{п. 1.15})$$

так как $\int \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = -\sqrt{1-\xi^2}$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \arcsin \xi$, получаем алгебраическое выражение для уравнения (1.11), т. е. уравнение (1.41).

Глава 2. Неявный алгоритм с быстрой сходимостью для эволюции заранее-существующей гидравлической трещины плоской деформации

В главе 1 представлено численное решение для определения начального условия в модели раскрытия существующей трещины с зоной отставания жидкости. Как известно, моделирование эволюция давления жидкости, раскрытия трещины и геометрии трещины в ГРП (гидравлическом разрыве пласта) является сложной механической задачей из-за нелинейной связи между механиками жидкости и твердого тела: с одной стороны, основное управляющее уравнение, определяющее поток гидравлической жидкости в трещине, является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных относительно раскрытия трещины и давления и получается путем объединения уравнения непрерывности и закона Пуазейля; с другой стороны, уравнение упругости управляет связью между избыточным давлением и деформацией пласта. Дополнительно усложняет задачу то, что управляющее уравнение и уравнение упругости рассчитываются не в одной и той же области трещины: управляющее уравнение решается только в заполненной жидкостью зоне, а уравнение упругости – во всей зоне трещины, включающей заполненную жидкостью зону и зону отставания жидкости. Кроме того, из-за сингулярной интегральной формы уравнение упругости не может быть непосредственно подставлено в управляющее уравнение. При моделировании открытия существующей гидравлической трещины необходимо сначала определить положения двух фронтов: положение фронта жидкости и положение фронта открытой трещины. Только так возможно определить вычислительные зоны для управляющего уравнения и уравнения упругости, после чего могут быть найдены решения на каждом шаге по времени. Это сильно отличается от алгоритма, представленного в главе 1, в котором положения двух фронтов задаются заранее благодаря применению безразмерных координат.

В настоящее время с развитием вычислительной техники существует много сложных вычислительных методов моделирования эволюции трещины гидроразрыва пласта, включающих метод конечных элементов (FEM) [47, 74, 75, 84], расширенный метод конечных элементов (XFEM) [96, 98, 102], метод разрывных смещений (DDM) [107–113] и т. д. Эти численные методы могут учитывать многие факторы в моделях с помощью высокоскоростных вычислительных возможностей компьютера. Однако в указанных работах при моделировании ГРП основное внимание обращается на решение модели, в то время как более узконаправленные исследования [140, 158] сосредоточены на численном алгоритме для моделирования ГРП – например, на общих характеристиках шагов по времени и шагов сетки в расчете, на сходимости алгоритма или на существовании каких-либо методов или мер для ускорения сходимости.

Общеизвестно, что качество итерационного алгоритма также является важным критерием оценки модели, поэтому в данной главе подробно представлен и проанализирован один алгоритм с быстрой сходимостью, направленный на расчет эволюции заранее-существующей трещины гидроразрыва. Также этот алгоритм может быть использован для расчета распространения гидравлической трещины и в целом обладает широким диапазоном применения. Результаты в этой главе опубликованы в работе автора [1, 2, 3].

2.1. Математическая модель

Постановка задачи в этой главе совпадает с постановкой из главы 1, как на рисунке 1.1. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν представляют собой параметры материала однородного, изотропного и линейно-упругого пласта. Существующая гидравлическая трещина характеризуется нулевой трещиностойкостью ($K_{IC} = 0$) на стадии открытия. Несжимаемая ньютоновская жидкость с вязкостью μ закачивается в трещину с постоянным расходом Q_0 из скважины, находящейся в центре трещины. l_f , l_{lag} и l представляют длину заполненной жидкостью зоны, длину зоны отставания жидкости и длину открытой трещины, соответственно. Они объединены геометрическим соотношением: $l = l_f + l_{lag}$. Полная длина заранее-существующей трещины обозначается как l_0 . Избыточные давления в заполненной жидкостью зоне и зоне отставания жидкости определяются как $p(x, t) = p_f(x, t) - \sigma_0$ и $p(x, t) = p_{lag}(x, t) - \sigma_0$, соответственно. $p_f(x, t)$ и $p_{lag}(x, t)$ – это давление жидкости и давление в зоне отставания жидкости, соответственно. σ_0 представляет собой горное давление, перпендикулярное к трещине.

В разделах 1.2 и 1.3 уже представлены основные уравнения, граничные условия и критерий открытия трещины, содержащие сингулярное интегральное уравнение упругости (1.1), уравнение непрерывности (1.3), закон Пуазейля (1.4), граничные условия на скважине и на фронте жидкости (1.7) и (1.8), а также уравнения (1.9) и (1.10) для условия на конце открытой трещины, поэтому здесь они не приводятся, а основное внимание обращается на начальное условие для моделирования модели.

Согласно выводам главы 1, распределение давления жидкости можно считать почти линейным в начальный момент t_0 ($t_0 \rightarrow 0$) при малом горном давлении. Таким образом, в этой главе данный вывод используется в качестве начального условия вместо сингулярного условия ($l_f = 0$, $w = 0$ в абсолютный начальный момент $t = 0$) для моделирования. Кроме того, длина заполненной жидкостью зоны очень мала при малом горном давлении вначале, т. е. $l_f^0 \rightarrow 0$ и $l_{lag}^0 \rightarrow l^0$ (верхний индекс «0» представляет начальный момент). Следовательно, распределение давления жидкости можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} p_f(x, t) &= P_0 \left(1 - \frac{x}{l_f^0} \right), & 0 \leq x \leq l_f^0, \\ p_{lag}(x, t) &= 0, & l_f^0 < x \leq l^0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где l^0 представляет собой начальную длину открытой части трещины. Давление в зоне отставания жидкости незначительно по сравнению с давлением жидкости.

2.2. Метод численного решения

Из-за сложной интегральной зависимости раскрытия трещины w от избыточных давлений p в уравнении (1.1), любая из этих двух неизвестных не может быть заменен другой в уравнении (1.3). Таким образом, два уравнения необходимо решить отдельно, после чего приблизить решения из уравнений (1.1) и (1.3) друг к другу посредством итерации.

2.2.1. Дискретизация плоско-деформированной трещины

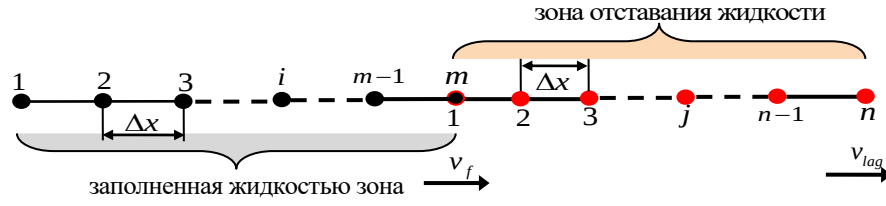
Весь этап эволюции от начала открытия замкнутой трещины до начала ее распространения может быть далее разделен на две стадии. Первая стадия – от начального открытия до полного открытия; на этой стадии фронт жидкости и фронт открытой трещины движутся вперед с разными скоростями до тех пор, пока фронт открытой трещины не достигнет изначальной длины существующей трещины $l = l_0$. Вторая стадия – от полного открытия до начального распространения; на этой стадии движется только фронт жидкости, а фронт трещины остается на месте. На первой стадии используется равномерная подвижная сетка для всей открытой трещины, включая заполненную жидкостью зону и зону отставания жидкости, см. рисунок 2.1 (а): Δx представляет собой длину элемента сетки, m и n являются количествами точек сетки в заполненной жидкостью зоне и в зоне отставания жидкости в некоторый момент времени, соответственно. Общее число точек сетки равно $m+n-1$. Скорости v_f и v_{lag} представляют, соответственно, скорость фронта жидкости и скорость фронта открытой трещины. По мере того как фронт жидкости и фронт открытой трещины двигаются вперед, количество точек сетки обеих зон увеличивается.

На второй стадии длина зоны отставания жидкости l_{lag} постепенно уменьшается из-за движения фронта жидкости, и необходимо вычислять коэффициент интенсивности напряжений K_I по уравнению (1.9), чтобы определить, распространяется ли трещина, поскольку критическое значение коэффициента интенсивности напряжений становится не равно нулю ($K_{IC} > 0$) после того, как трещина полностью открывается. Для более точного расчета значения K_I сетку в зоне отставания жидкости на второй стадии нужно повторно разделить: длина элементов сетки уменьшается вдоль трещины с коэффициентом η ($\eta > 1$) начиная от изначального размера сетки Δx до некоторого заданного значения $\Delta x'$, см. рисунок 2.1 (б). Коэффициент η легко получается по размерам начальной сетки и конечного элемента сетки в зоне отставания жидкости:

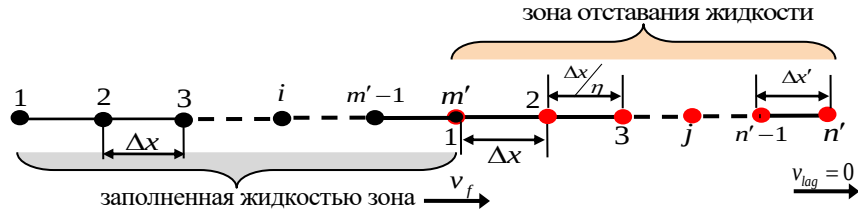
$$\eta = \left(\frac{\Delta x}{\Delta x'} \right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad (2.2)$$

где N представляет собой число точек сетки для зоны отставания жидкости в момент, когда трещина полностью открыта. Значения m' и n' являются соответствующими количествами точек сетки в заполненной жидкостью зоне и в зоне отставания жидкости. В начале второй стадии $n' = N$, и по мере движения фронта жидкости значение m' будет увеличиваться, а значение n' будет уменьшаться, поскольку $v_f \neq 0$ и $v_{lag} = 0$.

Причина повторного разделения сетки в зоне отставания жидкости заключается в том, что второй интегральный член в уравнении (1.9) на конце трещины является сингулярным. Чем меньше размер ячеек около конца трещины, тем точнее можно вычислить коэффициент интенсивности напряжений.



(а) Равномерная подвижная сетка на первой стадии



(б) Равномерная подвижная сетка для заполненной жидкостью зоны и сетка с уменьшающимся масштабом для зоны отставания жидкости

Рисунок 2.1. Схема подвижных сеток для трещины на двух стадиях

2.2.2. Дискретизации основных уравнений и граничных условий

Подставляя уравнение (1.4) в уравнение (1.3), получаем управляющее уравнение:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{12\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(w^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (2.3)$$

Для дискретизации этого уравнения существуют многие методы, например интегральный метод в методе конечных элементов, метод центральных разностей в методе конечных объемов, метод разностных полиномов в работе [140] и т. д. В этой главе используется метод центральных разностей для дискретизации уравнения (2.3), действующего в заполненной жидкостью зоне:

$$\frac{w_{i,k+1} - w_{i,k}}{\Delta t} = \frac{3w_{i,k+1}^2}{12\mu} \frac{w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1}}{2\Delta x} \frac{p_{i+1,k+1} - p_{i-1,k+1}}{2\Delta x} + \frac{w_{i,k+1}^3}{12\mu} \frac{p_{i+1,k+1} - 2p_{i,k+1} + p_{i-1,k+1}}{(\Delta x)^2}, \quad (2.4)$$

где индексы i ($i=2,3,\dots,m-1$) и k ($k=1,2,3,\dots$) представляют номера точек сетки и номер шага по времени, соответственно. Δt – это шаг по времени. Дискретные алгебраические уравнения при $i=1$ и $i=m$ представляют собой граничные условия на скважине и на фронте гидравлической жидкости.

Чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений, избыточные давления $p_{i,k}$ в уравнении (2.4) рассматриваются как неизвестные, а раскрытия трещины $w_{i,k}$ рассматриваются как известные, поэтому уравнение (2.4) преобразовывается следующим образом:

$$\Delta t \left[\frac{w_{i,k+1}^2 (w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1})}{16\mu(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,k+1}^3}{12\mu(\Delta x)^2} \right] p_{i+1,k+1} - \frac{\Delta t w_{i,k+1}^3}{6\mu(\Delta x)^2} p_{i,k+1} +$$

$$\Delta t \left[-\frac{w_{i,k+1}^2 (w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1})}{16\mu(\Delta x)^2} + \frac{w_{i,k+1}^3}{12\mu(\Delta x)^2} \right] p_{i-1,k+1} = w_{i,k+1} - w_{i,k}, \quad (2.5)$$

оно также может быть записано в виде матрицы:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{A}$ – это матрица коэффициентов с размером $(m-2) \times m$, в каждой строке которой только три ненулевых элемента. $\mathbf{p}$ – это неизвестный вектор избыточного давления, $\mathbf{b}$ представляет собой вектор приращения раскрытия на каждом шаге по времени.

Граничное условие ($i=1$) на скважине и граничное условие на фронте жидкости ($i=m$) дискретизируются следующим образом:

$$\frac{w_{1,k}^3}{12\mu} \frac{p_{1,k} - p_{2,k}}{\Delta x} - \frac{Q_0}{2} = 0, \quad (2.7)$$

$$p_{m,k} = -\sigma_0. \quad (2.8)$$

Наконец, добавляя эти два дискретных уравнения в систему (2.6), получаем замкнутую систему размером $m \times m$, которая имеет единственное решение, так как матрица $\mathbf{A}$ обратима. Условие нулевой трещиностойкости ($K_{IC} = 0$) на первой стадии преобразовывается так:

$$\frac{w_{m+n-2,k} - w_{m+n-1,k}}{\Delta x} = 0, \quad (2.9)$$

и используется для определения положения фронта открытой трещины. Поскольку в реальном расчете условие (2.9) не может быть достигнуто, его можно переписать в приближенном виде:

$$\frac{w_{m+n-2,k} - w_{m+n-1,k}}{\Delta x} \leq \varepsilon', \quad (2.10)$$

где ε' – очень малое значение, представляющее расчетный допуск.

При вычислении объема жидкости в трещине профиль трещины на каждой ячейке может рассматриваться как трапеция, поэтому общий объем гидравлической жидкости равен сумме площадей всех трапеций в полной заполненной жидкостью зоне:

$$\frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (w_{i,k} + w_{i+1,k}) = \frac{Q_0 t_k}{2}, \quad (2.11)$$

где t_k представляет собой значение времени на k -ом шаге.

2.2.3. Дискретизация уравнений упругости

В соответствии со схемой дискретизации трещины, представленной в разделе 2.2.1, интеграл от 0 до l в уравнении (1.1) для раскрытия трещины может быть дискретизирован как сумма кусочных интегралов для всех ячеек. Избыточное давление в каждой ячейке можно рассматривать как однородное в результате малой длины ячеек. Это значит, что решение раскрытия трещины можно дискретизировать следующим образом:

$$w(x_I) = \frac{4(1-\nu^2)}{E\pi} \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{x_i} + p_{x_{i+1}}}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(x_I, \zeta) d\zeta - \sigma_0 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(x_I, \zeta) d\zeta \right), \quad (2.12)$$

где x_I ($I = 1, 2, 3, \dots, m+n-1$) представляет собой координаты точек сетки трещины. В зоне отставания жидкости избыточное давление равно отрицательному горному давлению.

2.3. Итерационный алгоритм решения

Поскольку основные уравнения (2.5) и (2.12) сложно связаны друг с другом через раскрытия трещины $w_{i,k+1}$ и избыточные давления $p_{i,k+1}$, метод исключения здесь недоступен, поэтому используется итерационный метод для совместного решения этих двух систем.

2.3.1. Алгоритм решения начального условия

Начальное условие модели задано уравнением (2.1), в котором только начальная длина заполненной жидкостью зоны l_f^0 предполагается известной, а начальное давление на скважине P_0 и начальная длина открытой трещины l^0 – неизвестные, которые нужно вычислить по граничным условиям (2.7) и (2.10).

Для начала задаётся приближенное значение давления P_0 , обозначаем его как P_0^* , а приближение значения длины l^0 получается из условия $w=0$ на точке $x=l^0$, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{x_i} + p_{x_{i+1}}}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(l^0, \zeta) d\zeta = \sigma_0 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(l^0, \zeta) d\zeta, \quad (2.13)$$

где параметры m , p_{x_i} и σ_0 известны, и только n неизвестен, но может быть оценен с помощью средних оценок интегралов в двух сторонах уравнения (2.13):

$$\frac{P_0^* - \sigma_0}{l_f^0} (m-1)F_f = \sigma_0 (n-1)F_{lag}, \quad (2.14)$$

где F_f и F_{lag} представляют собой средние оценки левого и правого интегралов в уравнении (2.13), соответственно. Цель этих действий состоит в том, чтобы получить относительно точную оценку l^{0*} для l^0 по приближенному значению P_0^* и уменьшить число итераций в процессе поиска длины l^0 . Затем приближенные значения P_0^* и l^{0*} подставляются в граничные условия (2.7) и (2.10), и итерационно получаются новые значения P_0^* и l^{0*} до тех пор, пока они не удовлетворяют условиям (2.7) и (2.10). Наконец, начальное время t_0 вычисляется из закона сохранения объема жидкости (2.11).

2.3.2. Полный алгоритм решения модели

Получение полного начального условия ($w_{i,0}$, $p_{i,0}$, l_f^0 , l^0) означает, что решение модели ($p_{i,k-1}$, $w_{i,k-1}$, l_f^{k-1} , l^{k-1}) на предыдущем шаге по времени t_{k-1} известно. После этого следует решение на текущем шаге. Во-первых, задаётся приближенное значение для $w_{i,k}$ на текущем шаге по времени t_k , оно обозначается как $w_{i,k}^*$. Приближенное значение l_f^{k*} для длины l_f получается из уравнения (2.11), и соответствующее избыточное давление $p_{i,k}^*$ в заполненной жидкостью зоне можно получить из системы (2.6) – (2.8). Во-вторых, при подстановке приближенного значения $p_{i,k}^*$ в уравнения (2.13) и (2.14) получается приближенное значение l^{k*} для длины l^k . В-третьих, приближенные значения l_f^{k*} и l^{k*} объединяются для образования вычислительной зоны уравнения (2.12), после чего приближенное значение $p_{i,k}^*$ и горное давление σ_0 подставляются в уравнение (2.12) для получения нового раскрытия трещины $w_{i,k}^{**}$. Если оценочное значение $w_{i,k}^*$ и новое значение $w_{i,k}^{**}$ удовлетворяют соотношению

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m+n-1} (w_{i,k}^{**} - w_{i,k}^*)^2} < \varepsilon'', \quad (2.15)$$

это значит, что значение $w_{i,k}^{**}$ и соответствующие значения $p_{i,k}^{**}$, l_f^{**} и l^{k**} являются численными решениями на текущем шаге по времени t_k . ε'' представляет собой расчетный допуск. В противном случае принимаем $w_{i,k}^* = (w_{i,k}^* + w_{i,k}^{**})/2$ и повторяем вышеуказанную итерацию до тех пор, пока $w_{i,k}^*$ и $w_{i,k}^{**}$ не будут удовлетворять условию сходимости (2.15).

2.3.3. Улучшение итерационного алгоритма

Видно, что в полном алгоритме существует три итерации: итерация для поиска решения l^k , итерация для поиска решения $w_{i,k}$ и итерация для поиска решения l_f^k . Это значит, что точность оценочных значений для l^k , $w_{i,k}$ и l_f^k определяет число итераций и время расчета: чем ближе приближенные значения к численным решениям, тем меньше времени и меньше

итераций занимает расчет. Метод для уточнения оценки решения l^k уже представлен уравнениями (2.13) и (2.14).

Приближенное значение раскрытия трещины, наиболее близкое к численному решению, можно получить из закона сохранения объема жидкости. Объемы жидкости на предыдущем и текущем шагах по времени записываются следующим образом:

$$V_{k-1} = \int_0^{l_f^{k-1}} w(x, t_{k-1}) dx, \quad V_k = \int_0^{l_f^k} w(x, t_k) dx. \quad (2.16)$$

Известно, что раскрытие трещины без зоны отставания жидкости характеризуется автомодельностью [37], поэтому предполагается, что раскрытия трещины на предыдущем и текущем шагах по времени удовлетворяют следующему соотношению:

$$w(x, t_k) = w\left(x \frac{l_f^{k-1}}{l_f^k}, t_{k-1}\right) M_k, \quad 0 \leq x \leq l_f^k, \quad (2.17)$$

где M_k представляет собой коэффициент пропорциональности между раскрытиями трещины в моменты t_{k-1} и t_k . Подставляя уравнение (2.17) в (2.16), получаем:

$$V_k = M_k \frac{l_f^k}{l_f^{k-1}} \int_0^{l_f^{k-1}} w_{i,k-1}(x, t_{k-1}) dx = M_k \frac{l_f^k}{l_f^{k-1}} V_{k-1}, \quad 0 \leq x \leq l_f^{k-1}. \quad (2.18)$$

Объемы жидкости в уравнении (2.16) также можно получить из скорости закачки на скважине:

$$V_{k-1} = \frac{Q_0}{2} t_{k-1}, \quad V_k = \frac{Q_0}{2} t_k. \quad (2.19)$$

Комбинируя уравнения (2.18) и (2.19), получим коэффициент пропорциональности M_k :

$$M_k = \frac{t_k l_f^{k-1}}{t_{k-1} l_f^k} > 1. \quad (2.20)$$

$M_k > 1$ значит, что раскрытие трещины на текущем шаге по времени в целом больше, чем раскрытие трещины на предыдущем шаге по времени.

Оценочное значение длины заполненной жидкостью зоны l_f^k , приближенное к численному решению, можно получить по мгновенной скорости фронта жидкости вместо средней скорости в интервале Δt . Мгновенная скорость фронта жидкости выражается так:

$$v_f = -\frac{w^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}, \quad x = l_f \quad (2.21)$$

и записывается в дискретной форме:

$$l_f^{k*} = l_f^{k-1} + \frac{w_{m,k-1}^2}{12\mu} \frac{p_{m-1,k-1} - p_{m,k-1}}{\Delta x} \Delta t. \quad (2.22)$$

На самом деле значение l_f^{k*} немного превосходит реальное значение, потому что мгновенная скорость в момент t_{k-1} больше, чем средняя скорость в интервал $[t_{k-1}, t_k]$.

2.3.4. Выбор шага по времени

Одним из преимуществ этого алгоритма является то, что в процессе решения начального условия (раздел 2.3.1) можно получить один параметр времени, т. е. начальное время t_0 , в котором включен масштаб времени для расчета моделирования. Его конкретная форма:

$$t_0 = \frac{2V_0}{Q_0} = \frac{2}{Q_0} \int_0^{l_f^0} w_0(x) dx, \quad (2.23)$$

где V_0 – это объем жидкости в трещине в начальный момент t_0 , $w_0(x)$ представляет собой соответствующее раскрытие трещины. Таким образом, значение t_0 может быть выбрано в качестве начального шага по времени, т. е. Δt .

Важно отметить, что по мере продолжения закачки гидравлической жидкости в трещину скорость фронта жидкости уменьшается, как и количество ячеек, на которое продвигается фронт, на каждом шаге по времени. Число ячеек, на которые продвигаются фронты, может в какой-то момент стать меньше единицы, поэтому порог количества продвигающихся ячеек должен быть заранее задан для обеспечения непрерывного численного расчета. Подробный анализ соотношения между Δt и Δx приведен в разделе 2.6.

2.4. Численные результаты

Алгоритм для решения модели реализован в программе Matlab R2018a, содержащей множество готовых математических функций, особенно удобных для вычисления интегралов. Соответствующие параметры расчета: модуль Юнга $E = 30 \text{ GPa}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$, скорость закачки на скважине $Q_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, горное давление $\sigma_0 = 1 \text{ MPa}$, длина полной заранее-существующей трещины $l_0 = 0.5 \text{ m}$, размер ячеек $\Delta x = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, допуски расчета $\varepsilon' = 1 \times 10^{-4}$ и $\varepsilon'' = 1 \times 10^{-7}$, трещиностойкость пласта $K_{IC} = 0.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ и вязкость гидравлической жидкости $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Начальная длина заполненной жидкостью зоны при начальном времени t_0 задается как $l_f^0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, а именно 5 ячеек.

2.4.1. Численное решение начального условия и шаг по времени

Как показано в разделе 2.3.1, приближенное распределение давления (уравнение (2.1)) получается путем оценки давления на скважине P_0^* с известным l_f^0 , после чего приближенное распределение давления подставляется в условие (2.13) для получения приближенного значения l^{0*} . Наконец, путем итерации находятся P_0^* и l^{0*} , удовлетворяющие условию (2.7). В таблице 2.1 приведены результаты решения начального условия при $l_f^0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$. Таким образом, в соответствии с полученным значением начального времени t_0 начальный шаг по времени

можно определить как $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4} \text{ s}$, и это может гарантировать, что размер шага по времени совпадает с размером характерного времени в модели.

Таблица 2.1

Результаты начального условия при $l_f^0 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$

$l_f^0 \text{ (m)}$	$t_0 \text{ (s)}$	$l^0 \text{ (m)}$	$P_0 \text{ (MPa)}$	$V_0 \text{ (m}^3\text{)}$
5×10^{-3}	2.30×10^{-4}	23×10^{-3}	14.07	3.45×10^{-8}

2.4.2. Численные решения эволюции открытия трещины

Эволюции давления жидкости и раскрытия трещины на первой стадии от начального частичного открытия с длиной открытой трещины $l^0 = 23 \times 10^{-3} \text{ m}$ до полного открытия с длиной открытой трещины $l = 500 \times 10^{-3} \text{ m}$ представлены на рисунках 2.2 и 2.3. Из рисунка 2.2 видно, что вначале давление жидкости на скважине очень большое, ввиду граничного условия (2.7), после чего оно быстро уменьшается по мере движения фронта жидкости, и распределение давления жидкости становится более равномерным. На рисунке 2.3 каждая кривая раскрытия трещины состоит из двух частей – сплошной и пунктирной. Сплошные части представляют собой раскрытия заполненной жидкостью зоны; пунктирные являются раскрытиями зоны отставания жидкости. Последняя кривая – это раскрытие трещины в момент полного открытия, т. е. когда $l = l_0 = 0.5 \text{ m}$. Отношение между длиной заполненной жидкостью зоны и длиной зоны отставания жидкости согласуется с результатами, полученными в работе [158], при условии $K_{IC} = 0$.

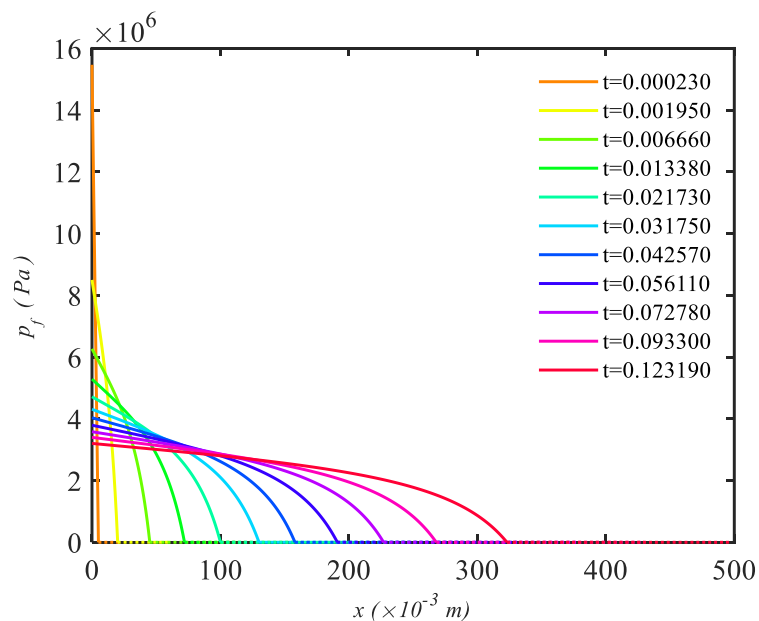


Рисунок 2.2. Эволюция давления жидкости на первой стадии

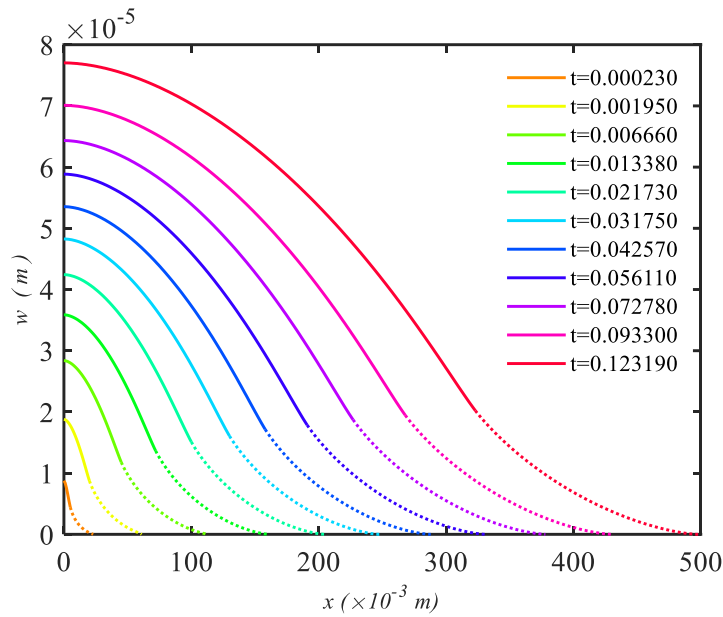


Рисунок 2.3. Эволюция раскрытия трещины на первой стадии

Рисунки 2.4 и 2.5 показывают эволюцию давления жидкости и эволюцию раскрытия трещины от первой ко второй стадии. На этих двух рисунках первая кривая ($t=0.12319$ s) является последней кривой на первой стадии (см. рисунки 2.2 и 2.3), а остальные кривые представляют собой результаты давления и раскрытия на второй стадии. На этой стадии l всегда удовлетворяет условию $l=l_0$, а фронт жидкости продолжает двигаться вперед до тех пор, пока не будет выполняться условие: $K_l = K_{lc} = 0.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$. На рисунке 2.5 видно, что контур поверхностей трещины на конце изменяется от гладких касательных поверхностей ($t=0.12319$ s) к круговым поверхностям ($t=0.187296$ s). Причиной такого изменения является наличие трещиностойкости пласта ($K_{lc} \neq 0$). Этот результат совпадает с результатами экспериментов в работе [82].

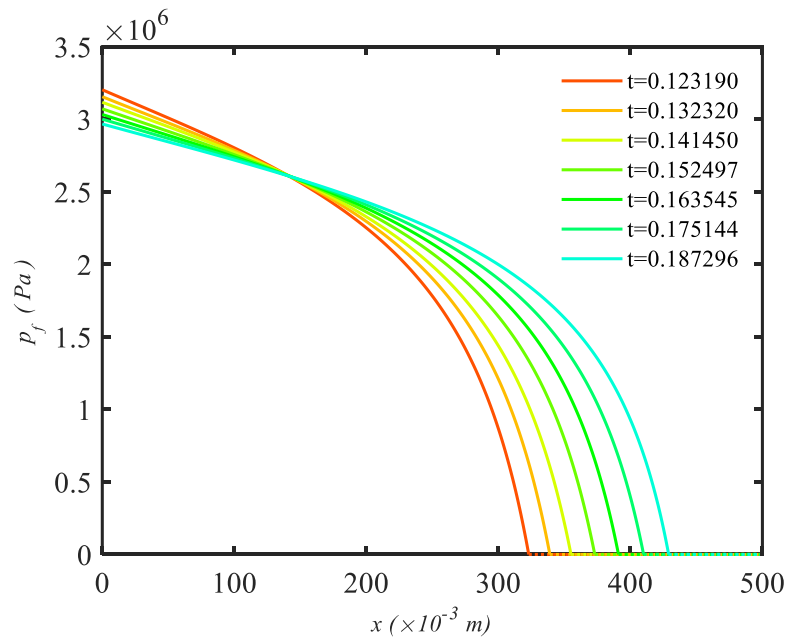


Рисунок 2.4. Эволюция давления жидкости на второй стадии

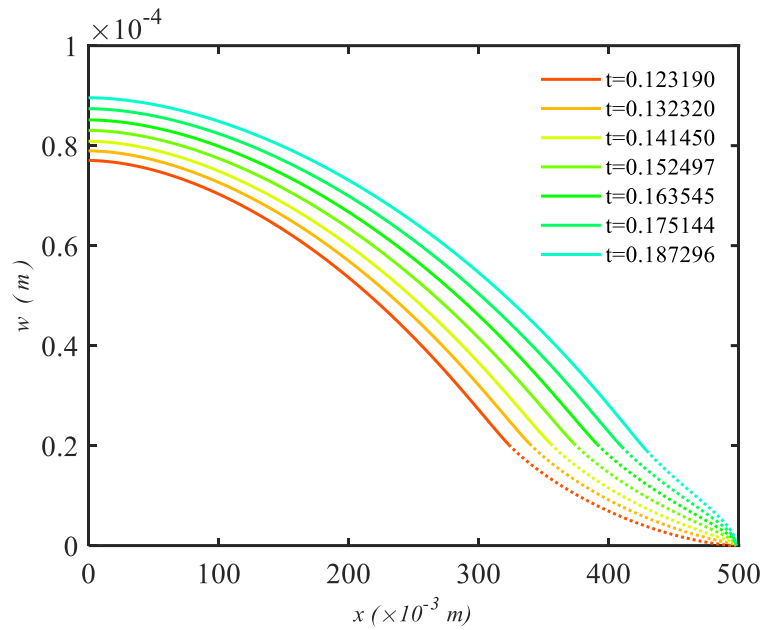


Рисунок 2.5. Эволюция раскрытия трещины на второй стадии

Эволюция давления на скважине и скорости фронта жидкости на обеих стадиях представлены на рисунке 2.6, который показывает, что вначале давление на скважине быстро уменьшается из-за высокой скорости фронта жидкости; по мере продолжения закачки скорость фронта жидкости становится всё меньше и меньше, с медленным уменьшением давления на скважине. Следует отметить, что из-за дискретного расчета наблюдаются ступенчатые уменьшения в эволюции скорости фронта жидкости.

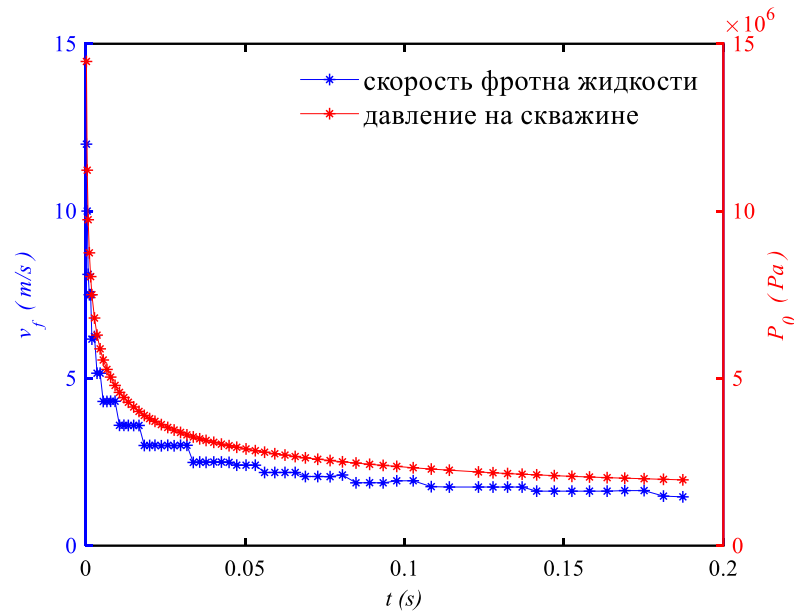


Рисунок 2.6. Эволюция давления на скважине и эволюция скорости фронта жидкости на обеих стадиях

Рисунок 2.7 показывает эволюцию длины открытой трещины и эволюцию длины заполненной жидкостью зоны. На первой стадии (часть слева от вертикальной пунктирной

линии) фронт открытой трещины движется быстрее, чем фронт жидкости. Это приводит к тому, что длина зоны отставания жидкости увеличивается по мере продолжения закачки. В конце первой стадии скорость фронта жидкости близка к скорости фронта открытой трещины. После входа во вторую стадию (правая часть от вертикальной пунктирной линии) трещина полностью открывается, фронт трещины не может двигаться до тех пор, пока не выполняется условие распространения трещины.

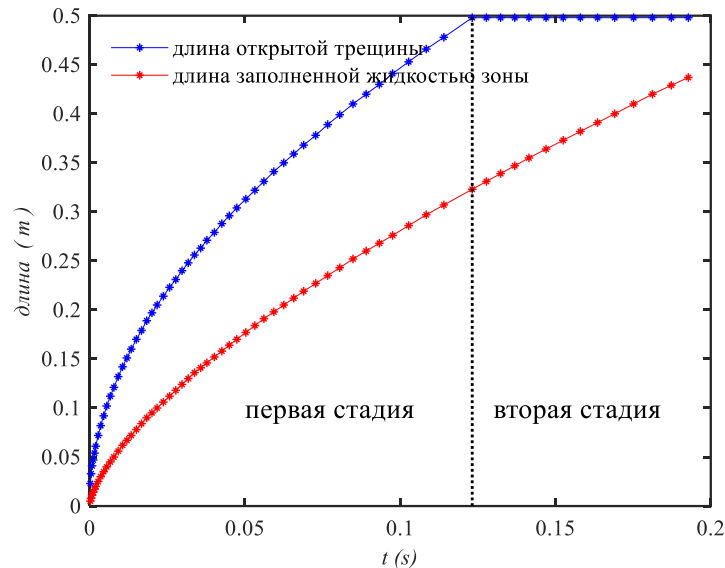


Рисунок 2.7. Эволюция длины открытой трещины и эволюция длины заполненной жидкостью зоны на двух стадиях

Согласно линейной упругой механике разрушения, трещиностойкость пласта равна нулю ($K_{IC} = 0$) в процессе повторного открытия замкнутой гидравлической трещины. Это значит, что коэффициент интенсивности напряжений K_I на первой стадии равен нулю. Соответствующие численные результаты расчета коэффициента интенсивности напряжений на конце открытой трещины приведены на рисунке 2.8. Синие точки представляют коэффициенты интенсивности напряжений на первой стадии, значения которых очень близки к нулю, но не совпадают с теоретическим значением. Причина заключается в том, что существуют расчетные ошибки в вычислении коэффициента интенсивности напряжений из-за сингулярности на конце открытой трещины. Вторая стадия является процессом накопления энергии, на котором двигается только фронт гидравлической жидкости, а фронт трещины остается на месте. Это приводит к тому, что в пласте накапливается много упругой потенциальной энергии, особенно на конце трещины, поэтому коэффициент интенсивности напряжений быстро увеличивается, см. розовые точки на рисунке 2.8.

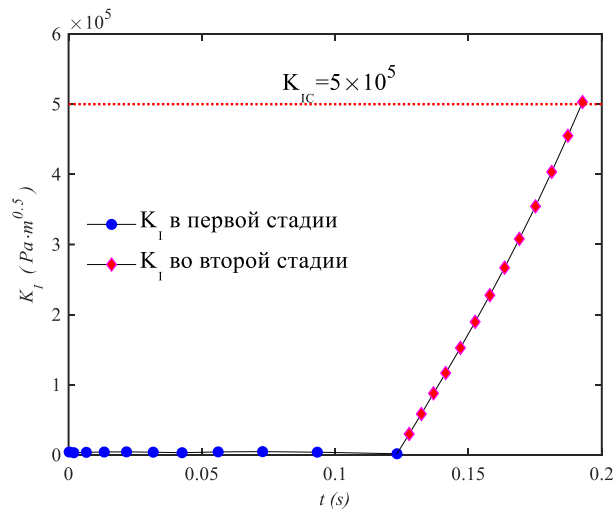


Рисунок 2.8 Эволюция коэффициента интенсивности напряжений на двух стадиях

2.5. Анализ алгоритма

Как показано в разделе 2.3.3, на первой стадии есть три неизвестных: l_f^k , l^k , w^k , которые должны быть решены итерацией; на второй стадии число уменьшается до двух неизвестных l_f^k и w^k . Приближенные значения этих неизвестных должны задаваться заранее из-за применения неявного алгоритма во избежание решения нелинейной системы. В разделе 2.3.3 приведены подробные методы для уточненных оценок этих неизвестных с целью уменьшения количества итераций и экономии времени расчета. Рисунки 2.9 – 2.12 показывают сравнительные результаты между предварительными оценочными значениями и итоговыми численными значениями.

На рисунке 2.9 показаны сравнительные результаты количества точек n в зоне отставания жидкости. Оцененные значения получаются из уравнений (2.13) и (2.14), а численные результаты получаются путем итерации. Видно, что в целом оцененные значения немного превосходят, но близки к численным значениям, особенно вначале.

На рисунке 2.10 сравниваются приближенные значения коэффициента пропорциональности M_k , полученные из уравнения (2.20), с численными решениями. Видно, что в целом эти два значения хорошо совпадают друг с другом на каждом шаге по времени. Это значит, что метод для уточнения оценки раскрытия трещины в следующий момент времени действует достаточно хорошо. На рисунке 2.11 приведены результаты оцененных и численных значений скорости фронта жидкости на каждом шаге по времени, которые показывают, что использование мгновенной скорости фронта жидкости в качестве средней скорости в интервал времени Δt является разумным и точным. Рисунок 2.12 показывает количество итераций на каждом шаге по времени. Из этого рисунка видно, что число итераций превосходит 30 только 3 раза, на большинстве шагов число итераций составляет около 10, причем почти в половине случаев число итераций ниже 10. Этот улучшенный алгоритм имеет скорость сходимости, превосходящую алгоритм, предложенный в работе [158] – со средним числом в 60 итераций на шаге.

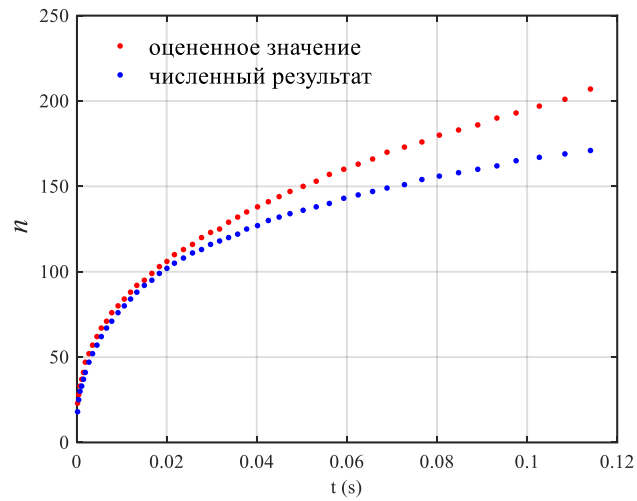


Рисунок 2.9. Оцененные значения и численные результаты для количества точек сетки в зоне отставания жидкости на каждом шаге по времени

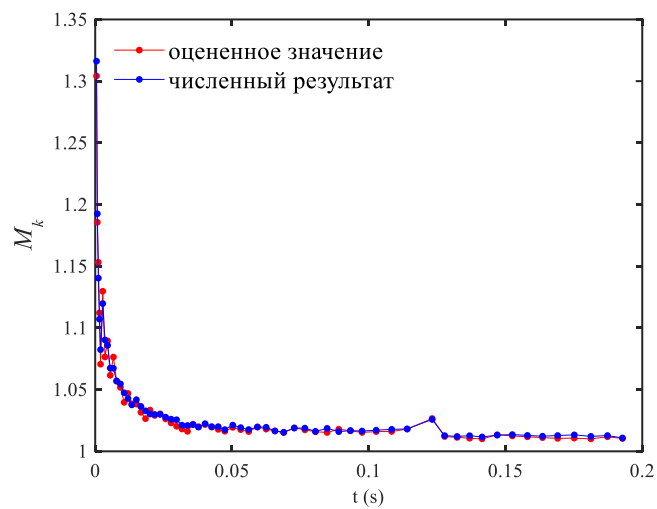


Рисунок 2.10. Оцененные значения и численные результаты для коэффициента пропорциональности M_k на каждом шаге по времени

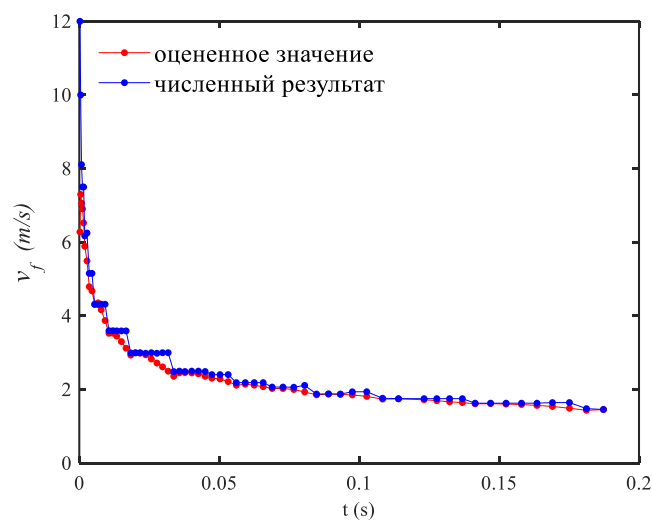


Рисунок 2.11. Оцененные значения и численные результаты для скорости фронта гидравлической жидкости v_f на каждом шаге по времени

Точность этого алгоритма может быть проанализирована в соответствии с законом сохранения объема жидкости (2.11). На рисунке 2.13 приведены относительные погрешности объема жидкости в процессе расчета, которые определяются следующим образом:

$$\xi_k = \frac{|V_k - V'_k|}{V_k}, \quad (2.24)$$

где $V_k = Q_0 t_k / 2$ представляет собой реальный объем жидкости закачки из скважины. V'_k является объемом жидкости в трещине, полученным суммированием площади профиля трещины, а именно левой части из уравнения (2.11).

Из этого рисунка видно, что только вначале относительная погрешность достаточно велика, но даже самая большая погрешность $\xi_k < 3.5\%$ и большую часть времени относительная погрешность не превосходит 0.5% . Это показывает, что данный улучшенный алгоритм обладает высокой точностью. Из приведенного выше анализа видно, что этот неявный алгоритм не только гарантирует точность, но и значительно уменьшает число итераций и экономит время расчета путем получения более точных оценочных значений для основных неизвестных в модели.

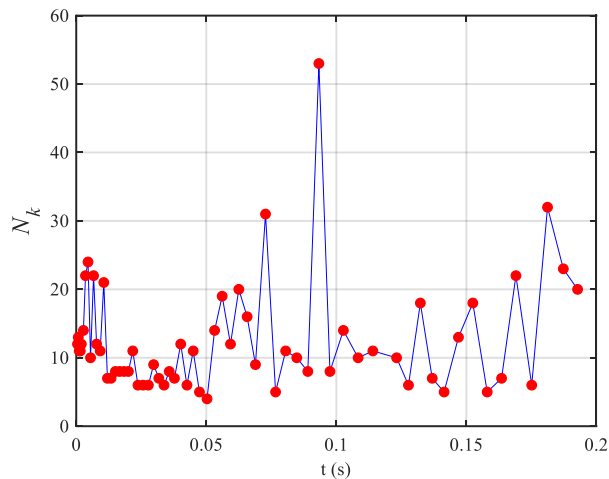


Рисунок 2.12. Количество итераций N_k на каждом шаге по времени

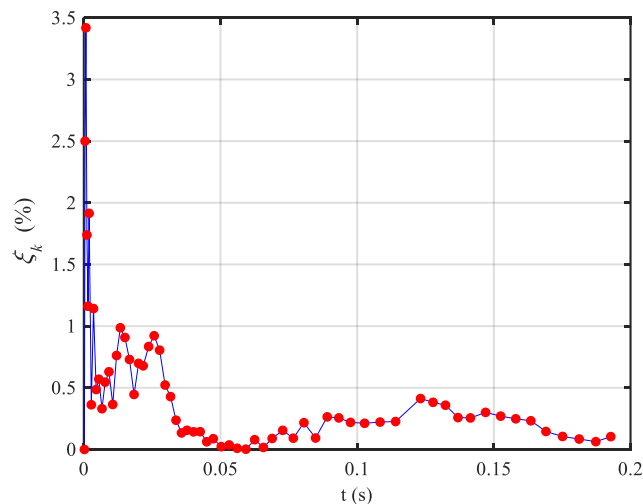


Рисунок 2.13. Относительные погрешности ξ_k на каждом шаге по времени

2.6. Анализ длины ячеек и шага по времени

В разделе 2.3.3, для уменьшения числа итераций в процессе решения раскрытия трещины, вводится коэффициент пропорциональности M_k , который может быть переписан следующим образом:

$$M_k = \frac{(t_{k-1} + \Delta t)(l_f^k - \Delta l_{k-1})}{t_{k-1} l_f^k} = 1 + \frac{\Delta t}{l_f^k} \left(\frac{l_f^{k-1}}{t_{k-1}} - \frac{\Delta l_{k-1}}{\Delta t} \right). \quad (2.25)$$

Теоретически $M_k > 1$, поэтому должно выполняться следующее условие:

$$\frac{l_f^{k-1}}{t_{k-1}} - \frac{\Delta l_{k-1}}{\Delta t} > 0. \quad (2.26)$$

Левая часть в неравенстве обозначается как Δv_k , потому что первый и второй члены неравенства имеют физический смысл средних скоростей фронта жидкости в интервалы $[0, t_{k-1}]$ и $[t_{k-1}, t_k]$, соответственно. Теоретически значение Δv_k всегда больше нуля и стремится к нулю со временем, поскольку мгновенная скорость фронта жидкости монотонно уменьшается со временем (см. рисунок 2.11), что приводит к тому, что средняя скорость всегда больше мгновенной скорости, но эта разность Δv_k становится всё меньше и меньше, как на рисунке 2.14.

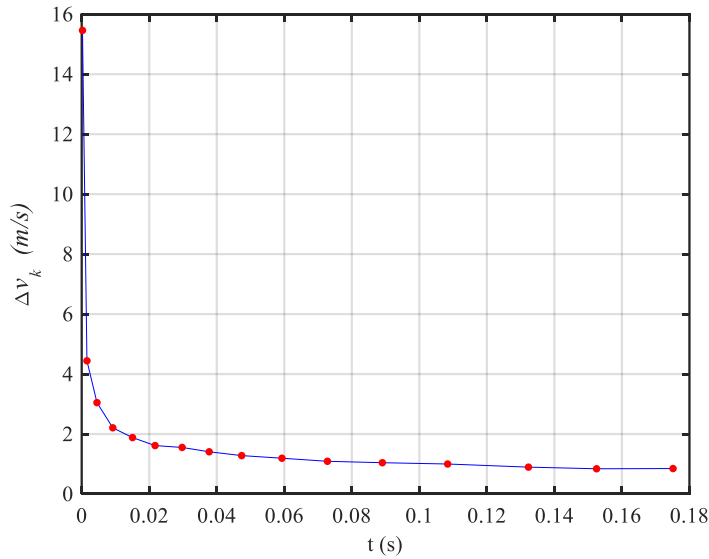


Рисунок 2.14. Зависимость разности двух скоростей Δv_k в неравенстве (2.26) от времени

Следовательно, коэффициент M_k тоже монотонно уменьшается при постоянном шаге времени Δt , а именно:

$$M_{k+1} < M_k. \quad (2.27)$$

Это значит, что коэффициент M_k стремится к единице при бесконечном времени. Но при реальном численном расчете обязательно происходит такой случай: полученное M_k

оказывается меньше единицы согласно уравнению (2.20) при постоянном значении Δt . Причина заключается в том, что после некоторого момента M_k уменьшается, приближаясь к единице при постоянном Δt , и численная погрешность может сделать коэффициент пропорциональности на следующем шаге по времени $M_{k+1} < 1$, когда M_k достаточно мало. Поэтому, чтобы избежать случая $M_{k+1} < 1$, при $M_k \rightarrow 1$, используется адаптивный шаг по времени Δt_k .

На рисунке 2.10 представлена эволюция коэффициента M_k с использованием адаптивного шага по времени. Из этого рисунка видно, что большая часть значений M_k колеблется около 1.02. Цель этих действий не только в том, чтобы обеспечить быструю сходимость, но также и обеспечить точность расчета, поскольку при большом Δt_k , полученное M_k будет намного больше единицы, согласно уравнению (2.25), из-за чего сходимость может быть получена быстро, но ценой меньшей точности расчета. В противном случае, если Δt_k мало, M_k будет очень близко к единице, что приведёт к тому, что раскрытие на текущем шаге по времени w_k будет очень близко к раскрытию на предыдущем шаге по времени w_{k-1} , и сходимость будет достигаться с трудом. Таким образом, в этом алгоритме используется следующее условие для балансировки точности модели и сходимости алгоритма:

$$1.01 < M_k < 1.03. \quad (2.28)$$

Нужно отметить, что вначале M_k не удовлетворяет условию (2.28) из-за большой скорости жидкости (см. рисунки 2.10 и 2.11). И это условие применяется только к устойчивому потоку жидкости, т. е. для случаев, когда градиент скорости фронта жидкости мал.

В дополнение к условию (2.28), влияющему на шаг по времени, есть ещё один фактор – длина ячейки Δx , также влияющий на размер Δt_k , поскольку на каждом шаге по времени смещение фронта жидкости должно быть больше или равно длине одной ячейки, а именно:

$$\Delta l_k = v_f^k \cdot \Delta t \geq \Delta x, \quad (2.29)$$

это гарантирует, что на каждом шаге по времени фронт жидкости двигается не менее чем на одну ячейку. Кроме того, поскольку v_f^k уменьшается со временем (см. рисунок 2.11), а Δx не изменяется, адаптивный шаг по времени также необходим для обеспечения того, чтобы неравенство (2.29) всегда выполнялось.

Изменение шага по времени Δt_k по отношению к номеру шага по времени k представлено на рисунке 2.15. Видно, что Δt_k постепенно увеличивается по мере роста k , кроме двух черных точек. Нужно отметить, что первая черная точка является критическим моментом перехода от первой стадии ко второй стадии, когда должно выполняться условие длины открытой трещины, равной полной длине трещины, т. е. $l = l_0$. По этой причине шаг по времени резко возрастает. А затем, после входа во вторую стадию, Δt_k возвращается к разумному значению. Вторая черная точка показывает уменьшение Δt_k , так как в этот момент необходимо выполнить условие распространения трещины ($K_I = K_{IC}$). Одним словом,

объединенные неравенства (2.28) и (2.29) определяют шаг по времени Δt_k для обеспечения быстрой сходимости и хорошей точности алгоритма.

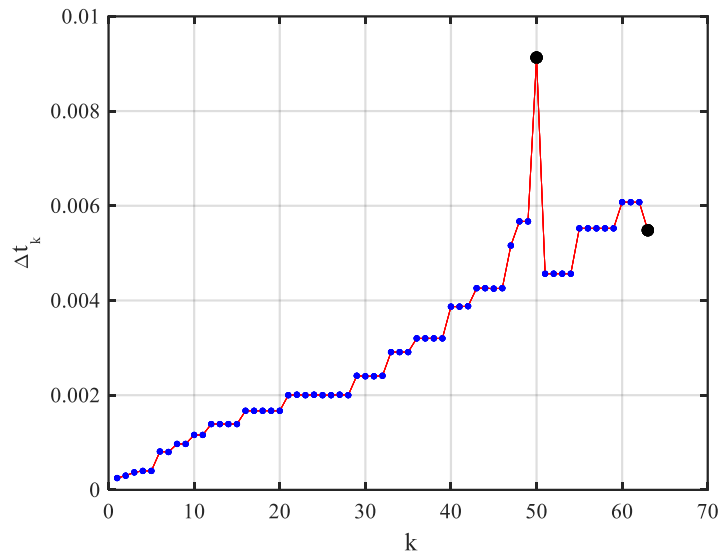


Рисунок 2.15. Изменение шага по времени Δt_k по отношению к номеру шага по времени k

2.7. Выводы

В главе 2 представлен новый неявный алгоритм со средним числом в 15 итераций на шаге по времени и 0.5%-ой вычислительной погрешностью для эволюции существующей трещины с зоной отставания жидкости от начального открытия до начального распространения. В этом алгоритме используется неявная разностная схема, чтобы избежать решения нелинейной системы уравнений, а уравнение упругости преобразовано в кусочно-интегральную сумму вместо сложной дискретной полиномиальной суммы для упрощения расчета. Кроме того, в представленном алгоритме использованы уточнённые оценочные значения основных неизвестных (длина заполненной жидкостью зоны l_f , длина открытой трещины l и раскрытие открытой трещины w) на следующем шаге по времени для уменьшения числа итераций и экономии времени расчета. Для балансировки точности модели и сходимости алгоритма представлено одно ограничивающее условие на коэффициент пропорциональности раскрытия, а также введён адаптивный шаг по времени для обеспечения этого ограничивающего условия.

Кроме того, согласно выводам главы 1, использовано линейное распределение давления жидкости при малом горном давлении в качестве начального условия модели для исследования эволюции существующей трещины при неоднородной трещиностойкости материала ($K_{IC} = 0$ на первой стадии, $K_{IC} \neq 0$ на второй стадии). На стадии $K_{IC} = 0$ фронт трещины движется быстрее фронта гидравлической жидкости, что приводит к увеличению длины зоны отставания жидкости. На этой стадии трещина характеризуется «острой» вершиной. На стадии

$K_{IC} \neq 0$ «острая» вершина открывается из-за увеличения доли заполненной жидкостью зоны и развивается к «тупой» вершине, а зона отставания жидкости быстро уменьшается. Давление жидкости в трещине развивается от начального линейного распределения до приближенного однородного распределения, за исключением зоны около конца трещины. Давление на скважине и скорость фронта жидкости имеют схожие зависимости от времени: на ранней стадии они быстро уменьшаются, потом стремятся к постоянным (уменьшения очень малы) на стадии устойчивого открытия.

Глава 3. Плоско-трехмерное моделирование распространения гидравлического разрыва в неоднородных средах: теоретическая часть

Для исследования роста трещины гидроразрыва по направлению высоты трещины (псевдотрехмерная модель гидравлического разрыва пласта) на основе двумерной плоско-деформированной модели PKN вводится концепция «барьера напряжений», которая отражает неоднородность горного давления в пласте. Трещина ограничена в продуктивном слое, не может расти по направлению высоты из-за горных давлений на смежных слоях пласта, намного превышающих горное давление на продуктивном слое. Такая неоднородность наблюдается во многих полевых экспериментах [75, 76]. Кроме того, в лабораторных экспериментах [74, 159] и по результатам численных моделирований [52, 63] подтверждена важность этой неоднородности (барьера напряжений). Позднее в моделях гидравлического разрыва пласта учитывались неоднородность горного давления, а также неоднородность горных материалов в различных слоях пласта [47, 48, 59, 84, 123, 137, 138] для определения влияния неоднородности материала и неоднородности геологических условий на эволюцию роста трещины.

Однако следует отметить, что материал горной породы состоит из различных видов минеральных частиц и содержит множество естественных стратификаций и мелких естественных трещин [160], поэтому в дополнение к модулю Юнга и коэффициенту Пуассона прочность горных пород также характеризуется сильной неоднородностью. На самом деле исследований по неоднородности прочности горных пород очень мало [58], но, согласно механике линейного упругого разрушения, прочность материала (K_{IC}) является основным параметром, определяющим рост трещины, поэтому неоднородность прочности породы может сильно влиять как на геометрию трещины, так и на эволюцию распространения трещины.

Кроме того, профили трещин, полученные из экспериментов или наблюдений, обычно не являются симметричными и правильными [93, 159], в силу чего они значительно отличаются от профилей трещин в работах [57, 64, 68, 121], в которых, ввиду отсутствия учета неоднородности геологических условий и неоднородности материала пласта, скорости роста трещин по каждому направлению одинаковы и профили трещин симметричны. В связи с этим в настоящей главе будет исследовано влияние неоднородности прочности материала на рост трещины и изучена трехмерная динамика распространения трещины и динамика движения жидкости в трехмерной трещине. Результаты в этой главе опубликованы в работах автора [167, 168].

3.1. Постановка задачи

Как известно, начальное образование трещин вокруг скважины является сложным процессом [161]. Чтобы упростить модель, мы делаем прямое предположение о начальной форме трещины: на рисунке 3.1 показана горизонтальная нагнетательная скважина в продуктивном пласте. На первой стадии ГРП (гидравлического разрыва пласта) образуется начальная мелкая плоско-трехмерная трещина, плоскость которой перпендикулярна к скважине. Форма этой мелкой трещины обычно правильная, и можно сделать предположение: трещина имеет круглый профиль в плоскости xoy и перпендикулярна оси z . Это значит, что трещина будет распространяться по плоскости xoy по мере закачки жидкости в трещину.

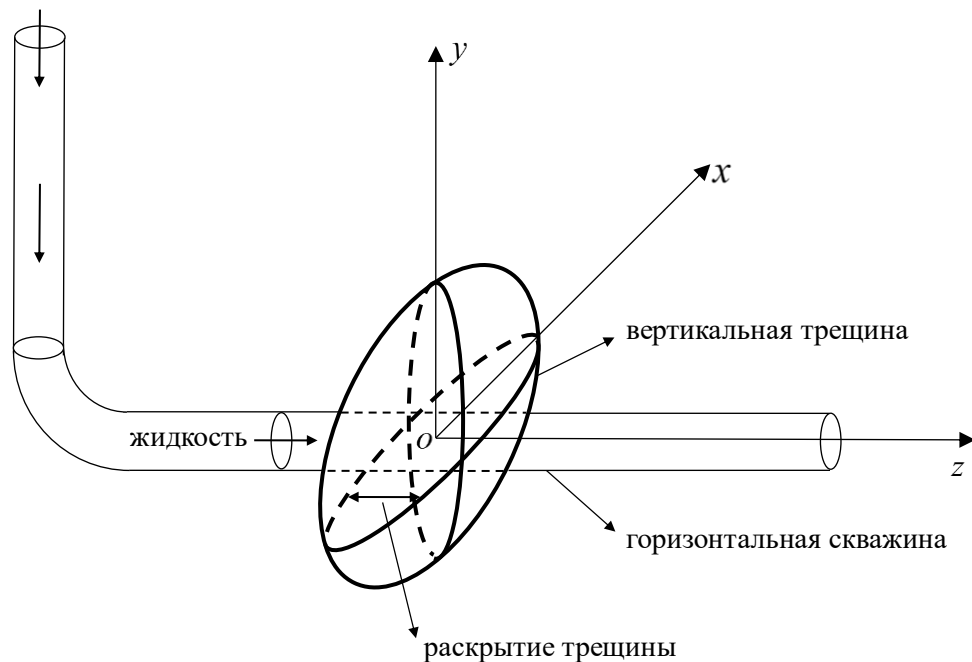


Рисунок 3.1. Схема положения трещины и скважины в пласте

Геометрия начальной трехмерной трещины и скважины показана на рисунке 3.2. r_0 и R_0 представляют собой радиус скважины и начальный радиус трещины, соответственно. w является раскрытием трещины, определяемым координатами (x, y) и временем. Если гидравлическая жидкость продолжает закачиваться в трещину, на её конце выполняется критерий роста, и трещина может распространяться дальше. Чтобы упростить модель, мы делаем следующие предположения.

(1) Скважина и трещина находятся в бесконечной линейной упругой и изотропной среде, которая характеризуется низкой проницаемостью, поэтому при построении математической модели утечками жидкости в пласт можно пренебречь.

(2) Горное давление, перпендикулярное плоскости трещины (плоскость xoy), однородное и достаточно большое, чтобы пренебречь областью отставания жидкости на основании вывода главы 1, т. е. фронт гидравлической жидкости совпадает с фронтом трещины.

(3) Закачиваемая жидкость представляет собой несжимаемый ньютоновский флюид с вязкостью μ .

(4) Неоднородность пласта характеризуется прочностью среды, то есть критической величиной коэффициента интенсивности напряжений (K_{IC}). И модуль Юнга E , и коэффициент Пуассона ν среды предполагаются однородными.

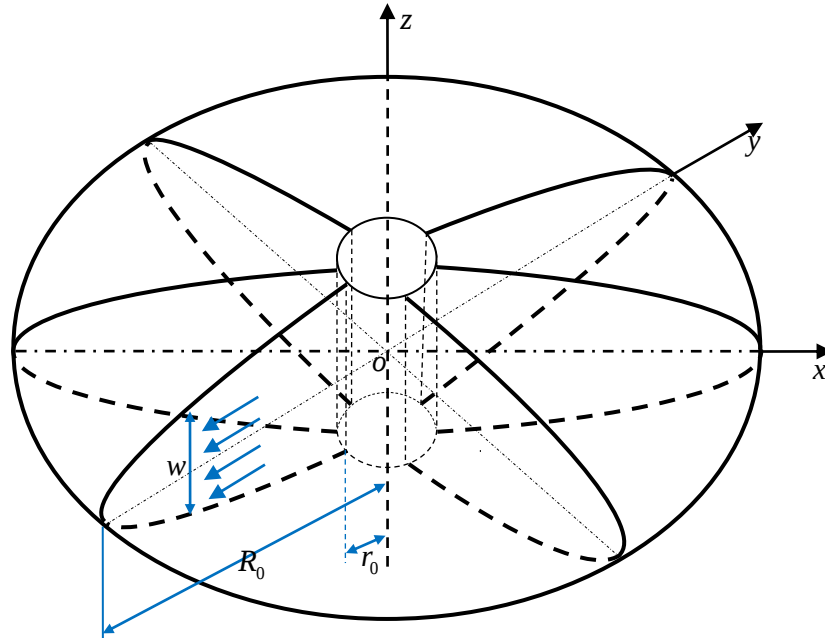


Рисунок 3.2. Трехмерная геометрия начальной трещины и скважины

3.2. Построение математической модели задачи

При моделировании ГРП тремя основными проблемами являются деформирование пласта под действием давления при движении жидкости, течение гидравлической жидкости внутри трещины и критерий роста трещины. Деформация на поверхностях трещины зависит от распределения давления жидкости, давление жидкости зависит от течения жидкости, на которое, в свою очередь, влияют раскрытие трещины и условия на скважине и на границе трещины. Для удобства модель строится в цилиндрической системе координат из-за круговой проекции трещины на плоскость $z = 0$.

3.2.1. Уравнения упругости

Бесконечная линейная упругая задача с плоско-трехмерной трещиной под действием горного давления и внутреннего давления имеют следующим образом упрощаемые уравнения равновесия благодаря симметрии относительно оси z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

с граничными условиями на плоскости $z = 0$,

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= 0, & z &= 0 \\ \sigma_z &= p_f(r, \theta), & (r, \theta) &\in A_f \\ u_z &= 0, & (r, \theta) &\notin A_f\end{aligned}\tag{3.2}$$

и с граничным условием на бесконечности:

$$\sigma_z = \sigma_0, \quad z \rightarrow \infty,\tag{3.3}$$

где σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} – компоненты тензора напряжений ($\tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0$), u_z – перемещение в направлении z . $p_f(r, \theta)$ – давление жидкости в трещине, A_f – область трещины на плоскости $z = 0$. σ_0 представляет собой горное давление, перпендикулярное плоскости трещины.

Уравнения равновесия (3.1) с уравнением совместности, законом Гука, и граничными условиями (3.2) и (3.3) составляют систему уравнений линейной упругой задачи. Эта граничная задача не имеет аналитического решения, особенно для неправильных профилей трещины. Для круглого и эллиптического профилей трещины в исследованиях Sneddon [28, 162] получены интегральные аналитические решения. Таким образом, будем решать эту систему, используя численные методы.

3.2.2. Уравнение движения жидкости в трещине

Обобщенное уравнение непрерывности без учета утечки жидкости (1.3) переписывается в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rwu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (wu_\theta)}{\partial \theta} = 0,\tag{3.4}$$

где $w(r, \theta, t)$ – раскрытие трещины, u_r , u_θ представляют собой радиальную и кольцевую скорости жидкости в трещине, соответственно. Согласно теории смазки [124] и закону Пуазейля [125], для движения жидкости между двух параллельных пластин уравнение сохранения импульса упрощается:

$$\nabla p = -\frac{\mu'}{w^2} \vec{u},\tag{3.5}$$

где p – избыточное давление жидкости в трещине, которое представляет собой разность давления жидкости и горного давления ($p_f - \sigma_0$) и в последующем изложении прямо называется давлением жидкости. $\mu' = 12\mu$, где μ – это вязкость жидкости. Суммарная скорость жидкости $\vec{u} = \vec{u}_r + \vec{u}_\theta$. Поэтому u_r , u_θ имеют следующий вид:

$$u_r = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad u_\theta = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (3.6)$$

Путем совмещения уравнений (3.5) и (3.6) получаем уравнение движения жидкости в трещине:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.7)$$

3.2.3. Граничные условия модели

В моделировании ГРП обычно используется два типа закачки, управляющих расходом жидкости в трещину: первый тип – это постоянное давление на скважине; второй тип – постоянный расход на скважине. В рассматриваемой модели применяется второй тип. Согласно уравнению (3.5) расход на сечении, перпендикулярном к плоскости трещины

$$q = wu = -\frac{w^3}{\mu'} \nabla p. \quad (3.8)$$

Из-за отсутствия кольцевой скорости расход на скважине получается:

$$q = -\frac{w_0^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_0}{2\pi r_0}, \quad r = r_0, \quad (3.9)$$

где Q_0 – объемная скорость закачки на скважине, r_0 – радиус скважины, w_0 – раскрытие трещины у скважины.

На конце трещины мы предполагаем, что поток из трещины в пласт равен нулю ввиду отсутствия учета утечки жидкости в пласт:

$$q = -\frac{w^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad r = R(\theta), \quad (3.10)$$

где $R(\theta)$ является радиусом фронта трещины, который зависит от кольцевой координаты θ , потому что трещина может расти с различными скоростями по различным направлениям из-за неоднородности прочности среды (K_{IC}). Кроме того, на конце трещины есть ещё одно граничное условие, более сильное, чем (3.10):

$$w(r, \theta, t) = 0, \quad r = R. \quad (3.11)$$

Легко заметить, что при подстановке условия (3.11) в условие (3.10) условие (3.10) автоматически выполняется и градиент давления в кончике трещины не влияет на его выполнение. Детали обработки для условий (3.10) и (3.11) подробно представлены в разделе 3.4.4.

Кроме того, при анализе уравнения (3.7) и условий (3.9) и (3.10) можно заметить, что от самого давления прочие переменные не зависят, лишь от градиента давления. Уравнения (3.9) и (3.10) являются условиями Неймана [114], и это значит, что давление где-то надо

зафиксировать, и поскольку граничное условие на скважине уже задано, остается сделать это на конце трещины ($r = R$). Поэтому давление $p_{r=R}$ на границе трещины необходимо ввести в качестве известного параметра в управляющее уравнение (3.7). Детали этого изложены в разделе 3.4.4.

3.2.4. Начальные условия модели

В начальный момент трещина имеет дискообразную форму с радиусом R_0 (рисунок 3.2), и мы предполагаем, что гидравлическая жидкость в трещине неподвижна и находится под однородным давлением p_0 . Неоднородность прочности пласта распределяется так:

$$K_{IC} = K_{IC}(\theta). \quad (3.12)$$

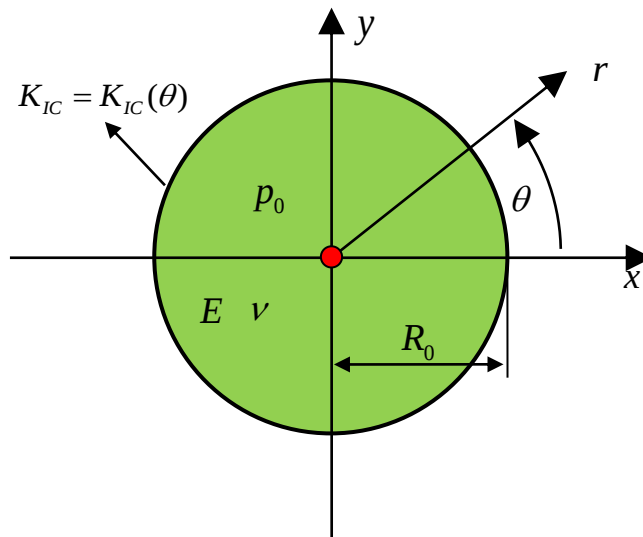


Рисунок 3.3. Проекция трещины на плоскость xOy в начальный момент и параметры материала

Это значит, что критическая величина коэффициента интенсивности напряжений K_{IC} зависит от кольцевой координаты θ . Эта функция может выражать различные величины K_{IC} на различных областях пласта, особенно для породы слоистой структуры. Другие свойства материала, такие как модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , постоянны, как показано на рисунке 3.3. Скважина рассматривается как точечный источник (красная точка на рисунке 3.3), поскольку в дискообразных моделях [37, 38, 117, 163] радиусом скважины можно пренебречь. Это не влияет на конечные результаты, доказательство чего будет дано ниже. Подобное упрощение требует только специальной обработки при расчете давления на скважине, чтобы избежать на ней бесконечного давления.

Из этих начальных условий мы получаем, что до начала роста трещины в уравнении движения жидкости отсутствует кольцевой поток ($\partial p / \partial \theta = 0$) из-за симметрии структуры

трещины и симметрии давления жидкости относительно начала координат. В связи с этим уравнение движения жидкости (3.7) до начала роста трещины можно упростить до одномерного:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.13)$$

3.2.5. Условие роста трещины

Согласно линейной упругой механике разрушения, трещина распространяется, когда коэффициент интенсивности напряжений, характеризующий напряженное состояние, превышает прочность породы (K_{IC}). По условиям приложения нагрузки в пространстве выделяют три основных типа трещин [164]: трещина нормального отрыва (тип I), трещина продольного сдвига (тип II), трещина антиплоской деформации (тип III), см. рисунок 3.4.

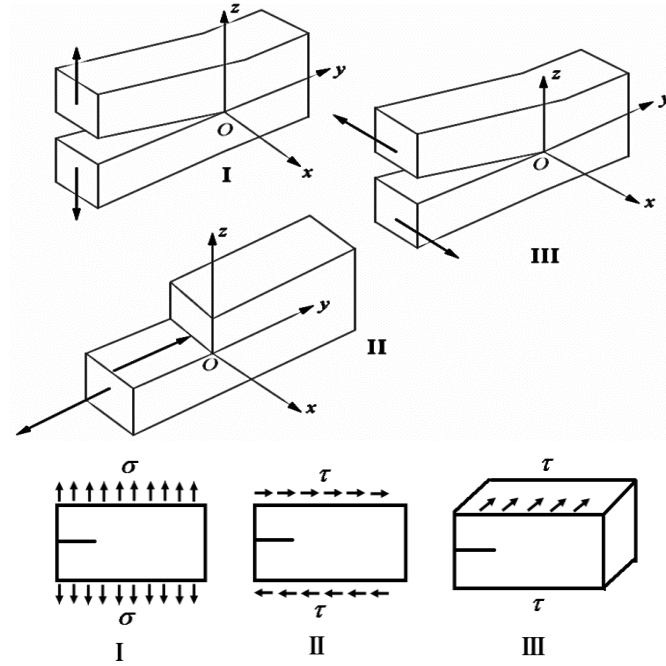


Рисунок 3.4. Три основных типа деформаций и напряжений при растрескивании

Из-за нулевых напряжений сдвига τ_{rz} , $\tau_{z\theta}$, $\tau_{r\theta}$ (симметричная структура) на плоскости трещины ($z = 0$) в этой модели появляется только разрыв типа I. Поэтому условие роста трещины в этой модели представляется так:

$$K_I(\theta) = K_{IC} = K_{IC}(\theta), \quad (3.14)$$

если на какой-либо точке фронта трещины выполняется условие (3.14), профиль на этой точке распространяется радиально. На этапе до роста трещины все $K_I(\theta)$ равны.

3.3. Метод построения решения

Вышеприведенный анализ показывает, что математическая модель для роста плоско-трехмерной трещины в неоднородной среде сложно связана уравнениями упругости, уравнением движения жидкости, граничными условиями и условием роста трещины, и обычно не имеет аналитического решения, поэтому может быть решена только численно, с использованием вычислительных методов. Согласно анализу, представленному во Введении, мы знаем, что расширенный метод конечных элементов (XFEM) и метод разрывных смещений (DDM) лучше остальных подходят для линейной упругой задачи с трещиной. Однако при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений метод разрывных смещений имеет преимущество перед расширенным методом конечных элементов, так как при первом достаточно знать разрывные смещения около конца трещины, а при использовании последнего коэффициенты интенсивности напряжений приходится получать методом М-интеграла или методом J-интеграла. Кроме того, метод разрывных смещений требует намного меньшего числа ячеек, чем расширенный метод конечных элементов, поэтому метод разрывных смещений был выбран для определения смещений поверхностей трещины.

3.3.1. Трехмерный метод разрывных смещений (3-DDM)

В локальной пространственной системе координат $o' - x'y'z'$ имеется пара трещиноватых элементов (s^+ , s^-) (рисунок 3.5). Под действием трех типов нагрузки, как на рисунке 3.4, верхний и нижний элементы будут иметь три типа относительных разрывных смещений $D_{x'}$, $D_{y'}$, $D_{z'}$, как показано на рисунке 3.5:

$$D_{x'} = u_{x'}^+ - u_{x'}^-, \quad D_{y'} = u_{y'}^+ - u_{y'}^-, \quad D_{z'} = u_{z'}^+ - u_{z'}^-, \quad (3.15)$$

где $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ представляют смещения элемента в локальной декартовой системе координат, индексы «+» и «-» представляют верхнюю и нижнюю поверхности трещины, соответственно.

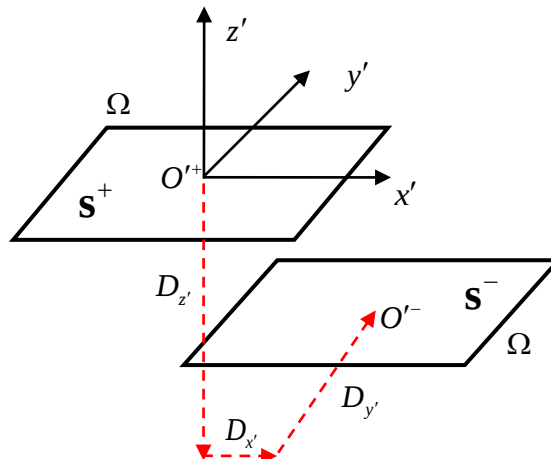


Рисунок 3.5. Три разрывных смещения на поверхностях трещины

Напряжения и смещения в любой точке среды $P(x', y', z')$ вне этого элемента, вызванные разрывами смещений этой пары элементов ($D_{x'}$, $D_{y'}$, $D_{z'}$), получаются на основе аналитического решения линейной упругой задачи, полученной в разделе 3.2.1 [106, 107]:

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ [2(1-\nu)I_{z'} - z'I_{x'x'}]D_{x'} - z'I_{x'y'}D_{y'} - [(1-2\nu)I_{x'} + z'I_{x'z'}]D_{z'} \}, \\ u_{y'} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ -z'I_{x'y'}D_{x'} + [2(1-\nu)I_{z'} - z'I_{y'y'}]D_{y'} - [(1-2\nu)I_{y'} + z'I_{y'z'}]D_{z'} \}, \\ u_{z'} &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{ [(1-2\nu)I_{x'} - z'I_{x'z'}]D_{x'} + [(1-2\nu)I_{y'} - z'I_{y'z'}]D_{y'} + [2(1-\nu)I_{z'} - z'I_{z'z'}]D_{z'} \}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ [2I_{x'z'} - z'I_{x'x'x'}]D_{x'} + [2\nu I_{y'z'} - z'I_{x'x'y'}]D_{y'} + [I_{z'z'} + (1-2\nu)I_{y'y'} - z'I_{x'x'z'}]D_{z'} \}, \\ \sigma_{y'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ [2\nu I_{x'z'} - z'I_{x'y'y'}]D_{x'} + [2I_{y'z'} - z'I_{y'y'y'}]D_{y'} + [I_{z'z'} + (1-2\nu)I_{x'x'} - z'I_{y'y'z'}]D_{z'} \}, \\ \sigma_{z'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ -z'I_{x'z'z'}D_{x'} - z'I_{y'z'z'}D_{y'} + [I_{z'z'} - z'I_{z'z'z'}]D_{z'} \}, \\ \tau_{x'y'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ [(1-\nu)I_{y'z'} - z'I_{x'x'y'}]D_{x'} + [(1-\nu)I_{x'z'} - z'I_{x'y'y'}]D_{y'} - [(1-2\nu)I_{x'y'} + z'I_{x'y'z'}]D_{z'} \}, \\ \tau_{y'z'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ -[\nu I_{x'y'} + z'I_{x'y'z'}]D_{x'} + [I_{z'z'} + \nu I_{x'x'} - z'I_{y'y'z'}]D_{y'} - z'I_{y'z'z'}D_{z'} \}, \\ \tau_{z'x'} &= \frac{E'}{8\pi} \{ [I_{z'z'} + \nu I_{y'y'} - z'I_{x'x'z'}]D_{x'} - [\nu I_{x'y'} + z'I_{x'y'z'}]D_{y'} - z'I_{x'z'z'}D_{z'} \}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $E' = E/(1-\nu^2)$, а $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$, ..., $I_{z'z'z'}$ являются частными производными функции влияния по каждому соответствующему индексу. Функция влияния $I(x', y', z')$ представляет собой интеграл по площади элемента:

$$I(x', y', z') = \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{r'}} d\xi d\eta, \quad (3.18)$$

где Ω — это площадь элемента (рис. 3.5), а $r' = \sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2}$ является расстоянием между точкой $P(x', y', z')$ и точкой этого элемента $(\xi, \eta, 0)$.

Метод разрывных смещений здесь используется для получения зависимости между граничными напряжениями ($\sigma_{z'}$, $\tau_{x'z'}$, $\tau_{y'z'}$) на поверхностях трещины и разрывными смещениями поверхностей трещины ($D_{x'}$, $D_{y'}$, $D_{z'}$), то есть, позволяет получить зависимость напряжений на плоскости $z' = 0$ от разрывных смещений трещины. На самом деле, для этой плоско-трехмерной трещины сдвиговые разрывные смещения равны нулю: $D_{x'} = 0$ ($\tau_{x'z'} = 0$) и $D_{y'} = 0$ ($\tau_{y'z'} = 0$) из-за симметрии трещины относительно плоскости $z' = 0$. Здесь пренебрегается трением между жидкостью и поверхностями трещины. Поэтому зависимость напряжений $\sigma_{z'}$ от разрывного смещения $D_{z'}$ упрощается при $z' = 0$ и принимает следующий вид:

$$\sigma_{z'} = \frac{E'}{8\pi} I_{z'z'} D_{z'}. \quad (3.19)$$

Преобразуя зависимость (3.19) из локальной системы координат $o' - x'y'z'$ в глобальную систему координат $o - xyz$ ($o - r\theta z$), мы получим зависимость давления жидкости в трещине $p_f(r, \theta, t)$ от раскрытия трещины $w(r, \theta, t)$.

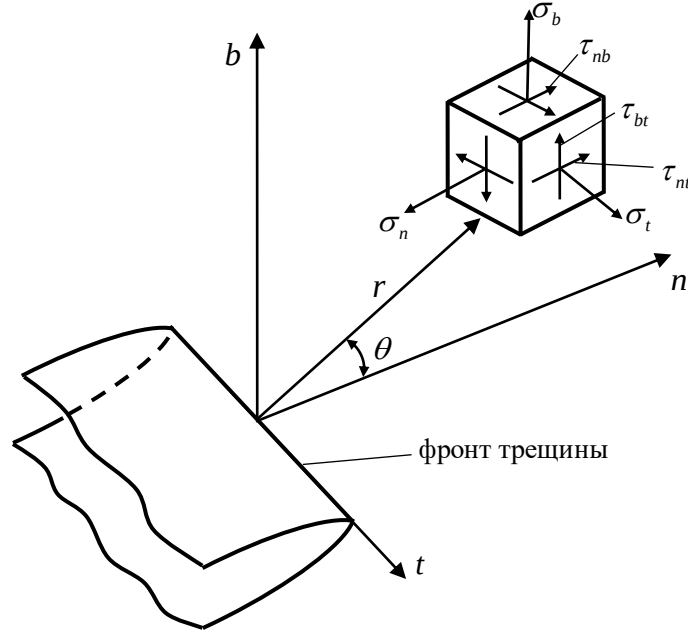


Рисунок 3.6. Напряжения на фронте трещины в локальных координатах

3.3.2. Коэффициенты интенсивности напряжений трехмерной трещины

Рисунок 3.6 показывает напряжения около фронта трещины в локальной системе координат. Согласно линейной упругой механике разрушения, напряжения вблизи фронта трещины имеют следующую зависимость от коэффициентов интенсивности напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{tb} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2},\end{aligned}\tag{3.20}$$

и коэффициенты интенсивности напряжений определяются так (рисунок 3.6):

$$\begin{aligned}K_I &= \lim_{\substack{\theta=0 \\ r \rightarrow 0}} \sqrt{2\pi r} \sigma_b(r, \theta), \\ K_{II} &= \lim_{\substack{\theta=0 \\ r \rightarrow 0}} \sqrt{2\pi r} \tau_{nb}(r, \theta), \\ K_{III} &= \lim_{\substack{\theta=0 \\ r \rightarrow 0}} \sqrt{2\pi r} \tau_{tb}(r, \theta).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Поскольку при расчете коэффициенты интенсивности напряжений трудно получить, применяя их определение (3.21), используем полученные в работе [129] трехмерные зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от разрывных смещений вблизи фронта трещины:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{\theta=\pi \\ r \rightarrow 0}} \frac{[u_b]}{\sqrt{r}}, \\ K_{II} &= \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{\theta=\pi \\ r \rightarrow 0}} \frac{[u_{nb}]}{\sqrt{r}}, \\ K_{III} &= \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{\theta=\pi \\ r \rightarrow 0}} \frac{[u_{tb}]}{\sqrt{r}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $[u_b]$, $[u_{nb}]$, $[u_{tb}]$ представляют собой три типа разрывных смещений трещины (нормальное, продольное и антиплоское смещения). Эти зависимости показывают связь между условием роста трещины и трехмерным методом разрывных смещений. Это значит, что если разрывные смещения поверхностей трещины получены, то, согласно уравнению (3.22), коэффициенты интенсивности напряжений трещины вычисляются напрямую, что является важной причиной выбора для решения модели метода разрывных смещений, а не расширенного метода конечных элементов.

Согласно анализу упругой задачи из раздела 3.2.1, при $\theta = 0$ на рисунке 3.6 напряжения сдвига τ_{nb} и τ_{tb} в локальной системе координат, соответствующие τ_{xz} и τ_{yz} в глобальной системе координат, равны нулю, следовательно, в этой модели нет напряжений типов II и III ($K_{II} = 0$, $K_{III} = 0$), поэтому в данной модели вычисляется только один коэффициент интенсивности напряжений K_I .

3.3.3. Обработка уравнения движения жидкости и граничных условий

В разделе 3.2 получены дифференциальные уравнения движения жидкости и дифференциальные граничные условия. В реальных вычислениях дифференциальные виды уравнений нужно преобразовать в алгебраические формы. Традиционные методы преобразования включают интегральный метод, метод конечных разностей, метод конечных объемов и т. д.

Интегральный метод обычно применяется в методе конечных элементов для задач твердого тела и не подходит для данной модели. Для решения уравнения движения жидкости с учетом граничных условий в этой модели больше подходит метод конечных объемов [165], поскольку как граничные условия, так и уравнения движения содержат расход жидкости или газа, тем самым алгебраические виды граничных условий, полученные методом конечных объемов, можно прямо подставлять в уравнение движения жидкости и сокращать аналогичные члены. Подробное преобразование представлено в следующем разделе.

3.4. Дискретизация трехмерной модели

3.4.1. Дискретизация трещины

При дискретизации трещины мы делим трещину на ячейки по радиальному и кольцевому направлениям. На рисунке 3.7 показана схема дискретизации трещины, все физические параметры каждой ячейки (номер ячейки, координаты ячейки, раскрытие и давление) задаются на её центре (синие точки). Координатами ячейки являются координаты центра тяжести (геометрического центра) этой ячейки. На рисунке 3.7 трещина дискретизируется только двумя различными формами ячеек: треугольник и трапеция. Δr и $\Delta \theta$ являются, соответственно, шагами сетки по радиальному и кольцевому направлениям. Для удобства дальнейшего изложения области, состоящие из ячеек с одинаковыми кольцевыми координатами θ_j , обозначим как «радиальная область θ_j », а области, состоящие из ячеек с одинаковыми радиальными координатами r_i , будем называть «кольцевой областью r_i ».

Поскольку прочность пласта зависит от кольцевой координаты θ (уравнение 3.12), мы можем дискретизировать её по кольцевому направлению: ячейки из одной радиальной области θ_j обладают одинаковым K_{IC} (см. на рисунке 3.7 области, обозначенные красным пунктиром).

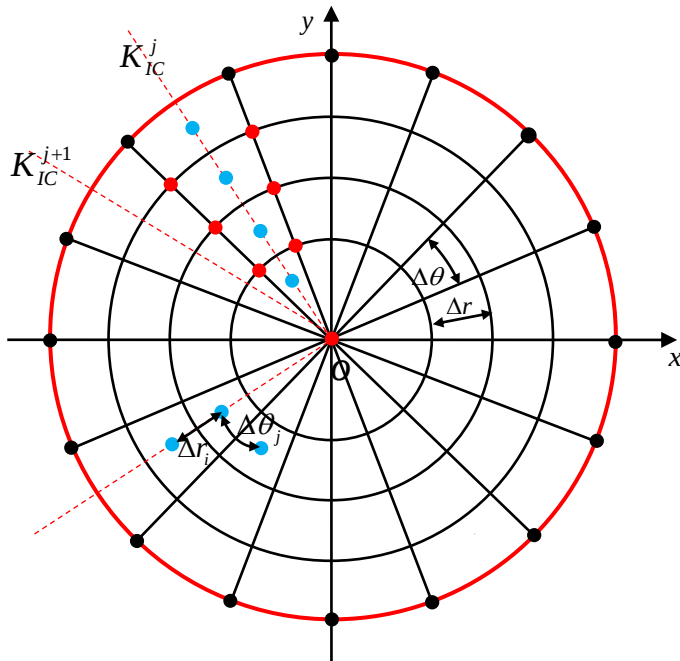


Рисунок 3.7. Схема дискретизации трещины: красная кривая – фронт трещины; чёрные точки – граничные точки на фронте трещины; красные точки – вершины ячеек; синие точки – центры ячеек.

3.4.2. Трехмерный метод разрывных смещений для дискретизированной трещины

В дискретизированной вышеописанным образом трещине имеется два типа ячеек: треугольники вокруг точечного источника и трапеции на оставшейся области (рисунок 3.7). $P_i(x'_i, y'_i, 0)$ являются вершинами ячеек в локальной системе координат ($i=1, 2, 3$ для треугольной ячейки и $i=1, 2, 3, 4$ для трапециевидной ячейки). В работе [107] приведена дискретизированная формула для $I(x', y', 0)$ в уравнении (3.18):

$$I(x', y', 0) = \sum_{i=1}^N \frac{M'_i}{L'_i} [\ln(B'_i + r'_{i+1}) - \ln(A'_i + r'_i)], \quad (3.23)$$

где $N=3$ или 4 – количество вершин ячейки. Коэффициенты M' , L'_i , B'_i , A'_i , r'_i имеют следующие определения:

$$\begin{aligned} M'_i &= (y'_i - y'_{i+1})x' + (x'_{i+1} - x'_i)y' + (x'_i y'_{i+1} - x'_{i+1} y'_i), \\ L'_i &= |P_i P_{i+1}| = \sqrt{(x'_i - x'_{i+1})^2 + (y'_i - y'_{i+1})^2}, \\ B'_i &= \frac{(x'_i - x'_{i+1})x' + (y'_i - y'_{i+1})y' + x'_{i+1}(x'_i - x'_i) + y'_{i+1}(y'_{i+1} - y'_i)}{L'_i}, \\ A'_i &= \frac{(x'_i - x'_{i+1})x' + (y'_i - y'_{i+1})y' + x'_i(x'_{i+1} - x'_i) + y'_i(y'_{i+1} - y'_i)}{L'_i}, \\ r'_i &= |PP_i| = \sqrt{(x' - x'_i)^2 + (y' - y'_i)^2}, \end{aligned}$$

где $P(x', y', 0)$ – координата любой точки на плоскости трещины, L'_i – длины сторон многоугольника; r'_i – расстояние между точкой $P(x', y', 0)$ и вершиной $P_i(x'_i, y'_i, 0)$. Следует отметить, что для треугольной ячейки принимаем $i+1=1$ при $i=3$; аналогично для трапециевидной ячейки $i+1=1$ при $i=4$.

Коэффициент влияния $I_{z'z'}$ (вторая частная производная $I(x', y', 0)$ от z') в уравнении (3.19) получается равным

$$I_{z'z'} = \sum_{i=1}^N \frac{M_i (g^i_{z'z'} - h^i_{z'z'})}{L_i}, \quad (3.24)$$

где коэффициенты $g^i_{z'z'}$, $h^i_{z'z'}$ имеют следующие формы:

$$\begin{aligned} g^i_{z'z'} &= -\frac{1}{(r'_{i+1} + B'_i)^2} \left(\frac{z'}{r'_{i+1}} \right)^2 + \frac{1}{r'_{i+1} + B'_i} \frac{(r'^x_{i+1})^2 + (r'^y_{i+1})^2}{r'^3_{i+1}}, \\ h^i_{z'z'} &= -\frac{1}{(r'_i + A'_i)^2} \left(\frac{z'}{r'_i} \right)^2 + \frac{1}{r'_i + A'_i} \frac{(r'^x_i)^2 + (r'^y_i)^2}{r'^3_i}, \end{aligned}$$

где $r'^x_i = x' - x'_i$, $r'^y_i = y' - y'_i$. При $z' = 0$ в формулах $g^i_{z'z'}$, $h^i_{z'z'}$ присутствует только второй член.

3.4.3. Дискретизация уравнений движения жидкости

Уравнение движения жидкости (3.7) преобразуется в алгебраический неявный вид методом конечных объемов:

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta t} - \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r_i} \left[\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2,j,k+1} - \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2,j,k+1} \right] - \\ \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta \theta_j} \left[\left(\frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j+1/2,k+1} - \left(\frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j-1/2,k+1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

где Δt – это шаг по времени, индексы (i, j) представляют собой двумерный номер ячейки, i – номер по радиальному направлению, j – номер по кольцевому направлению ($j \leq n$), где n является количеством отрезков по кольцевому направлению. k – это номер шага по времени; r_i – радиальная координата вычисляемой ячейки (координата центра ячейки), $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$ (см. рисунок 3.7). Из-за однородного разделения по кольцевому направлению $\Delta \theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j = \Delta \theta$. Согласно методу конечных объемов, члены с индексами $i+1/2$, $i-1/2$, $j+1/2$, $j-1/2$ определяются так:

$$\begin{aligned} \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+1/2,j,k+1} &= r_{i+1/2} w_{i+1/2,j,k+1}^3 \frac{p_{i+1,j,k+1} - p_{i,j,k+1}}{\Delta r_i}, \\ \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-1/2,j,k+1} &= r_{i-1/2} w_{i-1/2,j,k+1}^3 \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i-1,j,k+1}}{\Delta r_{i-1}}, \\ \left(\frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j+1/2,k+1} &= \frac{w_{i,j+1/2,k+1}^3}{r_i} \frac{p_{i,j+1,k+1} - p_{i,j,k+1}}{\Delta \theta_j}, \\ \left(\frac{w^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{i,j-1/2,k+1} &= \frac{w_{i,j-1/2,k+1}^3}{r_i} \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j-1,k+1}}{\Delta \theta_{j-1}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $r_{i+1/2}$ представляет собой радиальную координату точки $(i+1/2, j)$; $r_{i-1/2}$ представляет собой радиальную координату точки $(i-1/2, j)$; $w_{i+1/2,j,k+1}$, $w_{i-1/2,j,k+1}$, $w_{i,j+1/2,k+1}$ и $w_{i,j-1/2,k+1}$ являются раскрытиями на точках $(i+1/2, j)$, $(i-1/2, j)$, $(i, j+1/2)$ и $(i, j-1/2)$ в текущий момент времени, соответственно. На рисунке 3.8 показаны положения точек $(i+1/2, j)$, $(i-1/2, j)$, $(i, j+1/2)$, $(i, j-1/2)$ и центров тяжести ячеек $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$ и (i, j) . Следует отметить, что $r_{1-1/2} = r_0$ (r_0 – радиус скважины). До роста трещины ввиду отсутствия кольцевой скорости жидкости в левой части уравнения (3.25) нет третьего члена.

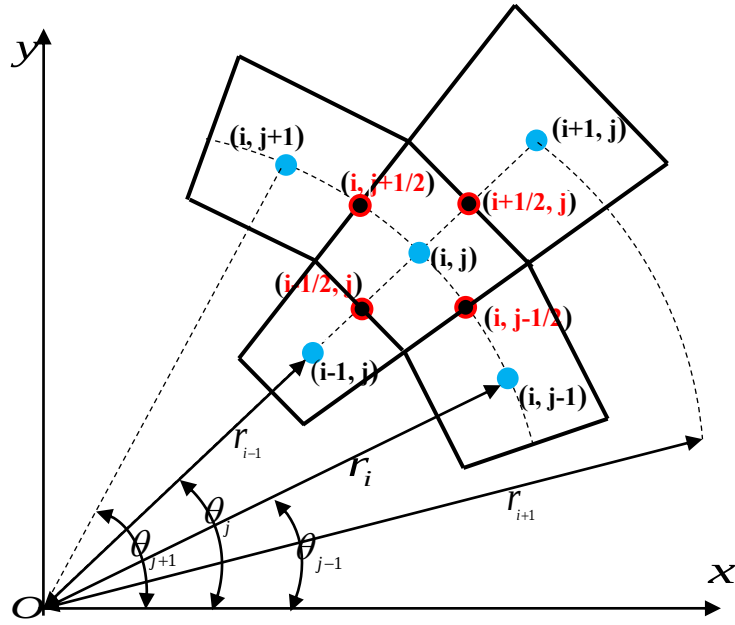


Рисунок 3.8. Положения 9 точек вокруг вычисляемой ячейки и их двумерные номера

3.4.4. Дискретизация граничных условий

Граничное условие (3.9) на скважине принимает следующий вид:

$$\frac{w_0^3}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_0}{2\pi r_0}, \quad r = r_0. \quad (3.27)$$

Согласно принципам дискретизации уравнения движения жидкости, при $i = 1$, $r_{1-1/2} = r_0$, $w_{1-1/2,j,k+1} = w_0$, и уравнение (3.27) преобразуется в вид, соответствующий методу конечных объемов, подобный уравнениям (3.26):

$$\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{1-1/2,j,k+1} = - \frac{Q_0 \mu'}{2\pi}. \quad (3.28)$$

Это уравнение можно прямо подставить в уравнение (3.25), и полученное таким образом уравнение не будет содержать r_0 (радиус скважины). Это значит, что величина r_0 не влияет на численные результаты, поэтому гипотеза точечного источника для скважины разумна.

Из этих же рассуждений следует, что граничное условие (3.10) на конце трещины можно переписать так:

$$\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/2,j,k+1} = 0, \quad (3.29)$$

где m – радиальный номер ячейки, включающей границу трещины. Это уравнение не может быть прямо подставлено в уравнение (3.25), в отличие от уравнения (3.28), потому что уравнение (3.29) будет приводить к сингулярности последней матрицы коэффициентов для уравнения (3.25). Поэтому мы выбираем среднюю точку между точками (m, j) и $(m+1/2, j)$ в качестве расчетной точки $(m+1/4, j)$ вместо $(m+1/2, j)$, для которой имеем:

$$\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/4, j, k+1} = \frac{r_m + r_{m+1/2}}{2} \left(\frac{w_{m, j, k+1} + w_{m+1/2, j, k+1}}{2} \right)^3 \frac{p_{m+1/2, j, k+1} - p_{m, j, k+1}}{r_{m+1/2} - r_m}, \quad (3.30)$$

где $r_{m+1/2} = R_j$ – радиальная координата точки $(m+1/2, j)$, то есть радиус трещины при $\theta = \theta_j$, r_m – радиальная координата ячейки (m, j) . Значение $w_{m+1/2, j, k+1}$, являющееся раскрытием на точке $(m+1/2, j)$, то есть раскрытием на границе трещины, равно нулю согласно условию (3.11), $p_{m+1/2, j, k+1}$ – давление на точке $(m+1/2, j)$, то есть давление на границе трещины, см. рисунок 3.9, на котором красная линия представляет собой границу трещины.

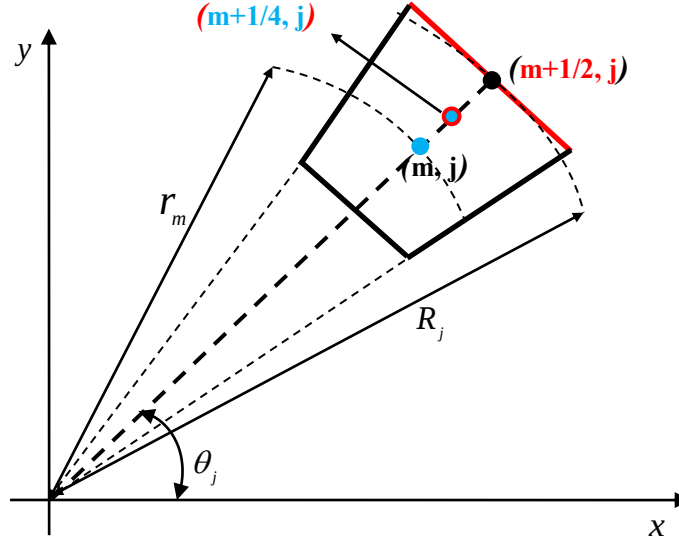


Рисунок 3.9. Положения вычисляемых точек в ячейке, включающей границу трещины

3.4.5. Дискретизация условия роста трещины

На рисунке 3.10 красные кривые представляют собой трехмерный контур на конце трещины. Жёлтая область – это ячейка (m, j) , самая близкая к реальной границе трещины в направлении $\theta = \theta_j$. $D_{m, j}$ – это раскрытие ячейки (m, j) , r_m – радиальная координата ячейки (m, j) , R_j является радиусом трещины в направлении $\theta = \theta_j$. Мы используем раскрытие ячейки (m, j) , ближайшей к реальной границе трещины, для расчета коэффициента интенсивности напряжений, вместо предельной величины раскрытия трещины на конце трещины $[u_b]$, и $\sqrt{R_j - r_m}$ вместо $\sqrt{r}$ в уравнении (3.22), поэтому первая формула в уравнении (3.22) принимает вид:

$$K_I(\theta) = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{D_{m, j}}{\sqrt{R_j - r_m}}, \quad \theta = \theta_j. \quad (3.31)$$

Подобный численный дискретный метод существенно упрощает процесс расчета и потому широко используется для нахождения коэффициентов интенсивности напряжений и моделирования роста трещины ГРП [60, 64, 66, 114, 120-123].

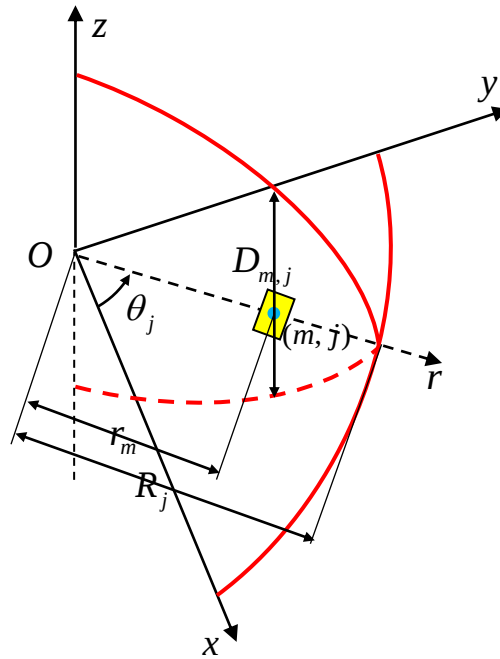


Рисунок 3.10. Положение ячейки (m, j) , самой близкой к реальной границе трещины в направлении $\theta = \theta_j$

3.5. Численное решение на этапе до роста трещины

На этапе до роста трещины присутствует только радиальное движение жидкости (уравнение (3.13)), поэтому трещина дискретизируется одномерно по радиальному направлению, см. рисунок 3.11, на котором представлено одно из радиальных сечений из рисунка 3.7. Красная точка – точечный источник (скважина), её радиальный номер $1-1/2$, синие точки являются центрами тяжести ячеек, их радиальные номера $1, 2, 3, \dots, m$. Черные точки с красной окантовкой являются общими точками соседних ячеек, их номера $i+1/2$ ($i=1, 2, 3, \dots, m-1$). Черная точка – это граничная точка трещины, номер $m+1/2$. Синяя точка с красной окантовкой – это точка $(m+1/4, j)$, которая вместо точки $(m+1/2, j)$ входит в расчет для ячейки (m, j) . $w_{i,k}$, $p_{i,k}$ представляют собой раскрытия и давления на этих точках. Следует отметить, что кольцевые номера ячеек j на рисунке 3.11 опущены, поскольку для всех радиальных областей θ_j движение жидкости одинаково.

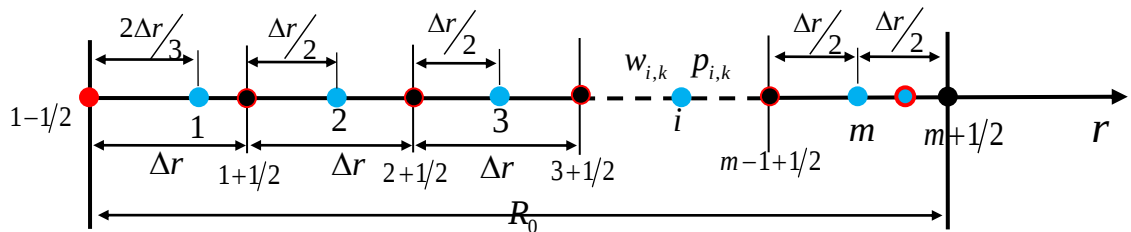


Рисунок 3.11. Схема сетки для одномерного радиального движения жидкости на этапе до роста трещины

3.5.1. Формирование системы уравнений движения жидкости

Согласно определениям из уравнений (3.26) для точки 1: $r_1 = 2\Delta r/3$, $r_{1+1/2} = \Delta r$, $w_{1+1/2,k} = (3w_{1,k} + 2w_{2,k})/5$, $\Delta r_1 = 5\Delta r/6$, поэтому вместе с граничным условием (3.28) уравнение (3.25) без третьего члена на ячейке $(1, j)$ принимает вид:

$$\frac{\mu' r_1 \Delta r}{\Delta t} (w_{1,k+1} - w_{1,k}) - r_{1+1/2} \left(\frac{3w_{1,k+1} + 2w_{2,k+1}}{5} \right)^3 \frac{6(p_{2,k+1} - p_{1,k+1})}{5\Delta r} - \frac{Q_0 \mu'}{2\pi} = 0. \quad (3.32)$$

Для точки 2: $r_2 = r_{1+1/2} + \Delta r/2$, $r_{2+1/2} = 2\Delta r$, $w_{2+1/2,k} = (w_{2,k} + w_{3,k})/2$, $\Delta r_2 = \Delta r$, алгебраическое уравнение на ячейке $(2, j)$ изменяется следующим образом:

$$\frac{\mu' r_2 \Delta r}{\Delta t} (w_{2,k+1} - w_{2,k}) - r_{2+1/2} \left(\frac{w_{2,k+1} + w_{3,k+1}}{2} \right)^3 \frac{p_{3,k+1} - p_{2,k+1}}{\Delta r} + r_{1+1/2} \left(\frac{3w_{1,k+1} + 2w_{2,k+1}}{5} \right)^3 \frac{6(p_{2,k+1} - p_{1,k+1})}{5\Delta r} = 0. \quad (3.33)$$

Для ячеек (i, j) , $i = 3, 4, \dots, m-1$: $r_i = r_{i-1} + \Delta r$, $r_{i+1/2} = i \cdot \Delta r$, $w_{i+1/2,k} = (w_{i,k} + w_{i+1,k})/2$, $\Delta r_i = \Delta r$, алгебраическое уравнение на ячейках (i, j) примет вид:

$$\frac{\mu' r_i \Delta r}{\Delta t} (w_{i,k+1} - w_{i,k}) - r_{i+1/2} \left(\frac{w_{i,k+1} + w_{i+1,k+1}}{2} \right)^3 \frac{p_{i+1,k+1} - p_{i,k+1}}{\Delta r} + r_{i-1/2} \left(\frac{w_{i-1,k+1} + w_{i,k+1}}{2} \right)^3 \frac{p_{i,k+1} - p_{i-1,k+1}}{\Delta r} = 0. \quad (3.34)$$

Для ячейки (m, j) выше уже показано (уравнение (3.30)), что мы используем $\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/4,k+1}$ вместо $\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m+1/2,k+1}$, чтобы избежать сингулярности последней коэффициентной матрицы. Поэтому $r_m = r_{m-1} + \Delta r$, $r_{m+1/2} = R_0$, $r_{m+1/4} = (r_m + R_0)/2$, $w_{m+1/4,k} = (w_{m,k} + w_{m+1/2,k})/2 = w_{m,k}/2$ ($w_{m+1/2,k} = 0$), $\Delta r_m = 3\Delta r/4$, а алгебраическое уравнение на ячейке (m, j) примет вид:

$$\frac{3\mu' r_m \Delta r}{4\Delta t} (w_{m,k+1} - w_{m,k}) - r_{m+1/4} \frac{w_{m,k+1}^3}{8} \frac{p_{m+1/2,k+1} - p_{m,k+1}}{\Delta r/2} + r_{m-1/2} \left(\frac{w_{m-1,k+1} + w_{m,k+1}}{2} \right)^3 \frac{p_{m,k+1} - p_{m-1,k+1}}{\Delta r} = 0. \quad (3.35)$$

В этой системе есть $m+1$ неизвестных давления: $p_{1,k+1}$, $p_{2,k+1}$, ..., $p_{m,k+1}$, $p_{m+1/2,k+1}$, и m неизвестных раскрытия: $w_{1,k+1}$, $w_{2,k+1}$, ..., $w_{m,k+1}$. Однако имеется только соответственная зависимость раскрытий ($w_{1,k+1}$, $w_{2,k+1}$, ..., $w_{m,k+1}$) от давлений ($p_{1,k+1}$, $p_{2,k+1}$, ..., $p_{m,k+1}$), см. раздел 3.5.2. Таким образом, остаётся ещё одна неизвестная: $p_{m+1/2,k+1}$ (давление на конце трещины). Чтобы замкнуть систему уравнений, мы предполагаем, что распределение давления последних трех ячеек линейно, то есть

$$p_{m+1/2,k} = \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} (p_{m,k} - p_{m-1,k}) + p_{m,k}. \quad (3.36)$$

Исходя из данных предположений мы получаем замкнутую систему уравнений, а также избегаем сингулярности последней матрицы коэффициентов.

3.5.2. Формирование системы давления жидкости и раскрытия трещины

В уравнении (3.19) показана зависимость давления в произвольной точке пространства от раскрытия одной ячейки трещины в локальной системе координат при $z' = 0$. Поскольку трещина является плоской, все локальные системы координат для всех ячеек находятся на одной плоскости $z = 0$ в глобальной системе координат, и матрица преобразования для уравнения (3.19) из локальной системы координат в глобальную систему координат имеет такой вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

поэтому уравнение (3.19) переписывается в глобальной системе координат:

$$p = \frac{E'}{8\pi} I_{zz} D_z. \quad (3.37)$$

Согласно принципу суперпозиции, суммарное давление в одной ячейке от раскрытий всех ячеек в глобальной системе координат равно сумме давлений от каждой отдельной ячейки:

$$p_\xi = \sum_{\zeta=1}^{N^*} A_{\xi\zeta} D_z^\zeta, \quad (3.38)$$

где N^* – суммарное количество ячеек трещины, p_ξ – давление ξ -ой ячейки трещины, D_z^ζ – раскрытие ζ -ой ячейки трещины. Поскольку у ячеек трещины отлично от нуля только разрывное смещение в направлении z , далее будем обозначать D_z^ζ как D^ζ . Коэффициент $A_{\xi\zeta}$ выражается так:

$$A_{\xi\zeta} = \frac{E'}{8\pi} I_{zz}^{\xi,\zeta}, \quad (3.39)$$

где $I_{zz}^{\xi,\zeta}$ получается подстановкой координат ячейки ξ и координат вершин ячейки ζ в уравнение (3.24), $\xi, \zeta = 1, 2, 3, \dots, N^*$. Таким образом для всех ячеек трещины мы можем создать одну линейную систему уравнений, определяющую зависимость давления жидкости от раскрытия трещины:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{D}, \quad (3.40)$$

где $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N^*}]^T$ – это вектор давлений всех ячеек; $\mathbf{A}$ – это коэффициентная матрица, каждый элемент которой является коэффициентом $A_{\xi\zeta}$, полученным из уравнения (3.39); $\mathbf{D} = [D^1, D^2, D^3, \dots, D^{N^*}]^T$ – это вектор раскрытий всех ячеек трещины.

3.5.3. Соединение двух систем

Заметим, что из-за ограничений используемых методов в разделах 3.5.1 и 3.5.2 принимаются две различные формы нумерации ячеек: в разделе 3.5.1 для уравнений движения жидкости используется двумерная нумерация: (i, j) , $i=1,2,3,\dots,m$, $j=1,2,3,\dots,n$, где номер j опущен из-за одномерного характера движения, а в разделе 3.5.2 используется одномерная нумерация: $\xi=1,2,3,\dots,N^*$. Для объединения этих систем уравнений необходимо сперва объединить эти два способа нумерации ячеек.

Таблица 3.1

Матрица преобразования T^* для объединения двух способов нумерации ячеек. Двумерному номеру (i, j) (оранжевая область) соответствует одномерный номер ξ (желтая область).

$i \backslash j$	1	2	3	...	j	...	$n-1$	n
1	1	2	3	...	j	...	$n-1$	n
2	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$n+j$	...	$2n-1$	$2n$
3	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$2n+j$	...	$3n-1$	$3n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$(i-1)n+1$	$(i-1)n+2$	$(i-1)n+3$	...	$(i-1)n+j$	...	$(i-1)n-1$	$(i-1)n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$(m-2)n+1$	$(m-2)n+2$	$(m-2)n+3$	...	$(m-2)n+j$	...	$(m-1)n-1$	$(m-1)n$
m	$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$	...	$(m-1)n+j$	...	$mn-1$	mn

Таблица 3.2

Связь между i и ξ при $j=1$ на этапе до роста трещины

i	1	2	3	...	i	...	$m-1$	m
ξ	1	$n+1$	$2n+1$	...	$(i-1)n+1$	...	$(m-2)n+1$	$(m-1)n+1$

С этой целью мы вводим матрицу преобразования T^* размера $m \times n$, которая однозначно сопоставляет двумерному номеру ячейки его одномерный вариант. Пример такой матрицы показан в таблице 3.1.

На этапе до роста трещины движение для каждого столбца ячеек в таблице 3.1 одинаково, поэтому в уравнении движения жидкости используется только один столбец из таблицы 3.1,

например выбирается $j=1$. А каждому номеру $(i,1)$ соответствует значение ξ (первый столбец в таблице 3.1) в таблице 3.2. Для удобства изложения дальше величины ξ в таблице 3.2 обозначаются ξ_i , $i=1,2,3,\dots,m$.

Подставляя значения давления, определенные раскрытиями из системы уравнений (3.40), мы получим новую систему движения жидкости из (3.32) – (3.35), в которой неизвестны только раскрытия $D_{\xi_i}^{k+1}$. ξ_i получены из таблицы 3.2. Уравнения (3.32) – (3.35) примут в таком случае вид:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\mu' r_1 \Delta r}{\Delta t} (D_{\xi_1}^{k+1} - D_{\xi_1}^k) - r_{1+1/2} \left(\frac{3D_{\xi_1}^{k+1} + 2D_{\xi_2}^{k+1}}{5} \right)^3 \frac{6(A_{\xi_2} - A_{\xi_1}) \mathbf{D}^{k+1}}{5\Delta r} - \frac{Q_0 \mu'}{2\pi} = 0, \\
 f_2 &= \frac{\mu' r_2 \Delta r}{\Delta t} (D_{\xi_2}^{k+1} - D_{\xi_2}^k) - r_{2+1/2} \left(\frac{D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1}}{2} \right)^3 \frac{(A_{\xi_3} - A_{\xi_2}) \mathbf{D}^{k+1}}{\Delta r} + \\
 &\quad r_{1+1/2} \left(\frac{3D_{\xi_1}^{k+1} + 2D_{\xi_2}^{k+1}}{5} \right)^3 \frac{6(A_{\xi_2} - A_{\xi_1}) \mathbf{D}^{k+1}}{5\Delta r} = 0, \\
 f_i &= \frac{\mu' r_i \Delta r}{\Delta t} (D_{\xi_i}^{k+1} - D_{\xi_i}^k) - r_{i+1/2} \left(\frac{D_{\xi_i}^{k+1} + D_{\xi_{i+1}}^{k+1}}{2} \right)^3 \frac{(A_{\xi_{i+1}} - A_{\xi_i}) \mathbf{D}^{k+1}}{\Delta r} + \\
 &\quad r_{i-1/2} \left(\frac{D_{\xi_{i-1}}^{k+1} + D_{\xi_i}^{k+1}}{2} \right)^3 \frac{(A_{\xi_i} - A_{\xi_{i-1}}) \mathbf{D}^{k+1}}{\Delta r} = 0, \\
 f_m &= \frac{3\mu' r_m \Delta r}{4\Delta t} (D_{\xi_m}^{k+1} - D_{\xi_m}^k) - r_{m+1/4} \frac{(D_{\xi_m}^{k+1})^3}{8} \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} \frac{(A_{\xi_m} - A_{\xi_{m-1}}) \mathbf{D}^{k+1}}{\Delta r/2} + \\
 &\quad r_{m-1+1/2} \left(\frac{D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1}}{2} \right)^3 \frac{(A_{\xi_m} - A_{\xi_{m-1}}) \mathbf{D}^{k+1}}{\Delta r} = 0,
 \end{aligned}$$

где $i=3,4,\dots,m-1$, $D_{\xi_i}^k$ представляет раскрытие ячеек ξ_i с предыдущего шага по времени, $D_{\xi_i}^{k+1}$ представляет раскрытие ячеек ξ_i текущего шага по времени, то есть, ξ_i -й элемент вектора $\mathbf{D}$. A_{ξ_i} – это ξ_i -я строка матрицы $\mathbf{A}$ (уравнение (3.40)), поэтому $A_{\xi_i} \mathbf{D} = p_{\xi_i}$ (давление в ξ_i -ой ячейке). Следует отметить, что, несмотря на то, что вектор $\mathbf{D}$ содержит $m \cdot n$ элементов, неизвестными являются только m из них, поскольку переменные для ячеек с одинаковой радиальной координатой в данной задаче равны. Таким образом, нелинейная система уравнений $\mathbf{F}$, составленная уравнениями $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ является замкнутой:

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_m)^T = 0, \quad (3.41)$$

у этой системы только m неизвестных ($D_{\xi_i}^{k+1}, i=1,2,3,\dots,m$).

3.5.4. Численный метод решения замкнутой системы

В нелинейной системе уравнений (3.41) относительно неизвестных $D_{\xi_i}^{k+1}$ самый большой показатель при $D_{\xi_i}^{k+1}$ равен 4. Для решения данной системы выбран метод Ньютона. Итерация численного решения выглядит следующим образом:

$$X^{(s+1)} = X^{(s)} - (F'(X^{(s)}))^{-1} F(X^{(s)}), \quad (3.42)$$

где индекс s представляет собой шаг итерации, $X^{(s)}$ – это итерационное значение для решения $D_{\xi_i}^{k+1}$ в предыдущей итерации, $X^{(s+1)}$ – это оценочное значение для решения $D_{\xi_i}^{k+1}$ в текущей итерации. $F(X^{(s)})$ – это значение функции F в предыдущей итерации. $F'(X^{(s)})$ – производная этого значения в предыдущей итерации. Производная матрица $F'(X)$, имеющая вид:

$$F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

называется «матрицей Якоби», и $(F'(X))^{-1}$ представляет собой обратную матрицу к матрице Якоби $F'(X)$. X соответствует неизвестным $D_{\xi_i}^{k+1}$, и элементы x_i в векторе X соответствуют элементам в векторе $D_{\xi_i}^{k+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Из-за сложной формы конкретная матрица Якоби $F'(X)$ для нелинейной системы уравнений (3.41) будет дана в Приложении 3.1.

Подставляем (3.42) в соединённую систему (3.41), и через несколько расчётов итерации, если значение $F(X^{(s+1)})$ удовлетворяет следующему условию сходимости:

$$\|F(X^{(s+1)})\| \leq \varepsilon, \quad (3.44)$$

считаем, что численное решение $D_{\xi_i}^{k+1}$ получено, и итерация заканчивается. Здесь ε – это допустимая погрешность расчёта. Далее, используя матрицу преобразования T^* , получаем значения раскрытий всех ячеек трещины D^{k+1} и подставляем результаты D^{k+1} в уравнение (3.40) для соответственного определения давления p^{k+1} .

На этапе до роста трещины необходимо вычислять также ещё один важный параметр, а именно коэффициент интенсивности напряжений K_I . Из-за симметрии величины K_I для различных радиальных областей θ_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) одинаковы, поэтому, согласно уравнению (3.31), коэффициент интенсивности напряжений K_I определяется так:

$$K_I = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{D_{\xi_m}^{k+1}}{\sqrt{R_0 - r_m}}, \quad (3.45)$$

где $D_{\xi_m}^{k+1}$ – это раскрытие ячеек с номером ξ_m , наиболее близких к реальной границе трещины.

3.6. Численное решение на этапе роста трещины

3.6.1. Начальный рост трещины

Через несколько шагов по времени, на шаге $k = k_0$, коэффициенты интенсивности напряжений в одной или нескольких радиальных областях θ_j трещины достигают или превосходят прочности материала (K_{IC}):

$$K_I(\theta_j) \geq K_{IC}(\theta_j). \quad (3.46)$$

Это значит, что в этих радиальных областях трещина распространяется, в то время как в других фронт трещины остаётся на месте из-за неоднородных K_{IC} . Это приводит к неравномерному распространению фронта трещины, как на рисунке 3.12.

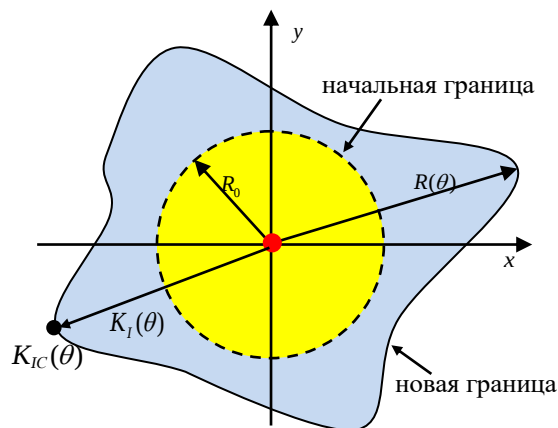


Рисунок 3.12. Профиль трещины на этапе распространения из-за неоднородных K_{IC} (жёлтая область – это профиль начальной трещины)

В этой модели для удобства расчёта мы предполагаем, что когда трещина растёт, фронт трещины всегда находится на границе ячеек, а не внутри ячеек, тем самым контур трещины приблизительно рассматривается как кривая, соединяющая вершины внешних сторон самых внешних ячеек. И каждый раз трещина продвигается на одну ячейку, как показано на рисунке 3.13, где красный пунктир является контуром трещины до роста, а красные сплошные кривые являются новым контуром трещины после начального роста. Чёрные точки – это граничные точки, а красные точки с чёрным краем из граничных становятся внутренними.

Из-за асимметричного и неоднородного роста трещины по различным радиальным направлениям появляется перепад давления по кольцевому направлению, что приводит к потоку жидкости по кольцевому направлению, поэтому в уравнение движения жидкости включается кольцевой поток, то есть в качестве уравнения движения жидкости для этапа после начала роста трещины используется уравнение (3.7), вместо уравнения (3.13), применявшегося до роста трещины.

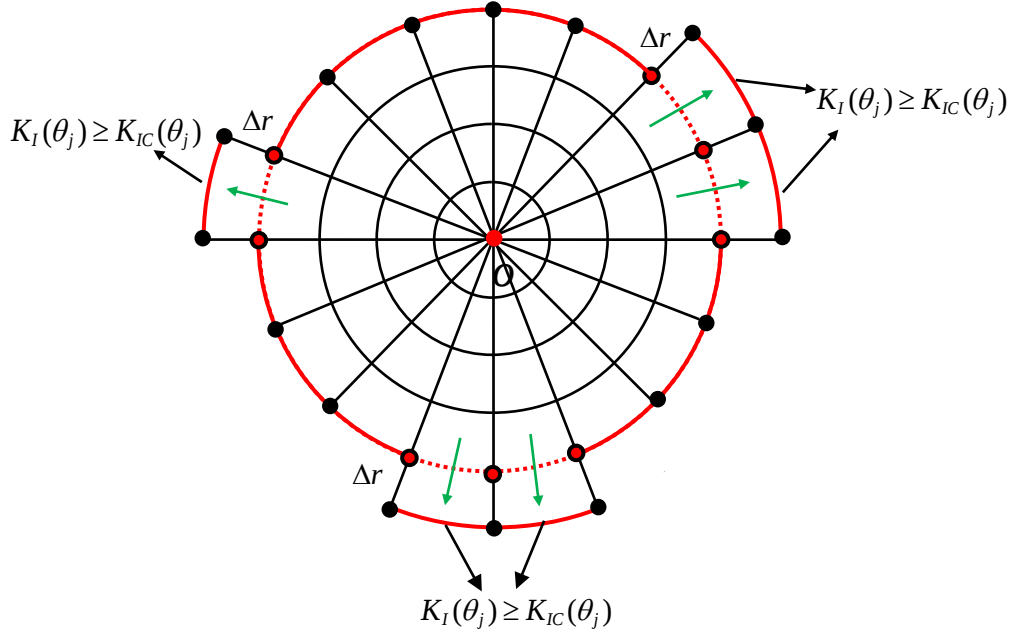


Рисунок 3.13. Схема роста трещины при моделировании

3.6.2. Формирование системы уравнений движения жидкости

При дискретизации уравнений движения жидкости на этапе роста трещины мы по-прежнему используем двумерную нумерацию для ячеек трещины (i, j) : i представляет собой номер ячейки в радиальном направлении, $i=1, 2, 3, \dots, m$, а j – номер ячейки в кольцевом направлении, $j=1, 2, 3, \dots, n$. Индекс k представляет собой шаг по времени. Следует отметить, что значение n фиксировано и зависит от $\Delta\theta$ ($n=2\pi/\Delta\theta$), а значение m изменяется с ростом трещины и равно радиальному номеру ячейки, наиболее удаленной от точечного источника (скважины), см. рисунок 3.12.

Полная дискретная форма уравнения (3.7) уже дана выше, а именно: уравнение (3.25) и его члены из уравнения (3.26). Поскольку уравнения движения жидкости для ячеек из одной кольцевой области (одинаковая радиальная координата r_i) имеют одинаковую форму, дискретные уравнения движения жидкости представляются по порядку для различных значений i . Обозначения в этом разделе такие же, как и в разделе 3.5.1.

Для всех треугольных ячеек (первые кольцевые ячейки): $i=1$

$$\begin{aligned} \frac{\mu' r_1}{\Delta t} (w_{1,j,k+1} - w_{1,j,k}) - \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3w_{1,j,k+1} + 2w_{2,j,k+1}}{5} \right)^3 (p_{2,j,k+1} - p_{1,j,k+1}) - \frac{Q_0 \mu'}{2\pi \Delta r} - \\ \frac{(w_{1,j,k+1} + w_{1,j+1,k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (p_{1,j+1,k+1} - p_{1,j,k+1}) + \frac{(w_{1,j-1,k+1} + w_{1,j,k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (p_{1,j,k+1} - p_{1,j-1,k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где вводится граничное условие (3.28). При $j=1$, $j-1=n$, поскольку кольцевые области замкнуты. Для первых трапецевидных ячеек (вторые кольцевые ячейки): $i=2$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu' r_2}{\Delta t} (w_{2,j,k+1} - w_{2,j,k}) - \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} (w_{2,j,k+1} + w_{3,j,k+1})^3 (p_{3,j,k+1} - p_{2,j,k+1}) + \\
& \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3w_{1,j,k+1} + 2w_{2,j,k+1}}{5} \right)^3 (p_{2,j,k+1} - p_{1,j,k+1}) - \frac{(w_{2,j,k+1} + w_{2,j+1,k+1})^3}{8r_2(\Delta \theta)^2} (p_{2,j+1,k+1} - p_{2,j,k+1}) + \\
& \frac{(w_{2,j-1,k+1} + w_{2,j,k+1})^3}{8r_2(\Delta \theta)^2} (p_{2,j,k+1} - p_{2,j-1,k+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Для трапециевидных ячеек ($3 \leq i < m$), не включающих границу трещины:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu' r_i}{\Delta t} (w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}) - \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (w_{i,j,k+1} + w_{i+1,j,k+1})^3 (p_{i+1,j,k+1} - p_{i,j,k+1}) + \\
& \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (w_{i-1,j,k+1} + w_{i,j,k+1})^3 (p_{i,j,k+1} - p_{i-1,j,k+1}) - \frac{(w_{i,j,k+1} + w_{i,j+1,k+1})^3}{8r_i(\Delta \theta)^2} (p_{i,j+1,k+1} - p_{i,j,k+1}) \\
& + \frac{(w_{i,j-1,k+1} + w_{i,j,k+1})^3}{8r_i(\Delta \theta)^2} (p_{i,j,k+1} - p_{i,j-1,k+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Для трапециевидных ячеек, включающих границу трещины, используется тот же подход, что и в случае этапа до роста трещины: используется $\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m_j^*+1/4,j,k+1}$ вместо

$\left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{m_j^*+1/2,j,k+1}$, чтобы избежать сингулярности матрицы коэффициентов в системе

уравнений. Кроме того, распределение давления последних трех ячеек по радиальному направлению предполагается линейным (уравнение (3.36)). Таким образом, дискретная форма уравнений для ячеек на границе трещины принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (w_{m_j^*,j,k+1} - w_{m_j^*,j,k}) - \frac{(w_{m_j^*,j,k+1} + w_{m_j^*,j+1,k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta \theta)^2} (p_{m_j^*,j+1,k+1} - p_{m_j^*,j,k+1}) + \\
& \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} w_{m_j^*,j,k+1}^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (w_{m_j^*-1,j,k+1} + w_{m_j^*,j,k+1})^3 \right] (p_{m_j^*,j,k+1} - p_{m_j^*-1,j,k+1}) + \\
& \frac{(w_{m_j^*,j-1,k+1} + w_{m_j^*,j,k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta \theta)^2} (p_{m_j^*,j,k+1} - p_{m_j^*,j-1,k+1}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

где m_j^* — это максимальный радиальный номер ячеек в радиальной области $\theta = \theta_j$. Это значит, что для радиальной области $\theta = \theta_j$ номер ячейки с границей трещины равен (m_j^*, j) . $r_{m_j^*}$ — это радиальная координата ячейки (m_j^*, j) , R_j является радиусом радиальной области $\theta = \theta_j$, $R_j - r_{m_j^*} = \Delta r/2$. В свою очередь m представляет собой максимальное значение из всех m_j^* . $\Delta r_{m_j^*} = 3\Delta r/4$, подобно $\Delta r_{m_j^*}$ на этапе до роста.

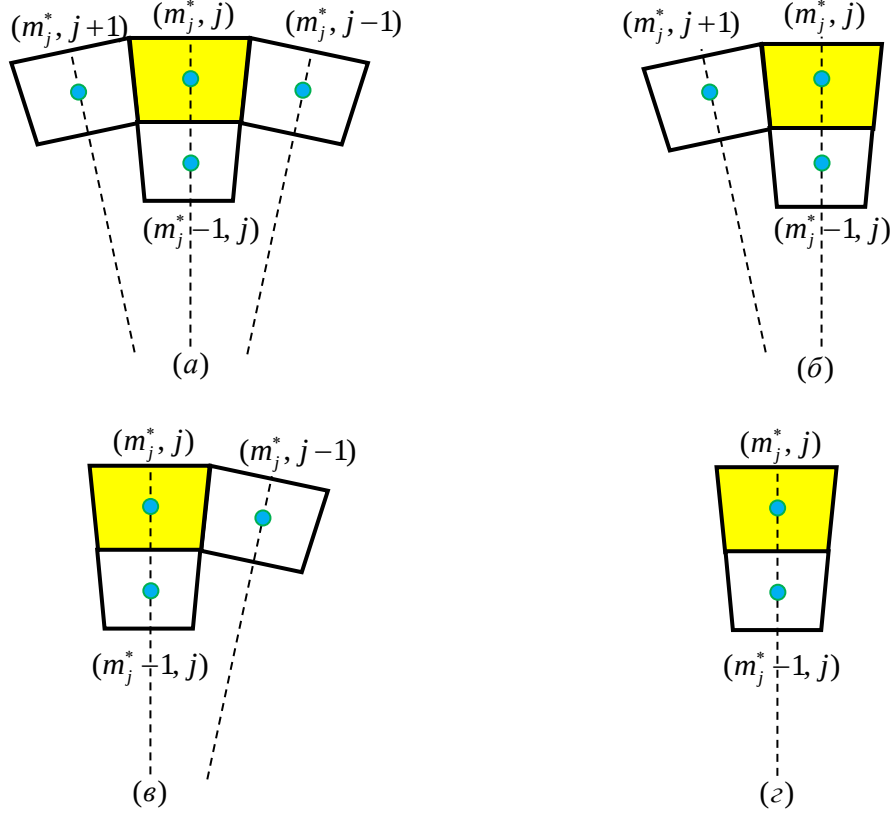


Рисунок 3.14. Виды позиционных отношений граничной ячейки (m_j^*, j) с соседними ячейками на этапе роста трещины при неоднородных K_{IC}

Следует отметить, что уравнение (3.50) особенно подходит для граничных ячеек с тремя соседними ячейками, см. рисунок 3.14 (а), но возможны также еще три разных положения граничных ячеек и соседних с ними ячеек из-за неравномерного распространения, см. рисунок 3.14 (б), (в), (г): на рисунке 3.14 (а) граничная ячейка (m_j^*, j) имеет 2 кольцевые соседние ячейки $(m_j^*, j+1)$, $(m_j^*, j-1)$ и 1 радиальную соседнюю ячейку (m_j^*-1, j) ; на рисунке 3.14 (б) граничная ячейка (m_j^*, j) имеет 1 кольцевую соседнюю ячейку $(m_j^*, j+1)$ и 1 радиальную соседнюю ячейку (m_j^*-1, j) ; на рисунке 3.14 (в) граничная ячейка (m_j^*, j) имеет 1 кольцевую соседнюю ячейку $(m_j^*, j-1)$ и 1 радиальную соседнюю ячейку (m_j^*-1, j) ; на рисунке 3.14 (г) граничная ячейка (m_j^*, j) имеет только 1 радиальную соседнюю ячейку (m_j^*-1, j) . Для этих трех различных положений (ситуации на рисунке 3.14 (б), (в), (г)) уравнение (3.50) принимает, соответственно, следующие формы:

$$\frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (w_{m_j^*, j, k+1} - w_{m_j^*, j, k}) - \frac{(w_{m_j^*, j, k+1} + w_{m_j^*, j+1, k+1})^3}{8 r_{m_j^*} (\Delta \theta)^2} (p_{m_j^*, j+1, k+1} - p_{m_j^*, j, k+1}) +$$

$$\frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8 \Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} w_{m_j^*, j, k+1}^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8 \Delta r} (w_{m_j^*-1, j, k+1} + w_{m_j^*, j, k+1})^3 \right] (p_{m_j^*, j, k+1} - p_{m_j^*-1, j, k+1}) = 0 \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (w_{m_j^*, j, k+1} - w_{m_j^*, j, k}) + \frac{(w_{m_j^*, j-1, k+1} + w_{m_j^*, j, k+1})^3}{8 r_{m_j^*} (\Delta \theta)^2} (p_{m_j^*, j, k+1} - p_{m_j^*, j-1, k+1}) + \\ & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8 \Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} w_{m_j^*, j, k+1}^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8 \Delta r} (w_{m_j^*-1, j, k+1} + w_{m_j^*, j, k+1})^3 \right] (p_{m_j^*, j, k+1} - p_{m_j^*-1, j, k+1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (w_{m_j^*, j, k+1} - w_{m_j^*, j, k}) + \\ & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8 \Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} w_{m_j^*, j, k+1}^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8 \Delta r} (w_{m_j^*-1, j, k+1} + w_{m_j^*, j, k+1})^3 \right] (p_{m_j^*, j, k+1} - p_{m_j^*-1, j, k+1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.6.3. Формирование системы давления жидкости и раскрытия трещины

Поскольку система, связывающая давление жидкости и раскрытие трещины, получается за счет использования трехмерного метода разрывных смещений, то зависит она только от количества ячеек и не зависит от формы трещины или движения жидкости. Таким образом, система, связывающая давление жидкости и раскрытие трещины, имеет одинаковую форму как на этапе до роста трещины, так и на этапе распространения трещины, а именно уравнение (3.40). Разница лишь в том, что количество ячеек N^* на этапе роста трещины больше, чем на этапе до роста трещины.

3.6.4. Соединение двух систем

На этапе роста трещины также требуется решить проблему объединения двух форм нумерации ячеек: в системе движения жидкости используется двумерная нумерация (i, j) для ячеек, а в системе давления жидкости и раскрытия трещины используется одномерная нумерация $\xi = 1, 2, 3, \dots, N^*$ (N^* – суммарное число ячеек) для ячеек. Мы также используем матрицу преобразования T^* , чтобы объединить эти формы нумерации ячеек и соединить две системы уравнений.

Следует отметить, что матрица преобразования T^* на этапе роста трещины отличается от T^* на этапе до роста трещины. Все элементы матрицы T^* на этапе до роста трещины заполняются соответственными одномерными номерами $1, 2, 3, \dots, N^*$, см. таблицу 3.1 (все значения больше 0), и так как начальная трещина имеет дискообразную форму, все радиусы $R(\theta_j)$ одинаковы. Однако на этапе роста трещины, из-за неоднородности K_{IC} , скорости распространения трещины в различных радиальных областях $\theta = \theta_j$ могут быть не равны, что приведет к различным значениям $R(\theta_j)$ различных радиальных областей $\theta = \theta_j$, и профиль трещины станет неправильным. Таким образом, некоторые ячейки в одной кольцевой

области $r = r_i$ находятся в трещине, а некоторые ячейки – вне трещины, как ячейки, соответствующие чёрным точкам «1» и «2» на рисунке 3.15 из одной кольцевой области (радиальные координаты равны): ячейка с точкой «1» – внутри трещины, а ячейка с точкой «2» – вне трещины. Размер матрицы $T^*(m, n)$ на этапе роста трещины: n фиксировано, как и на этапе до роста трещины, m является максимальным значением среди всех m_j^* , то есть количеством ячеек в радиальной области с максимальным радиусом $R_{\max}$ (подобная область показана красной стрелкой на рисунке 3.15). Это значит, что матрица T^* представляет зону, обозначенную красной пунктирной линией на рисунке 3.15, в которой есть как область трещины (серая и жёлтая области), так и неразрывная зона (зеленая область).

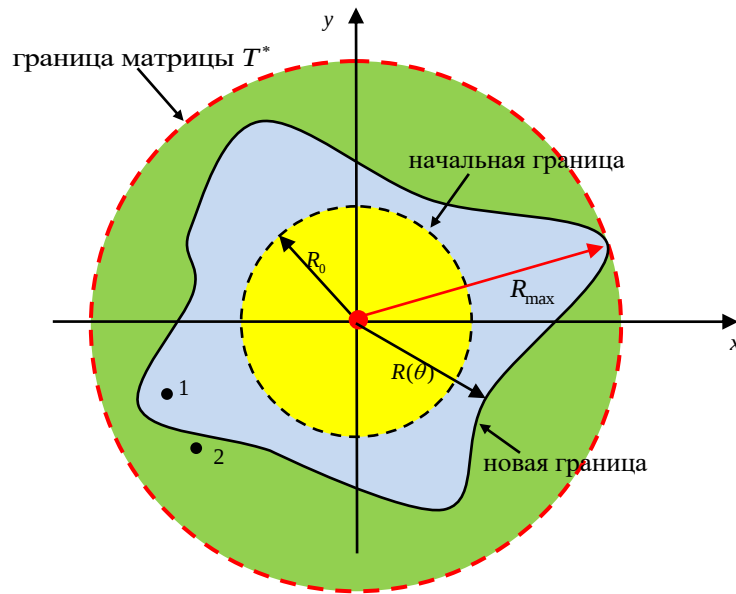


Рисунок 3.15. Схема области матрицы преобразования T^* на плоскости xoy , включающей область трещины (серая и жёлтая области) и неразрывную зону (зеленая область)

Для того чтобы в процессе расчёта определить, какие элементы из матрицы T^* представляют область трещины, а какие элементы из матрицы T^* представляют неразрывную область, мы используем цифру «0» для обозначения неразрывной области, а область трещины заполняется своими одномерными номерами ячеек. Таким образом, элементы в таблице T^* представляют номера из одномерной нумерации $\xi_{i,j}$ ($\xi_{i,j} = 1, 2, 3, \dots, N^*$), а положения элементов (номера строк и столбцов для каждого элемента) представляют собой номера из двумерной нумерации (i, j) , за исключением нулевых элементов, представляющих собой неразрывную область. Здесь N^* – количество ячеек трещины и $N^* \leq m \cdot n$ из-за наличия ячеек неразрывной области. В таблице 3.3 показан пример матрицы T^* для этапа роста трещины на предыдущем шаге по времени: матрица T^* имеет N^* ненулевых элементов и $3n-3$ нулевых элементов. Как видно из таблицы, радиальная область трещины $j=3$ больше остальных радиальных областей на 3 ячейки. Области, в которых находятся элементы «0», соответствуют неразрывной области, то есть зеленой области на рисунке 3.15.

Таблица 3.3

Пример матрицы преобразования T^* для соединения двух форм нумерации ячеек на предыдущем шаге по времени

$i \backslash j$	1	2	3	...	$n-1$	n
1	1	2	3	...	$n-1$	n
2	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n-1$	$2n$
3	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n-1$	$3n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$m-3$	$(m-4)n+1$	$(m-4)n+2$	$(m-4)n+3$	...	N^*-4	N^*-3
$m-2$	0	0	N^*-2	0	0	0
$m-1$	0	0	N^*-1	0	0	0
m	0	0	N^*	0	0	0

Таблица 3.4

Пример матрицы преобразования T^* для соединения двух форм кодирования ячеек на текущем шаге по времени

$i \backslash j$	1	2	3	...	$n-1$	n
1	1	2	3	...	$n-1$	n
2	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n-1$	$2n$
3	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n-1$	$3n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$m-3$	$(m-4)n+1$	$(m-4)n+2$	$(m-4)n+3$	...	N^*-4	N^*-3
$m-2$	0	N^*+1	N^*-2	0	0	N^*+3
$m-1$	0	0	N^*-1	0	0	0
m	0	0	N^*	0	0	0
$m+1$	0	0	N^*+2	0	0	0

Если на текущем шаге по времени имеются 3 радиальные области $j=2, 3, n$, удовлетворяющие условию распространения трещины, то количество ячеек трещины должно увеличиться на 3, и матрицу T^* необходимо обновить. Поскольку самой большой

радиальной областью является область $j=3$ ($m=m_3^*$), размерность матрицы T^* по строкам увеличивается до $m+1$. Одномерные номера для трех новых ячеек трещины на областях $j=2, 3, n$ нумеруются по возрастанию j для этих областей. Так как на предыдущем шаге по времени нумерация достигала числа N^* , номера для новых ячеек трещины в радиальных областях $j=2, 3, n$ принимают значения N^*+1 , N^*+2 , N^*+3 , соответственно, как показано в таблице 3.4: красные области – это области, изменившиеся на текущем шаге по времени из-за неоднородного роста трещины.

Соединим систему движения жидкости и систему давления жидкости и раскрытия трещины, подставив выражения давления через раскрытия всех ячеек трещины (уравнение (3.40)) в уравнения (3.47) – (3.53), для $i=1$:

$$f_{\xi_{1,j}} = \frac{\mu' r_1}{\Delta t} (D_{\xi_{1,j}}^{k+1} - D_{\xi_{1,j}}^k) - \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{Q_0 \mu'}{2\pi \Delta r} -$$

$$\frac{(D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{1,j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1,j+1}}^{\xi}, -A_{\xi_{1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{1,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{1,j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{1,j-1}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} = 0, \quad (3.54)$$

где $\xi_{i,j} \neq 0$, поскольку равенство $\xi_{i,j} = 0$ означает, что ячейка (i, j) находится на неразрывной области и в ней нет движения жидкости, поэтому уравнение движения жидкости к этой ячейке не применяется. Верхний индекс k представляет предыдущий шаг по времени, а $k+1$ – текущий шаг по времени. Нижний индекс $\xi_{i,j}$ представляет значения на месте (i, j) матрицы T^* . $A_{\xi_{i,j}}^{\xi}$ представляет собой $\xi_{i,j}$ -ю строку в матрице A . $D_{\xi_{i,j}}$ – это $\xi_{i,j}$ -й элемент вектора $\mathbf{D}$. Если $j=1$, то $j-1=n$. Те же обозначения используются ниже для $i=2$:

$$f_{\xi_{2,j}} = \frac{\mu' r_2}{\Delta t} (D_{\xi_{2,j}}^{k+1} - D_{\xi_{2,j}}^k) - \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{3,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{2,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1}}^{\xi}, -A_{\xi_{2,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{2,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{2,j-1}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} = 0. \quad (3.55)$$

Для трапециевидных ячеек ($3 \leq i < m$), не включающих границу трещины:

$$f_{\xi_{i,j}} = \frac{\mu' r_i}{\Delta t} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} - D_{\xi_{i,j}}^k) - \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{i,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{i-1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}}^{\xi}, -A_{\xi_{i,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{i,j}}^{\xi}, -A_{\xi_{i,j-1}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} = 0. \quad (3.56)$$

Для трапецевидных ячеек, включающих границу трещины ($i = m_j^*$), с тремя соседними ячейками трещины:

$$f_{\xi_{i,j}} = \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} - D_{\xi_{i,j}}^k) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}}, -A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} + \quad (3.57)$$

$$\frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} = 0,$$

с двумя соседними ячейками трещины ($i, j+1$) и ($i-1, j$):

$$f_{\xi_{i,j}} = \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} - D_{\xi_{i,j}}^k) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}}, -A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} +$$

$$\frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} = 0, \quad (3.58)$$

с двумя соседними ячейками трещины ($i, j-1$) и ($i-1, j$):

$$f_{\xi_{i,j}} = \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} - D_{\xi_{i,j}}^k) + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1}$$

$$+ \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} = 0, \quad (3.59)$$

только с одной соседней ячейкой трещины ($i-1, j$):

$$f_{\xi_{i,j}} = \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} - D_{\xi_{i,j}}^k) +$$

$$\frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j}}, -A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} = 0. \quad (3.60)$$

Таким образом, получаем замкнутую нелинейную систему уравнений $\mathbf{F}$, составленную из уравнений $f_{\xi_{i,j}}$:

$$\mathbf{F} = \left(f_{\xi_{i,j}} \right)^T = 0. \quad (3.61)$$

В полученной системе N^* алгебраических уравнений и N^* неизвестных. Уравнения $f_{\xi_{i,j}}$ расположены в системе $\mathbf{F}$ по порядку возрастания $\xi_{i,j}$, а именно: $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_{N^*})^T$ ($\xi_{i,j} = 1, 2, 3, \dots, N^*$). Нелинейная система уравнений (3.61) имеет тот же вид, что и система (3.41). Для решения системы (3.61) также используем метод Ньютона, который уже был подробно описан в разделе 3.5.4, поэтому не будет представлен здесь. Матрица Якоби системы уравнений (3.61) будет дана в Приложении 3.2.

3.7. Вывод

В данной главе построена плоско-трехмерная модель гидравлической трещины, включающая этап до роста трещины и этап распространения трещины с учетом неоднородности пласта (различные K_{IC}). В этой модели учитываются двумерное движение жидкости, трехмерная деформация и двумерное распространение трещины (по радиальным направлениям в одной плоскости). Трехмерный метод разрывных смещений используется для получения трехмерной зависимости давления жидкости от раскрытия трещины и для нахождения коэффициентов интенсивности напряжений на границе трещины, сравниваемых с критическими значениями K_{IC} в качестве критерия роста трещины. Для решения соединенной системы уравнений используется итерационный численный метод Ньютона, который позволяет избежать вложенных итераций.

Подробные результаты численных расчетов и их сравнительный анализ будут приведены в следующей главе.

Приложение 3.1. Матрица Якоби системы уравнений на этапе до роста трещины

В системе (3.40) имеются функции $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ с неизвестными $D_{\xi_i}^{k+1}$, ($i=1,2,3,\dots,m$), где номера ячеек ξ_i содержатся в матрице T^* и представлены во второй строке таблицы 3.2. Частные производные для функции f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial D_{\xi_1}^{k+1}} &= \frac{\mu' r_1 \Delta r}{\Delta t} - \frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left[3 \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^2 \frac{3}{5} (A_{\xi_2} - A_{\xi_1}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_1} - A_{\xi_1, \xi_1}) \right], \\ \frac{\partial f_1}{\partial D_{\xi_2}^{k+1}} &= -\frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left[3 \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^2 \frac{2}{5} (A_{\xi_2} - A_{\xi_1}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_2} - A_{\xi_1, \xi_2}) \right], \\ \frac{\partial f_1}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} &= -\frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_i} - A_{\xi_1, \xi_i}); \end{aligned} \quad (\text{п. 3.1})$$

где $i=3,4,\dots,m$, A_{ξ_i} – это ξ_i -я строка в матрице $\mathbf{A}$, A_{ξ_i, ξ_j} – это элемент, находящийся на ξ_i -ой строке и в ξ_j -ом столбце матрицы $\mathbf{A}$. Далее используются те же обозначения.

Частные производные для функции f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial D_{\xi_1}^{k+1}} &= -\frac{r_{2+1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_3, \xi_1} - A_{\xi_2, \xi_1}) + \\ &\quad \frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left[3 \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^2 \frac{3}{5} (A_{\xi_2, \xi_1} - A_{\xi_1, \xi_1}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_1} - A_{\xi_1, \xi_1}) \right], \\ \frac{\partial f_2}{\partial D_{\xi_2}^{k+1}} &= \frac{\mu' r_2 \Delta r}{\Delta t} - \frac{r_{2+1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_3, \xi_2} - A_{\xi_2, \xi_2}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_3, \xi_2} - A_{\xi_2, \xi_2}) \right] + \\ &\quad \frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left[3 \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^2 \frac{2}{5} (A_{\xi_2, \xi_2} - A_{\xi_1, \xi_2}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_2} - A_{\xi_1, \xi_2}) \right], \\ \frac{\partial f_2}{\partial D_{\xi_3}^{k+1}} &= -\frac{r_{2+1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_3, \xi_3} - A_{\xi_2, \xi_3}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_3, \xi_3} - A_{\xi_2, \xi_3}) \right] + \\ &\quad \frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_3} - A_{\xi_1, \xi_3}), \\ \frac{\partial f_2}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} &= -\frac{r_{2+1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_2}^{k+1} + D_{\xi_3}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_3, \xi_i} - A_{\xi_2, \xi_i}) + \frac{6r_{1+1/2}}{5\Delta r} \left(\frac{3}{5} D_{\xi_1}^{k+1} + \frac{2}{5} D_{\xi_2}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_2, \xi_i} - A_{\xi_1, \xi_i}); \end{aligned} \quad (\text{п. 3.2})$$

где $i = 4, \dots, m$. Частные производные для функции f_χ ($3 \leq \chi \leq m-1$) разделяются на 4 части. Для $i < \chi-1$ или $i > \chi+1$:

$$\frac{\partial f_\chi}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} = -\frac{r_{\chi+1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_\chi}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_{\chi+1}, \xi_i} - A_{\xi_\chi, \xi_i}) + \frac{r_{\chi-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_\chi}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_\chi, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}), \quad (\text{п. 3.3})$$

для $i = \chi-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\chi}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} &= -\frac{r_{\chi+1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_\chi}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_{\chi+1}, \xi_i} - A_{\xi_\chi, \xi_i}) + \\ &\quad \frac{r_{\chi-1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_\chi}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_\chi, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_\chi}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_\chi, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}) \right], \end{aligned} \quad (\text{п. 3.4})$$

для $i = \chi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\chi}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} &= \frac{\mu' r_\chi \Delta r}{\Delta t} - \frac{r_{\chi+1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_\chi}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_{\chi+1}, \xi_i} - A_{\xi_\chi, \xi_i}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_\chi}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_{\chi+1}, \xi_i} - A_{\xi_\chi, \xi_i}) \right] \\ &\quad + \frac{r_{\chi-1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_\chi}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_\chi, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_\chi}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_\chi, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}) \right], \end{aligned} \quad (\text{п.3.5})$$

для $i = \chi + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\chi}}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} = & -\frac{r_{\chi+1/2}}{8\Delta r} \left[3 \left(D_{\xi_{\chi}}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_{\chi+1}}, -A_{\xi_{\chi}}) \mathbf{D}^{k+1} + \left(D_{\xi_{\chi}}^{k+1} + D_{\xi_{\chi+1}}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_{\chi+1}, \xi_i} - A_{\xi_{\chi}, \xi_i}) \right] + \\ & \frac{r_{\chi-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{\chi-1}}^{k+1} + D_{\xi_{\chi}}^{k+1} \right)^3 (A_{\xi_{\chi}, \xi_i} - A_{\xi_{\chi-1}, \xi_i}); \end{aligned} \quad (\text{п. 3.6})$$

Частные производные для функции f_m для $i < m-1$:

$$\frac{\partial f_m}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} = \left[-\frac{r_{m+1/2}}{4\Delta r} \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} \left(D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 + \frac{r_{m-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 \right] (A_{\xi_m, \xi_i} - A_{\xi_{m-1}, \xi_i}), \quad (\text{п. 3.7})$$

для $i = m-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} = & \frac{r_{m-1/2}}{8\Delta r} 3 \left(D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1} \right)^2 (A_{\xi_m}, -A_{\xi_{m-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \\ & \left[-\frac{r_{m+1/4}}{4\Delta r} \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} \left(D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 + \frac{r_{m-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 \right] (A_{\xi_m, \xi_i} - A_{\xi_{m-1}, \xi_i}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.8})$$

для $i = m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial D_{\xi_i}^{k+1}} = & \frac{3\mu' r_m \Delta r}{4\Delta t} + \left[-\frac{r_{m+1/4}}{4\Delta r} \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} 3 \left(D_{\xi_m}^{k+1} \right)^2 + \frac{r_{m-1/2}}{8\Delta r} 3 \left(D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1} \right)^2 \right] (A_{\xi_m}, -A_{\xi_{m-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \\ & \left[-\frac{r_{m+1/4}}{4\Delta r} \frac{R_0 - r_m}{r_m - r_{m-1}} \left(D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 + \frac{r_{m-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{m-1}}^{k+1} + D_{\xi_m}^{k+1} \right)^3 \right] (A_{\xi_m, \xi_i} - A_{\xi_{m-1}, \xi_i}). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.9})$$

Приложение 3.2. Матрица Якоби системы уравнений на этапе роста трещины

Система (3.61) состоит из функций $f_{\xi_i, j}$ ($\xi_i, j = 1, 2, 3, \dots, N^*$) с неизвестными $D_{\xi_i, j}^{k+1}$, ($i = 1, 2, 3, \dots, m_j^*$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$). Частные производные для функции $f_{\xi_i, j}$ имеют следующие формы.

(1) Для всех треугольных ячеек (первые кольцевые ячейки) $i = 1$: если $\eta = i$, $\varsigma = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_i, j}}{\partial D_{\xi_{\eta, \varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} 3 \left(\frac{3D_{\xi_{1, j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2, j}}^{k+1}}{5} \right)^2 \frac{3}{5} (A_{\xi_{2, j}}, -A_{\xi_{1, j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1, j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2, j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2, j}, \xi_{1, j}} - A_{\xi_{1, j}, \xi_{1, j}}) \\ & - \frac{3(D_{\xi_{1, j}}^{k+1} + D_{\xi_{1, j+1}}^{k+1})^2}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1, j+1}}, -A_{\xi_{1, j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{1, j}}^{k+1} + D_{\xi_{1, j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1, j+1}, \xi_{1, j}} - A_{\xi_{1, j}, \xi_{1, j}}) + \\ & \frac{3(D_{\xi_{1, j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{1, j}}^{k+1})^2}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1, j}}, -A_{\xi_{1, j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{1, j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{1, j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta \theta)^2} (A_{\xi_{1, j}, \xi_{1, j-1}} - A_{\xi_{1, j-1}, \xi_{1, j}}) + \frac{\mu' r_1}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{п. 3.10})$$

где $A_{\xi_{i,j}}$ – это $\xi_{i,j}$ -я строка в матрице $\mathbf{A}$, $A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}}$ – это элемент, находящийся на $\xi_{i,j}$ -ой строке и в $\xi_{\eta,\zeta}$ -ом столбце матрицы $\mathbf{A}$. $D_{\xi_{i,j}}^{k+1}$ – это $\xi_{i,j}$ -й элемент вектора $\mathbf{D}$. Далее используются те же обозначения. Если $\eta = i+1$, $\zeta = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} &= \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{2,j}}) + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{2,j}}) - \\ &\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} 3 \left(\frac{3D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^2 \frac{2}{5} (A_{\xi_{2,j}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{2,j}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.11})$$

если $\eta = i$, $\zeta = j-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} &= \frac{3(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j-1}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{1,j-1}}) - \\ &\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j-1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j-1}}) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{1,j-1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j-1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.12})$$

если $\eta = i$, $\zeta = j+1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} &= -\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j+1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j+1}}) + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j+1}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{1,j+1}}) - \\ &\frac{3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^2}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{1,j+1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{1,j+1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.13})$$

если $(\eta, \zeta) \neq (i, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} &= -\frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}}) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}}) - \\ &\frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_1(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{\eta,\zeta}}). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.14})$$

(2) Для первых трапециевидных ячеек (вторые кольцевые ячейки) $i=2$, если $\eta=i$, $\varsigma=j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{3r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^2 \left(A_{\xi_{3,j}} - A_{\xi_{2,j}} \right) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^3 \left(A_{\xi_{3,j},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j}} \right) + \\ & \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} 3 \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^2 \frac{2}{5} \left(A_{\xi_{2,j}} - A_{\xi_{1,j}} \right) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 \left(A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{2,j}} \right) \\ & - \frac{3(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^2}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{2,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j}}) + \\ & \frac{3(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^2}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j}} - A_{\xi_{2,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{2,j}}) + \frac{\mu' r_2}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{п. 3.15})$$

если $\eta=i+1$, $\varsigma=j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{3r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^2 \left(A_{\xi_{3,j}} - A_{\xi_{2,j}} \right) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^3 \left(A_{\xi_{3,j},\xi_{3,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{3,j}} \right) \\ & + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 \left(A_{\xi_{2,j},\xi_{3,j}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{3,j}} \right) - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{3,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{3,j}}) + \\ & \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{3,j}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{3,j}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.16})$$

если $\eta=i-1$, $\varsigma=j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^3 \left(A_{\xi_{3,j},\xi_{1,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j}} \right) + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} 3 \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^2 \frac{3}{5} \left(A_{\xi_{2,j}} - A_{\xi_{1,j}} \right) \mathbf{D}^{k+1} \\ & + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 \left(A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{1,j}} \right) - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{1,j}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j}}) + \\ & \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{1,j}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{1,j}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.17})$$

если $\eta=i$, $\varsigma=j-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{3(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^2}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j}} - A_{\xi_{2,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j-1}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{2,j-1}}) - \\ & \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} \left(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1} \right)^3 \left(A_{\xi_{3,j},\xi_{2,j-1}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j-1}} \right) + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 \left(A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j-1}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{2,j-1}} \right) \\ & - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{2,j-1}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j-1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.18})$$

если $\eta = i$, $\varsigma = j+1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{3(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^2}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{2,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j+1}}) - \\ & \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{3,j},\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j+1}}) + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{2,j+1}}) \\ & + \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{2,j+1}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{2,j+1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.19})$$

если $(\eta, \varsigma) \neq (i, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{2,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{(D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j+1}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j+1},\xi_{\eta,\varsigma}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{\eta,\varsigma}}) + \frac{(D_{\xi_{2,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{2,j}}^{k+1})^3}{8r_2(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{2,j},\xi_{\eta,\varsigma}} - A_{\xi_{2,j-1},\xi_{\eta,\varsigma}}) - \\ & \frac{r_{2+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{2,j}}^{k+1} + D_{\xi_{3,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{3,j},\xi_{\eta,\varsigma}} - A_{\xi_{2,j},\xi_{\eta,\varsigma}}) + \frac{6r_{1+1/2}}{5(\Delta r)^2} \left(\frac{3D_{\xi_{1,j}}^{k+1} + 2D_{\xi_{2,j}}^{k+1}}{5} \right)^3 (A_{\xi_{2,j},\xi_{\eta,\varsigma}} - A_{\xi_{1,j},\xi_{\eta,\varsigma}}). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.20})$$

(3) Для трапециевидных ячеек ($3 \leq i < m$), не включающих границу трещины, если $\eta = i$, $\varsigma = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & -\frac{3r_{1+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^2 (A_{\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}}) \\ & + \frac{3r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2 (A_{\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j}}) \\ & - \frac{3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^2}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}}) \\ & + \frac{3(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j}}) + \frac{\mu' r_i}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{п. 3.21})$$

если $\eta = i+1$, $\varsigma = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i+1,j}}) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i+1,j}}) \\ & - \frac{3r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^2 (A_{\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i+1,j}}) \\ & + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i+1,j}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i+1,j}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.22})$$

если $\eta = i-1, \zeta = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} = & \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i-1,j}}) - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}}) - \\ & \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{i-1,j}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}}) + \frac{3r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2 (A_{\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i-1,j}}) \mathbf{D}^{k+1} \\ & + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i-1,j}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.23})$$

если $\eta = i, \zeta = j-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} = & \frac{3(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}} - A_{\xi_{i,j-1}}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j-1}}) - \\ & \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{i,j-1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}}) + \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j-1}}) - \\ & \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j-1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.24})$$

если $\eta = i, \zeta = j+1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} = & -\frac{3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^2}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j}}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}}) - \\ & \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}}) + \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j+1}}) + \\ & \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j+1}}), \end{aligned} \quad (\text{п. 3.25})$$

если $(\eta, \zeta) \neq (i, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\zeta}}^{k+1}} = & -\frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}}) + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_i(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{\eta,\zeta}}) - \\ & \frac{r_{i+1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i+1,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i+1,j},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}}) + \frac{r_{i-1/2}}{8(\Delta r)^2} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 (A_{\xi_{i,j},\xi_{\eta,\zeta}} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{\eta,\zeta}}). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.26})$$

(4) Для трапецевидных ячеек, включающих границу трещины ($i = m_j^*$), с тремя соседними ячейками трещины, если $\eta = i, \zeta = j$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} 3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2 + \frac{3r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2 \right] (A_{\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} \\
& + \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j}}^{\xi}) - \\
& \frac{3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^2}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}}^{\xi}) + \\
& \frac{3(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j}}^{\xi}) + \frac{\mu' r_{m_j^*}}{\Delta t},
\end{aligned}
\tag{п. 3.27}$$

если $\eta = i-1, \varsigma = j$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i-1,j}}^{\xi}) + \\
& \frac{3}{\Delta r_{m_j^*}} \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2 (A_{\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i-1,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}}^{\xi}) + \\
& \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i-1,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i-1,j}}^{\xi}),
\end{aligned}
\tag{п. 3.28}$$

если $\eta = i, \varsigma = j-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j-1}}^{\xi}) + \\
& \frac{3(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^2}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j-1}}^{\xi}) - \\
& \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j-1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j-1}}^{\xi}),
\end{aligned}
\tag{п. 3.29}$$

если $\eta = i, \varsigma = j+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = & \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} (D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} (D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3 \right] (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}}^{\xi} - A_{\xi_{i-1,j},\xi_{i,j+1}}^{\xi}) - \\
& \frac{3(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^2}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j}}^{\xi}) \mathbf{D}^{k+1} - \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j+1},\xi_{i,j+1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}}^{\xi}) + \\
& \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*}(\Delta\theta)^2} (A_{\xi_{i,j},\xi_{i,j+1}}^{\xi} - A_{\xi_{i,j-1},\xi_{i,j+1}}^{\xi}),
\end{aligned}
\tag{п. 3.30}$$

если $(\eta, \varsigma) \neq (i, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\xi_{i,j}}}{\partial D_{\xi_{\eta,\varsigma}}^{k+1}} = \frac{1}{\Delta r_{m_j^*}} & \left[-\frac{r_{m_j^*+1/4}}{8\Delta r} \frac{R_j - r_{m_j^*}}{r_{m_j^*} - r_{m_j^*-1}} \left(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} \right)^3 + \frac{r_{m_j^*-1/2}}{8\Delta r} \left(D_{\xi_{i-1,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1} \right)^3 \right] \left(A_{\xi_{i,j}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} - A_{\xi_{i-1,j}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} \right) - \\ & \frac{(D_{\xi_{i,j}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j+1}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*} (\Delta \theta)^2} \left(A_{\xi_{i,j+1}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} - A_{\xi_{i,j}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} \right) + \frac{(D_{\xi_{i,j-1}}^{k+1} + D_{\xi_{i,j}}^{k+1})^3}{8r_{m_j^*} (\Delta \theta)^2} \left(A_{\xi_{i,j}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} - A_{\xi_{i,j-1}, \xi_{\eta,\varsigma}}^{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (\text{п. 3.31})$$

Частные производные для ситуаций ячейки (i, j) с двумя соседними ячейками трещины $(i, j+1)$ и $(i-1, j)$, с двумя соседними ячейками трещины $(i, j-1)$ и $(i-1, j)$, а также только с одной соседней ячейкой трещины $(i-1, j)$ можно легко получить из уравнений (п. 3.27) – (п. 3.31), поэтому здесь они приведены не будут.

Глава 4. Плоско-трехмерное моделирование распространения гидравлического разрыва в неоднородных средах: часть численных решений и сравнительных анализов

В главе 3 подробно изложена теория, которая лежит в основе модели, включающей уравнения упругости, уравнения движения жидкости, начальные и граничные условия, условия роста трещины, а также вычислительную дискретизацию для трещины, основных уравнений и основных условий и вычислительные методы (трехмерный метод разрывных смещений и итерационный метод Ньютона) для решения плоско-трехмерной задачи распространения гидравлического разрыва в средах, характеризующихся неоднородными критическими значениями коэффициента интенсивности напряжений K_{IC} (трещиностойкость).

В настоящей главе приведён численный неявный алгоритм для поиска численных решений, включающих распределение давления жидкости, раскрытие трещины, скорости роста различных радиальных областей и поле скорости жидкости на этапах до роста и роста трещины, чтобы показать динамику роста трещины, динамику движения жидкости в трещине и эволюцию формы трещины от времени. Результаты в этой главе опубликованы в работах автора [167, 168].

Кроме того, представлены численные сравнительные эксперименты: эксперименты по различным значениям трещиностойкости (K_{IC}) на различных радиальных областях пласта, эксперименты по различным положениям радиальных областей неоднородной трещиностойкости и эксперименты по различным долям радиальных областей пласта с различными трещиностойкостями, чтобы узнать, как трещина распространяется при различных количествах, положениях и размерах радиальных областей с неоднородной трещиностойкостью пласта и как различается распространение трещины в этих случаях. Эти сравнительные результаты могут помочь нам более глубоко понять закономерности распространения трещин в неоднородных средах.

4.1. Численный алгоритм

Основные алгоритмы одинаковы как на этапе до роста трещины, так и на этапе роста трещины. Основные различия заключаются в том, что на этапе роста в уравнениях движения жидкости добавляется один член, описывающий движение жидкости по кольцевому направлению, и в том, что матрица преобразования T^* на этапе роста трещины имеет более сложный вид, чем на этапе до роста трещины. Поэтому мы используем один и тот же численный алгоритм для расчета двух этапов эволюции роста трещины.

Поскольку в начальный момент $t=0$ задается давление жидкости $\mathbf{p}^0$, раскрытие трещины $\mathbf{D}^0$ можно получить трехмерным методом разрывных смещений. Это значит, что в алгоритме решения, включающем давление жидкости $\mathbf{p}^k$, раскрытие трещины $\mathbf{D}^k$ и коэффициенты интенсивности напряжений K_I^k известны на предыдущем шаге по времени $t = t_k$. В том числе известно, что коэффициенты интенсивности напряжений всех радиальных областей трещины выполняют условие $K_I^k(\theta_j) < K_{IC}(\theta_j)$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, так как если коэффициенты интенсивности напряжений не выполняют данное условие, это значит, что некоторые радиальные области трещины должны были расти на предыдущем шаге, и, таким образом, $(\mathbf{p}^k, \mathbf{D}^k, K_I^k)$ не являются корректными решениями модели.

Итерационный алгоритм может быть разработан следующим образом: сначала на основании решения раскрытия трещины на предыдущем шаге по времени получаем приближенное решение раскрытия трещины на текущем шаге по времени, обозначим его $\mathbf{D}_*^{k+1}$; затем подставляем $\mathbf{D}_*^{k+1}$ в объединенную систему (3.41) или (3.61) и по итерационному методу Ньютона получаем численное решение раскрытия трещины $\mathbf{D}'$, удовлетворяющее условию сходимости (3.44). Подставляем решение $\mathbf{D}'$ в уравнения (3.40) и (3.45) для получения давления $\mathbf{p}'$ и коэффициентов интенсивности напряжений K_I' . Далее подставляем K_I' в критерий распространения трещины, т. е. в уравнение (3.46), чтобы получить множество номеров j^* радиальных областей $\theta = \theta_{j^*}$, для которых выполняется условие роста трещины и которые распространяются. Следует отметить, что на этапе до роста трещины j^* отсутствуют, а на этапе роста трещины множество j^* может быть как пусто, так и не пусто.

Если j^* пусто, это значит, что $(\mathbf{p}', \mathbf{D}', K_I')$ являются решениями на текущем шаге и сохраняются в качестве $(\mathbf{p}^{k+1}, \mathbf{D}^{k+1}, K_I^{k+1})$, которые будут использованы на следующем шаге по времени как решения модели на предыдущем шаге.

Если j^* не пусто, это значит, что есть радиальные области θ_{j^*} , которые должны распространяться, количество ячеек трещины N^* увеличивается, и соответствующую матрицу коэффициентов $\mathbf{A}$ нужно обновить. После этого снова оцениваем решение раскрытия трещины $\mathbf{D}_*^{k+1}$, у которого добавляются новые члены из-за распространения трещины. Потом, используя метод Ньютона и уравнения (3.40) и (3.45), получим новые $(\mathbf{p}', \mathbf{D}', K_I')$. Если $K_I'(\theta_j) < K_{IC}(\theta_j)$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, это значит, что новые $(\mathbf{p}', \mathbf{D}', K_I')$ являются решениями на текущем шаге, обозначим их как $(\mathbf{p}^{k+1}, \mathbf{D}^{k+1}, K_I^{k+1})$. Также наоборот, радиальные области, выполняющие условие $K_I'(\theta_{j^*}) \geq K_{IC}(\theta_{j^*})$, растут, ввиду чего следует обновить N^* и $\mathbf{A}$. Подобное циклическое вычисление продолжается для новых $(\mathbf{p}', \mathbf{D}', K_I')$, пока множество j^* не станет пусто. Наконец, последние полученные решения $(\mathbf{p}', \mathbf{D}', K_I')$, выполняющие условия $K_I'(\theta_j) < K_{IC}(\theta_j)$ для всех $j = 1, 2, 3, \dots, n$, сохраняются в качестве решения текущего шага $(\mathbf{p}^{k+1}, \mathbf{D}^{k+1}, K_I^{k+1})$. Подробная схема итерационного алгоритма показана на рисунке 4.1.

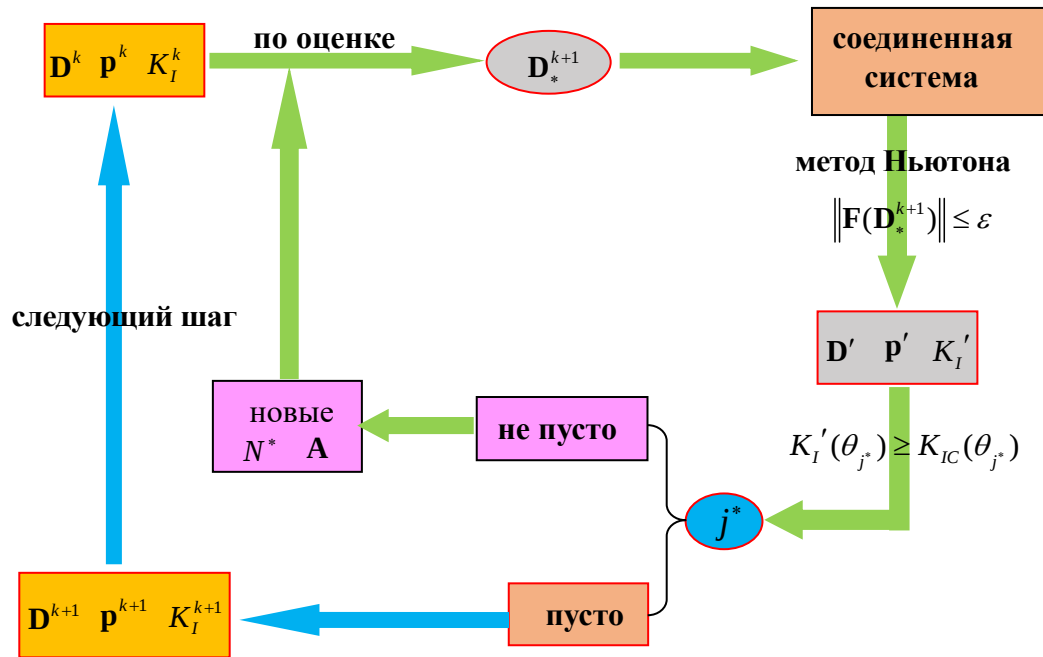


Рисунок 4.1. Схема итерационного алгоритма для решения модели

4.2. Численные решения для пары симметричных ослабленных радиальных областей

На основе теории моделирования из главы 3 и численного алгоритма из раздела 4.1, в математических пакетах «MATLAB R2018a» написаны вычислительные программы для численного расчета плоско-трехмерной модели роста трещины в неоднородных пластах, характеризующихся неоднородными трещиностойкостями материала. Основные параметры для расчета показаны в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Основные параметры для расчета модели

начальный радиус R_0 (m)	0.5	начальное давление p_0 (MPa)	1
модуль Юнга E (GPa)	30	скорость закачки Q_0 (m ³ /s)	10 ⁻⁴
коэффициент Пуассона ν	0.2	вязкость жидкости μ (Pa·s)	10 ⁻³

4.2.1. Проверка численных алгоритмов программы

Перед полным численным моделированием для этапа до роста трещины и этапа роста трещины следует проверить правильность моделирования и точность написанных программ. С этой целью в качестве примера для проверки взята трещина круглой формы с однородным

давлением жидкости. Для раскрытия w и коэффициента интенсивности напряжений K_I круговой трещины под действием однородного давления жидкости существуют аналитические решения [166]:

$$w(r) = \frac{8(1-\nu^2)}{E\pi} p_0 \sqrt{R_0^2 - r^2}, \quad (0 \leq r \leq R_0), \quad (4.1)$$

$$K_I = \frac{2}{\pi} p_0 \sqrt{\pi R_0}. \quad (4.2)$$

Численное решение раскрытия получено трехмерным методом разрывных смещений (3-DDM) при радиальном шаге $\Delta r = 0.02 \text{ m}$, кольцевом шаге $\Delta \theta = 20^\circ$ (размерность сеток $m \times n = 25 \times 18$) и начальных условиях из таблицы 4.1. Сравнение результатов аналитического решения и численного решения показано на рисунке 4.2. Раскрытие трещины исходя из численного решения немного больше, чем по результатам аналитического решения, и эта разница уменьшается с уменьшением расстояния до границы трещины, на конце трещины два решения почти равны. Разрывные смещения ячеек, наиболее близких к границе трещины $D_{m,j} = 1.079 \times 10^{-5} \text{ m}$, и коэффициент интенсивности напряжений $K_I = 8.0 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{0.5}$ получены из уравнения (3.31). Аналитический результат $K_I = 7.98 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{0.5}$ получен из уравнения (4.2). Сравнительные результаты раскрытий и коэффициентов интенсивности напряжений показывают, что численный метод, описанный в главе 3, даёт результаты, достаточно близкие к аналитическому решению, и подходит для расчёта этой модели.

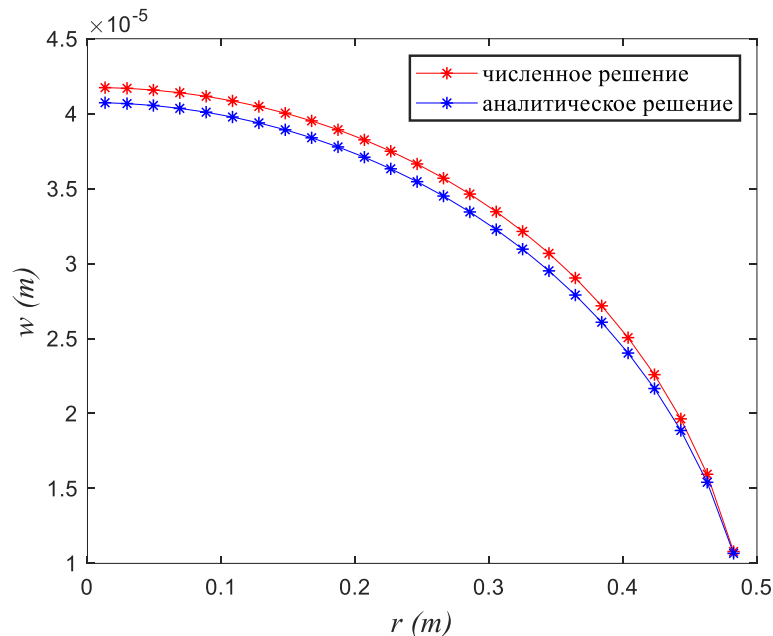


Рисунок 4.2. Сравнительные результаты аналитического и численного решений для раскрытия трещины

4.2.2. Численные решения эволюции распространения трещины

Чтобы исследовать влияние неоднородности K_{IC} на эволюцию роста трещины с начальной дискообразной геометрией, мы предполагаем, что имеется одна пара симметричных радиальных областей с трещиностойкостью меньше трещиностойкости остальных областей. Эти две радиальных области находятся симметрично по обе стороны от скважины. Распределение трещиностойкости K_{IC} пласта показано на рисунке 4.3: $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для ослабленных радиальных областей, выделенных жёлтым цветом, и $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для остальных областей, выделенных белым цветом. Размерность сеток для начальной трещины: $m \times n = 25 \times 18$. Моделирование состоит из двух этапов: этап до роста трещины и этап роста трещины, потому что начальное значение K_I на границе трещины меньше двух критических значений K_{IC} . На этапе до роста трещины движение жидкости упрощается до одномерной задачи, деформирование трещины остается трехмерной задачей. Из-за симметрии K_{IC} и симметрии трещины результаты показываются только для радиальных областей из первой четверти, а именно: радиальные области $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$, см. рисунок 4.3. Шаг по времени взят равным $\Delta t = 0.01 \text{ с}$.

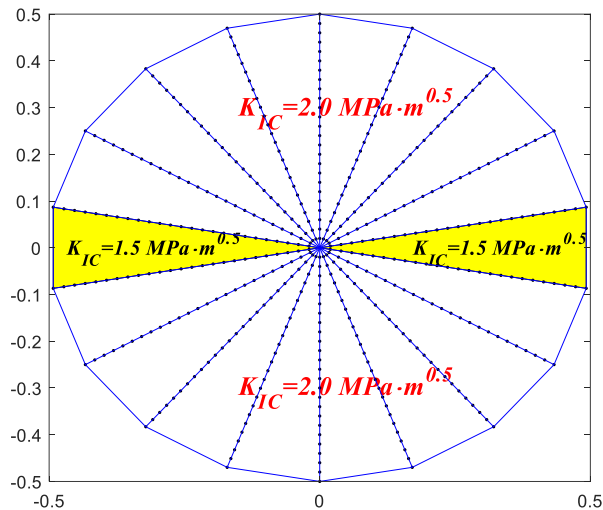


Рисунок 4.3. Распределение неоднородной трещиностойкости пласта

На рисунках 4.4 и 4.5 показаны результаты эволюции трещины на ранней стадии ($t \in [0, 0.14]$), включающие давление жидкости w и раскрытие трещины p . Как видно на рисунке 4.5, на ранней стадии ($t \leq 0.12 \text{ с}$) наблюдается следующее явление: давления в некоторых частях трещины меньше начального давления p_0 . Это явление также отражено на рисунках 4.4 и 4.6. Раскрытия трещины в $t = 0$, $t = 0.01 \text{ с}$ и $t = 0.02 \text{ с}$ сильно отличаются друг от друга (рисунок 4.4). На рисунке 4.6 показано, что и коэффициент интенсивности напряжений сначала уменьшается, потом увеличивается. Причина этих явлений в том, что в расчёте граничное условие (постоянная скорость закачки) на скважине мгновенно влияет на деформацию по всей длине трещины, в то время как гидравлическая жидкость за это время проходит малое расстояние. То есть скорость деформации трещины намного больше, чем

скорость жидкости в трещине. На самом деле в реальной добыче происходит короткий процесс для достижения граничного условия (постоянная закачка) на скважине. Следует отметить, что это явление не влияет на последующую эволюцию трещины, потому что после того, как закачиваемая жидкость достигает конца трещины, это явление исчезает, как, например, в результатах для моментов $t = 0.13\text{ s}$ и $t = 0.14\text{ s}$ на рисунках 4.4 и 4.5. Это значит, что влияние мгновенного введения условия постоянной закачки на скважине постепенно исчезает по мере закачки жидкости в трещину.

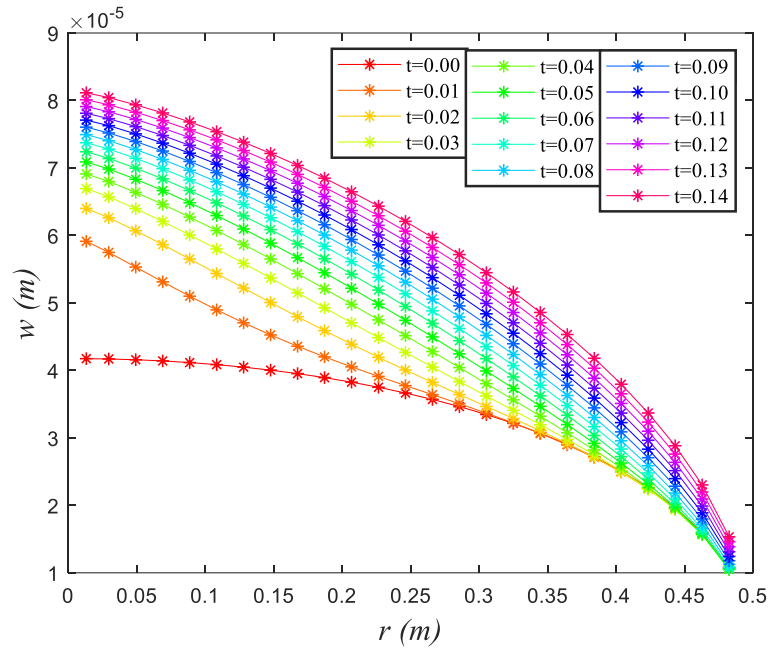


Рисунок 4.4. Раскрытия трещины w по времени с $t=0$ до $t=0.14\text{ s}$

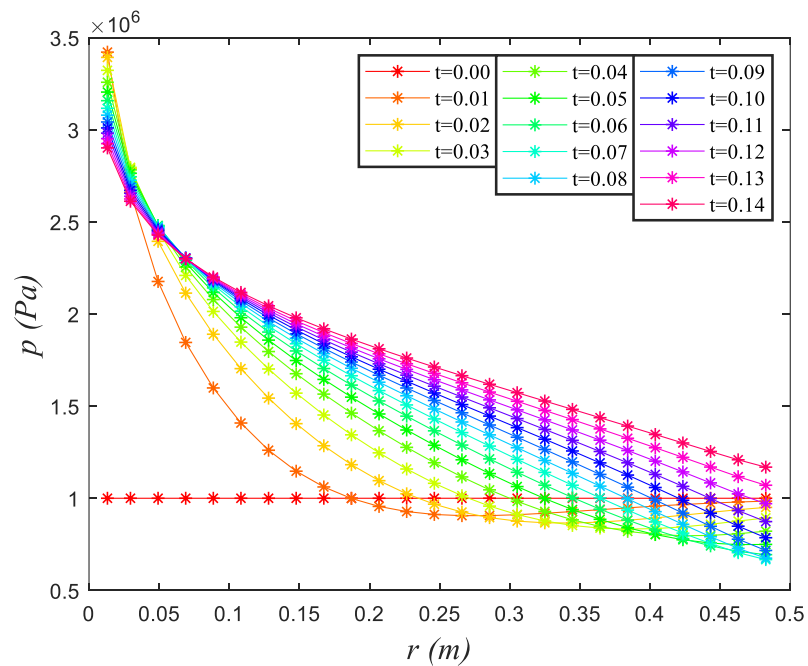


Рисунок 4.5. Распределение давлений в трещине по времени с $t=0$ до $t=0.14\text{ s}$

Рисунок 4.6 показывает полученные коэффициенты интенсивности напряжений K_I с исходного момента до начала роста трещины ($t \in [0, 0.23]$). Видно, что после исчезновения влияния мгновенного введения граничного условия на скважине K_I увеличивается почти линейно и при достижении $t = 0.23 \text{ s}$, $K_{IC} = 1.52 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ превосходит критическое значение ($K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$) для радиальных областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ (желтые области на рисунке 4.3). Это значит, что указанные две радиальные области трещины распространяются, и вычисление переходит на этап роста трещины.

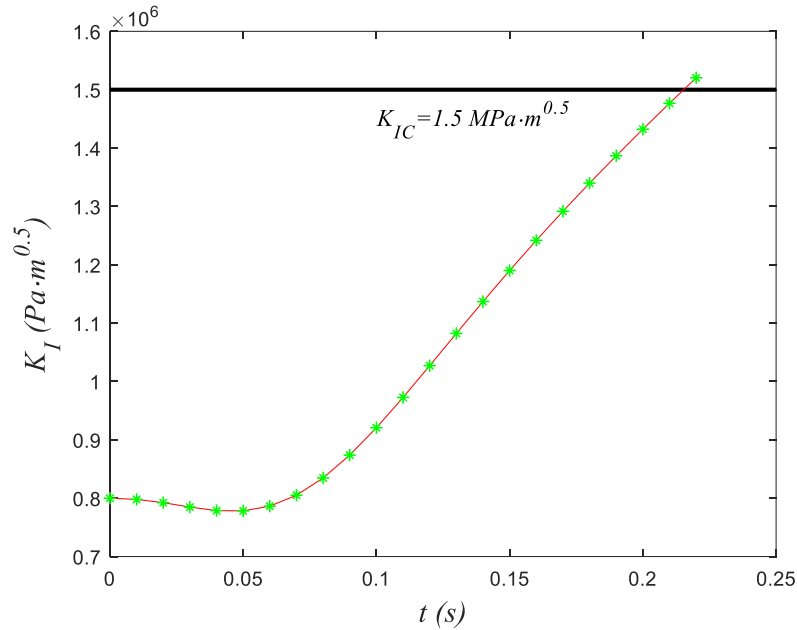


Рисунок 4.6. Коэффициент интенсивности напряжений по времени
с $t = 0$ до $t = 0.23 \text{ s}$

На этапе роста трещины движение жидкости становится двумерной задачей из-за неоднородного распространения трещины (например, когда растут только радиальные области $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$). В главе 3 мы предположили, что каждый раз трещина растет на расстояние одной ячейки. После первого роста радиальных областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ соответствующие результаты эволюции трещины представлены на рисунках 4.7 – 4.10, при этом рисунки 4.7 и 4.8 представляют распределения давления жидкости до роста и после роста областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$. Результаты для давлений показывают, что распределение давлений каждой радиальной области трещины одинаково до роста (рисунки 4.7 (а) и 4.8 (а)), а когда трещина растет (области $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$), давление около кончика трещины на распространяющихся радиальных областях $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ резко уменьшается (красная кривая на рисунке 4.7 (б) и синие зоны на рисунке 4.8 (б)). Этот результат совпадает с результатами в работе [163]. Из-за роста радиальных областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ около их концов образуется большой перепад давления по кольцевому направлению (см. рисунки 4.7 (б) и 4.8 (б)), который приводит к попаданию большого количества жидкости в концы распространяющихся радиальных областей. На рисунке 4.9 показано поле скоростей жидкости в трещине после роста радиальных областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$. На рисунке 4.9 показано, что около концов

радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$ возникает большая кольцевая скорость, а вдали от концов радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$ почти нет кольцевой скорости жидкости. Например, области около скважины и области $\theta=80^\circ$ и $\theta=280^\circ$ имеют только радиальную скорость. После роста радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$ перепады давлений в радиальных областях $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ около кончиков трещины уменьшаются по мере удаления от растущих областей (рисунок 4.7 (б), (в) и (г)).

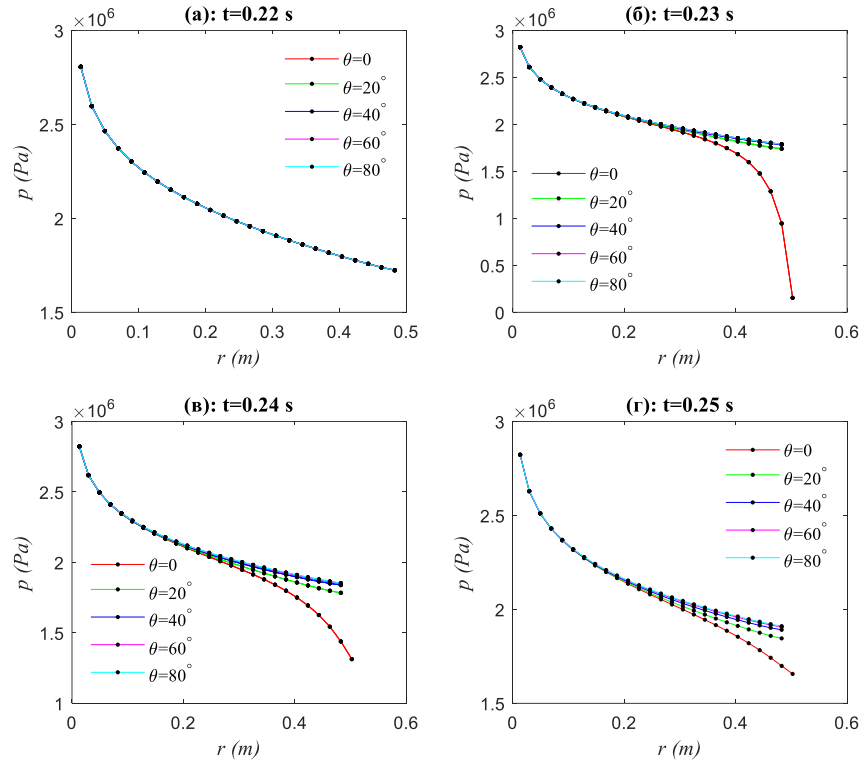


Рисунок 4.7. Давления радиальных областей $\theta=0$, $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ при $t=0.22\text{ s}$ (до роста), $t=0.23\text{ s}$ (момент роста), $t=0.24\text{ s}$ и $t=0.25\text{ s}$ (после роста)

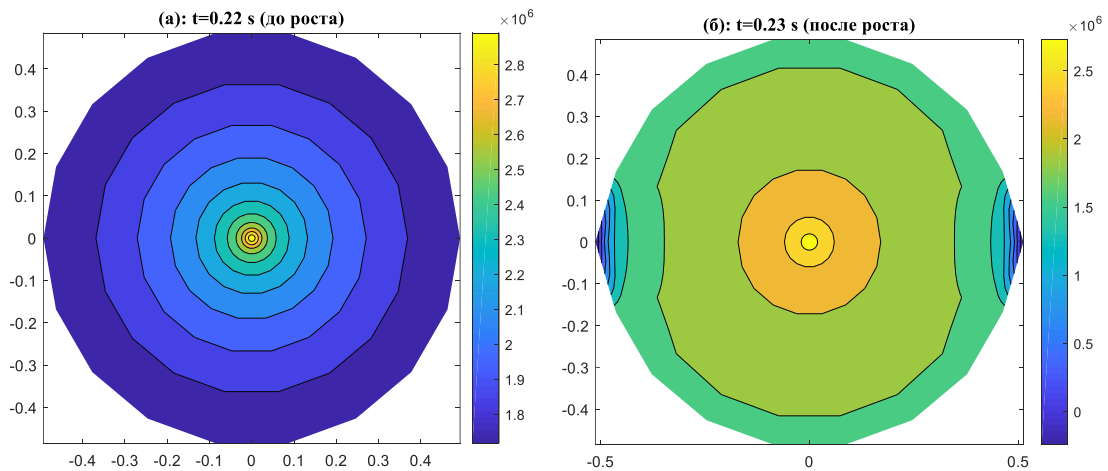


Рисунок 4.8. Эквипотенциальные диаграммы давления жидкости в трещине: (а) до роста и (б) после роста радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$

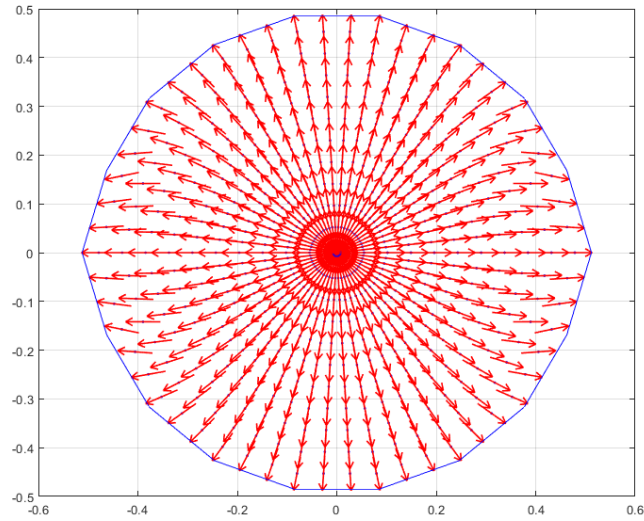


Рисунок 4.9. Поле скорости жидкости в трещине после роста радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$ при $t=0.25\text{ s}$

На рисунке 4.10 представлены сравнительные результаты раскрытия радиальных областей $\theta=0$, $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ до роста и после роста радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$. После роста радиальных областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$ их раскрытие около кончика трещины больше, чем раскрытия других радиальных областей, и эта разность быстро увеличивается с притоком жидкости в концы распространяющихся радиальных областей, что приводит к увеличению давления около концов областей $\theta=0$ и $\theta=180^\circ$. Раскрытия трещины в радиальных областях $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ очень мало отличаются между собой.

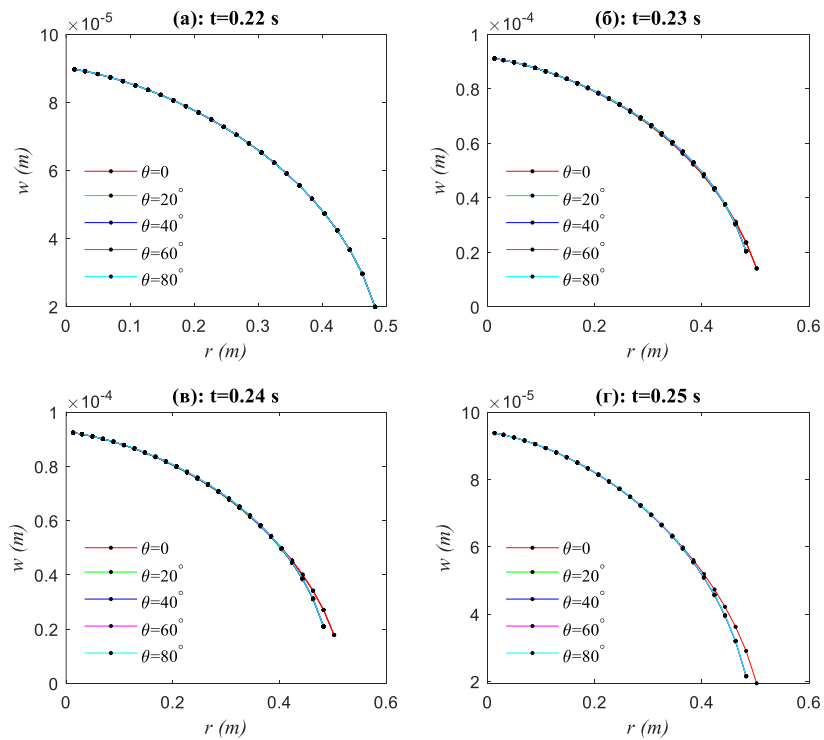


Рисунок 4.10. Раскрытия радиальных областей $\theta=0$, $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ при $t=0.22\text{ s}$ (до роста), $t=0.23\text{ s}$ (момент роста), $t=0.24\text{ s}$ и $t=0.25\text{ s}$ (после роста)

В таблице 4.2 представлены полученные коэффициенты интенсивности напряжений K_I радиальных областей $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ до роста и после роста радиальных областей $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$. Из таблицы 4.2 (первый столбец) видно, что коэффициент интенсивности напряжений области $\theta = 0^\circ$ сначала быстро уменьшается из-за ее роста, а потом быстро увеличивается из-за быстрого увеличения давления около конца этой области. Различия между коэффициентами интенсивности напряжений радиальных областей $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ появляются из-за кольцевого движения жидкости после роста областей $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$: $K_I(80^\circ) > K_I(60^\circ) > K_I(40^\circ) > K_I(20^\circ)$ при $t = 0.23\text{ s}$ и $t = 0.24\text{ s}$, а $K_I(80^\circ) > K_I(60^\circ) > K_I(20^\circ) > K_I(40^\circ)$ при $t = 0.25\text{ s}$. В целом, чем дальше от распространяющейся области $\theta = 0^\circ$, тем больше коэффициент интенсивности напряжений, но с быстрым потоком жидкости в конце области $\theta = 0^\circ$ скорость увеличения K_I области $\theta = 20^\circ$, более близкой к области $\theta = 0^\circ$, больше, чем скорость увеличения K_I области $\theta = 40^\circ$. Когда $t = 0.25\text{ s}$, имеет место соотношение $K_I(20^\circ) > K_I(40^\circ)$. Это показывает, что за исключением распространяющейся области коэффициент интенсивности напряжений ее соседних областей не обязательно является наименьшими из-за появления кольцевого потока жидкости около распространяющейся области. Это значит, что распространение областей $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ не обязательно происходит по порядку от дальнего до ближнего относительно распространяющейся области $\theta = 0^\circ$.

Таблица 4.2

Значения коэффициентов интенсивности напряжений радиальных областей $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ при $t = 0.22\text{ s}$ (до роста), $t = 0.23\text{ s}$ (момент роста), $t = 0.24\text{ s}$ и $t = 0.25\text{ s}$ (после роста)

области (θ) t (s)	0	20°	40°	60°	80°
0.22	1.4768	1.4768	1.4768	1.4768	1.4768
0.23	1.0362	1.5090	1.5174	1.5197	1.5202
0.24	1.3106	1.5497	1.5560	1.5604	1.5618
0.25	1.4278	1.5959	1.5948	1.5994	1.6014

Поскольку основная цель этой задачи заключается в наблюдении асинхронных распространений различных радиальных областей трещины при неоднородной трещиностойкости, для шага по времени необходимо задать меньшее значение: $\Delta t = 0.01\text{ s}$, а сам расчет занимает 3000 шагов, то есть общее время моделирования составляет 30 секунд. На рисунках 4.11 – 4.13 показаны результаты (давление жидкости, поле скоростей жидкости и раскрытие трещины) на конечный момент. На рисунке 4.11 представлены четыре зоны пониженного давления, отмеченные красными эллипсами. Причина их возникновения в том, что эти четыре радиальные области были последними распространившимися на данный момент, а другие области остались на месте, и картина, таким образом, чем-то напоминает начальный рост области $\theta = 0^\circ$ (рисунок 4.8 (б)). Через короткое время давления на этих зонах

должны восстановиться, потому что большое количество жидкости течет в эти области из-за образования большого перепада давления около этих областей, как показано на рисунке 4.7 (в), (г).

На рисунке 4.12 представлено поле скоростей жидкости в трещине в момент $t = 30 \text{ s}$, и вся жидкость втекает в эти четыре зоны (красные эллипсы). Следует отметить, что на находящихся далеко от зон слабого давления радиальных областях образуются два различных потока, особенно ясно на областях $\theta = 0$ и $\theta = 80^\circ$ и на симметричных им областях, см. стрелки на рисунке 4.12. Это значит, что кончики областей $\theta = 0$, $\theta = 80^\circ$ и симметричных им областей не являются местами минимального давления. На рисунке 4.13 показаны верхняя и нижняя поверхности трещины в трехмерном пространстве. Из рисунка видно, что полная геометрия трещины выглядит как эллипсоид при наличии двух симметричных ослабленных областей в пласте, а без этих двух ослабленных областей трещина развивается как эллипсоид вращения с одинаковыми радиусами в любом направлении работы [62].

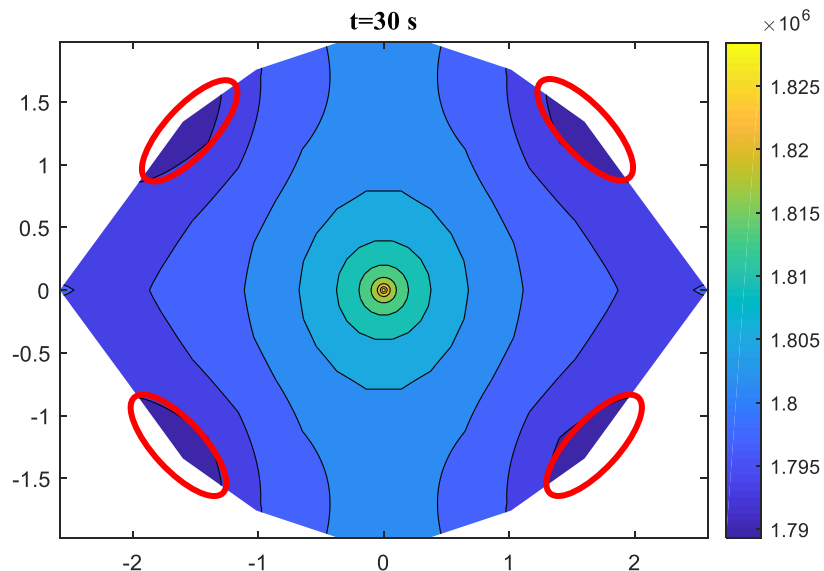


Рисунок 4.11. Эквипотенциальная диаграмма давления жидкости в трещине при $t = 30 \text{ s}$

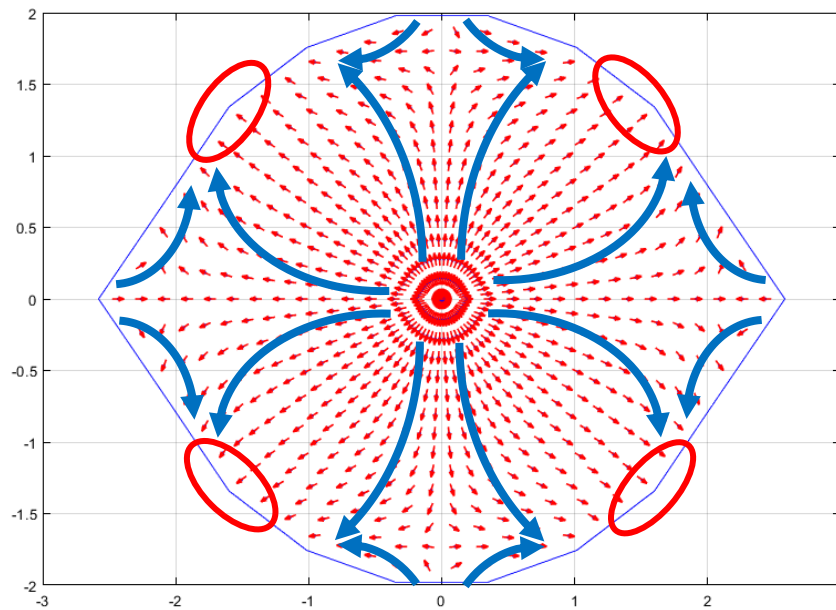


Рисунок 4.12. Поле скорости жидкости в трещине при $t = 30 \text{ s}$

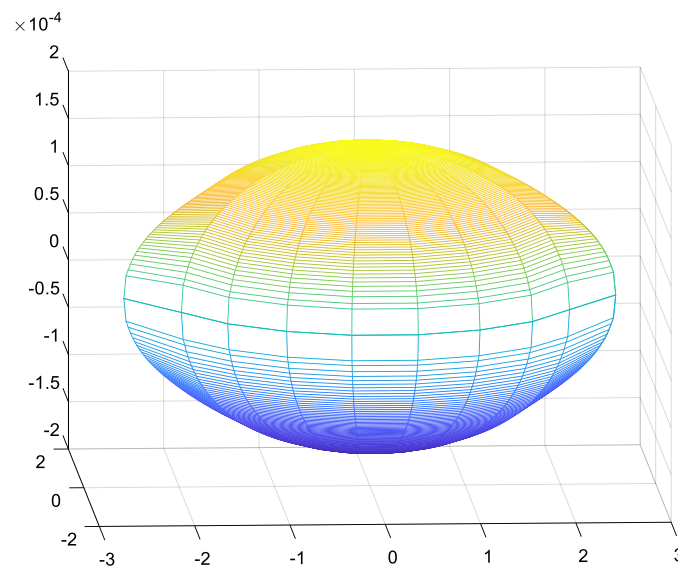


Рисунок 4.13. Поверхности трещины в трехмерном пространстве при $t = 30 \text{ s}$

Ввиду наличия областей пониженной трещиностойкости в пласте трещина растёт неравномерно: в ослабленных областях трещина распространяется быстрее, чем в остальных областях. Развитие радиусов трещины в радиальных областях $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ показано на рисунке 4.14. Из этих результатов видно, что ослабленная радиальная область $\theta = 0^\circ$ с $K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ растёт быстрее всего. В других радиальных областях с $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$ область $\theta = 20^\circ$, ближайшая к ослабленной области $\theta = 0^\circ$, распространяется быстрее, а область $\theta = 80^\circ$, наиболее удаленная от ослабленной области $\theta = 0^\circ$, распространяется медленнее всего. Это показывает, что ослабленная область, помимо того, что она обуславливает собственный рост, также влияет на рост окружающих ее областей, и это влияние уменьшается с увеличением расстояния от ослабленной области. Скорость роста в

ослабленной области $\theta=0$ в начале намного больше скоростей в областях $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$, разницы между скоростями роста этих областей уменьшаются со временем и стремятся к нулю. На рисунке 4.15 представлен профиль трещины на плоскости xy в различные моменты (черное кольцо – это начальный профиль трещины). В первый интервал времени $0-10$ с трещина в целом распространяется наиболее быстро, потом в интервале времени $10-20$ с скорость роста снижается, и затем наиболее медленно трещина растёт в интервале $20-30$ с, что свидетельствует о том, что общая скорость распространения трещины уменьшается со временем. На рисунке 4.16 показаны зависимости давления и раскрытия трещины на скважине от времени. Давление с начала роста трещины уменьшается, и скорость уменьшения становится все меньше и меньше со временем. Скорость увеличения раскрытия на скважине также уменьшается по мере роста трещины.

Анализ вышеуказанных результатов позволяет заключить, что неоднородность по трещиностойкости пласта сильно влияет на распространение трещины. Ослабленные области растут быстрее, чем другие области, особенно на раннем этапе роста трещины. И эти ослабленные области тоже влияют на рост окружающих их областей, причем это влияние уменьшается с увеличением расстояния от ослабленных областей. Эти характеристики делают форму трещины нерегулярной. Далее мы проведем сравнительный анализ влияния размера областей пониженной трещиностойкости, положения неоднородных областей и доли неоднородных областей на распространение трещины.

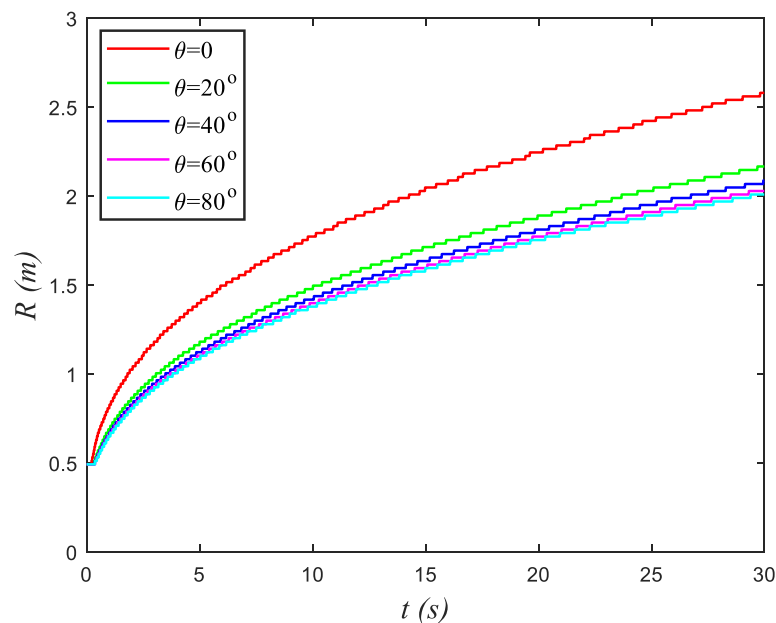


Рисунок 4.14. Зависимость радиусов радиальных областей $\theta=0$, $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$, $\theta=80^\circ$ от времени при $t \in [0, 30]$

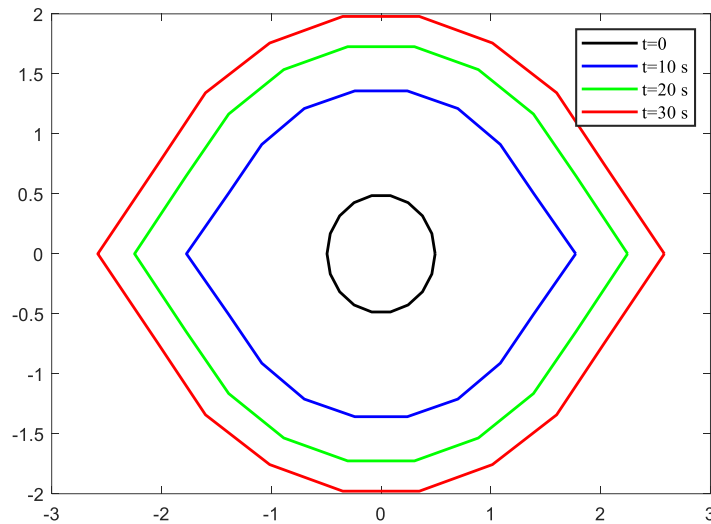


Рисунок 4.15. Границы трещины на плоскости xOy в моменты $t = 0$, $t = 10\text{ s}$, $t = 20\text{ s}$ и $t = 30\text{ s}$

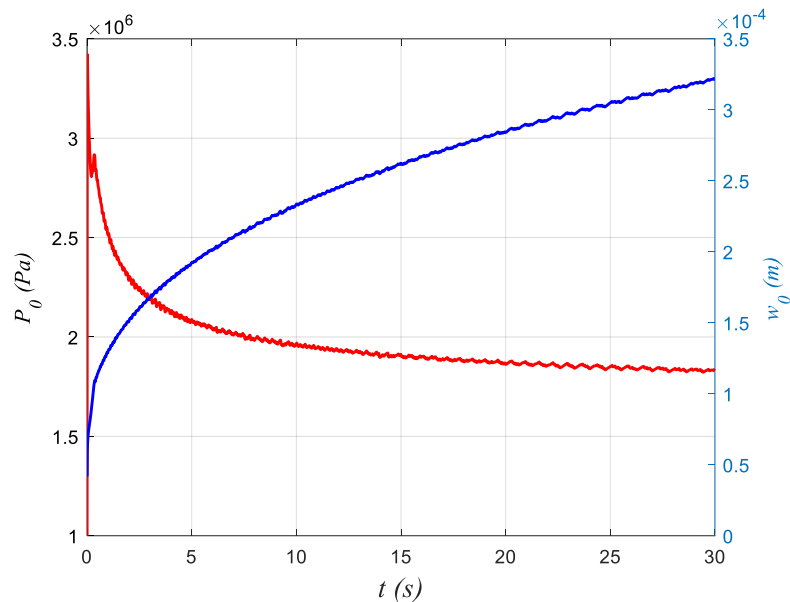


Рисунок 4.16. Давление и раскрытие на скважине с $t = 0$ до $t = 30\text{ s}$: красная кривая представляет давление, синяя кривая – это раскрытие трещины

4.3. Сравнительный анализ по численным результатам

В разделе 4.2 представлены численные решения эволюции роста трещины в условиях неоднородных трещиностойкостей. Особенности влияния неоднородной трещиностойкости K_{IC} на распространение трещины требуют дальнейших исследований. В этом разделе диссертационной работы будет проведен сравнительный анализ влияния неоднородной трещиностойкости материала на рост трещины по трём аспектам неоднородных трещиностойкостей материала: размеру, азимуту и соотношению областей различной трещиностойкости. Сравнительный анализ по каждому аспекту исходит из двух предпосылок:

в первом случае предполагается, что в пласте имеются некоторые ослабленные зоны, т. е. трещиностойкость на этих малых зонах меньше, чем трещиностойкость на остальных обычных областях пласта; во втором случае наоборот, предполагается, что в пласте имеются некоторые зоны с повышенной трещиностойкостью. Следует отметить, что все основные параметры представлены в таблице 4.1, и кольцевой шаг для сеток $\Delta\theta = 20^\circ$, а именно: $n = 18$, радиальный шаг $\Delta r = 0.02 \text{ m}$. Чтобы точнее получить порядок распространения различных радиальных областей, берётся малый шаг по времени $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ и суммарное число шагов для каждого случая $N = 3000$, т. е. итоговое время расчета $T = 30 \text{ s}$.

4.3.1. Влияние ослабленных зон на распространение трещины

В пласте может быть несколько областей, которые имеют меньшую трещиностойкость материала по сравнению с остальными областями и приводят к неоднородности пласта по трещиностойкости. Такие области называются «ослабленными зонами». В этом разделе будет исследоваться влияние разницы в трещиностойкости и положения ослабленных областей на распространение трещины.

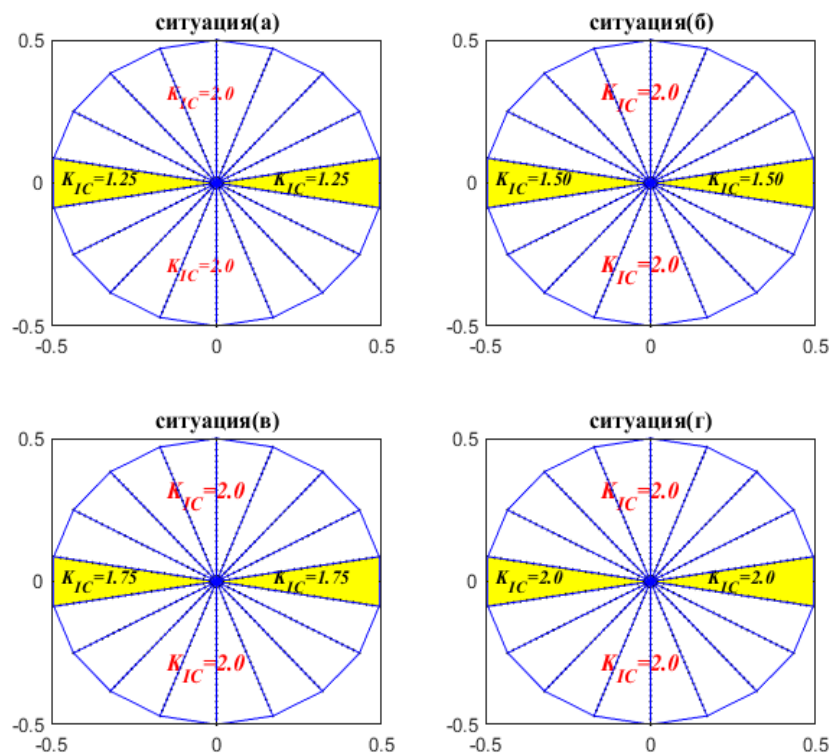


Рисунок 4.17. Четыре различных распределения неоднородной трещиностойкости пласта

Для исследования влияния перепада трещиностойкости ослабленных областей мы выбираем четыре различных значения трещиностойкостей для ослабленных зон (радиальных областей $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$): $K_{IC} = 1.25 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$, $K_{IC} = 1.5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$, $K_{IC} = 1.75 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$,

$K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, в то время как трещиностойкость остальных обычных областей постоянна: $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, как показано в разделе 4.2, см. рисунок 4.17. Случай, когда трещиностойкость ослабленных зон равна $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, представляет собой случай однородного пласта, см. ситуацию (г) на рисунке 4.17.

На рисунке 4.18 представлены профили трещины с учетом ослабленных зон с различными трещиностойкостями через 30 секунд закачки. Наименьшее кольцо в центре системы координат представляет собой начальный профиль трещины. Красное кольцо является профилем трещины при однородном распределении трещиностойкости пласта. Сравнение результатов показывает, что ослабленные зоны с меньшей трещиностойкостью распространяются быстрее, чем остальные обычные области с большей трещиностойкостью. Кроме того, ослабленные зоны влияют на окружающие их области, и это влияние уменьшается с увеличением расстояния от ослабленных зон. Чем меньше трещиностойкость ослабленных зон, тем быстрее по ним распространяется трещина, см. профиль трещины для случая $K_{IC} = 1.25 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для ослабленных зон. Это приводит к нерегулярной форме трещины (синяя кривая на рисунке 4.18), напоминающей эллипс. Чем больше разность трещиностойкостей между ослабленными зонами и остальными областями, тем больше перепад длин между обычными и ослабленными областями, потому что неоднородность трещиностойкости пласта определяет неоднородность распространения трещины: чем больше разность трещиностойкостей между ослабленными областями и остальными обычными областями, тем больше разность скорости распространения этих областей, например ослабленной области $\theta = 0$ и обычной области $\theta = 80^\circ$.

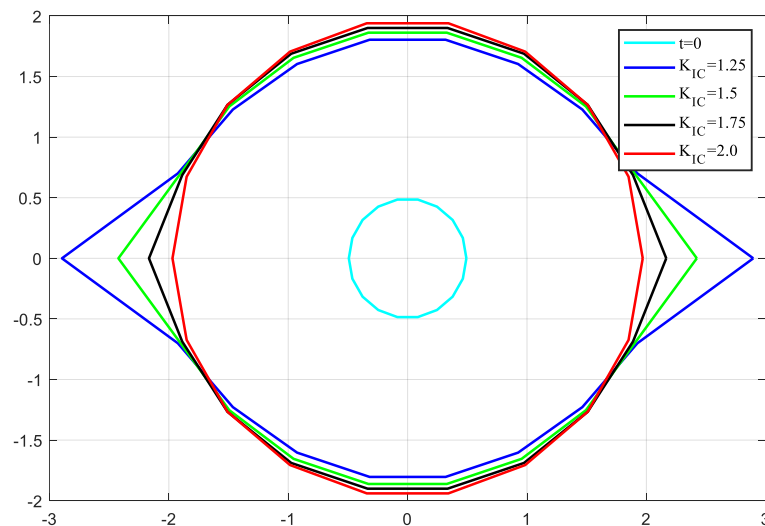


Рисунок 4.18. Профили трещины при различных трещиностойкостях ослабленных зон в момент $t = 30 \text{ s}$

На рисунках 4.19 и 4.20 показана зависимость радиусов радиальных областей $\theta = 0$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\theta = 80^\circ$ от времени при различных трещиностойкостях ослабленных зон. Как видно из рисунков, радиус области $\theta = 0$ изменяется наиболее сильно в зависимости от трещиностойкости ослабленных зон, за ним следует радиус области $\theta = 80^\circ$, а радиусы

промежуточных областей $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ слабо зависят от трещиностойкости ослабленных зон. На рисунке 4.19 (а), (б) показано, что радиусы областей $\theta = 0$ и $\theta = 20^\circ$ обратно пропорциональны трещиностойкости ослабленных зон, а радиусы областей $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 80^\circ$ прямо пропорциональны трещиностойкости ослабленных зон, см. рисунок 4.19 (в), (г) и рисунок 4.20. Это значит, что наличие ослабленной области $\theta = 0$ увеличивает скорость роста области $\theta = 20^\circ$ и уменьшает скорости роста областей $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 80^\circ$ по сравнению с однородным распространением ($K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для ослабленных зон, красная кривая на рисунках 4.19 и 4.20). Кроме того, градиенты всех кривых, описывающих зависимость радиуса от времени, уменьшаются со временем, и это показывает, что общая скорость распространения трещины уменьшается, причем локальная скорость роста ослабленных зон ($\theta = 0$) всегда остаётся наибольшей, а скорость роста области $\theta = 80^\circ$, самой удаленной от ослабленных зон, всегда остаётся наименьшей.

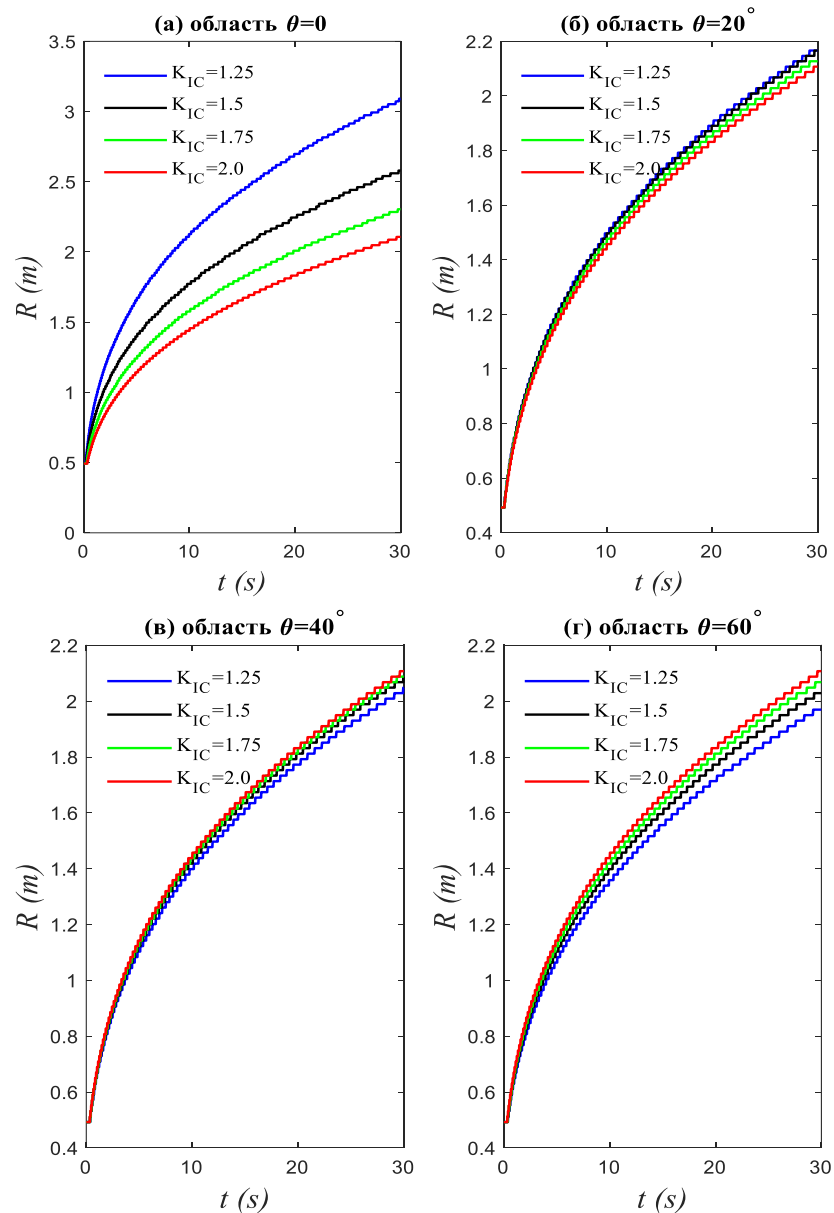


Рисунок 4.19. Зависимость радиусов радиальных областей $\theta = 0$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$ и $\theta = 60^\circ$ от времени t при различных трещиностойкостях ослабленных зон

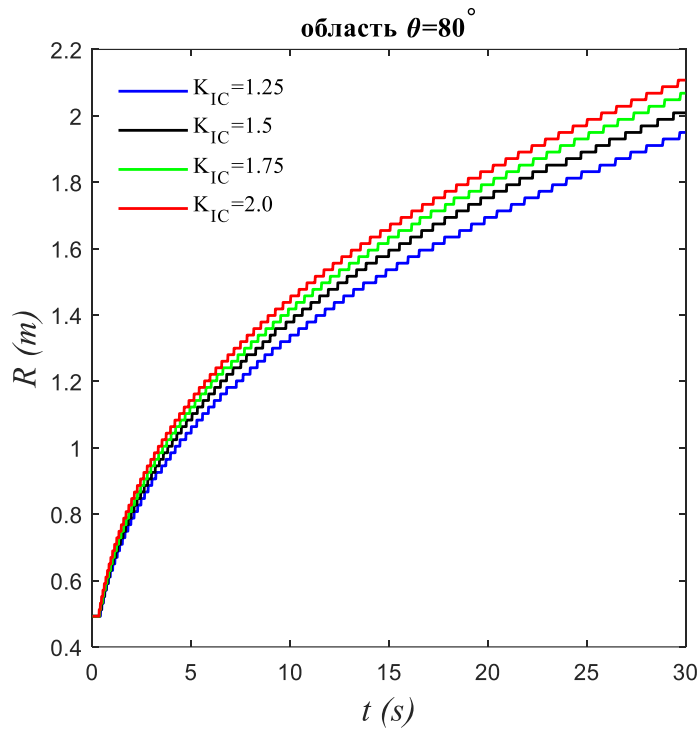


Рисунок 4.20. Зависимость радиуса радиальной области $\theta = 80^\circ$ от времени t при различных трещиностойкостях ослабленных зон

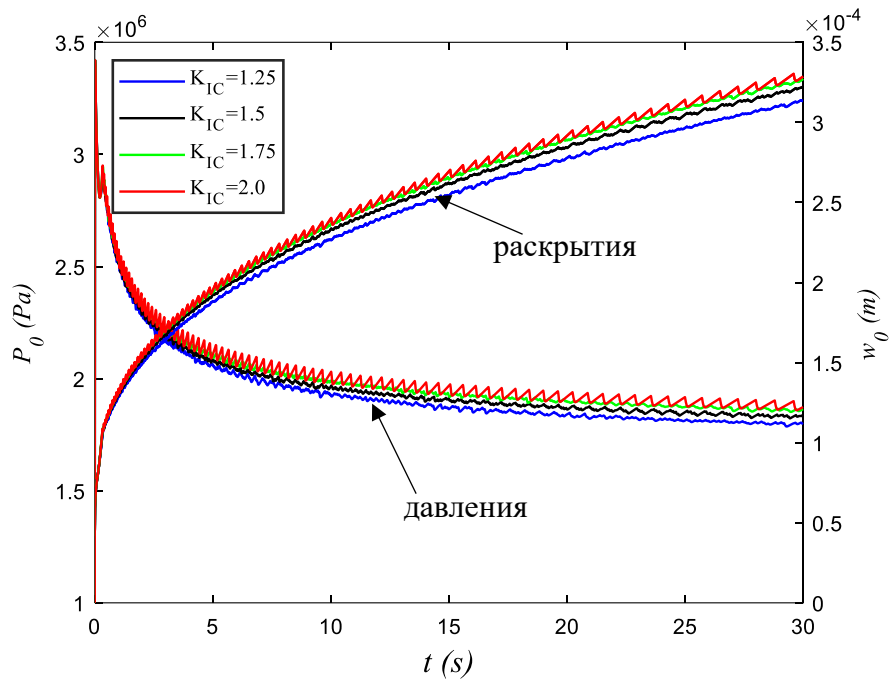


Рисунок 4.21. Зависимость давления p_0 и раскрытия w_0 на скважине от времени t при различных трещиностойкостях ослабленных зон

На рисунке 4.21 показаны изменения давления жидкости p_0 и раскрытия трещины w_0 на скважине в зависимости от времени при различных трещиностойкостях ослабленных зон. Эти результаты показывают, что в целом показатели давления и раскрытия на скважине не слишком чувствительны к трещиностойкости ослабленных зон. Их небольшие изменения

вследствие неоднородной трещиностойкости показывают, что чем сильнее неоднородность трещиностойкости пласта (синяя кривая на рисунке 4.21), тем меньше давление жидкости и меньше раскрытие трещины на скважине в то же время. Это значит, что, хотя неоднородность трещиностойкости пласта увеличивает радиусы некоторых радиальных областей и создает больше поверхностей трещины, она не способствует общему раскрытию трещины, а именно: принося в жертву раскрытие трещины, неоднородность трещиностойкости пласта способствует большей длине трещины.

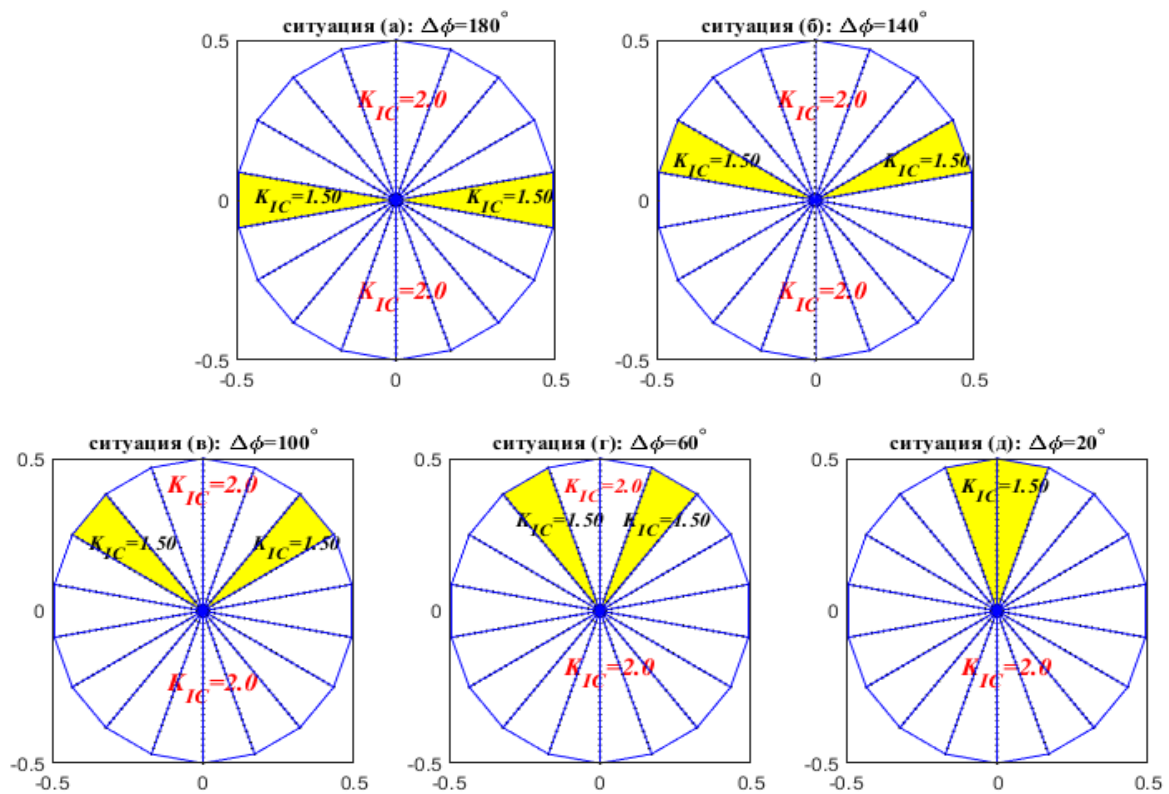


Рисунок 4.22. Пять различных относительных положений двух радиальных ослабленных зон в пласте

Во втором численном сравнительном эксперименте мы хотим исследовать влияние положения ослабленных зон с меньшей трещиностойкостью материала на профиль трещины и на скорости распространения различных радиальных областей. Для удобства вычисления мы по-прежнему выбираем симметричное распределение трещиностойкости пласта, а трещиностойкости ослабленных зон и остальных обычных зон оставляем постоянными: $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для ослабленных областей и $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ для остальных, обычных областей, меняя только относительное положение двух симметричных ослабленных зон, как показано на рисунке 4.22: желтые области представляют ослабленные зоны, белые области представляют обычные зоны. Угол $\Delta\phi$ представляет относительное положение двух радиальных ослабленных зон. В рассматриваемых пяти ситуациях $\Delta\phi = 180^\circ, 140^\circ, 100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$, а именно: чем больше значение $\Delta\phi$, тем больше расстояние между двумя ослабленными

областями. Результаты, соответствующие этим пяти ситуациям, будут в сравнительном аспекте проанализированы далее.

На рисунке 4.23 показаны профили трещины при различных относительных положениях двух радиальных ослабленных зон в момент $t = 30 \text{ s}$. В центре системы координат малый круг, выделенный пунктиром, представляет собой начальный профиль трещины. Как видно из рисунка, в целом ослабленные зоны растут быстрее остальных, обычных областей для каждого относительного положения, но скорости роста ослабленных зон при различных относительных положениях различны. Чем ближе две ослабленные области ($\Delta\phi$ меньше), тем нерегулярнее получается профиль трещины. Кроме того, ослабленные зоны в основном влияют на рост ближайших к ним областей, например радиальных областей $\theta = 80^\circ$ и $\theta = 100^\circ$, и мало влияют на рост областей, удаленных от них, например радиальных областей $\theta = 260^\circ$ и $\theta = 280^\circ$. Чтобы точнее узнать влияние ослабленных зон на самих себя, на ближние к ним области и на удаленные от них области, на рисунках 4.24, 4.25 и 4.26 показана эволюция радиусов трех типов областей (ослабленной области; области, ближней к ослабленной области, и области, удаленной от ослабленной области) в зависимости от времени при различных $\Delta\phi$.

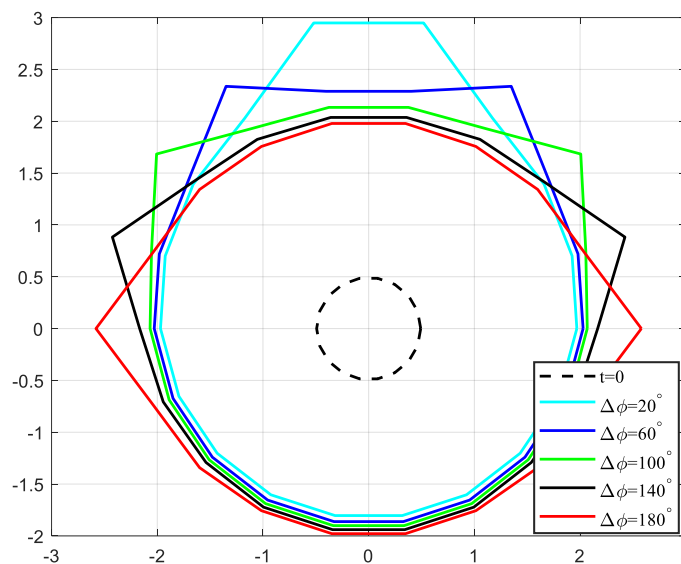


Рисунок 4.23. Профили трещины при пяти различных относительных положениях двух радиальных ослабленных зон, когда $t = 30 \text{ s}$

На рисунке 4.24 показана зависимость радиуса трещины в ослабленной области от времени при различных $\Delta\phi$. Видно, что чем меньше $\Delta\phi$ (симметричные ослабленные зоны становятся ближе), тем больше радиус трещины в ослабленной области: когда симметричные ослабленные зоны на одной плоскости ($\Delta\phi = 180^\circ$, т. е. ситуация (а) на рисунке 4.22), ослабленные области распространяются медленнее, а когда симметричные ослабленные области находятся вплотную друг к другу ($\Delta\phi = 20^\circ$, т. е. ситуация (д) на рисунке 4.22), они распространяются быстрее. Это значит, что две симметричные ослабленные зоны могут влиять друг на друга, и это влияние становится сильнее с уменьшением относительного расстояния. На рисунке 4.25 представлена эволюция радиуса области $\theta = 80^\circ$, близкой к ослабленным

областям, при пяти различных относительных положениях ослабленных областей. Когда две симметричные ослабленные области становятся ближе ($\Delta\phi$ уменьшается), расстояние между ослабленными областями и областью $\theta=80^\circ$ становится меньше, и радиус области $\theta=80^\circ$ становится больше. Скорость увеличения радиуса области $\theta=80^\circ$ становится больше с уменьшением $\Delta\phi$. Это значит, что зависимость радиуса области $\theta=80^\circ$ от относительного положения $\Delta\phi$ является обратной и нелинейной. Рисунок 4.26 показывает изменения радиуса области $\theta=280^\circ$ в зависимости от времени при различных относительных положениях ослабленных областей. Легко заметить, что радиус области $\theta=280^\circ$ уменьшается по мере приближения двух симметричных ослабленных областей, но это изменение радиуса заметно меньше такового для области $\theta=80^\circ$. Это значит, что влияние относительного положения ослабленных зон на область $\theta=280^\circ$ становится меньше с увеличением расстояния между ослабленными зонами и областью $\theta=280^\circ$, причем сближение ослабленных областей препятствует распространению области $\theta=280^\circ$. Сравнительный анализ рисунков 4.24, 4.25 и 4.26 показывает, что изменение относительного положения ослабленных областей влияет сильнее на области, близкие к ним, и слабее – на области, удаленные от них. На рисунке 4.27 представлена зависимость давления и раскрытия трещины на скважине от времени при различных относительных положениях ослабленных областей. Из рисунка видно, что кривые давлений и раскрытий при различных $\Delta\phi$ почти совпадают. Это значит, что относительное положение двух симметричных ослабленных областей мало влияет на давление и раскрытие на скважине, и общее раскрытие трещины не зависит от положений ослабленных областей.

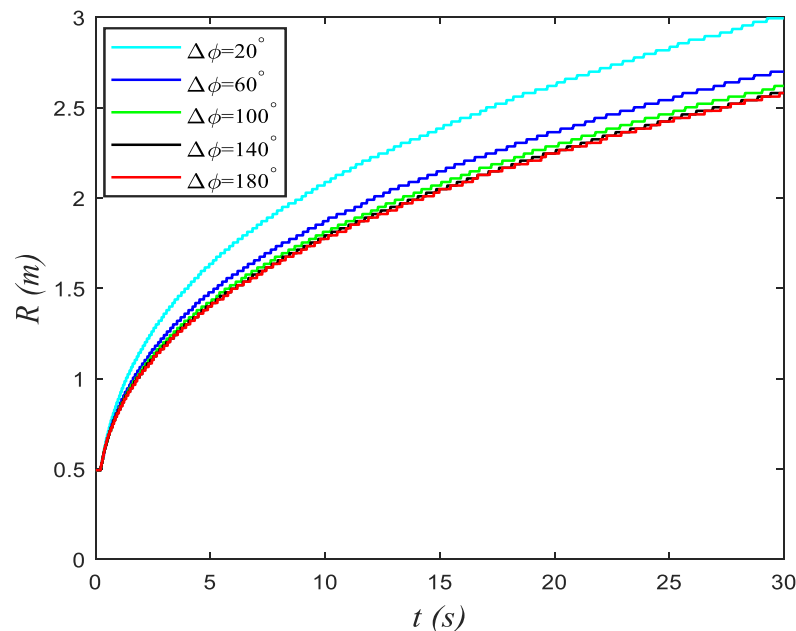


Рисунок 4.24. Зависимость радиусов ослабленной области ($\theta=0^\circ$, $\theta=20^\circ$, $\theta=40^\circ$, $\theta=60^\circ$ и $\theta=80^\circ$) от времени t при различных относительных положениях ослабленных областей

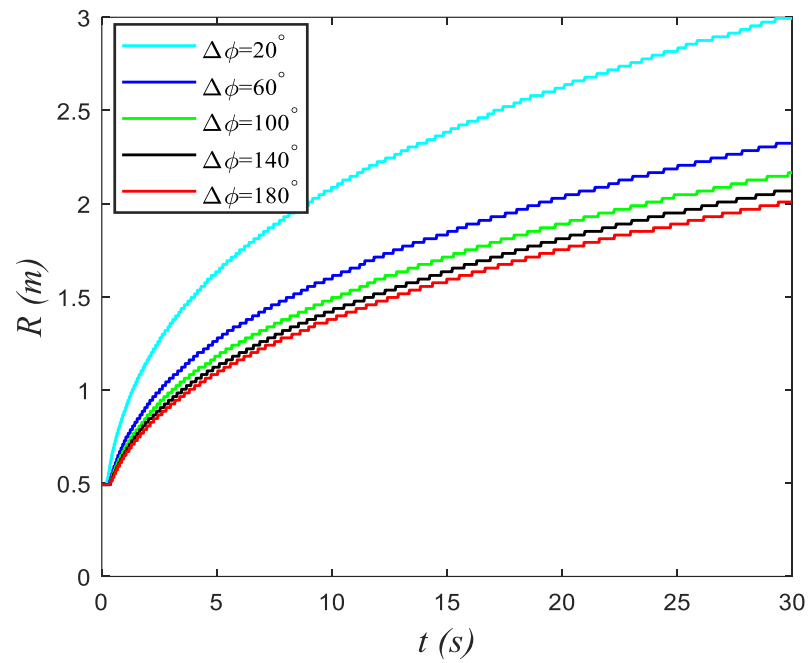


Рисунок 4.25. Зависимость радиуса области $\theta = 80^\circ$ от времени t при различных относительных положениях ослабленных областей

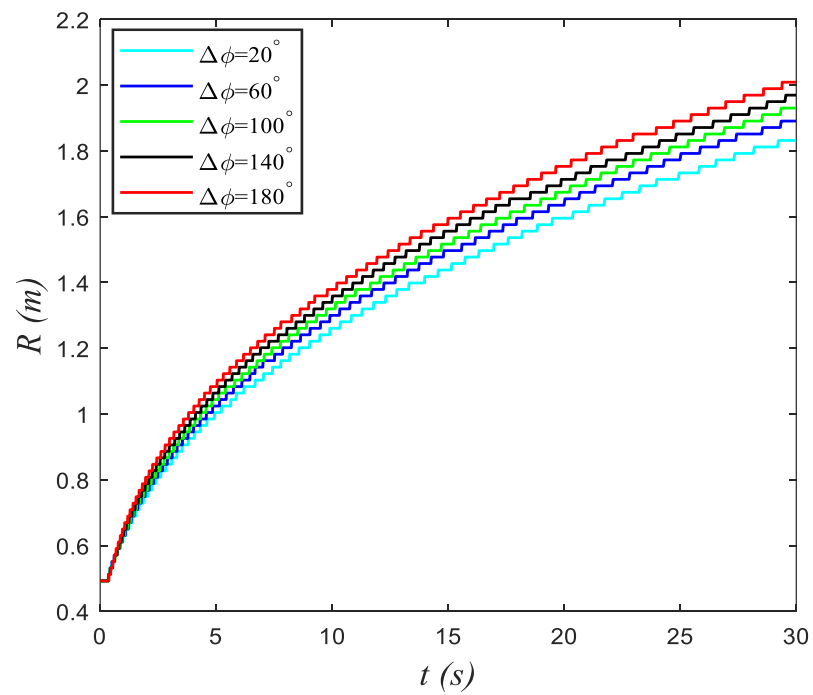


Рисунок 4.26. Зависимость радиуса области $\theta = 280^\circ$ от времени t при различных относительных положениях ослабленных областей

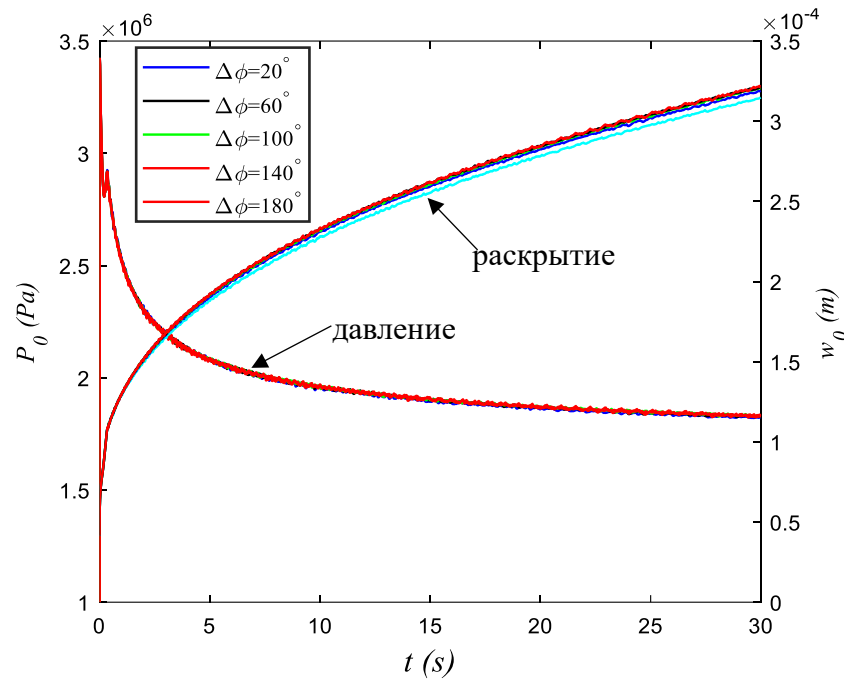


Рисунок 4.27. Давление p_0 и раскрытие w_0 на скважине от времени t при различных относительных положениях $\Delta\phi$ симметричных ослабленных областей

Сравнительный анализ влияния относительного положения симметричных ослабленных областей показывает, что относительное положение ослабленных областей определяет профиль трещины: чем ближе ослабленные области, тем нерегулярнее профиль трещины и тем сильнее влияние на рост областей, близких к ослабленным, и слабее влияние на рост областей, удаленных от них. Относительное положение симметричных ослабленных областей в основном не влияет на общее раскрытие трещины.

4.3.2. Влияние зон повышенной прочности на рост трещины

В пласте может быть несколько областей, у которых трещиностойкость материала больше, чем трещиностойкость остальных областей, что приводит к неоднородности пласта. Такие области называются «зонами повышенной прочности». В этом разделе будет исследоваться влияние величины трещиностойкости и положения зон повышенной прочности на распространение трещины.

Для исследования влияния трещиностойкости зон повышенной прочности мы поступаем обратно тому, что делали в разделе 4.3.1: фиксируя значение трещиностойкости зон повышенной прочности ($K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$), изменяем значение трещиностойкости остальных, обычных областей и получаем четыре разных значения ($K_{IC} = 1.25 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, $K_{IC} = 1.75 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$), как на рисунке 4.28, в том числе $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, что представляет случай однородного пласта по трещиностойкости. Соответствующие численные результаты показаны далее.

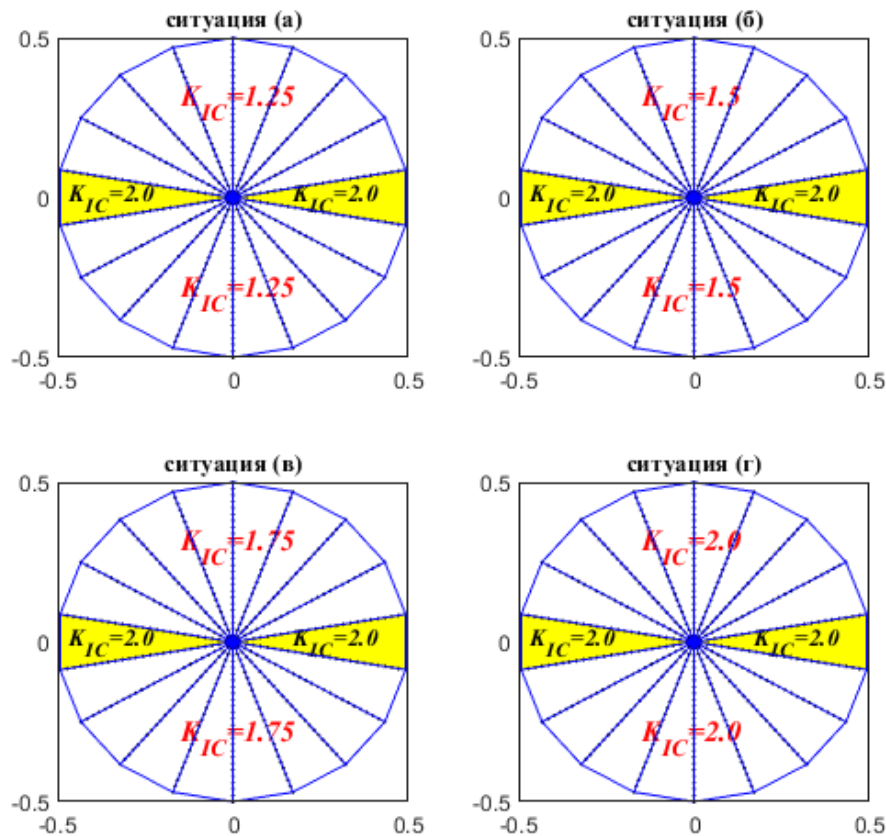


Рисунок 4.28. Четыре выбранных различных распределения неоднородной трещиностойкости пласта для исследования влияния зон повышенной прочности

На рисунке 4.29 показаны профили трещины при различных трещиностойкостях обычных областей (см. рисунок 4.28) в момент $t = 30 \text{ s}$. Красный профиль представляет собой результат однородного распространения трещины при однородной трещиностойкости пласта $K_{IC} = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{0.5}$. По сравнению с красным профилем наличие зон повышенной прочности (области $\theta = 0$ и $\theta = 80^\circ$) препятствует распространению трещины в них и в окружающих их областях. Чем больше неоднородность трещиностойкости пласта (разность трещиностойкости между областями повышенной прочности и остальными, обычными областями), тем медленнее распространяются зоны повышенной прочности и окружающие их области. Однако на областях $\theta = 80^\circ$ и $\theta = 280^\circ$, как и на окружающих их областях, имеет место обратная ситуация: чем больше неоднородность трещиностойкости пласта, тем быстрее распространяются области $\theta = 80^\circ$ и $\theta = 280^\circ$ и окружающие их области. Это значит, что профиль трещины становится все более и более нерегулярным с повышением неоднородности пласта по трещиностойкости.

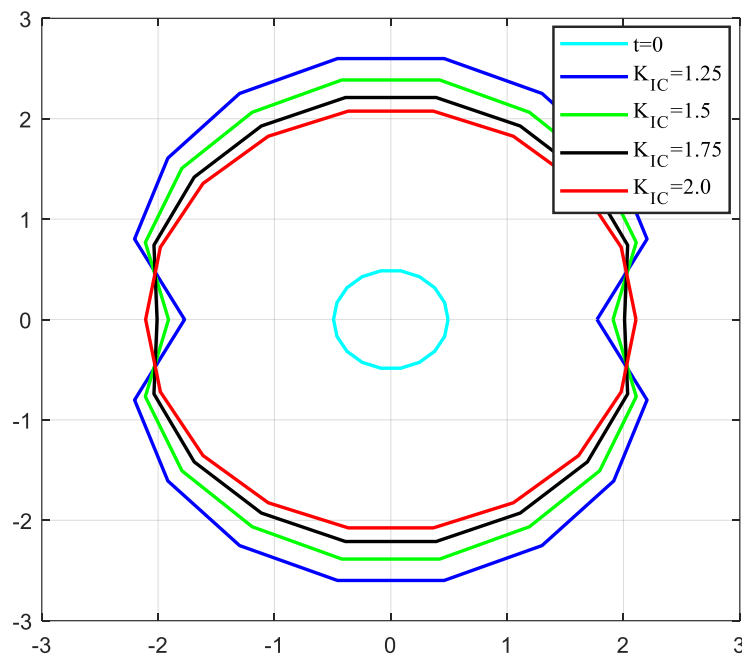


Рисунок 4.29. Профили трещины при различных значениях трещиностойкости обычных областей (см. рисунок 4.28) в момент $t = 30$ s

На рисунках 4.30 и 4.31 представлены подробные результаты изменения радиусов областей $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 80^\circ$ в зависимости от времени при разных уровнях неоднородности трещиностойкости пласта. Сравнительные результаты показывают, что только для области повышенной прочности $\theta = 0^\circ$ имеется обратная зависимость радиуса от трещиностойкости обычных областей, см. рисунок 4.30 (а), а для областей $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 80^\circ$ радиус области прямо зависит от трещиностойкости обычных областей, см. рисунок 4.30 (б), (в), (г) и рисунок 4.31. Это значит, что область повышенной прочности с большей трещиностойкостью в основном влияет на свой рост, а на рост соседних областей влияет очень мало. Сравнение с результатами, представленными на рисунках 4.19 и 4.20, показывает, что ослабленные области сильнее влияют на рост соседних областей, чем области повышенной прочности влияют на рост соседних областей. Еще одним выводом на основании рисунков 4.30 и 4.31 будет то, что чем меньше трещиностойкость обычных областей, тем быстрее они растут, и чем дальше они находятся от областей повышенной прочности, тем больше скорость их роста.

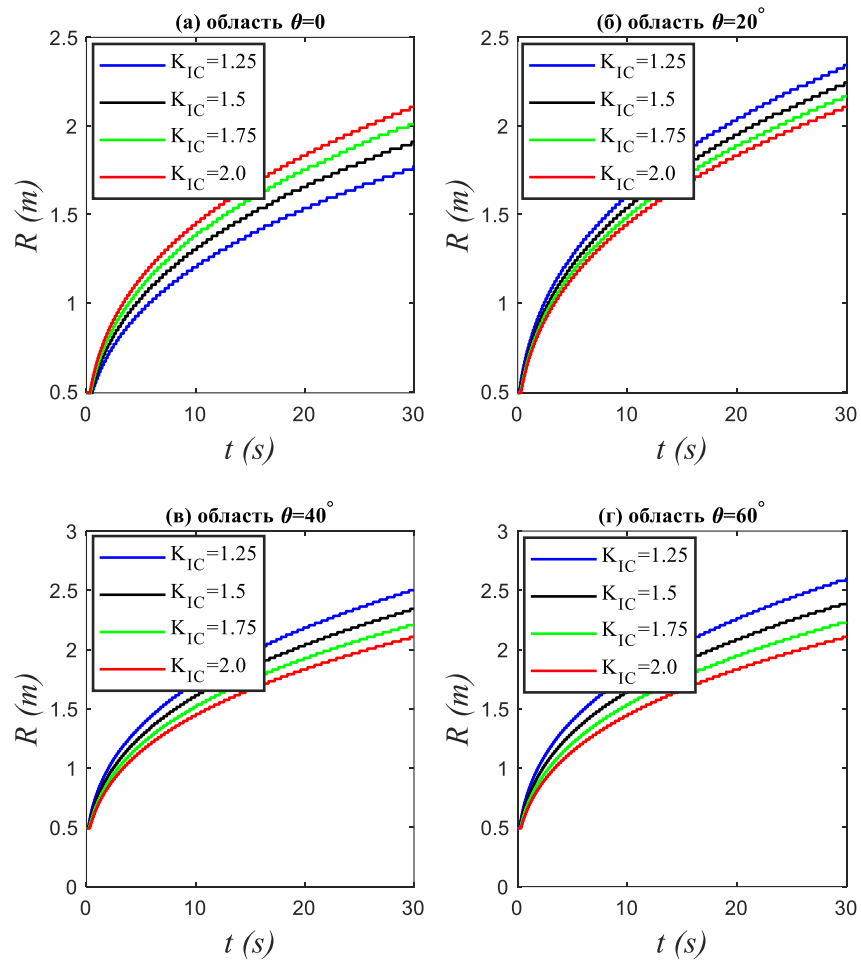


Рисунок 4.30. Зависимость радиусов радиальных областей $\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$ и $\theta = 60^\circ$ от времени t при различных значениях трещиностойкости обычных областей

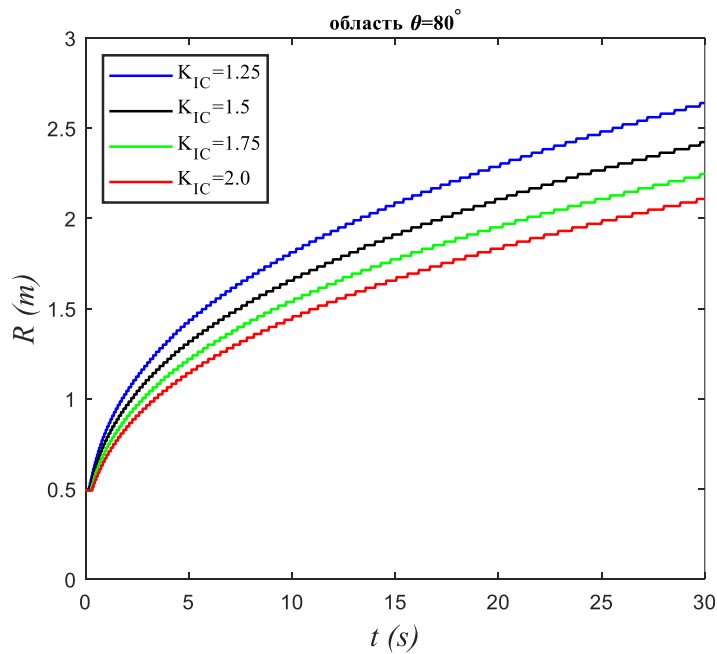


Рисунок 4.31. Зависимость радиуса радиальной области $\theta = 80^\circ$ от времени t при различных значениях трещиностойкости обычных областей

На рисунке 4.32 показана зависимость давления и раскрытия трещины на скважине от времени при различных перепадах трещиностойкости пласта. Из этих результатов следует, что чем меньше трещиностойкость обычных областей, тем больше неоднородность трещиностойкости пласта (разность двух разных трещиностойкостей), тем меньше давление жидкости и меньше раскрытие трещины на скважине. Это значит, что наличие областей повышенной прочности приводит к тому, что нагнетательная скважина потребляет больше энергии, но раскрытие трещины не увеличивается.

Другими словами, наличие областей повышенной прочности ограничивает распространение трещины в данных направлениях и способствует распространению трещины в ортогональные с областями повышенной прочности направления. Кроме того, области повышенной прочности ослабляют вклад гидравлической жидкости в раскрытие трещины.

По аналогии с исследованием положения ослабленных областей в разделе 4.3.1, в этом разделе так же будут проводиться сравнительные численные эксперименты для анализа положения областей повышенной прочности. Аналогично, выбираем пять различных относительных положений для двух симметричных областей повышенной прочности, в то время как трещиностойкость областей повышенной прочности и трещиностойкость остальных, обычных областей фиксированы и равны, соответственно, $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ и $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, см. рисунок 4.33, на котором желтые области представляют зоны повышенной прочности, а белые области – обычные зоны. Относительное положение $\Delta\phi$ двух симметричных областей повышенной прочности принимает пять значений: $\Delta\phi = 180^\circ, 140^\circ, 100^\circ, 60^\circ, 20^\circ$. Чем меньше значение $\Delta\phi$, тем ближе две симметричные области повышенной прочности. Сравнительные результаты для этих пяти различных относительных положений будут показаны далее.

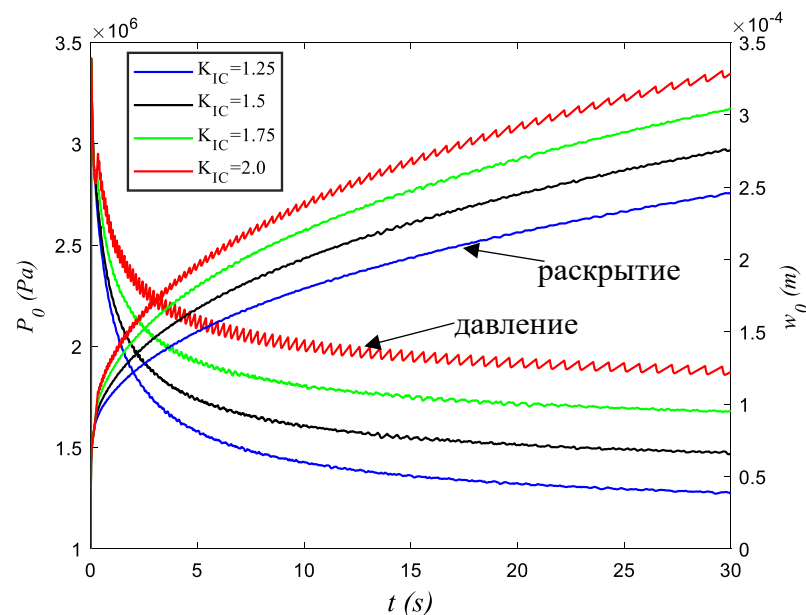


Рисунок 4.32. Давление p_0 и раскрытие w_0 на скважине в зависимости от времени t при различных значениях трещиностойкости обычных областей

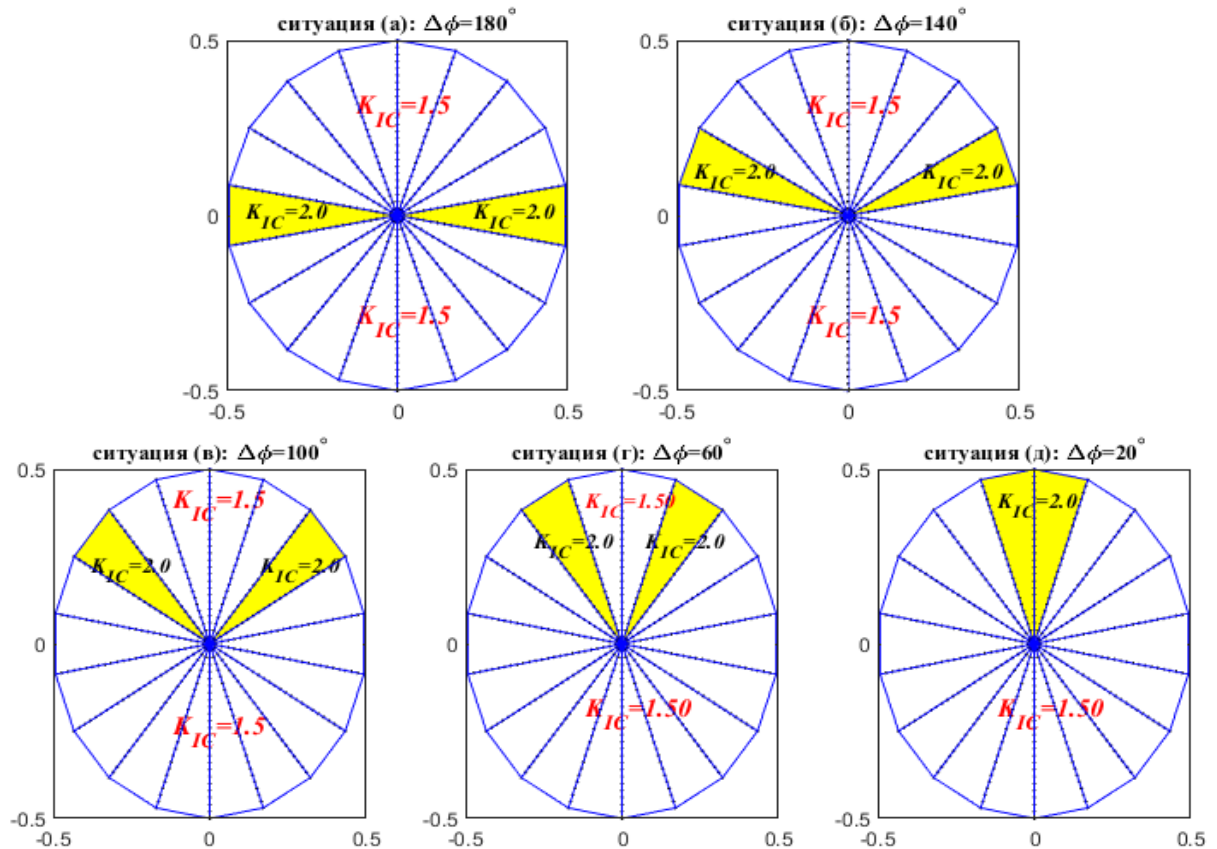


Рисунок 4.33. Пять различных относительных положений двух симметричных областей повышенной прочности в пласте

На рисунке 4.34 представлены профили трещины при различных относительных положениях областей повышенной прочности в момент $t = 30 \text{ s}$. Видно, что при каждом относительном положении только область повышенной прочности распространяется немного медленнее, а остальные области растут почти одинаково. Это значит, что, хотя области повышенной прочности препятствуют своему росту и росту соседних областей, такой сдерживающий эффект не очень явен, особенно для соседних областей. По сравнению с результатами при наличии ослабленных областей, представленными на рисунке 4.23, относительное положение областей повышенной прочности слабее влияет на профиль трещины и скорость роста трещины.

Рисунки 4.35, 4.36 и 4.37 показывают изменение радиусов области повышенной прочности, области $\theta = 80^\circ$ и области $\theta = 280^\circ$. Как следует из рисунка 4.35, приближение друг к другу областей повышенной прочности уменьшает скорость роста в них, но это влияние не очень велико. При этом влияние относительного положения областей повышенной прочности на рост области $\theta = 80^\circ$ куда более значительно, см. рисунок 4.36: чем ближе области повышенной прочности, тем меньше скорость роста области $\theta = 80^\circ$. На рисунке 4.37 показано, что относительное положение областей повышенной прочности мало влияет на рост области $\theta = 280^\circ$. На рисунке 4.38 представлены результаты изменения давления и раскрытия трещины на скважине со временем. Кривые давления жидкости и кривые раскрытия трещины

практически совпадают друг с другом. Это значит, что относительное положение областей повышенной прочности почти не влияет на раскрытие трещины в целом, хотя влияет на раскрытие отдельных частей трещины. В целом относительное положение областей повышенной прочности мало влияет на профиль трещины и общую скорость роста трещины, а только действует на частичный профиль трещины и на скорость роста локальной малой области трещины.

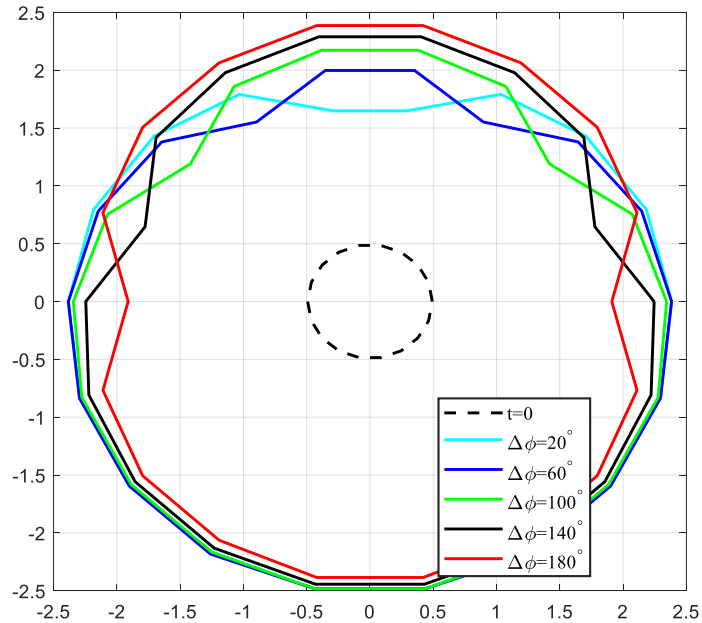


Рисунок 4.34. Профили трещины для различных относительных положений областей повышенной прочности в момент $t = 30$ s

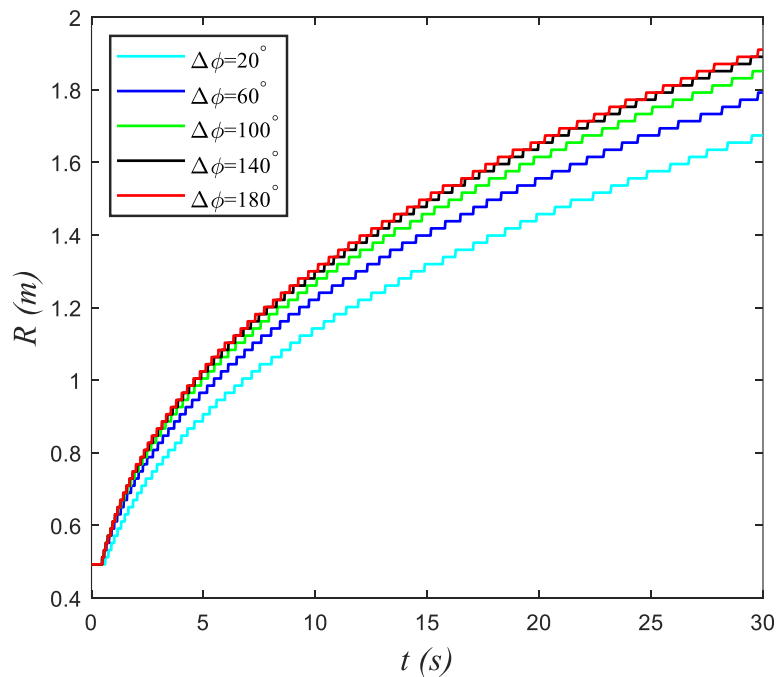


Рисунок 4.35. Зависимость радиусов области повышенной прочности ($\theta = 0^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $\theta = 40^\circ$, $\theta = 60^\circ$ и $\theta = 80^\circ$) от времени при их различных относительных положениях

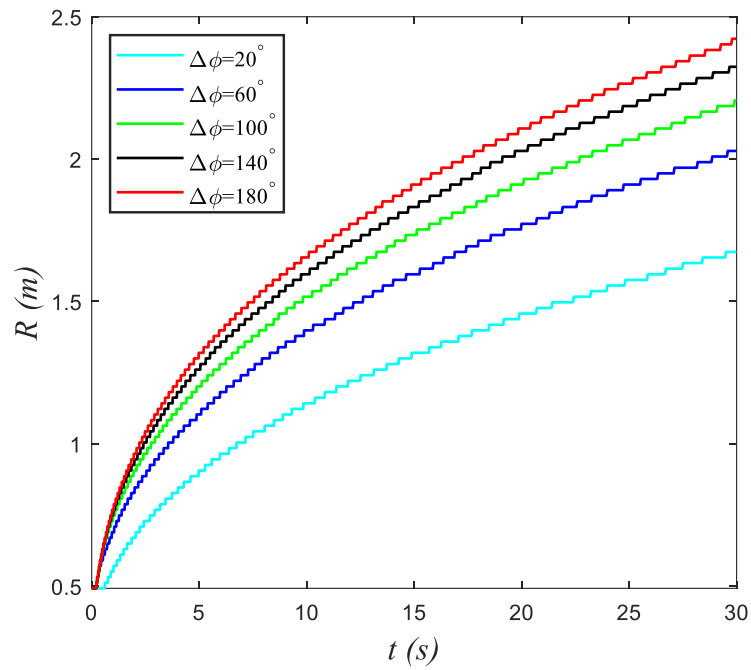


Рисунок 4.36. Зависимость радиуса области $\theta = 80^\circ$ от времени t при различных относительных положениях областей повышенной прочности

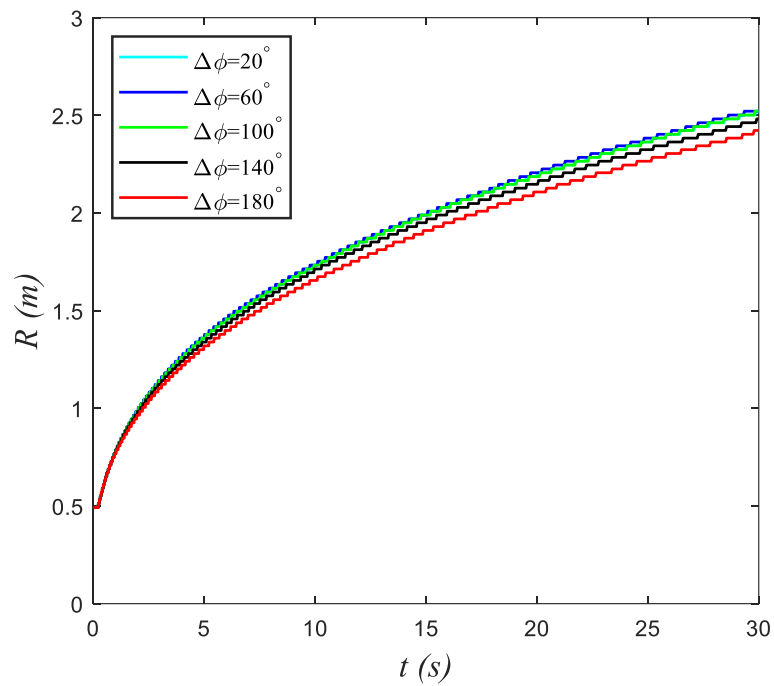


Рисунок 4.37. Зависимость радиуса области $\theta = 280^\circ$ от времени t при различных относительных положениях областей повышенной прочности

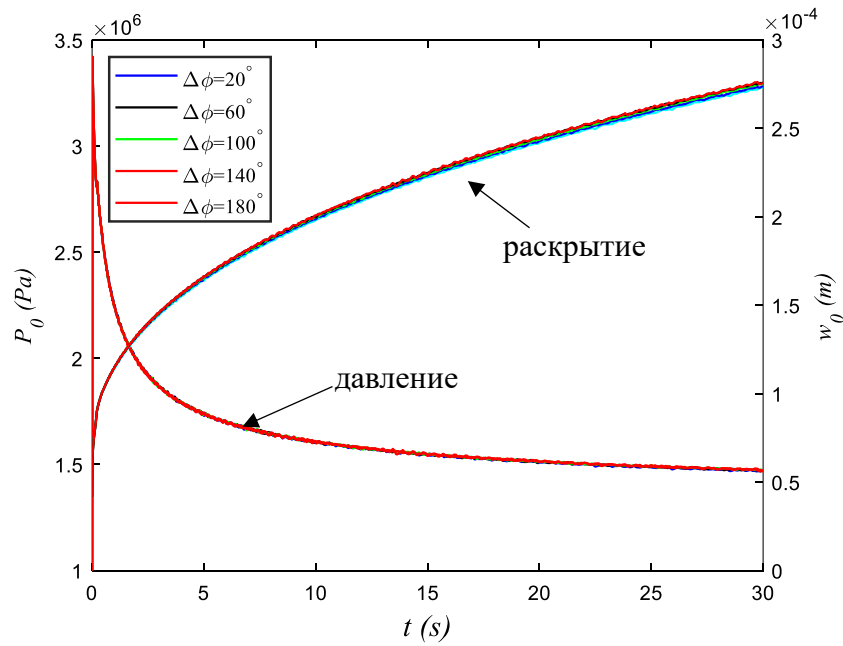


Рисунок 4.38. Давление p_0 и раскрытие w_0 на скважине в зависимости от времени t при различных относительных положениях областей повышенной прочности

4.3.3. Влияние долей ослабленных зон и зон повышенной прочности на рост трещины

В разделах 4.3.1 и 4.3.2 рассматриваются, соответственно, влияние пары ослабленных областей с меньшей трещиностойкостью материала на рост трещины и влияние пары областей с большей трещиностойкостью материала на рост трещины, а также исследуются два аспекта неоднородной трещиностойкости пласта: перепад трещиностойкости и относительное положение ослабленных зон.

Доля ослабленных областей, как и доля областей повышенной прочности, являются важным параметром, описывающим неоднородность пласта по трещиностойкости материала. Поскольку сумма доли ослабленных областей и доли областей повышенной прочности равна единице, достаточно выбрать один из показателей в качестве переменной. В связи с этим в настоящем разделе доля ослабленных областей выбирается в качестве переменной, чтобы рассматривать влияние доли неоднородной трещиностойкости на профиль и скорость роста трещины. С этой целью задаются три различных случая доли ослабленных областей, см. рисунок 4.39. Желтые области представляют собой ослабленные зоны с постоянной трещиностойкостью $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, белые являются областями с большей трещиностойкостью $K_{IC} = 2.0 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$. Ослабленные области в ситуациях (а), (б) и (в) состоят из одной, трех и пяти симметричных радиальных областей, соответственно. Их соответственные доли в полном пласте $\delta = 1/9, 1/3, 5/9$.

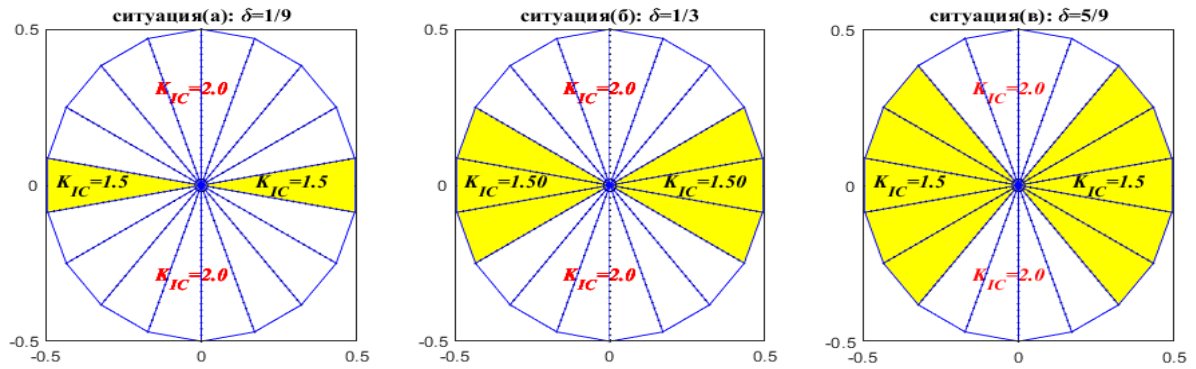


Рисунок 4.39. Три различных доли ослабленных областей в полном пласте

На рисунке 4.40 показаны профили трещины для различных долей ослабленных областей в момент $t = 30 \text{ s}$. В ситуации (а) на рисунке 4.39 ($\delta = 1/9$) профиль трещины (зеленая кривая на рисунке 4.40) напоминает эллипс, профили трещины при $\delta = 1/3, 5/9$ напоминают прямоугольники, которые очень похожи на профиль трещины модели РКН: скорость роста трещины в горизонтальном направлении намного больше, чем скорость роста трещины в вертикальном направлении. Это значит, что помимо фактора «барьера напряжений» имеется еще фактор наличия ослабленных областей в пласте, при определенных условиях тоже приводящий к распространению трещины, как в модели РКН. Это еще убедительнее доказывает рациональность учета неоднородности трещиностойкости пласта в моделях распространения гидравлической трещины.

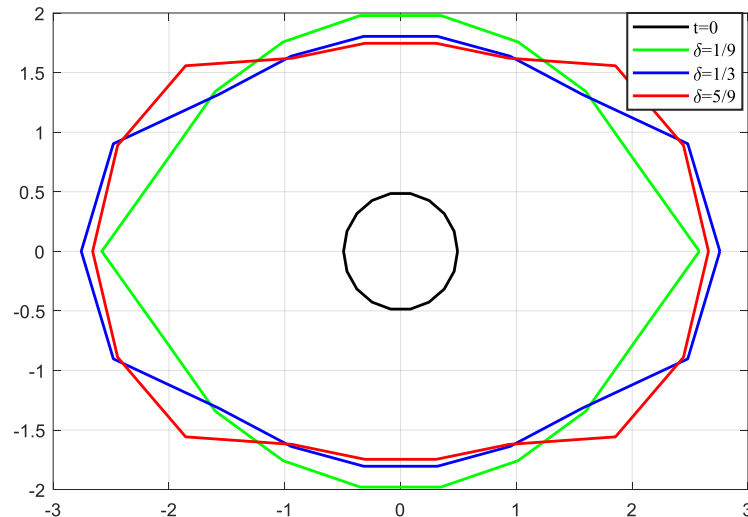


Рисунок 4.40. Профили трещины для различных долей ослабленных областей
в момент $t = 30 \text{ s}$

На рисунках 4.41 и 4.42 показаны изменения радиусов двух типичных областей (области $\theta = 0$ и $\theta = 80^\circ$) в зависимости от времени. Область $\theta = 0$ – это самая быстро распространяющаяся область трещины, представляет горизонтальную скорость

распространения трещины. Область $\theta = 80^\circ$ является самой медленной областью роста и представляет вертикальную скорость распространения трещины. Когда δ принимает промежуточное значение $\delta = 1/3$, область $\theta = 0$ распространяется быстрее всего, см. рисунок 4.41. Это значит, что радиус области $\theta = 0$ не имеет прямой или обратной зависимости от доли ослабленных областей. Кроме того, мы также обнаруживаем, что доля ослабленных областей влияет на радиус области $\theta = 0$ незначительно (три кривые близки друг к другу). Как следует из рисунка 4.42, в каждый момент радиус области $\theta = 80^\circ$ максимален при малой доле $\delta = 1/9$, и минимален при большей доле $\delta = 5/9$. Это значит, что чем больше ослабленные области, тем медленнее растет область $\theta = 80^\circ$. Наличие ослабленных областей препятствует росту областей повышенной прочности, и этот эффект усиливается с увеличением ослабленных областей. Это приводит к увеличению разницы между горизонтальной скоростью распространения трещины (область $\theta = 0$) и вертикальной скоростью распространения трещины (область $\theta = 80^\circ$). Профиль трещины изменяется с увеличением доли ослабленных областей или уменьшением доли областей повышенной прочности: круглая форма трещины, соответствующая однородному пласти по трещиностойкости; приближенная эллиптическая форма, соответствующая пласти с малой частью ослабленных областей ($\delta = 1/9, 1/3$ на рисунке 4.40); приближенная прямоугольная форма, соответствующая пласти с большей частью ослабленных областей или малой частью областей повышенной прочности ($\delta = 5/9$ на рисунке 4.40).

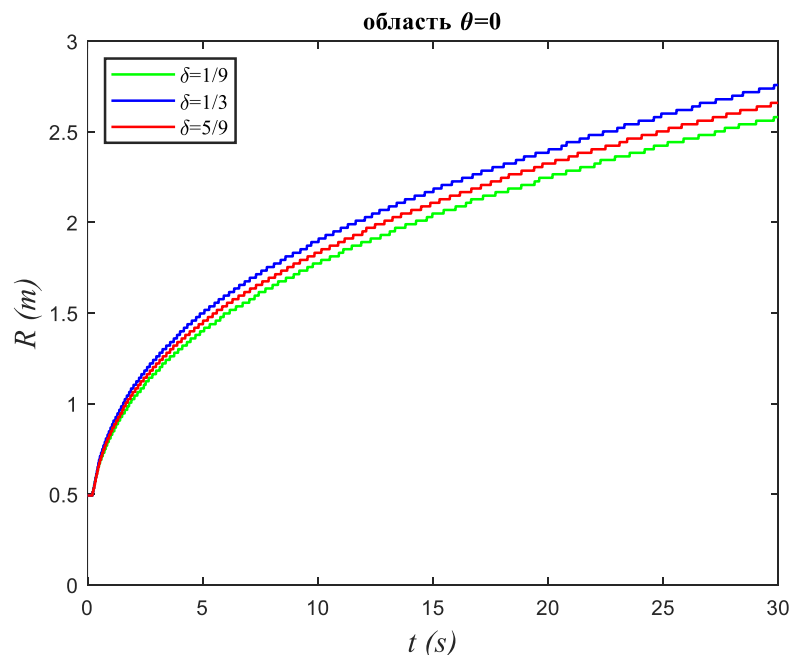


Рисунок 4.41. Зависимость радиуса области $\theta = 0$ от времени t для различных долей ослабленных областей

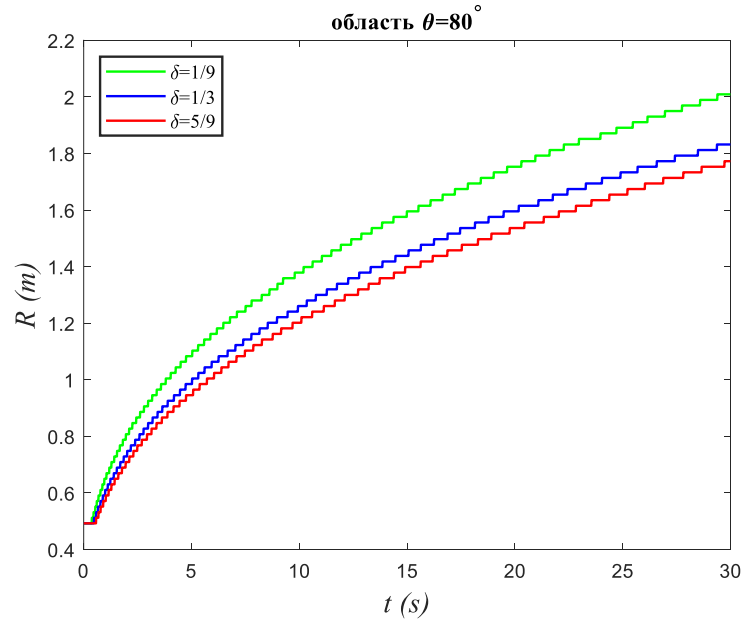


Рисунок 4.42. Зависимость радиуса области $\theta = 80^\circ$ от времени t для различных долей ослабленных областей

На рисунке 4.43 представлена зависимость давления и раскрытия трещины на скважине от времени при $\delta = 1/9, 1/3, 5/9$. Давление и раскрытие трещины на скважине уменьшаются с увеличением значения δ . Это значит, что при одинаковой закачке увеличение ослабленных областей или уменьшение областей повышенной прочности вносит большой вклад в образование новых поверхностей трещины, но не способствует большему раскрытию трещины в целом.

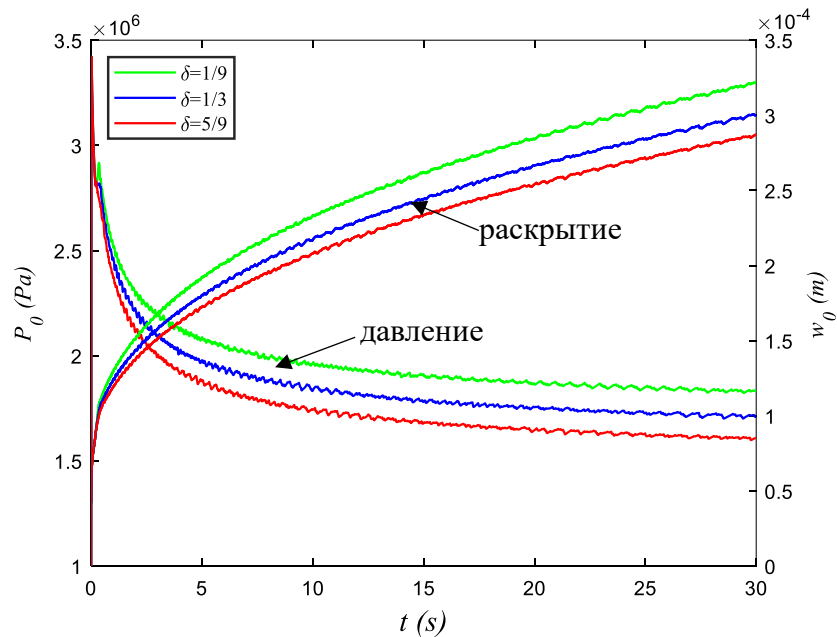


Рисунок 4.43. Зависимость давления p_0 и раскрытия w_0 на скважине от времени t при различных долях ослабленных областей в пласте

4.4. Выводы

В данном разделе подробно показаны численные решения плоско-трехмерного распространения трещины в пласте, характеризующемся неоднородной трещиностойкостью материала, а также проведены сравнительные численные эксперименты по величине, положению и доле неоднородной трещиностойкости (трещиностойкость ослабленных областей и трещиностойкость областей повышенной прочности). Результаты показывают следующее.

(1) Наличие ослабленных областей способствует росту в них и в окружающих их областях, что приводит к локальной выпуклой форме трещины на ослабленных областях, а наличие областей повышенной прочности препятствует росту в них и в окружающих их областях, что приводит к локальной вогнутой форме трещины на областях повышенной прочности.

(2) Эффект ускорения роста ослабленных областей повышается с уменьшением значения трещиностойкости ослабленных областей. Эффект замедления роста областей повышенной прочности повышается с увеличением значения трещиностойкости в областях повышенной прочности. Чем меньше значение трещиностойкости ослабленных областей или больше значение трещиностойкости областей повышенной прочности, тем нерегулярнее форма трещины.

(3) Положение ослабленных областей и положение областей повышенной прочности в основном влияют на форму трещины. Чем ближе неоднородные области, тем нерегулярнее (больше отличается от круговой) форма трещины. Разница состоит в том, что наличие ослабленных областей заставляет трещину расти быстрее на этих участках, и наоборот, наличие областей повышенной прочности замедляет рост трещины на них.

(4) При наличии ослабленных областей поверхности трещины развиваются быстрее благодаря большей скорости роста ослабленных областей, что уменьшает раскрытие трещины в целом. Наоборот, наличие областей повышенной прочности замедляет развитие поверхностей трещины и увеличивает общее раскрытие трещины.

(5) Доля ослабленных областей или доля областей повышенной прочности существенно влияет на форму трещины и общую скорость распространения трещины: скорость роста трещины в направлении ослабленных областей увеличивается, а скорость роста трещины в направлении областей повышенной прочности уменьшается с увеличением доли ослабленных областей или уменьшением доли областей повышенной прочности. Это приводит к увеличению разницы между скоростями роста в этих двух направлениях, и форма трещины меняется от круглого профиля до приближенного эллиптического профиля, и далее – до приближенного прямоугольного профиля.

(6) Сравнение показало, что форма трещины, площадь поверхностей трещины и общая скорость роста трещины более чувствительны к ослабленным областям, чем к областям повышенной прочности.

Заключение

1. Исследовано распространение трещины гидравлического разрыва в средах, характеризующихся неоднородной трещиностойкостью материала. Получено асимптотическое решение для гидравлической трещины на раннем этапе закачки (решение начального уровня) и эволюционные решения повторного открытия и распространения гидравлической трещины.
2. Проведен анализ плоско-трехмерной модели распространения гидравлической трещины: рассмотрена теория построения трехмерной модели, описаны вычислительные методы моделирования, представлены численные решения, подробное сравнение и анализ численных экспериментов.
3. Для задачи двумерной модели роста трещины гидроразрыва пласта показано, что поскольку горное давление входит в уравнения упругости и определяет условия роста трещины при наличии зоны отстаивания жидкости, оно становится важным фактором при описании эволюции гидравлической трещины. При малом горном давлении гидравлическая жидкость занимает малую долю открытой трещины, и распределение давления жидкости является линейным, трещина характеризуется «острой» вершиной. При высоком горном давлении жидкость заполняет почти всю открытую трещину и градиент давления на фронте жидкости приближается к отрицательной бесконечности, и трещина характеризуется «закругленной» вершиной.
4. В случае плоско-трехмерной модели роста трещины в неоднородных средах показано, что наличие ослабленных областей способствует росту трещины в этих направлениях и в прилегающих к ним областях, что приводит к локальной выпуклой форме трещины на ослабленных участках. Наличие областей повышенной прочности препятствует росту трещины в этих направлениях и примыкающих областях, что приводит к локальной вогнутой форме трещины в областях повышенной прочности. Чем меньше (больше) трещиностойкость областей, тем быстрее (медленнее) растут эти области, что приводит к неравномерному распространению трещины.

Список литературы

1. Акулич, А. В. Взаимодействие статической трещины гидроразрыва, находящейся под постоянным давлением жидкости, с природным разломом / А. В. Акулич, А. В. Звягин, Д. А. Пестов, В. В. Тюренкова, Ли Кайжуй // Математическое моделирование. – 2018. – № 7. – С. 79-92.
2. Li, K. R. An approximate analytical solution for hydraulic fracture opening under non-uniform internal pressure / K. R. Li, N. N. Smirnov, D. A. Pestov, C. Z. Qi, A. B. Kiselev // Materials Physics and Mechanics. – 2020. – Vol. 44. – P. 288-305.
3. Li, K. R. An implicit algorithm with fast convergence for evolution of a pre-existing-closed plane-strain hydraulic fracture / K. R. Li, N. N. Smirnov, C. Z. Qi, A. B. Kiselev, M. Y. Wang // WSEAS Transactions on Mathematics. – 2019. – Vol. 48. – P. 359-372.
4. Clark, J. B. A hydraulic process for increasing the productivity of wells / J. B. Clark // Petroleum Transaction, AIME. – 1949. – January. – P. 1-8.
5. Economides, M. J. Reservoir Stimulation / M. J. Economides, K. G. Nolte. – 3-rd ed. – Old Tappan, NJ: Prentice Hall Inc, 2002.
6. Федоров, А. Э. Эволюция развития технологий разработки трудноизвлекаемых запасов США / А. Э. Федоров, Н. Ф. Фазлыев, А. Ф. Калимуллин; ООО «РН-БашНИПИнефть». – 2019. – Июнь. Вып. 1.
7. Technically recoverable shale oil and shale gas resources: an assessment of 137 shale formation in 41 countries outside the United States // Independent Statistics & Analysis, June 2013, U.S. Department of Energy Washington DC.
8. Annual energy outlook 2020 with projections to 2050 / U.S. Energy Information Administration. – January 2020.
9. Desroches, J. Modelling the propagation and closure of micro-hydraulic fracture / J. Desroches, M. Thiercelin // International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts. – 1993. – Vol. 30(7). – P. 1231-1234.
10. Klee, G. Hydraulic fracturing stress measurements in Hong Kong / G. Klee, F. Rummel, A. Williams // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 1999. – Vol. 36. – P. 731-741.
11. Pine, R. J. Application of the fluid-rock interaction program (FRIP) to the modelling of hot dry rock geothermal energy systems / R. J. Pine, P. A. Cundall // Proceedings of the international symposium on fundamentals of rock joints. – Bjorkliden, Sweden, 1985. – P. 293- 302.
12. Zhou, Z. Investigation on fracture creation in hot dry rock geothermal formations of China during hydraulic fracturing / Z. Zhou, Y. Jin, Y. Zeng, X. Zhang, J. Zhou, L. Zhuang, S. Xin // Renewable Energy. – 2020. – Vol. 153. – P. 301-313.
13. Grebe, J. J. Increasing crude production 200000000 Bbl. From established fields / J. J. Grebe, S. M. Stoesser // World Petrol. – 1935. – Vol. 6(8). – P. 473-482.
14. Veatch, R. W. Overview of current hydraulic fracturing design and treatment technology. Part 1 / R. W. Veatch // Journal of Petroleum Technology. – 1983. – Vol. 35(4). – P. 677-687.
15. Veatch, R. W. Overview of current hydraulic fracturing design and treatment technology. Part 2 / R. W. Veatch // Journal of Petroleum Technology. – 1983. – Vol. 35(5). – P. 853-864.
16. Veatch, R. W. An overview of recent advances in hydraulic fracturing technology / R. W. Veatch, Z. A. Moschovidis // International Meeting on Petroleum Engineering (17-20 March 1986). – China, 1986. – P. 421-454.
17. Osipov, A. A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: a review / A. A. Osipov // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2017. – Vol. 156. – P. 513-535.

18. Montgomery, K. T. Effects of fracture invasion on cleanup behavior and pressure buildup analysis / K. T. Montgomery, S. A. Holditch, J. M. Berthelot // SPE Annual Technical Conference and Exhibition (23-26 September 1990). – New Orleans, 1990. – P. 279- 290.
19. Smirnov, N. N. Hydraulic Fracturing and Filtration in Porous Medium / N. N. Smirnov, A. B. Kisselev, V. F. Nikitin, A. V. Zvyaguin, M. Thiercelin, J. C. Legros // 2006 SPE Russian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition (3–6 October 2006). – Moscow, Russia, 2006. – P. 1-12.
20. Theuveny, B. Integrated approach to simulation of near-wellbore and wellbore cleanup / B. Theuveny, D. Mikhailov, P. Spesivtsev, A. Starostin, A. A. Osipov, M. Sidorova, V. Shako // SPE Annual Technical Conference and Exhibition (30 September – 2 October 2013). – New Orleans, Louisiana, USA, 2013. – P. 1-28.
21. Detournay, E. The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid / E. Detournay, D. I. Garagash // Journal of Fluid Mechanics. – 2003. – Vol. 494. – P. 1-32.
22. Adachi, J. I. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid / J. I. Adachi, E. Detournay // International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics. – 2002. – Vol. 26. – P. 579-604.
23. Linkov, M. A. Analytical solution of hydraulic fracture problem for a non-Newtonian fluid / M. A. Linkov // Journal of Mining Science. – 2013. – Vol. 49(1). – P. 8-18.
24. Mohammad, N. O. A coupled hydro-mechanical analysis for prediction of hydraulic fracture propagation in saturated porous media using EFG mesh-less method / N. O. Mohammad, P. Ali, S. Kenichi // Computers and Geotechnics. – 2014. – Vol. 55. – P. 254-266.
25. Kresse, O. Numerical modeling of hydraulic fractures interaction in complex naturally fractured formations / O. Kresse, X. Weng, H. Gu // Rock Mechanics and Rock Engineering. – 2013. – Vol. 46. – P. 555-568.
26. Ren, L. Modeling and simulation of complex fracture network propagation with SRV fracturing in unconventional shale reservoirs / L. Ren, Y. Su, S. Zhan, Y. Hao, F. Meng, G. Sheng // Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2016. – Vol. 28. – P. 132-141.
27. Sneddon, N. I. The opening of a Griffith crack under internal pressure / N. I. Sneddon, H. A. Elliott // Quarterly of Applied Mathematics. – 1946. – Vol. 4(3). – P. 262-267.
28. Sneddon, N. I. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid / N. I. Sneddon // Proceeding Mathematical Physical & Engineering Sciences. – 1946. – Vol. 187(1009). – P. 229-260.
29. Sneddon, N. I. Fourier transforms / N. I. Sneddon. – McGraw-Hill, 1951.
30. Sneddon, N. I. Crack problems in the classical theory of elasticity / N. I. Sneddon, M. Lowengrub. – New York: John Wiley & Sons, 1969.
31. Khristianovich, S. A. Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid / S. A. Khristianovich, Y. P. Zheltov // Proceedings of the Fourth World Petroleum Congress (6-15 June 1955). – Rome, 1955. – P. 579-586.
32. Medlin, W. L. Laboratory experiment in fracture propagation / W. L. Medlin, L. Masse // Society of Petroleum Engineers Journal. – 1984. – Vol. 24(3). – P. 256-268.
33. Groenenboom, J. Time-Lapse ultrasonic measurements of laboratory hydraulic-fracture growth: tip behavior and width profile / J. Groenenboom, D. B. van Dam, C. J. de Pater // SPE Journal. – 2001. – Vol. 6(1). – P. 14-24.
34. Bunger, P. A. Crack tip behavior in near-surface fluid driven fracture experiments / P. A. Bunger, E. Detournay, R. G. Jeffrey // Comptes Rendus Mécanique. – 2005. – Vol. 333(4). – P. 299-304.
35. Geertsma, J. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. de Klerk // Journal of Petroleum Technology. – 1969. – Vol. 21(12). – P. 1571-1581.
36. Daneshy, A. A. On the design of vertical hydraulic fractures / A. A. Daneshy // Journal of Petroleum Technology. – 1973. – Vol. 25(1). – P. 83-97.

37. Spence, D. A. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow / D. A. Spence, P. Sharp // *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences*. – 1985. – Vol. 400(18). – P. 289-313.
38. Savitski, A. Similarity solution of a penny-shaped fluid-driven fracture in a zero-toughness linear elastic solid / A. Savitski, E. Detournay // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Series: Mechanics*. – 2001. – Vol. 329. – P. 255-262.
39. Perkins, T. K. Widths of hydraulic fractures / T. K. Perkins, L. R. Kern // *Journal of Petroleum Technology*. – 1961. – Vol. 13(9). – P. 937-949.
40. Nordgren, R. P. Propagation of a vertical hydraulic fracture / R. P. Nordgren // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1972. – Vol. 12(4). – P. 306-314.
41. Geertsma, J. A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures / J. Geertsma, R. Haafkens // *Energy Resources Technology*. – 1979. – Vol. 101(1). – P. 8-19.
42. Киселев, А. Б. Численное моделирование динамики распространения криволинейных трещин гидроразрыва / А. Б. Киселев, А. А. Лукьянов, М. Тьерсилен // *Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. – 2004. – № 1. – С. 36-41.
43. Simonson, E. R. Containment of massive hydraulic fractures / E. R. Simonson, A. S. Abou-sayed, R. J. Clifton // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1978. – Vol. 18(1). – P. 27-32.
44. Cleary, P. M. Analysis of mechanisms and procedures for producing favorable shapes of hydraulic fractures / P. M. Cleary // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition (21-24 September 1980)*. – Dallas, Texas, 1980. – P. 1-16.
45. Van Eekelen, H. A. M. Hydraulic fracture geometry: fracture containment in layered formations / H. A. M. van Eekelen // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1982. – Vol. 22(3). – P. 341-349.
46. Meyer, B. R. Design formulae for 2-D and 3-D vertical hydraulic fractures: model comparison and parametric studies / B. R. Meyer // *SPE Unconventional Gas Technology Symposium (18-21 May 1986)*. – Louisville, Kentucky, 1986. – P. 391-408.
47. Advani, S. H. Finite element model simulations associated with hydraulic fracturing / S. H. Advani, J. K. Lee // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1982. – Vol. 22(2). – P. 209-218.
48. Settari, A. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry / A. Settari, M. P. Cleary // *SPE Production Engineering*. – 1986. – Vol. 1(6). – P. 449-466.
49. Morales, R. H. Microcomputer analysis of hydraulic fracture behaviour with a pseudo-three-dimensional simulator / R. H. Morales // *SPE Production Engineering*. – 1989. – Vol. 4(1). – P. 69-74.
50. Palmer, D. I. Numerical solution for height and elongated hydraulic fractures / D. I. Palmer, H. B. Jr. Carroll // *SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium (14-16 March 1983)*. – Denver, Colorado, 1983. – P. 249-256.
51. England, A. H. Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity / A. H. England, A. E. Green // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1963. – Vol. 59(2). – P. 489-500.
52. Barre, R. D. A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media / R. D. Barre // *SPE Reservoir Simulation Symposium (15-18 November 1983)*. – San Francisco, California, 1983. – P. 403-414.
53. Clifton, R. J. A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures / R. J. Clifton, A. S. Abou-Sayed // *SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium (27-29 May 1981)*. – Denver, Colorado, 1981. – P. 457-465.
54. Advani, S. H. Three-dimensional modelling of hydraulic fractures in layered media. Part I: Finite elements formulations / S. H. Advani, T. S. Lee, J. K. Lee // *Journal of Energy Resources Technology*. – 1990. – Vol. 112(1). – P. 1-9.

55. Lee, T. S. Three-dimensional analysis of an arbitrary shaped pressurized crack traversing a bi-material interface / T. S. Lee, S. H. Advani, J. K. Lee // *Engineering of Fracture Mechanics*. – 1988. – Vol. 30(2). – P. 191-209.
56. Naceur, K. B. Simulation of fluid flow in hydraulic fracturing: implications for 3D propagation / K. B. Naceur, M. Thiercelin, E. Touboul // *SPE Production Engineering*. – 1990. – Vol. 5(2). – P. 133-141.
57. Vandamme, L. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator / L. Vandamme, J. H. Curran // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1989. – Vol. 28. – P. 909-927.
58. Siebrits, E. An efficient multi-layer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach / E. Siebrits, A. P. Peirce // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2002. – Vol. 53. – P. 691-717.
59. Adachi, J. Computer simulation of hydraulic fractures / J. Adachi, E. Siebrits, A. Peirce, J. Desroches // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Science*. – 2007. – Vol. 44. – P. 739-759.
60. Yamamoto, K. Multiple fracture propagation model for a three-dimensional hydraulic fracturing simulator / K. Yamamoto, T. Shimamoto, S. Sukemura // *International journal of Geomechanics*. – 2004. – Vol. 4(1). – P. 46-57.
61. Rafiee, M. Geomechanical Considerations in hydraulic fracturing designs / M. Rafiee, M. Y. Soliman, E. Pirayesh, H. E. Meybodi // *SPE Canadian Unconventional Resources Conference* (30 October – 1 November 2012). – Calgary, Alberta, Canada, 2012. – P. 1-13.
62. Bunger, A. P. Numerical simulation of simultaneous growth of multiple interacting hydraulic fractures from horizontal wells / A. P. Bunger, A. P. Peirce // *Shale Energy Engineering Conference* (21-23 July 2004). – Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2004. – P. 201-210.
63. Zhao, J. Simulation of simultaneous propagation of multiple hydraulic fractures in horizontal wells / J. Zhao, X. Chen, Y. Li, B. Fu // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 147. – P. 788-800.
64. Kumar, D. A three-dimensional analysis of simultaneous and sequential fracturing of horizontal wells / D. Kumar, A. Ghassemi // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 146. – P. 1006-1025.
65. Li, Y. Numerical simulation of limited-entry multi-cluster fracturing in horizontal well / Y. Li, J. Deng, W. Liu, W. Yan, Y. Feng, W. Cao, P. Wang, Y. Hou // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2017. – Vol. 152. – P. 443-455.
66. Chen, X. Numerical investigation for simultaneous growth of hydraulic fractures in multiple horizontal wells / X. Chen, Y. Li, J. Zhao, W. Xu, D. Fu // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2018. – Vol. 51. – P. 44-52.
67. Yang, Z. Pseudo-three-dimensional numerical model and investigation of multi-cluster fracturing within a stage in a horizontal well / Z. Yang, L. Yi, X. Li, W. He // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2018. – Vol. 162. – P. 190-213.
68. Salimzadeh, S. Finite element simulations of interactions between multiple hydraulic fractures in a poroelastic rock / S. Salimzadeh, T. Usui, A. Paluszny, R. W. Zimmerman // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. – 2017. – Vol. 99. – P. 9-20.
69. Guo, J. Perforating cluster space optimization method of horizontal well multi-stage fracturing in extremely thick unconventional gas reservoir / J. Guo, Q. Lu, H. Zhu, Y. Wang, M. Li // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 26. – P. 1648-1662.
70. Xu, Y. Stress interference calculation model and its application in volume stimulation of horizontal wells / Y. Xu, M. Chen, Q. Wu, D. Li, N. Yang, D. Weng, B. Guan // *Petroleum Exploration and Development*. – 2016. – Vol. 43(5). – P. 849-856.
71. Wang, H. Numerical investigation of fracture spacing and sequencing effects on multiple hydraulic fracture interference and coalescence in brittle and ductile reservoir rocks / H. Wang // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2016. – Vol. 157. – P. 107-124.

72. Zou, Y. Numerical investigation of hydraulic fracture network propagation in naturally fractured shale formations / Y. Zou, S. Zhang, X. Ma, T. Zhou, B. Zeng // *Journal of Structural Geology*. – 2016. – Vol. 84. – P. 1-13.
73. Hubbert, M. K. Mechanics of hydraulic fracturing / M. K. Hubbert, D. G. Willis // *Transaction of Society of Petroleum Engineers of AIME*. – 1957. – Vol. 210. – P. 153-163.
74. Hanson, M. E. Some effects of stress, friction, and fluid flow on hydraulic fracturing / M. E. Hanson, G. D. Anderson, R. J. Shaffer, L. D. Thorson // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1982. – Vol. 22(3). – P. 321-332.
75. Warpinski, N. R. A. In-situ stresses: the predominant influence on hydraulic fracture containment / N. R. Warpinski, R. A. Schmidt, D. A. Northrop // *Journal of Petroleum Technology*. – 1982. – Vol. 34(3). – P. 653-664.
76. Nolte, K. G. Application of fracture design based on pressure analysis / K. G. Nolte // *SPE Production Engineering*. – 1988. – Vol. 3(1). – P. 31-42.
77. Wills, P. B. Active and passive imaging of hydraulic fractures / P. B. Wills, D. C. DeMartini, H. J. Vinegar, J. Shlyapobersky, W. F. Deeg, J. C. Woerpel, G. G. Sorrells, R. G. Adair // *The Geophysics: The Leading Edge*. – 1992. – Vol. 11(7). – P. 15-22.
78. De Pater, C. J. Experimental study of nonlinear effects in hydraulic fracture propagation / C. J. De Pater, L. Weijers, M. Savic, K. H. A. A. Wolf, P. J. van den Hoek, D. T. Barr // *SPE Production & Facilities*. – 1994. – Vol. 9(4). – P. 239-248.
79. Jeffrey, R. G. A comparison of hydraulic fracture field experiments, including mineback geometry data, with numerical fracture model simulations / R. G. Jeffrey, A. Settari, N. P. Smith // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition (22-25 October 1995)*. – Dallas, Texas, 1995. – P. 591- 606.
80. Groenenboom, J. Monitoring the width of hydraulic fractures with acoustic waves / J. Groenenboom, J. T. Fokkema // *Geophysics*. – 1998. – Vol. 63(1). – P. 139-148.
81. Groenenboom, J. Monitoring hydraulic fracture growth: laboratory experiments / J. Groenenboom, D. B. van Dam // *Geophysics*. – 2000. – Vol. 65(2). – P. 603-611.
82. De Pater, C. J. Active seismic monitoring of hydraulic fractures in laboratory experiments / C. J. De Pater, J. Groenenboom, D. B. van Dam, R. Romijin // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Science*. – 2001. – Vol. 38. – P. 777-785.
83. Bunger, A. P. Crack tip behaviour in near-surface fluid-driven fracture experiments / A. P. Bunger, E. Detournay, R. G. Jeffrey // *Comptes Rendus Mécanique*. – 2005. – Vol. 333. – P. 299-304.
84. Li, D. Experimental and numerical simulation study on fracturing through interlayer to coal seam / D. Li, S. Zhang, S. Zhang // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2014. – Vol. 21. – P. 386-396.
85. Guo, T. Experimental study of hydraulic fracturing for shale by stimulated reservoir volume / T. Guo, S. Zhang, Z. Qu, T. Zhou, Y. Xiao, J. Guo // *Fuel*. – 2014. – Vol. 128. – P. 373-380.
86. Zhang, G. Dynamic fracture propagation in hydraulic re-fracturing / G. Zhang, M. Chen // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2010. – Vol. 70. – P. 266-272.
87. Mao, R. Laboratory hydraulic fracturing test on large-scale pre-cracked granite specimens / R. Mao, Z. Feng, Z. Liu, Y. Zhao // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2017. – Vol. 4. – P. 278-286.
88. Bouteica, M. J. 3D analytical model for hydraulic fracturing: theory and field test / M. J. Bouteica // *SPE Annual Technical Conference and Exhibition (16-19 September 1984)*. – Houston, Texas, 1984. – P. 1-8.
89. Boone, T. J. A numerical procedure for simulation of hydraulically-driven fracture propagation in poroelastic media / T. J. Boone, A. R. Ingraffea // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 1990. – Vol. 14(1). – P. 27-47.

90. Papanastasiou, P. An efficient algorithm for propagating fluid-driven fractures / P. Papanastasiou // *Computational Mechanics*. – 1999. – Vol. 24. – P. 258-267.
91. Nygaard, R. Full fluid-solid cohesive finite-element model to simulate near wellbore fractures / R. Nygaard, S. Salehi // *Journal of Energy Resources Technology*. – 2015. – Vol. 137(1) : 012903 (9 pages).
92. Carrier, B. Numerical modelling of hydraulic fracture problem in permeable medium using cohesive zone model / B. Carrier, S. Granet // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2012. – Vol. 79. – P. 312-328.
93. Fu, X. Experimental and numerical study of radial lateral fracturing for coalbed methane / X. Fu, G. Li, Z. Huang, Y. Liang, Z. Xu // *Journal of Geophysics and Engineering*. – 2015. – Vol. 12(5). – P. 875-886.
94. Feng, Y. Parameter controlling pressure and fracture behaviors in field injectivity tests: a numerical investigation using coupled flow and geomechanics model / Y. Feng, K. E. Gray // *Computers and Geotechnics*. – 2017. – Vol. 87. – P. 49-61.
95. Belytschko, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing / T. Belytschko, T. Black // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1999. – Vol. 45(5). – P. 601-620.
96. Lecampion, B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems / B. Lecampion // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. – 2009. – Vol. 25. – P. 121-133.
97. Gordeliy, E. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM / E. Gordeliy, A. Peirce // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2013. – Vol. 253. – P. 305-322.
98. Gordeliy, E. Enrichment strategies and convergence properties of the XFEM for hydraulic fracture problems / E. Gordeliy, A. Peirce // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2015. – Vol. 283. – P. 474-502.
99. Mohammadnejad, T. Numerical modelling of hydraulic fracture propagation, closure and reopening using XFEM with application to in-situ stress estimation / T. Mohammadnejad, J. E. Andrade // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2016. – Vol. 40(15). – P. 2033-2060.
100. Shi, F. A coupled extended finite element approach for modelling hydraulic fracturing in consideration of proppant / F. Shi, X. Wang, C. Liu, H. Liu, H. Wu // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 33. – P. 885-897.
101. Liu, C. Numerical simulation of simultaneous multiple fractures initiation in unconventional reservoirs through injection control of horizontal well / C. Liu, F. Shi, D. Lu, H. Wu, H. Wang, H. Liu // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2017. – Vol. 159. – P. 603-613.
102. Liu, C. Optimal spacing of sequential and simultaneous fracturing in horizontal well / C. Liu, X. Wang, D. Deng, Y. Zhang, Y. Zhang, H. Wu, H. Liu // *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 29. – P. 329-336.
103. Cundall, P. A. A computer model for simulating progressive, large scale movement in blocky rock systems / P. A. Cundall // *Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics*. – Nancy, France, 1971.
104. Lisjak, A. A 2D, fully-coupled, hydro-mechanical, FDEM formulation for modelling fracturing processes in discontinuous, porous rock masses / A. Lisjak, P. Kaifosh, L. He, B. S. A. Tatone, O. K. Mahabadi, G. Grasselli // *Computers and Geotechnics*. – 2017. – Vol. 81. – P. 1-18.
105. Crouch, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method / S. L. Crouch // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1976. – Vol. 10. – P. 301-343.
106. Crouch, S. L. Boundary element methods in solid mechanics / S. L. Crouch, A. M. Starfield. – London: George Allen & Unwin, 1983.

107. Kuriyama, K. Three-dimensional elastic analysis by the displacement discontinuity method with boundary division into triangular leaf elements / K. Kuriyama, Y. Mizuta // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts*. – 1993. – Vol. 30(2). – P. 111-123.
108. Shou, K. J. A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems / K. J. Shou, S. L. Crouch // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts*. – 1995. – Vol. 32(1). – P. 49-55.
109. Cayol, V. 3D Mixed boundary elements for elastostatic deformation field analysis / V. Cayol, F. H. Cornet // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. – 1997. – Vol. 34(2). – P. 275-287.
110. Shou, K. J. A higher order displacement discontinuity method for three-dimensional elastostatic problems / K. J. Shou, E. Siebrits, S. L. Crouch. // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. – 1997. – Vol. 34(2). – P. 317-322.
111. Vijayakumar, S. A node-centric indirect boundary element method: three-dimensional displacement discontinuities / S. Vijayakumar, T. E. Yacoub, J. H. Curran // *Computers and Structures*. – 2000. – Vol. 74. – P. 687-403.
112. Li, H. Crack edge element of three-dimensional displacement discontinuity method with boundary division into triangular leaf elements / H. Li, C. L. Liu, Y. Mizuta, M. A. Kayupov // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. – 2001. – Vol. 17. – P. 365-378.
113. Cheng, W. A novel linear triangular element of a three-dimensional displacement discontinuity method / W. Cheng, Y. Jin, H. Li, M. Chen // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2015. – Vol. 59. – P. 89-96.
114. Sesetty, V. A numerical study of sequential and simultaneous hydraulic fracturing in single and multi-lateral horizontal wells / V. Sesetty, A. Ghassemi // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 132. – P. 65-76.
115. Dong, C. Y. Numerical implementation of displacement discontinuity method and its application in hydraulic fracturing / C. Y. Dong, C. J. de Pater // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 2001. – Vol. 191. – P. 745-760.
116. Abdollahipour, A. Time-dependent crack propagation in a poroelastic medium using a fully coupled hydromechanical displacement discontinuity method / A. Abdollahipour, M. F. Marji, A. Y. Bafghi, J. Gholamnejad // *International Journal of Fracture*. – 2016. – Vol. 199(1). – P. 71-87.
117. Zhang, X. Propagation of a penny-shaped hydraulic fracture parallel to the free-surface of an elastic half-space / X. Zhang, E. Detournay, R. Jeffrey // *International Journal of Fracture*. – 2002. – Vol. 115. – P. 125-158.
118. Shi, J. A three-dimensional crack growth simulator with displacement discontinuity method / J. Shi, B. Shen, O. Stephansson, M. Rinne // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2014. – Vol. 48. – P. 73-86.
119. Wu, K. A simplified three-dimensional displacement discontinuity method for multiple fracture simulations / K. Wu, J. E. Olson // *International Journal of Fracture*. – 2015. – Vol. 193. – P. 191-204.
120. Sheibani, F. Stress intensity factor determination for three-dimensional crack using the displacement discontinuity method with applications to hydraulic fracture height growth and non-planar propagation paths / F. Sheibani, J. Olson // *ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing (20-22 May 2013)*. – Brisbane, Australia, 2013. – P. 741-770.
121. Kumar, D. Three-dimensional poroelastic modeling of multiple hydraulic fracture propagation from horizontal wells / D. Kumar, A. Ghassemi // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. – 2018. – Vol. 105. – P. 192-209.
122. Li, K. Three-dimensional propagation simulation and parameter analysis of rock joint with displacement discontinuity method / K. Li, X. Jiang, H. Ding, X. Hu // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2019. – Vol. 4. – P. 1-11.

123. Xiao, H. T. A three- dimensional displacement discontinuity method for crack problems in layered rocks / H. T. Xiao, Z. Q. Yue // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. – 2011. – Vol. 48. – P. 412-420.
124. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics / G. K. Batchelor. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1967.
125. Lamb, H. Hydrodynamics (6-th edition) / H. Lamb. – New York: Dover Publications, 1932. – P. 581-587.
126. Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks / J. R. Rice // *Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – Vol. 35(2). – P. 379-386.
127. Knowles, J. K. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics / J. K. Knowles, E. Sternberg // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1972. – Vol. 44. – P. 187-211.
128. Kuo, A. On the use of a path-independent line integral for axisymmetric cracks with nonaxisymmetric loading / A. Kuo // *Journal of Applied Mechanics*. – 1987. – Vol. 54(4). – P. 833-837.
129. Bui, H. D. An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape / H. D. Bui // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1977. – Vol. 25(1). – P. 29-39.
130. Gringarten, A. C. Theory of heat extraction from fractured hot dry rock / A. C. Gringarten, P. A. Witherspoon // *Journal of Geophysical Research*. – 1975. – Vol. 80(8). – P. 1120-1124.
131. Cheng, A. H.-D. Integral equation solution of heat extraction from a fracture in hot dry rock / A. H.-D. Cheng, A. Ghassemi, E. Detournay // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2001. – Vol. 25. – P. 1327-1338.
132. Yang, S. Modeling heat extraction from hot dry rock in a multi-well system / S. Yang, H. Yeh // *Applied Thermal Engineering*. – 2009. – Vol. 29. – P. 1676-1681.
133. Ito, T. Hydraulic fracture reopening pressure and the estimation of maximum horizontal stress / T. Ito, K. Evans, K. Kawai, K. Hayashi // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*. – 1999. – Vol. 36. – P. 811-826.
134. Garagash, D. I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: early-time solution / D. I. Garagash // *International Journal of Solid and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 5811-5835.
135. Garagash, D. I. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution / D. I. Garagash, E. Detournay // *Journal of Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 72(6). – P. 916-928.
136. Garagash, D. I. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: asymptotics of large toughness / D. I. Garagash // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2006. – Vol. 73. – P. 456-481.
137. Wardie, L. J. Displacement discontinuity method for three-dimensional stress analysis of tabular excavations in non-homogeneous rock / L. J. Wardie // *The 25th U. S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS) (25-27 June 1984)*. – Evanston, Illinois, 1984. – P. 702-709.
138. Settari, A. Three-dimensional simulation of hydraulic fracturing / A. Settari, M. P. Cleary // *Journal of Petroleum Technology*. – 1984. – Vol. 36(7). – P. 1177- 1190.
139. Wasantha, P. L. P. Hydraulic fracture propagation under varying in-situ stress conditions of reservoirs / P. L. P. Wasantha, H. Konietzky // *Procedia Engineering*. – 2017. – Vol. 191. – P. 410-418.
140. Lecampion, B. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag / B. Lecampion, E. Detournay // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2007. – Vol. 196. – P. 4863-4880.
141. Magnus, Wangen. A 2D volume conservative numerical model of hydraulic fracturing / Wangen Magnus // *Computers and Structures*. – 2017. – Vol. 182. – P. 448-458.
142. Chen, B. Numerical investigation of the fluid lag during hydraulic fracturing / B. Chen, S. Cen, A. R. Barron, D. R. J. Owen, C. Li // *Engineering Computations*. – 2018. – Vol. 35. – P. 2050-2077.

143. Hunsweck, M. J. A finite element approach to the simulation of hydraulic fractures with lag // M. J. Hunsweck, Y. Shen, A. J. Lew // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2012. – Vol. 37. – P. 993-1015.
144. Chekhonin, E. Hydraulic fracture propagation in highly permeable formations, with applications to tip screenout / E. Chekhonin, K. Levonyan // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Science*. – 2012. – Vol. 50. – P. 19-28.
145. Jin, Z. H. Magma-driven multiple dike propagation and fracture toughness of crustal rocks / Z. H. Jin, S. E. Johnson // *Journal of Geophysical Research*. – 2008. – Vol. 113. – P. 1-9.
146. Huang, N. Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing / N. Huang, A. Szewczyk, Y. Li // *Journal of Applied Mechanics*. – 1990. – Vol. 57. – P. 877-881.
147. Boronin, S. A. Two-continua model of suspension flow in a hydraulic fracture / S. A. Boronin., A. A. Osipov // *Doklady Physics*. – 2010. – Vol. 55(4). – P. 199-202.
148. Boronin, S. A. Effects of particle migration on suspension flow in a hydraulic fracture / S. A. Boronin., A. A. Osipov // *Fluid Dynamics*. – 2014. – Vol. 49(2). – P. 208-221.
149. Osipov, A. A. Hydraulic fracture conductivity: effects of rod-shaped proppant from lattice-Boltzmann simulations and lab tests / A. A. Osipov // *Advances in Water Resources*. – 2017. – Vol. 104. – P. 293-303.
150. Garagash, D. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium / D. Garagash, E. Detournay // *Journal of Applied Mechanics*. – 2000. – Vol. 67. – P. 183-192.
151. Desroches, J. The crack tip region in hydraulic fracturing / J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach, P. Papanastasiou, J. R. A. Pearson, M. Thiercelin, A. Cheng // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1994. – Vol. 447. – P. 39-48.
152. Pouya, A. Hydraulic fracture propagation under steady state flow. The 48th US Rock Mechanics / A. Pouya, V. L. Nguyen, S. Ghabezloo // *Geomechanics Symposium (1-4 June 2014)*. – Minneapolis, USA, 2014.
153. Rice, J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture / J. R. Rice // *Fracture, an Advanced Treatise*. – 1968. – Vol. 2. – P. 191-311.
154. Detournay, E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks / E. Detournay // *International Journal of Geomechanics*. – 2004. – Vol. 4. – P. 1-11.
155. Smirnov, N. N. Self-similar solutions of the problem of formation of a hydraulic fracture in a porous medium / N. N. Smirnov, V. P. Tagirova // *Fluid Dynamics*. – 2007. – Vol. 42(1). – P. 60-70.
156. Smirnov, N. N. Analysis of power-law self-similar solutions to the problem of hydraulic fracture crack formation / N. N. Smirnov, V. P. Tagirova // *Moscow University Mechanics Bulletin*. – 2007. – Vol. 62(1). – P. 48-54.
157. Smirnov, N. N. Problem of propagation of a gas fracture in a porous medium / N. N. Smirnov, V. P. Tagirova // *Fluid Dynamics*. – 2008. – Vol. 43(3). – P. 402-417.
158. Carbonell, R. A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture / R. Carbonell, J. Desroches, E. Detournay // *International Journal of Solid and Structures*. – 1999. – Vol. 36. – P. 4869-4888.
159. Warpinski, N. R. Laboratory investigation on the effect of in-situ stresses on hydraulic fracture containment / N. R. Warpinski, J. A. Clark, R. A. Schmidt, C. W. Huddle // *Society of Petroleum Engineers Journal*. – 1982. – Vol. 22(3). – P. 333-340.
160. Josh, M. Laboratory characterisation of shale properties / M. Josh, L. Esteban, C. D. Piane, J. Sarout, D. N. Dewhurst, M. B. Clennell // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2012. – Vol. 88-89. – P. 107-124.
161. Киселев, А. Б. К численному моделированию динамики необратимого деформирования и разрушения нефтеносного пласта / А. Б. Киселев, П. П. Захаров // *Математическое моделирование*. – 2013. – № 3. – С. 62-74.

162. Green, A. E. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid / A. E. Green, I. N. Sneddon // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. – 1950. – Vol. 46(1). – P. 159-163.
163. Savitski, A. A. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions / A. A. Savitski, E. Detournay // *International Journal of Solid and Structures*. – 2002. – Vol. 39. – P. 6311-6337.
164. Пестриков, В. М. Механика разрушения. Курс лекций / В. М. Пестриков, Е. М. Морозов. – СПб.: ЦОП «Профессия», 2012. – 552 с.
165. Ковеня, В. М. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики / В. М. Ковеня, Д. В. Чирков: учеб. пособие. – Новосибирск, 2013.
166. Tada, H. The stress analysis of cracks handbook (Third Edition) / H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin. New York: ASME Press, 2000. – P. 698.
167. Li, K. R. The numerical asymptotic solution to initial condition problem of pre-existing plane-strain hydraulic fracture with fluid lag / K. R. Li, N. N. Smirnov, C. Z. Qi, A. B. Kiselev, D. A. Pestov // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2020. – Vol. 239. 107296.
168. Киселев, А. Б. Моделирование течения жидкости в трещине гидроразрыва неоднородно трещиностойкого пласта в плоско-трехмерной постановке / А. Б. Киселев, Ли Кайжуй, Н. Н. Смирнов, Пестов Д. А. // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2021. – № 2. – С. 15-28.