



Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»
«Научно-исследовательский институт механики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова»
(НИИ механики МГУ)

УДК 532.5.013.2,
532.5.013.12, 532.582

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор
НИИ механики МГУ,
академик РАЕН
Ю.М. Окунев

«___» _____ 2018 г.

ОТЧЁТ № _____

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме НИР 5.2:

Математическое и физическое моделирование нестационарных взаимодействий
неограниченных газовых потоков и струй со сплошными и пронизаемыми телами
(номер гос. рег.: АААА-А16-116021110201-2)

ВОПРОСЫ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

(промежуточный)

Зам. директора по НИР _____ Н.А. Остапенко

Зав. лабораторией 107 _____ С.В. Гувернюк

Научный руководитель темы 5.2:

к.ф.-м.н., доцент, действ. чл. РАЕН _____ С.В. Гувернюк

МОСКВА, 2018

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Научный руководитель:

Зав. лаб., к.ф.-м.н.

*подпись, дата*С.В. Гувернюк
(Постановка задачи, Введение, п.
3.1, Заключение, общее
редактирование)*Ответственный исполнитель:*Ведущий научный
сотрудник, д.ф.-м.н.

Г.Я. Дынникова
(Аналитическое исследование,
разработка численного метода.
Введение, п. 1, 2, 3.2,
Заключение)*Исполнители:*Старший научный
сотрудник, к.ф.-м.н.

А.Ф. Зубков
(Проведение экспериментов,
п. 3.1)Старший научный
сотрудник, к.ф.-м.н.

П.Р. Андронов
(Разработка бессеточных кодов
осесимметричной версии метода
ВВД)Ведущий программист,
к.ф.-м.н.

Я.А. Дынников
(Разработка бессеточных кодов
ВВД 2D, разработка процедуры
обработки видеogramм для
автоматизированной
идентификации движения шара)*Рецензент:*

Зав.лаб., д.ф.-м.н. _____ В.В. Прокофьев

РЕФЕРАТ

Отчет содержит 10 рисунков, 1 таблицу, общ. объем 35 стр., библиограф. 15 наименований

Ключевые слова:

ПЛОСКИЙ КАНАЛ, ВЯЗКАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ СРЕДА, АВТОКОЛЕБАНИЯ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ, ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ, ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ДОМЕНОВ (ВВД)

Представлены результаты теоретического анализа явления соударения твердых тел в жидкости на примере нормального удара шара или цилиндра по плоской массивной стенке, являющейся границей полупространства, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Обсуждается известный парадокс неограниченного роста силы гидродинамического сопротивления по мере сближения тела с отражающей стенкой. Разработан метод постановки граничных условий при переходе через момент соударения, учитывающий обмен механическим импульсом между жидкостью и соударяющимися телами. Теория апробирована на примере связанной задачи о затухающих колебаниях физического маятника в жидкости при наличии столкновений с отражающей стенкой. Исследование колебаний маятника выполнено методами физического и вычислительного эксперимента. Численные решения построены с использованием авторских кодов на базе бессеточного метода вязких вихревых доменов (ВВД) с использованием разработанных граничных условий для перехода через момент соударения. Результаты экспериментов и расчетов хорошо согласуются между собой.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

V_c ,	–	Скорость цилиндра/шара, движущегося по нормали к стенке;
R, D	–	радиус и диаметр цилиндра/шара;
$h(x), h_m$	–	ширина зазора и ее минимальное значение в текущий момент;
$\eta = \rho_c / \rho$	–	отношение плотности тела к плотности жидкости;
$u, \langle u \rangle$	–	скорость жидкости в зазоре и ее среднее значение по ширине зазора;
p, F	–	Давление и гидродинамическая сила;
x^*	–	некоторая фиксированная точка, ограничивающая область рассмотрения;
$Re = \frac{V_c(0)D}{\nu}$	–	число Рейнольдса;
V, ω	–	скорость жидкости и завихренность в пространстве течения;
$\mathbf{V}_c^{old}, \mathbf{V}_c^{new}$	–	скорость тела до и после столкновения;
γ^{new}	–	погонная плотность циркуляции, образовавшейся на текущем шаге;
\mathbf{n}	–	нормаль к поверхности;
$\mathbf{P}_h, \mathbf{P}_w$	–	импульс гидродинамических сил, и импульс передаваемый от стенки телу;
$\Gamma_i^{new} = \gamma^{new} \Delta s_i$	–	дискретные значения циркуляции вихревых частиц
k, k_0	–	коэффициент восстановления скорости при ударе и его значение в вакууме;
g	–	ускорение свободного падения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ТЕЛ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	8
1.1. Гидродинамические силы, действующие на цилиндр, приближающийся к неподвижной плоской стенке	8
1.2. Гидродинамические силы, действующие на шар, приближающийся к неподвижной плоской стенке	13
1.3. Изменение поля скорости несжимаемой жидкости в процессе ударного взаимодействия тел	14
2. РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ПОГРУЖЕННЫХ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ТЕЛ	16
2.1. Безытерационный метод решения связанной задачи методом вязких вихревых доменов	16
2. Две гипотезы замыкания системы уравнений для моделирования процесса соударения	17
3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ СТОЛКНОВЕНИЯ	
3.1. Описание эксперимента	19
3.2. Сравнение результатов экспериментов с расчетными данными, полученными на основе двух гипотез	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	27
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	28
Приложение А	30
Приложение Б	31
Приложение В	33

ВВЕДЕНИЕ.

Исследование процессов соударения твердых тел в жидкости актуально для решения таких задач, как коллективное поведение частиц в дисперсных средах, сопровождающееся их возможным слипанием или налипанием на поверхность [1-5], а также в задачах, связанных с соударениями макроскопических тел в жидкости [6-7]. Известен парадокс [8], заключающийся в том, что при непрерывном сближении гладких тел в вязкой несжимаемой жидкости возникает неограниченно возрастающая гидродинамическая сила отталкивания. В работе [9] показано, что при свободном инерционном движении сферы (или цилиндра) в вязкой несжимаемой жидкости по направлению нормали к плоской неподвижной стенке произойдет останов тела на конечном расстоянии от стенки. Если же движение тела происходит под действием постоянной внешней силы (например, силы тяжести), то процесс сближения до момента соприкосновения со стенкой займет бесконечное время. В работе [10] рассмотрено взаимодействие сталкивающихся сферических частиц в жидкости с учетом их упругой деформации. Показано, что при достаточно большой относительной скорости возможен отскок частиц после достижения некоторого минимального расстояния. Однако через некоторое время после отскока частицы вновь начинают сближаться и после нескольких колебаний останавливаются на конечном расстоянии друг от друга. Этот результат получен в рамках теории смазки без учета инерционных свойств жидкости, а также при некоторых ограничениях на параметры задачи. В то же время в реальности можно наблюдать упругие соударения тел в жидкости с разлетом на большие расстояния. Это объясняется эффектами, не учитываемыми в рассмотренной модели, такими, как сжимаемость или нарушение сплошности среды

(кавитация), а также шероховатостью поверхностей. Влияние этих эффектов реализуется в очень коротком промежутке времени, после чего модель несжимаемой жидкости и предположение гладкости тел остаются справедливыми. Следовательно, адекватно моделируя переход системы из состояния «до» к состоянию «после» соударения, можно достаточно точно описывать движение жидкости и погруженных в нее соударяющихся тел, оставаясь в рамках модели несжимаемой жидкости. При этом граничное условие перехода будет иметь смысл условий «склейки» состояний системы непосредственно до и после соударения тел.

В отчете разработана теория, позволившая сформулировать указанные условия склейки, а также осуществлена апробация этой теории на примере задачи о колебаниях физического маятника с соударениями в жидкости. Соответствующая связанная задача динамики и гидродинамики решена с помощью бессеточного численного метода ВВД. Также был проведен физический эксперимент. Сравнение результатов численного решения и эксперимента подтверждает адекватность принятой концепции соударения макроскопических тел в жидкости.

1. АНАЛИЗ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ТЕЛ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Гидродинамические силы, действующие на цилиндр, приближающийся к неподвижной плоской стенке.

В работах [8-10] для оценки сил, действующих на гладкие тела, приближающиеся к твердой поверхности, используется теория смазки, основанная на уравнении Стокса, что оправдано для мелких частиц в дисперсных средах. Оценим расстояние, на котором это приближение справедливо при соударении цилиндра с неподвижной стенкой. Будем рассматривать симметричное течение, схема которого изображена на рис. 1.

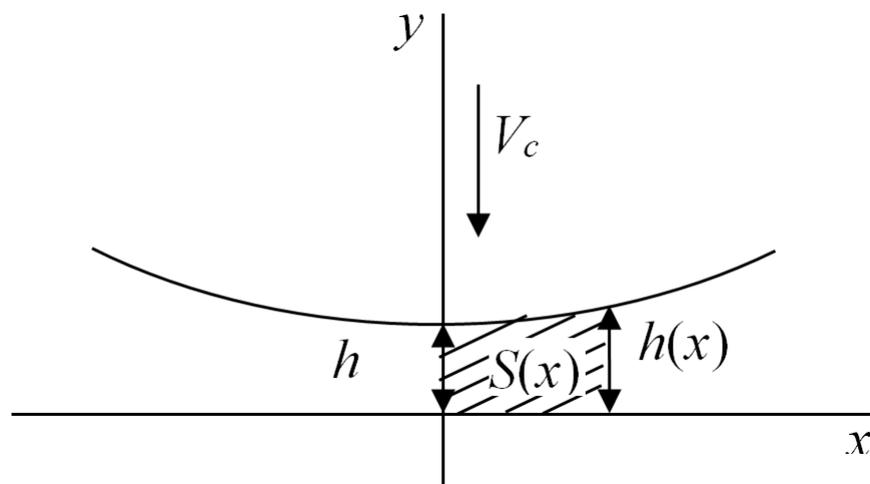


Рис.1 Схема области течения в зазоре между цилиндром и плоской стенкой

Круговой цилиндр бесконечного размаха и радиуса R движется к неподвижной стенке со скоростью $V_c(t)$, направленной перпендикулярно плоскости стенки и оси цилиндра.

Ширина зазора между цилиндром и стенкой определяется формулой

$$h = R - \sqrt{R^2 - x^2} + h_m \approx R - R \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right) + h_m = \frac{x^2}{2R} + h_m$$

где h_m – минимальное значение h в текущий момент.

Нормируя линейные размеры на диаметр цилиндра D , скорость – на ее значение в начальный момент времени, получаем безразмерные параметры

$$\bar{h} = \frac{h}{D}, \quad \bar{x} = \frac{x}{D}, \quad \bar{h} = \bar{x}^2 + \bar{h}_m, \quad \bar{V}_c = \frac{V_c}{|V_c(0)|}$$

Далее все крышечки над безразмерными величинами опускаются.

Будем полагать, что зазор при $|x| < x^*$ достаточно узок, т.е. $h(x) \ll x^*$, и вертикальная скорость жидкости пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальной скоростью u . Также будем считать, что давление постоянно поперек зазора. В силу симметрии будем рассматривать только правую полуплоскость.

В несжимаемой жидкости объемный расход в зазоре при заданном значении x равен скорости изменения площади между цилиндром и стенкой в промежутке от нуля до x . Следовательно, средняя скорость $\langle u \rangle$ в сечении x равна

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = -\frac{1}{h} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{h} V_c x = -\frac{x}{x^2 + h_m} V_c \quad (1)$$

Течение в зазоре описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (2)$$

где $\text{Re} = \frac{V_c(0)D}{\nu}$. В приближении Стокса первые два слагаемых в (2)

считаются пренебрежимо малыми по сравнению с третьим и отбрасываются. Если зазор достаточно узок, второй производной скорости по x можно пренебречь по сравнению с производной по y . Решением уравнений Стокса в зазоре в данном приближении является распределение

$$u = \frac{6\langle u \rangle}{h^2} y(h-y),$$

откуда с учетом (1) следует

$$u = -\frac{6xV_c}{h^3} y(h-y) \quad (3)$$

Рассмотрим условие применимости приближения Стокса, используя это решение. Вторая производная скорости по y равна

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{12xV_c}{\text{Re}h^3} \quad (4)$$

Сравним это выражение с конвективными членами на серединной линии зазора, где значение скорости и ее производных максимальны по модулю (см. Приложение А)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{3xV_c^2}{4h^2} \frac{5h_m - x^2}{(h_m + x^2)} - \frac{3x\dot{V}_c}{2h}$$

Чтобы приближение Стокса было правомерно, необходимо, чтобы модуль каждого из двух слагаемых был много меньше выражения (4). Для первого слагаемого имеем

$$\max \left| \frac{3xV_c^2}{4h^2} \frac{5h_m - 6x^2}{(h_m + x^2)} \right| \approx \frac{15xV_c^2}{4h^2} \ll \frac{12x|V_c|}{\text{Re}h^3}$$

Откуда следует

$$h_m \leq h \ll \frac{16}{5\text{Re}|V_c|} \quad (5)$$

Оценим это неравенство в условиях экспериментов [7], когда диаметр цилиндра составляет около 40мм, а характерная скорость его движения имеет порядок 1м/с. Получаем $h_m \ll 10^{-4}$. В размерных величинах расстояние до стенки, при котором выполняется неравенство (5), должно быть много меньше четырех микрон.

Полная остановка цилиндра, согласно результатам [9], должна наступить на расстоянии h_*

$$\frac{h_*}{h_{m,0}} = \left(1 + \frac{\eta \text{Re}}{12} \sqrt{h_{m,0}} \right)^{-2}, \quad (6)$$

где η – отношение плотности цилиндра к плотности жидкости, число $Re = V_{c,0}D/\nu$, где $V_{c,0}$ – скорость цилиндра на расстоянии $h_{c,0}$. В рассмотренном выше случае при $\eta = 3$ величина h_* меньше, чем 10^{-8} , что в размерных величинах равно $4 \cdot 10^{-4}$ мкм. Очевидно, что в этом случае говорить о том, что цилиндр не достигнет стенки, нельзя, так как размеры неровностей поверхности в реальной ситуации много больше этого расстояния.

Теперь рассмотрим силы, действующие на цилиндр, приближающийся к стенке, в модели идеальной жидкости, чтобы оценить изменение его скорости до входа в зону действия приближения Стокса.

В этой модели будем считать скорость постоянной поперек течения

$$u = \langle u \rangle = -\frac{x}{x^2 + h_m} V_c \quad (7)$$

Уравнение Эйлера в этом приближении

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (8)$$

Подставляя (7), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{x^2 V_c^2}{2(x^2 + h_m)^2} \right) = \frac{x}{x^2 + h_m} \dot{V}_c - \frac{x V_c^2}{(x^2 + h_m)^2} \quad (9)$$

Проинтегрируем это равенство в интервале между точкой x и некоторой фиксированной точкой x^* .

$$\frac{p(x)}{\rho} = \frac{p(x^*)}{\rho} + \frac{V_c^2}{2} \left(\frac{x^{*2}}{(x^{*2} + h_m)^2} - \frac{x^2}{(x^2 + h_m)^2} \right) + \frac{\dot{V}_c}{2} \ln \frac{x^{*2} + h_m}{x^2 + h_m} + \frac{V_c^2}{2(x^{*2} + h_m)} - \frac{V_c^2}{2(x^2 + h_m)}$$

Интегрируя давление в интервале в интервале $-x^* < x < x^*$, получаем асимптотическое выражение для силы при $h_m \rightarrow 0$ (см. Приложение Б)

$$\frac{F}{\rho} \sim V_c^2 \frac{\pi}{4\sqrt{h_m}} \quad (10)$$

Из полученного выражения видно, что сила направлена от стенки независимо от направления движения цилиндра, т.е. в модели идеальной жидкости при $h_m \rightarrow 0$ цилиндр замедляется, а при обратном движении ускоряется.

Можно оценить изменение скорости при приближении цилиндра к стенке в асимптотическом приближении, решая уравнение

$$\bar{m}\dot{V}_c = \frac{\pi V_c^2}{4\sqrt{h_m}} \quad (11)$$

где \bar{m} – безразмерная погонная масса цилиндра, нормирована на величину ρD^2 , $\bar{m} = \frac{\eta\pi}{4}$. Производную скорости по времени можно представить в виде

$$\dot{V}_c = \frac{dV_c}{dh_m} \frac{dh_m}{dt} = V_c \frac{dV_c}{dh_m} \quad (12)$$

Подставляя это выражение в (11) и интегрируя по h_m , получаем

$$V_c^2(h_m) = V_c^2(h_{m0}) \exp\left(\frac{2}{\eta}(\sqrt{h_m} - \sqrt{h_{m0}})\right)$$

Откуда при достаточно малом значении выражения под экспонентой с учетом обезразмеривания следует

$$\left|\frac{\Delta V_c}{V_{c0}}\right| \approx \frac{1}{\eta} |\sqrt{h_{m0}} - \sqrt{h_m}|$$

Таким образом, показано, что в случае, когда вязкие члены в уравнении Навье–Стокса пренебрежимо малы по сравнению с инерционными, изменение скорости цилиндра при малых h_m мало, причем при движении от стенки инерционные и вязкие члены оказывают разнонаправленное влияние на гидродинамическую силу. «Катастрофическое» торможение возникает тогда, когда расстояние до стенки удовлетворяет соотношениям (5)-(6). Это расстояние для макроскопических тел может оказаться настолько малым, что

можно говорить о непосредственном контакте тел. Кроме того, из-за резкого повышения давления жидкости в окрестности точки максимального сближения может происходить деформация поверхностей так же, как и при непосредственном контакте. Если это упругая деформация, то, как показано в [10], возможен отскок тела. Взаимодействие тела со стенкой, приводящее к его отскоку, осуществляется за пренебрежимо малый промежуток времени. Будем говорить, что это происходит мгновенно.

1.2. Гидродинамические силы, действующие на шар, приближающийся к неподвижной плоской стенке

По аналогии с течением в зазоре между цилиндром и стенкой запишем для сферы решение уравнений Стокса в предположении осевой симметрии.

$$u = -\frac{3xV_c}{h^3} y(h-y)$$

В данном случае x – радиальная координата, y – координата вдоль оси симметрии.

Оценка применимости приближения Стокса аналогична (5).

$$h_m \ll \frac{32}{7 \operatorname{Re}|V_c|}$$

Однако полная остановка согласно [9] происходит на еще более коротком расстоянии

$$\frac{h_*}{h_{m,0}} = \exp\left(-\frac{\eta \operatorname{Re}}{9}\right)$$

В случае параметров, рассмотренных выше, получаем $h_*/h_{m,0} = \exp(-15000)$, что практически равно нулю. Асимптотическая зависимость силы и потери скорости в приближении идеальной жидкости описывается формулами (см. выкладки в Приложении В)

$$F \sim -\frac{\pi V_c^2}{8} \ln(h_m)$$

$$\left| \frac{\Delta V_c}{V_{c0}} \right| \sim \frac{3}{4\eta} \left| h_{m0} |\ln(h_{m0})| - h_m |\ln(h_m)| \right|$$

Как видно, в случае шара гидродинамическое торможение в рассмотренном приближении слабее, чем в случае цилиндра.

1.3. Изменение поля скорости несжимаемой жидкости в процессе ударного взаимодействия тел.

За время ударного взаимодействия тела со стенкой оно за короткий промежуток времени (практически мгновенно) приобретает направленную противоположно скорость. При этом тело получает импульс от стенки, часть которого передает жидкости. За этот же короткий промежуток времени изменяется скорость во всей области течения. В пределе это соответствует бесконечно большому давлению, действующему бесконечно малое время. При этом объемное распределение завихренности сохраняется, но нарушается условие прилипания. В реальности это означает, что на поверхностях появляется дополнительный тонкий пограничный подслои. Приращение циркуляции на поверхностях тела и стенок канала определяет изменение скорости жидкости в объеме. Как известно, согласно формуле Био-Савара

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \int_{\tau} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') d\tau + \int_S (\mathbf{V} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds - \int_S (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}'}{2^{\kappa-1} \pi r'^{\kappa}}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} - \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \tau,$$

где \mathbf{V} – скорость жидкости, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$, κ – размерность пространства, τ – область течения, S – обтекаемые поверхности, \mathbf{n} – нормаль, направленная от жидкости.

При условии прилипания скорость жидкости равна скорости поверхности \mathbf{V}_c .

После столкновения скорость поверхности тела изменяется на величину

$\Delta \mathbf{V}_c = \mathbf{V}_c^{new} - \mathbf{V}_c^{old}$. Кроме этого, образуется тонкий подслои с погонной плотностью

циркуляции $\boldsymbol{\gamma}^{new} = (\mathbf{V}^{new} - \mathbf{V}_s^{new}) \times \mathbf{n}$. При этом условие непротекания сохраняется,

т.е. $(\mathbf{V}^{new} - \mathbf{V}_s^{new}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{V}^{new}(\mathbf{R}) = \int_{\tau} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') d\tau + \int_S \boldsymbol{\gamma}^{new} \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds + \int_S (\mathbf{V}_c^{new} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds - \int_S (\mathbf{V}_c^{new} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{K}(\mathbf{r}') ds$$

Во время ударного взаимодействия на жидкость со стороны тела и, соответственно, на тело со стороны жидкости кратковременно действуют очень большие по модулю силы. Как показано в работе [11], гидродинамическая сила, действующая на тело, может быть выражена через потоки завихренности $\boldsymbol{\sigma}$ с его поверхности. В случае поступательного движения твердого тела действующая на него гидродинамическая сила \mathbf{F} равна

$$\mathbf{F} = -\frac{\rho}{2^{\kappa-2}} \oint_S \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} ds + \frac{m}{\eta} \dot{\mathbf{V}}_c,$$

где m , \mathbf{V}_c – масса и скорость тела.

Интеграл от гидродинамической силы за время ударного взаимодействия δt равен импульсу \mathbf{P}_h

$$\mathbf{P}_h = \int_{\delta t} \mathbf{F} dt = -\frac{\rho}{2^{\kappa-2}} \oint_S \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}^{new} ds + \frac{m}{\eta} (\mathbf{V}_c^{new} - \mathbf{V}_c), \quad \boldsymbol{\gamma}^{new} = \int_{\delta t} \boldsymbol{\sigma} dt \quad (13)$$

Одновременно тело получает импульс силы \mathbf{P}_w от стенки. Ниже будет показано, что величина \mathbf{P}_w определяет все параметры течения и скорость тела после удара. Также будет представлен способ вычисления этого импульса.

2. РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ПОГРУЖЕННЫХ СТАЛКИВАЮЩИХСЯ ТЕЛ

2.1. Безытерационный алгоритм решения связанной задачи на основе метода вязких вихревых доменов (ВВД).

Метод ВВД является удобным инструментом для решения сопряженных задач плоскопараллельного или осесимметричного движения несжимаемой жидкости и погруженных в нее тел [12, 13]. Как известно [14], идея метода состоит в представлении поля завихренности лагранжевыми вихревыми частицами, которые перемещаются относительно жидкости в соответствии с уравнениями Навье-Стокса с так называемой диффузионной скоростью. На каждом шаге по времени на обтекаемых поверхностях образуются новые частицы с интенсивностью (циркуляцией) Γ_i^{new} , что соответствует генерируемой завихренности на i -ом участке поверхности за время шага Δt , т.е. $\Gamma_i^{new} = \sigma \Delta s_i \Delta t = \gamma^{new} \Delta s_i$. Для вычисления значений Γ_i^{new} составляется линейная система уравнений, обеспечивающая выполнение граничных условий. Если скорость движения тел известна, эта система уравнений является замкнутой. В противном случае система дополняется уравнениями движения тел, в которых гидродинамические силы и моменты сил выражены через потоки завихренности, т.е. через Γ_i^{new} . В частном случае поступательного движения тела уравнение динамики тела имеет вид

$$m(\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(t - \Delta t)) = \mathbf{P}_h + \mathbf{P}_{ex},$$

где \mathbf{P}_{ex} – импульс внешних сил.

Импульс гидродинамических сил аппроксимируется в соответствии с формулой (13)

$$\mathbf{P}_h = -\frac{\rho}{2^{\kappa-2}} \sum \mathbf{r}_k \times \Gamma_k^{new} + \frac{m}{\eta} (\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(t - \Delta t)) + \mathbf{F}_{fr} \Delta t$$

F_{fr} – сила трения.

Таким образом, в отсутствие внешних сил или при заданных массовых силах получается замкнутая система линейных уравнений относительно неизвестных величин Γ_i^{new} и скоростей тел. Решение этой системы одновременно удовлетворяет граничным условиям и уравнениям динамики тел. После вычисления неизвестных величин тела перемещаются на расстояние, равное произведению скорости на значение шага по времени. Однако если это расстояние больше, чем расстояние до стенки, величина шага по времени пропорционально уменьшается. В соответствие с этим укороченным шагом перемещаются все вихревые частицы со своей скоростью, равной сумме скорости жидкости и диффузионной скорости. Этот момент времени считается моментом перед соударением. Чтобы вычислить параметры системы после соударения, необходимо знать импульс силы \mathbf{P}_w , передаваемый телу стенкой за время соударения. Если он известен, решается та же самая система уравнений с шагом по времени $\Delta t = 0$, где $\mathbf{V}(t-\Delta t) = \mathbf{V}^{old}$, $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}^{new}$, – скорости до и после соударения, и $\mathbf{P}_{ex} = \mathbf{P}_w$. Проблема состоит в определении этого импульса.

2.2. Две гипотезы замыкания системы уравнений для моделирования процесса соударения.

При прямом ударе тела о неподвижную преграду отношение модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара $k = V^{new}/V^{old}$, называется коэффициентом восстановления при ударе. Этот коэффициент определяется свойствами сталкивающихся тел и находится опытным путем. Когда соударение происходит в сопротивляющейся среде, коэффициент зависит также от состояния и свойств этой среды. В вакууме или слабо сопротивляющейся среде (например, в воздухе для тяжелых тел) импульс, передаваемый телу, равен

$$\mathbf{P}_{w,0} = m(\mathbf{V}^{new} - \mathbf{V}^{old}) = -m\mathbf{V}^{old}(1 + k_0)$$

где k_0 – коэффициент восстановления в вакууме. В поисках связи коэффициента восстановления при ударе в жидкости с его значением в вакууме были рассмотрены и проверены экспериментально две гипотезы.

Первая состояла в том, что стенка передает телу такой же импульс, как и при соударении в вакууме, т.е. $\mathbf{P}_w = -m\mathbf{V}^{old}(1 + k_0)$, но из-за того, что одновременно тело отдает часть этого импульса жидкости, реальное значение коэффициента восстановления $k = V^{new}/V^{old}$ будет отличаться от k_0 .

Согласно второй гипотезе, стенка передает телу импульс $\mathbf{P}_w = \mathbf{P}_{stop}(1 + k_0)$, где \mathbf{P}_{stop} – импульс, необходимый для остановки тела в условиях существующего течения. Модуль этого импульса больше, чем mV^{old} из-за присоединенной массы жидкости. Эта гипотеза сложнее в применении, так как требует вычисления величины \mathbf{P}_{stop} . При моделировании течения методом ВВД мы делаем с этой целью следующее. После перемещения тела и вихрей на последнем перед столкновением (укороченном) шаге мы решаем вспомогательную систему уравнений, которая отличается от описанной выше тем, что скорость тела $V(t)$ полагается известной и равной нулю, а импульс, передаваемый стенкой $\mathbf{P}_w = \mathbf{P}_{stop}$ считается неизвестным. После того, как импульс \mathbf{P}_{stop} вычислен, мы решаем систему уравнений еще раз, полагая скорость неизвестной, а $\mathbf{P}_w = \mathbf{P}_{stop}(1 + k_0)$. Таким образом, находим значения скорости и величин Γ_i^{new} после соударения.

Обе гипотезы были подвергнуты экспериментальной проверке.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ СТОЛКНОВЕНИЯ

3.1. Описание эксперимента

Изучалось отражение шара, подвешенного на нити, от вертикальной поверхности неподвижной массивной мишени. Расстояние от точки подвеса до мишени равно радиусу шара, поэтому при вертикальном положении нити шар и мишень соприкасаются (рис. 2).

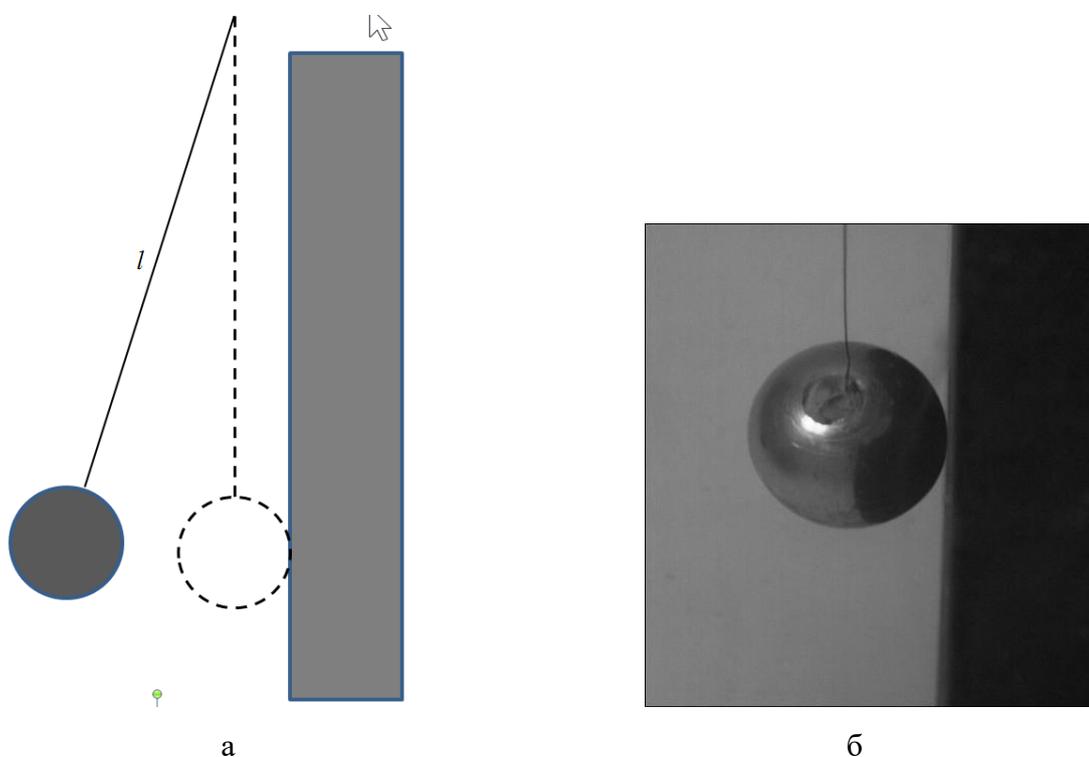


Рис.2 Схема эксперимента (а), фотоснимок шара в момент столкновения с мишенью (б)

Сведения об экспериментальной установке и условиях эксперимента

Установка состоит из стальной ванны, на горизонтальном дне которой расположена массивная мишень в виде отрезка стального стрежня, лежащего на брусках резины. Диаметр стержня 210 мм, длина 220 мм, вес 59.5 кг. Высота и расположение брусков подобраны таким образом, чтобы продольная ось мишени была горизонтальной и равно удаленной от боковых стенок ванны, а

также находилась на половине глубины в жидкости при проведении эксперимента. Шар (ударник) соединен с подшипником в точке подвеса над ванной тонкой стальной струной диаметра 0,3 мм так, что удар происходит по центру вертикального плоского торца мишени. Погонный вес струны 0.55 г/м. Сведения о длине струны и параметрах шара приведены в таблице 1.

Таблица 1

номер ударника	материал ударника	диаметр ударника, мм	масса ударника, г	плотность ударника, г/см ³	длина струны, мм
1	латунь	61	545	4,59	1450
2	сталь	30	104,3	7,38	1450
3	дюраль	31	44,8	2,87	1480

Для регистрации процесса движения шара до и после соударения используется скоростная видеокамера. Оптическая ось объектива камеры расположена в плоскости торца мишени. Система освещения экспериментальной зоны (в составе трех прожекторов мощностью 2 кВт каждый) формирует контрастное изображение шара на белом фоне стенки ванны. Данная схема подсветки позволяет использовать автоматизированную систему регистрации координат шара в процессе движения. Для удержания шара при заданном начальном отклонении перед началом движения используется проволочное кольцо.

Порядок проведения эксперимента

Мишень устанавливается в сухой ванне. Контролируется постановка торца мишени в вертикальной плоскости и подвеска ударника в положении касания с мишенью. Выполняется контрольный опыт по соударению тел в воздушной среде. Процесс соударения записывается на скоростную видеокамеру для дальнейшей обработки с целью получения характеристики отскока при соударении массивных тел в малоплотной среде.

Затем ванна заполняется водой до уровня, обеспечивающего положение оси мишени на равном удалении от дна ванны и свободной поверхности. Вода в ванной выдерживается в течение суток, что обеспечивает её полную дегазацию. Температура воды во время эксперимента составляла 22-24 градуса по Цельсию.

- 1) Первоначально шар удерживается в заданном отклоненном положении.
- 2) Включается освещение и система видео-регистрации;
- 3) Шар освобождается и начинается его движение до соударения с мишенью;
- 4) После отскока от мишени шар отклоняется на некоторое расстояние, меньшее первоначального, и опять начинает движение в сторону мишени вплоть до соударения. 3-7 циклов таких колебаний регистрируется видеокамерой.
- 5) Обработка видеозаписи осуществляется специальной программой распознавания образов, позволяющей определить зависимость положения шара от времени, включая интервалы в окрестности моментов контакта шара с мишенью.

Описанный эксперимент выполнялся для всех типов шаров, представленных в таблице 1. Полученные эмпирические зависимости положения шара от времени использовались для определения коэффициента восстановления скорости при ударе в воздухе и для сравнения с расчетными данными при соударениях в воде.

3.2. Результаты экспериментов и их сравнение с расчетными данными, полученными на основе двух гипотез

В связи с тем, что метод ВВД позволяет моделировать только плоскопараллельные и осесимметричные течения, задача о соударении шара со стенкой решалась в осесимметричной постановке. Рассматривалось прямолинейное движение шара перпендикулярно стенке. Такое приближение оправдано благодаря тому, что длина струны, на которой он был подвешен, много больше, чем амплитуда его отклонений от стенки. В расчетной модели

стенка считалась бесконечной, а для выполнения условия непротекания на стенке использовалось зеркальное отражение правой полуплоскости на левую (рис. 3).

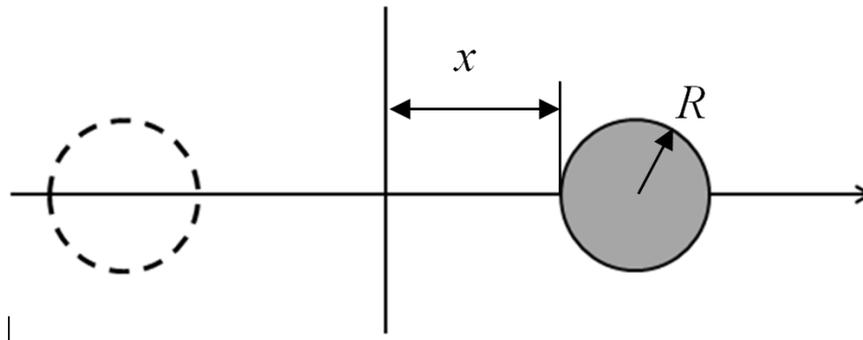


Рис.3 Схема расчетной модели

Шар движется под действием гидродинамической силы и внешней силы F_g , соответствующей горизонтальной проекции силы тяжести в эксперименте

$$m\ddot{x} = F_g + F$$

$$F_g = -\alpha x$$

$$\alpha = \frac{4\pi R^3 (\rho_c - \rho) g}{3 L}$$

где x – расстояние от стенки до ближайшей точки поверхности цилиндра, ρ – его плотность, g – ускорение силы тяжести, $L = l + R$, l – длина нити в эксперименте.

В случае, если $F = 0$ или пренебрежимо мало по сравнению с характерным значением F_g , задача имеет аналитическое решение

$$x = Ak_0^n \left| \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T} \right| \quad (14)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L\rho_c}{g(\rho_c - \rho)}}, \quad n = \left[\frac{2t}{T} \right]$$

Здесь n – количество предшествующих соударений. Предполагается, что в начальный момент шар покоится в отклоненном состоянии.

На рис. 4 представлена зависимость $x(t)$, полученная в эксперименте с шаром из дюраля в воздушной среде. На том же графике пунктирной линией

изображено аналитическое решение $x(t)$, вычисленное по формулам (14) при $A = 4.3R$, $T = 61.4\sqrt{R/g}$, $k_0 = 0.69$. Как видно из графиков, кривые практически совпадают. Следовательно, коэффициент восстановления скорости при ударе в воздухе шара из дюраля равен 0.69. Аналогичным образом из экспериментов с шарами из стали и латуни в воздухе были вычислены коэффициенты восстановления k_0 , характеризующие их столкновения с преградой: $k_0 = 0.84$ для стального шара и $k_0 = 0.61$ для шара из латуни

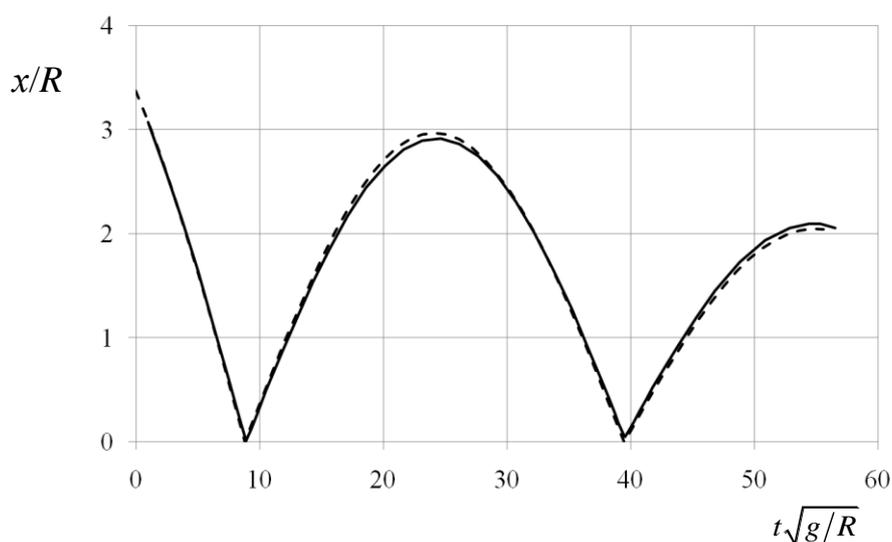


Рис. 5. Зависимость от времени отклонения шара из дюраля от положения равновесия в воздухе. Черная сплошная – эксперимент, пунктир – расчет по формуле (14)

На рис. 5, 6 приведены экспериментальные и численные данные, полученные для соударений с преградой стального шара в воде. На рис. 5 показаны зависимости от времени отклонения шара от положения равновесия, на рис. 6 – графики скорости. Расчеты выполнены с использованием двух гипотез, описанных в предыдущей главе. Серая и черная сплошные линии – результаты, полученные с применением первой и второй гипотезы соответственно. Пунктирная линия – экспериментальные данные. Из графиков видно, что первая гипотеза приводит к заниженным значениям отклонений после соударений и скорости после соударения, тогда как вторая дает хорошее совпадение с экспериментом.

На рис. 7–10 приведены аналогичные результаты, полученные в экспериментах с шарами из дюраля и латуни в воде, и соответствующие им численные данные, полученные с использованием второй гипотезы. Во всех случаях наблюдается хорошее согласие экспериментальных и численных результатов.

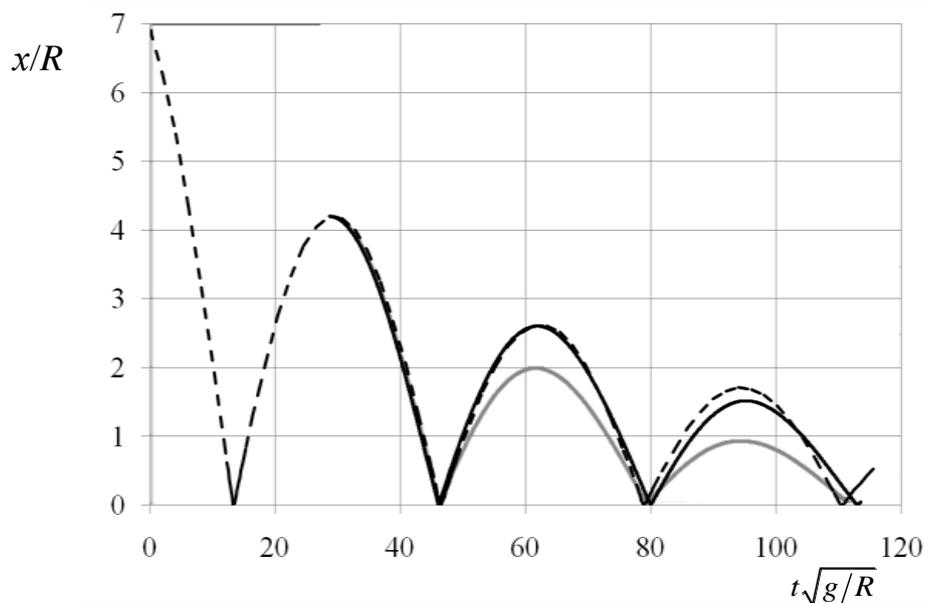


Рис. 5. Зависимости от времени отклонения стального шара от положения равновесия в воде. Пунктир – эксперимент, серая сплошная – расчет по первой гипотезе, черная сплошная – расчет по второй гипотезе.

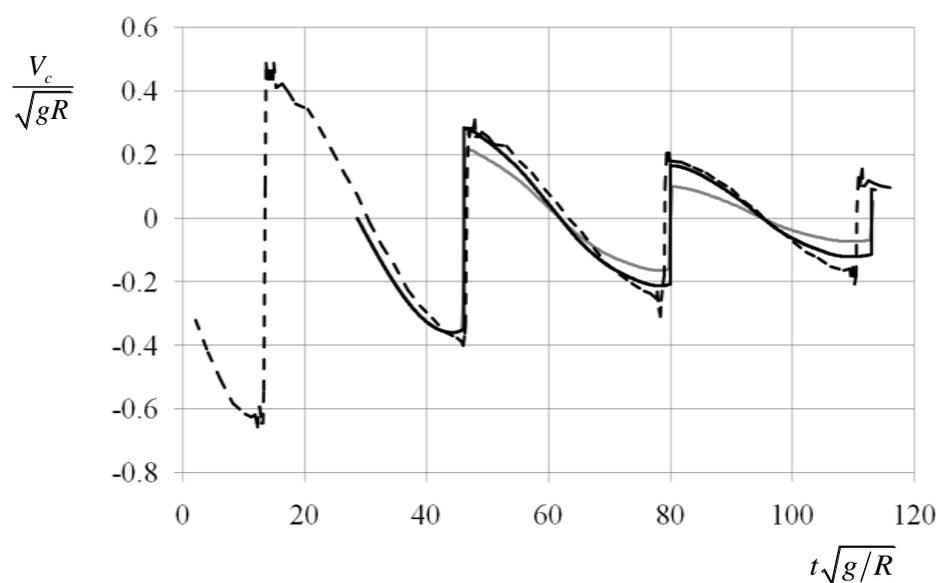


Рис. 6. Зависимости от времени скорости стального шара в воде. Пунктир – эксперимент, серая сплошная – расчет по первой гипотезе, черная сплошная – расчет по второй гипотезе.

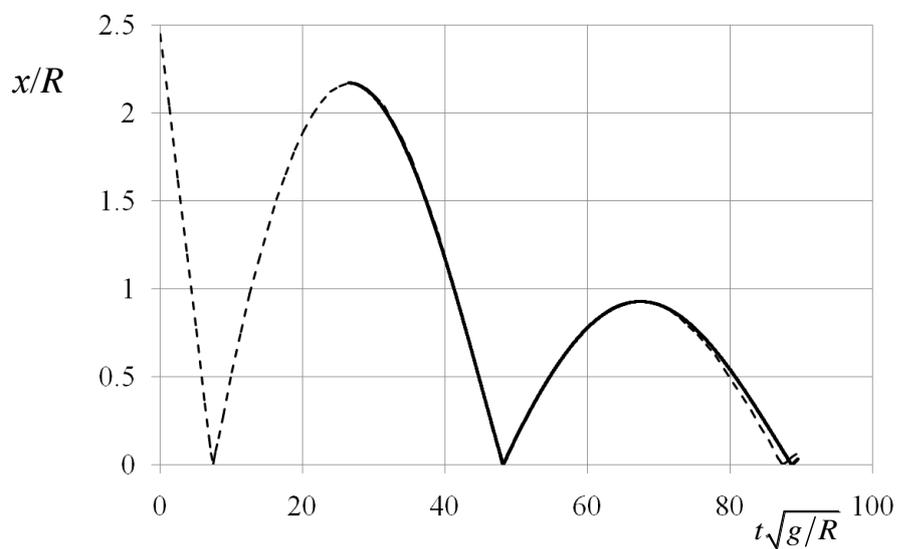


Рис. 7. Зависимости от времени отклонения шара из дюрала от положения равновесия в воде. Пунктир – эксперимент, сплошная – расчет по второй гипотезе.

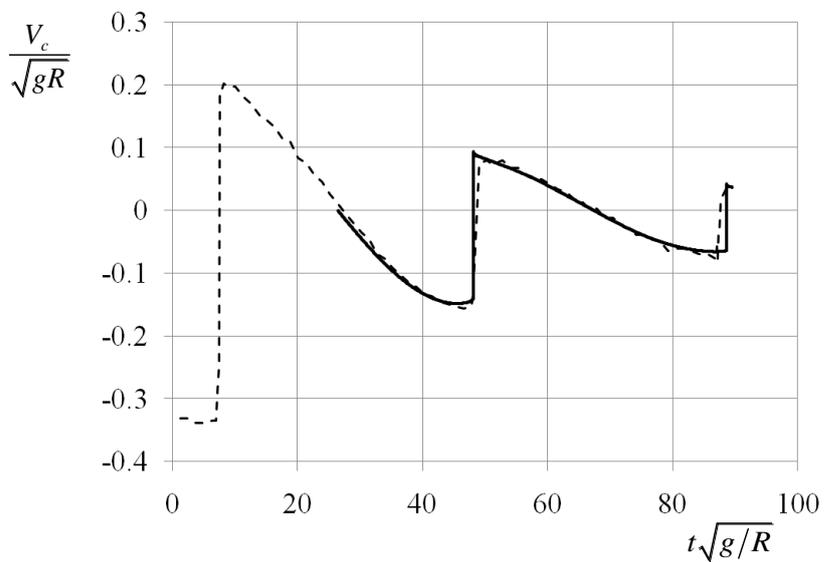


Рис. 8. Зависимости от времени скорости шара из дюрала от положения равновесия в воде. Пунктир – эксперимент, сплошная – расчет по второй гипотезе.

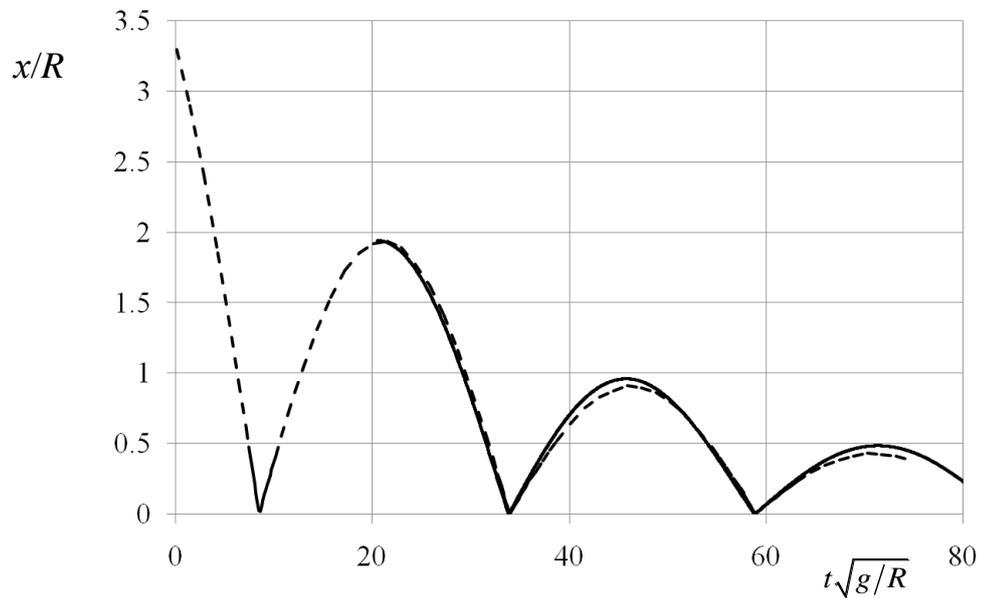


Рис. 9. Зависимости от времени отклонения шара из латуни от положения равновесия в воде. Пунктир – эксперимент, сплошная – расчет по второй гипотезе.

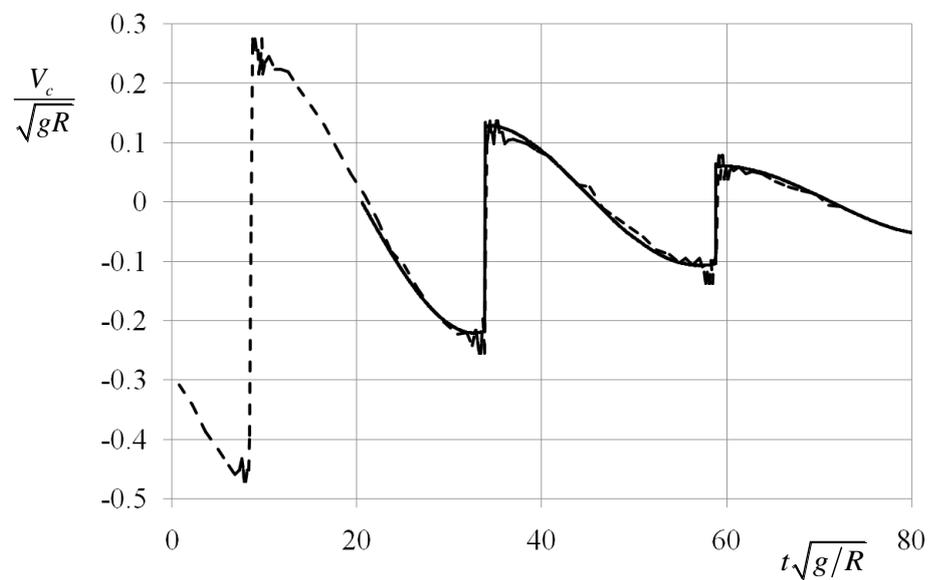


Рис. 10. Зависимости от времени скорости шара из латуни от положения равновесия в воде. Пунктир – эксперимент, сплошная – расчет по второй гипотезе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено аналитическое исследование соударений цилиндра и шара с неподвижной стенкой в вязкой несжимаемой жидкости с учетом известного парадокса «катастрофического» торможения из-за неограниченного роста гидродинамической силы отталкивания по мере сближения тел.

Выполненный анализ показал, что для макроскопических тел, имеющих достаточную скорость сближения, расстояние, на котором происходит «катастрофическое» торможение, столь мало, что может оказаться сравнимым или много меньше элементов шероховатости поверхности тел. Многократное возрастание давления в окрестности точки соприкосновения может приводить к упругим деформациям поверхностей тел с последующим отскоком как при фактическом контакте.

Разработан метод расчета соударений в несжимаемой жидкости, основанный на исключении из рассмотрения малого интервала времени, на котором происходят сложные процессы деформации и другие явления, не описываемые моделью вязкой несжимаемой жидкости. Взамен вводится дополнительная характеристика, а именно импульс, мгновенно передаваемый от стенки телу, часть которого тело отдает жидкости. Предложена и экспериментально подтверждена гипотеза о связи этого импульса с коэффициентом восстановления скорости k_0 при ударе в вакууме. Показано, что импульс, возвращаемый стенкой телу равен $\mathbf{P}_w = (1 + k_0)\mathbf{P}_{stop}$, где \mathbf{P}_{stop} – импульс, необходимый для остановки тела в условиях окружающего течения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Daniel W.B., Ecke R.E., Subramanian G., and Koch D.L. Clusters of sedimenting high-Reynolds-number particles. //J. Fluid Mech. 2008. V. 625, pp. 371–38.
2. Wylie J.J. and Koch D.L. Particle clustering due to hydrodynamic interactions. //Phys. Fluids. 2000. V. 12. N. 5, pp. 964–970.
3. Davis R H. The rate of coagulation of a dilute polydisperse system of sedimenting spheres. // J. Fluid Mech. 1984. V.145, pp. 179–199.
4. Pozrikidis C. Effect of surface slip on the relative motion and collision efficiency of slippery spherical particles. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. Vol. 65, pp. 95–100.
5. Tu J.Y., Yeoh G.H., Morsi Y.S., and Yang W. A Study of Particle Rebounding Characteristics of a Gas–Particle Flow over a Curved Wall Surface //Aerosol Science and Technology. 2004. V. 38, pp. 739–755, DOI: 10.1080/02786820490490128
6. Guvernuyuk S.V., Dynnikov Y.A., Dynnikova G.Y., Zubkov A.F. Hydrodynamics of intensive self-excited oscillations of the reversed vane in a plane diffuser // Doklady Physics. 2018. Vol. 63. No. 5, pp. 189–193.
7. Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович Г.И. Экспериментальное исследование поперечных автоколебаний круговых цилиндров, сильно загромождающих поток в плоском канале // Изв. РАН, МЖГ. 2005. № 5, сс. 133–138.
8. Hocking L.M. The effect of slip on the motion of a sphere close to a wall and of two adjacent spheres. J. // Engng Maths. 1973. V. 7. N. 3, pp. 207–221.
9. Acmae El Yacoubi, Sheng Xu, and Z. Jane Wang. The effect of gravity and dimensionality on the impact of cylinders and spheres onto a wall in a viscous fluid. //Physics of Fluids. 2017. V. 29. N. 2, 020717; doi: 10.1063/1.4974519.
10. Davis R.H., Serayssol J.-M., and Hinch E.J. The elastohydrodynamic collision of two spheres. //J. Fluid Mech. 1986. V. 163, pp 479–497.
11. Dynnikova G.Y., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface // European Journal of Mechanics, B/Fluids. 2018. Vol. 72, no. Nov-Dec, pp. 293–300.
12. Андронов П.Р., Григоренко Д.А., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Численное моделирование самовращения пластин в потоке вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2007. № 5, сс. 47–60.

13. Дынников Я.А. Бессеточная технология численного моделирования взаимодействий вязкой жидкости и систем профилей с кинематическими и упругими связями. Кандидатская диссертация по специальности 05.13.18. Москва. 2016.

14. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: изд-во Моск. ун-та. 2006. 184 с.

15. Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Y. Free oscillations of spheroids on the elastic spring in a viscous fluid. // Journal of Mechanics (SCIREA). 2017. V. 2, N. 1. pp. 1–10.

Приложение А

На срединной линии зазора скорость согласно (3) равна

$$u = -\frac{3xV_c}{2h}$$

Следовательно, ее частная производная по времени выражается формулой.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c}{2h^2} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c^2}{2h^2} \quad (\text{A.1})$$

Второе слагаемое в левой части уравнения Навье–Стокса на срединной линии равно

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{9V_c^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{h} \right)^2 = \frac{9V_c^2 x}{4h} \left(\frac{1}{h} - \frac{x}{h^2} \frac{dh}{dx} \right) = \frac{9V_c^2 x}{4h^2} \left(1 - \frac{2x^2}{h} \right) \quad (\text{A.2})$$

Складывая (A.1) и (A.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} &= -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c^2}{2h^2} + \frac{9xV_c^2}{4h^2} \left(1 - \frac{2x^2}{h} \right) = \\ &= -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c^2}{2h^2} \frac{5}{2} - \frac{3xV_c^2}{2h^2} \frac{3x^2}{h} = -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c^2}{4h^2} \frac{5h - 6x^2}{h} = \\ &= -\frac{3x\dot{V}_c}{2h} + \frac{3xV_c^2}{4h^2} \frac{5h_m - x^2}{(h_m + x^2)} \end{aligned}$$

Приложение Б

$$\begin{aligned}
\frac{p(x)}{\rho} &= \frac{p(x^*)}{\rho} + \frac{V_c^2}{2} \left(\frac{x^{*2}}{(x^{*2} + h_m)^2} - \frac{x^2}{(x^2 + h_m)^2} \right) - \frac{\dot{V}_c}{2} \ln \frac{x^{*2} + h_m}{x^2 + h_m} + \int_x^{x^*} \frac{x V_c^2 dx}{(x^2 + h_m)^2} = \\
&= \frac{p(x^*)}{\rho} + \frac{V_c^2}{2} \left(\frac{x^{*2}}{(x^{*2} + h_m)^2} - \frac{x^2}{(x^2 + h_m)^2} \right) - \frac{\dot{V}_c}{2} \ln \frac{x^{*2} + h_m}{x^2 + h_m} - \frac{V_c^2}{2} \left(\frac{1}{(x^{*2} + h_m)} - \frac{1}{(x^2 + h_m)} \right) = \\
&= \frac{p(x^*)}{\rho} + \frac{V_c^2 h_m}{2} \left(\frac{1}{(x^2 + h_m)^2} - \frac{1}{(x^{*2} + h_m)^2} \right) - \frac{\dot{V}_c}{2} \ln \frac{x^{*2} + h_m}{x^2 + h_m}
\end{aligned}$$

Вычислим силу давления, действующую на цилиндр в интервале $-x^* < x < x^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{F}{\rho} &= 2 \int_0^{x^*} p(x) dx = 2x^* \frac{p(x^*)}{\rho} + V_c^2 h_m \int_0^{x^*} \frac{dx}{(x^2 + h_m)^2} - \frac{V_c^2 h_m x^*}{(x^{*2} + h_m)^2} - \\
&- \dot{V}_c x^* \ln(x^{*2} + h_m) + \dot{V}_c \int_0^{x^*} \ln(x^2 + h_m) dx = \\
&= 2x^* \frac{p(x^*)}{\rho} + V_c^2 h_m \left(\frac{x^*}{2h_m(x^{*2} + h_m)} + \frac{1}{2h_m \sqrt{h_m}} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} - \frac{x^*}{(x^{*2} + h_m)^2} \right) - \quad (Б.1) \\
&- \dot{V}_c x^* \ln(x^{*2} + h_m) + \dot{V}_c \left(x^* \ln(x^{*2} + h_m) - 2x^* + 2\sqrt{h_m} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} \right) = \\
&= 2x^* \frac{p(x^*)}{\rho} + \frac{V_c^2}{2} \left(\frac{(x^{*2} - h_m)x^*}{(x^{*2} + h_m)^2} + \frac{1}{\sqrt{h_m}} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} \right) + 2\dot{V}_c \left(-x^* + \sqrt{h_m} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} \right)
\end{aligned}$$

Среди слагаемых в правой части только одно стремится к бесконечности при $h_m \rightarrow 0$,

это

$$\frac{V_c^2}{2\sqrt{h_m}} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}}.$$

Сумма слагаемых, зависящих от \dot{V}_c равна

$$\dot{V}_c \left(-2x^* + 2\sqrt{h_m} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} \right).$$

При решении уравнения динамики цилиндра это слагаемое надо сравнивать с величиной $m\dot{V}_c/\rho$ которая с учетом обезразмеривания равна $\dot{V}_c \eta \pi / 4$. Поскольку $x^* \ll 1$ и $h_m \ll 1$, слагаемыми, зависящими от \dot{V}_c , можно пренебречь. Таким образом, получаем асимптотическое выражение силы давления, действующей на цилиндр

$$\frac{F}{\rho} \approx \frac{V_c^2}{2\sqrt{h_m}} \operatorname{arctg} \frac{x^*}{\sqrt{h_m}} \approx \frac{\pi V_c^2}{4\sqrt{h_m}}$$

Приложение В

В приближении идеальной жидкости и постоянства давления поперек зазора скорость также не зависит от y

$$u = -\frac{xV_c}{2(h_m + x^2)}$$

Интегрируя уравнение Эйлера в интервале (x, x^*) , получим

$$\int_x^{x^*} \frac{\partial u}{\partial t} = -\int_x^{x^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)$$

$$\int_x^{x^*} dx \frac{\partial}{\partial t} \frac{xV_c}{2(h_m + x^2)} = \int_x^{x^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{x^2 V_c^2}{8(h_m + x^2)^2} \right)$$

$$\int_x^{x^*} dx \frac{\partial}{\partial t} \frac{xV_c}{2(h_m + x^2)} = \int_x^{x^*} dx \left(\frac{x\dot{V}_c}{2(h_m + x^2)} - \frac{xV_c^2}{2(h_m + x^2)^2} \right) = \frac{\dot{V}_c}{4} \ln \frac{h_m + x^{*2}}{h_m + x^2} + \frac{V_c^2}{4} \left(\frac{1}{(h_m + x^{*2})} - \frac{1}{(h_m + x^2)} \right)$$

$$\frac{p^*}{\rho} + \frac{x^{*2} V_c^2}{8(h_m + x^{*2})^2} - \frac{p}{\rho} - \frac{x^2 V_c^2}{8(h_m + x^2)^2} = \frac{\dot{V}_c}{4} \ln \frac{h_m + x^{*2}}{h_m + x^2} + \frac{V_c^2}{4} \left(\frac{1}{(h_m + x^{*2})} - \frac{1}{(h_m + x^2)} \right)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p^*}{\rho} + \frac{V_c^2}{8} \left(\frac{x^{*2}}{(h_m + x^{*2})^2} - \frac{2}{(h_m + x^{*2})} - \frac{x^2}{(h_m + x^2)^2} + \frac{2}{(h_m + x^2)} \right) - \frac{\dot{V}_c}{4} \ln \frac{h_m + x^{*2}}{h_m + x^2}$$

Интегрируя давление в круге радиуса x^* , получим значение силы давления в этой области

$$F = 2\pi \int_0^{x^*} x \frac{p}{\rho} dx = \pi x^{*2} A - \frac{\pi V_c^2}{4} \int_0^{x^*} \frac{x^3 dx}{(h_m + x^2)^2} + \frac{\pi V_c^2}{4} \int_0^{x^*} \frac{2x dx}{(h_m + x^2)} + \frac{\pi \dot{V}_c}{2} \int_0^{x^*} x \ln(h_m + x^2) dx,$$

где

$$A = \frac{p^*}{\rho} + \frac{V_c^2}{8} \left(\frac{x^{*2}}{(h_m + x^{*2})^2} - \frac{2}{(h_m + x^{*2})} \right) - \frac{\dot{V}_c}{4} \ln(h_m + x^{*2})$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{x^*} \frac{x^3 dx}{(h_m + x^2)^2} = \frac{h_m}{2(h_m + x^{*2})} + \frac{1}{2} \ln(h_m + x^{*2}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(h_m)$$

$$\int_0^{x^*} \frac{2x dx}{(h_m + x^2)} = \ln(h_m + x^{*2}) - \ln(h_m)$$

$$\int_0^{x^*} x \ln(h_m + x^2) dx = \frac{1}{2} (h_m + x^{*2}) \ln(h_m + x^{*2}) - \frac{x^{*2}}{2} - \frac{h_m}{2} \ln(h_m)$$

Окончательно получим:

$$F = 2\pi \int_0^{x^*} x \frac{p}{\rho} dx = \frac{p^* \pi x^*}{\rho} + \frac{2\pi V_c^2}{8} \left(\frac{x^{*4}}{2(h_m + x^{*2})^2} - \frac{2x^{*2}}{2(h_m + x^{*2})} - \frac{h_m}{2(h_m + x^{*2})} - \frac{1}{2} \ln(h_m + x^{*2}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(h_m) + \ln(h_m + x^{*2}) - \ln(h_m) \right) - \frac{\pi \dot{V}_c x^{*2}}{4} \ln(h_m + x^{*2}) + \frac{\pi \dot{V}_c}{2} \left((h_m + x^{*2}) \ln(h_m + x^{*2}) - h_m \ln(h_m) \right)$$

Откуда следует асимптотическое приближение

$$F \sim -\frac{\pi V_c^2}{8} \ln(h_m)$$

Решая уравнение движения шара с учетом (7а), получим

$$\frac{m}{\rho} V_c \frac{dV_c}{dh_m} = -\frac{\pi V_c^2}{8} \ln(h_m), \quad \frac{m}{\rho} = \frac{\eta \pi}{6}$$

$$\frac{dV_c^2}{V_c^2} = -\frac{3}{2\eta} \ln(h_m) dh_m$$

$$\ln \frac{V_c^2}{V_{c0}^2} = \left(-\frac{3}{2\eta} \right) (h_m \ln(h_m) - h_m - h_{m0} \ln(h_{m0}) + h_{m0})$$

При $h_m = 0$ относительное изменение скорости приблизительно равно

$$\left| \frac{\Delta V_c}{V_{c0}} \right| \sim \frac{3}{4\eta} h_{m0} |\ln(h_{m0})|$$