

КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.9

DOI: 10.22389/0016-7126-2021-972-6-18-26

Классификация проекций трехосного эллипсоида

© ¹Нырцов М. В., ²Флейс М. Э., 2021

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
119991, Россия, Москва, Ленинские горы, д. 1

²Институт географии РАН

119017, Россия, Москва, Старомонетный пер., д. 29, стр. 4

¹nyrtsovmaxim@geogr.msu.ru

²fleis.maria@yandex.ru

Традиционные подходы к классификации картографических проекций не всегда применимы для трехосного эллипсоида. Сетка меридианов и параллелей на трехосном эллипсоиде не ортогональна (это относится к любому способу задания широты: в планетоцентрической, геодезической, условно-геодезической и приведенной системах координат), поэтому утрачивается смысл традиционной классификации проекций по виду картографической сетки. В то же время при выводе проекций трехосного эллипсоида за основу берут традиционные классы проекций по виду вспомогательной поверхности – цилиндрические, конические и азимутальные. По причине отсутствия ортогональности решение прямой задачи математической картографии выполняют с использованием вспомогательной касательной плоскости. Классификация проекций по характеру искажений при переходе к трехосному эллипсоиду видоизменяется, меняется и способ получения проекций в поперечной ориентировке. Классификационные признаки проекций сферы и эллипсоида вращения справедливы и для трехосного эллипсоида, но внутри этих признаков существуют отличия.

Классификация, математическая картография, проекция, трехосный эллипсоид.

Для цитирования: Нырцов М. В., Флейс М. Э. Классификация проекций трехосного эллипсоида // Геодезия и картография. – 2021. – № 6. – С. 18–26. DOI: 10.22389/0016-7126-2021-972-6-18-26

Введение

Существует общепринятая классификация картографических проекций по различным признакам: характеру искажений; ориентировке картографической сетки в зависимости от положения точки полюса; виду нормальной картографической сетки и общих уравнений проекций; способам получения проекций; составу параметров математических элементов; признакам, диктуемым объектом картографирования, и др. С появлением проекций трехосного эллипсоида следует ввести новый классификационный признак – по виду используемой референц-поверхности. Проекции трехосного эллипсоида имеют ряд отличий от проекций сферы и эллипсоида вращения. В частности, на характер изображения может влиять не только полярное, но и экваториаль-

ное сжатие поверхности. При исследовании такого влияния удобно использовать квадраты эксцентриситетов эллипса начального меридиана и экваториального эллипса. Целесообразность введения нового признака во многом обусловлена тем, что при картографировании Земли ее параметры можно считать постоянными с точки зрения картографии, а для небесных тел сложной формы такие параметры будут существенно отличаться. Таким образом, нужно говорить о проекциях регулярных референц-поверхностей сферы, эллипсоида вращения и трехосного эллипсоида.

При этом классификация, используемая для проекций сферы и эллипсоида вращения, нуждается в уточнении для проекций трехосного эллипсоида. Рассмотрим эти особенности подробнее.

Получение проекций трехосного эллипсоида

Для получения различных проекций трехосного эллипсоида предлагается общий подход, основанный на векторном описании как самого трехосного эллипсоида с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}$, так и касательной к эллипсоиду плоскости, содержащей приращение $d\mathbf{r}$ вектора $\mathbf{r}$. В касательной плоскости вводится собственная локальная система координат с осями X_{plane} и Y_{plane} . Поскольку любая проекция использует в своем представлении элементарную длину вектора $d\mathbf{r}$ как бесконечно малый элемент дуги произвольной кривой на поверхности, естественным математическим аппаратом этого представления будут коэффициенты Гаусса первой квадратичной формы. В рамках такого же подхода предлагается рассматривать и распределение искажений проекций.

В соответствии с указаниями Международного астрономического союза [7] в нашем случае применяется система планетоцентрических координат, при этом понятие меридиана соответствует определению, данному Л. М. Бугаевским [2]. В работе Н. А. Беспалова [1] использовано другое определение меридиана, а также параллели, с точки зрения решения не картографических, а геодезических задач на поверхности трехосного эллипсоида.

С точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости трапецию на трехосном эллипсоиде можно принять за бесконечно малый параллелограмм на плоскости, касательной к трехосному эллипсоиду в выбранной точке A с координатами Φ, λ (рис. 1).

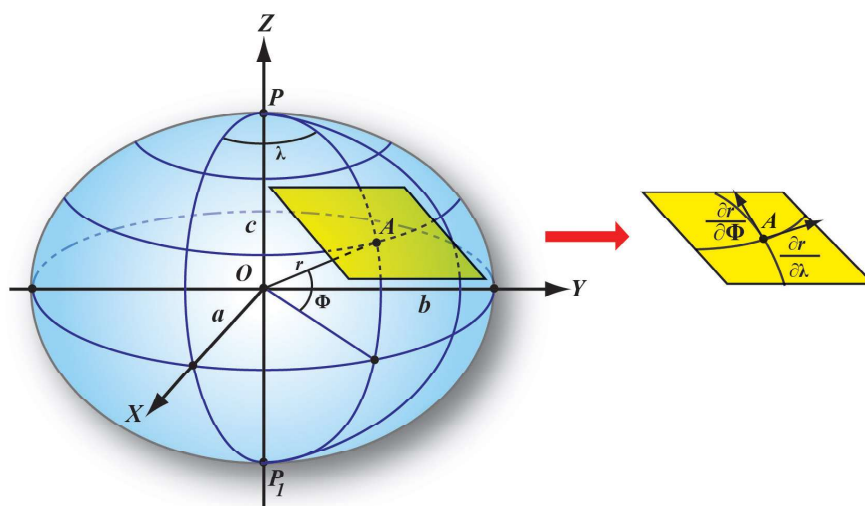


Рис. 1. Трехосный эллипсоид в прямоугольных пространственных координатах и касательная плоскость в точке A
 Fig. 1. Triaxial ellipsoid in spatial rectangular coordinates and the tangent plane at point A

При переходе с касательной плоскости на плоскость проекции для обеспечения заданного характера искажений картографических проекций необходимо сохранение определенных свойств. Например, для равновеликих проекций должна сохраняться площадь бесконечно малого параллелограмма, соответствующего заданным приращениям широты $d\Phi$ и долготы $d\lambda$.

В плоскости проекции вводится прямоугольная система координат, координатные оси которой имеют стандартное для математики и геоинформатики направление: X_{proj} – горизонтально вправо, Y_{proj} – вертикально вверх. Поскольку коэффициенты Гаусса представлены в планетоцентрической системе координат, координаты проекции выражаются через них.

Таким образом, получение проекций трехосного эллипсоида связано с решением традиционной прямой задачи математической картографии, но с учетом применения касательной плоскости. Так как меридианы и параллели на трехосном эллипсоиде не ортогональны, именно в касательной плоскости можно четко задать ортогональную систему координат, которая определяется производной вектора $\mathbf{r}$ по широте (вдоль меридиана) – это направление оси Y_{plane} .

Ось Y_{plane} выбирается направленной вправо, перпендикулярно к направлению меридиана. Касательный вектор к любой линии на эллипсоиде, проходящей через точку с координатами Φ , λ , будет лежать в этой плоскости. Все соотношения бесконечно малых величин и углов между направлениями на трехосном эллипсоиде сохраняются на ней. Использование такого подхода для проекций сферы и эллипсоида вращения является избыточным, поскольку на этих поверхностях соблюдается ортогональность картографической сетки и ось X_{plane} всегда направлена вдоль параллели; переход от бесконечно малой трапеции к плоскости осуществляется напрямую.

Пример другого способа получения проекций трехосного эллипсоида – перспективные проекции (в геометрическом смысле). Для их получения используется визирный луч, идущий из точки зрения, и традиционные вспомогательные разворачивающиеся поверхности, такие как цилиндр, конус и плоскость. Формулы проекций получают в результате совместного решения уравнений, описывающих вспомогательную поверхность и визирный луч. Такие формулы содержат тригонометрические функции и не требуют вычисления интегралов, что упрощает практическое использование предложенных проекций¹.

В работе [9] для получения проекций трехосного эллипсоида предлагается геодезический подход, заключающийся в предварительном переходе к эллипсоиду вращения. Такой подход, безусловно, правомерен, однако приведенная в качестве иллюстрации карта Земли в азимутальной проекции [9, с. 864, рис. J1] вызывает сомнение, так как визуальное отклонение формы параллелей от окружности даже вблизи полюса не соответствует малым полярному и экваториальному сжатиям трехосного эллипсоида, выбранного для аппроксимации Земли.

¹ Кондрачук А. В. Исследование и разработка перспективных проекций трехосного эллипсоида для картографирования поверхностей небесных тел: дис. ... канд. техн. наук. М., 2009. 80 с.

Классификация проекций трехосного эллипсоида по виду нормальной сетки

При разработке классификации картографических проекций трехосного эллипсоида будем отталкиваться от существующей классификации проекций сферы и эллипсоида вращения [3, 8].

По виду сетки параллелей и меридианов в нормальной ориентировке выделяют цилиндрические, азимутальные и конические проекции [10]. Для трехосного эллипсоида такие проекции не могут быть построены в соответствии с традиционными определениями для сферы и эллипсоида вращения. Как видно из названий, цилиндрические и конические проекции первоначально были привязаны к вспомогательным поверхностям, на которые отображалась поверхность шара или эллипсоида вращения и которые могут быть спроектированы на плоскость без искажений.

Цилиндрические проекции для сферы и эллипсоида вращения в нормальной ориентировке определяют как проекции, в которых меридианы – это равноотстоящие параллельные прямые, а параллели – параллельные прямые, ортогональные меридианам [5] (рис. 2, а, б). Для трехосного эллипсоида такое определение не имеет смысла. При введении промежуточной системы координат (например, изометрической [2] или эллиптической) можно добиться получения подобного вида сетки, но это не будут параллели и меридианы в привычном смысле. Поэтому цилиндрическими проекциями трехосного эллипсоида будем считать проекции, в которых меридианы – параллельные прямые, ортогональные прямолинейному экватору, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений (рис. 2, в). Такое определение цилиндрических проекций неявно использовал Л. М. Бугаевский. Целесообразно также вместо равноотстоящих меридианов рассматривать меридианы, позволяющие сохранять длины на экваторе, т. е. применять эллиптический цилиндр, касающийся трехосного эллипсоида по экватору.

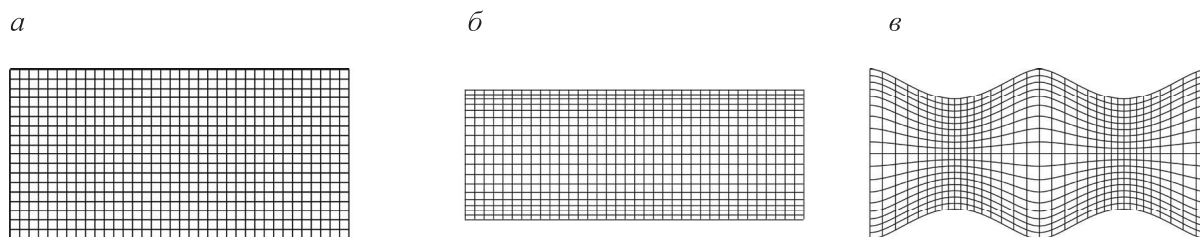


Рис. 2. Макет картографической сетки цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а), эллипсоида вращения (б), трехосного эллипсоида (в)
Fig. 2. Layout of cartographic grid of cylindrical projection preserves the lengths along the meridians for a sphere (a), ellipsoid of revolution (b), triaxial ellipsoid (c)

Меняется и вид формул для получения цилиндрических проекций, так как вертикальная координата зависит не только от широты, но и от долготы.

Под азимутальными проекциями для сферы и эллипсоида вращения в нормальной ориентировке понимают проекции, в которых меридианы – прямые, сходящиеся в одной точке и пересекающиеся под углами, равными разности долгот соответствующих меридианов, а параллели – концентрические окружности с центром в точке схода меридианов (рис. 3 а, б). В качестве азимутальных проекций трехосного эллипсоида будем рассматривать проекции, в которых меридианы – пучок прямых линий, выходящих из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений (рис. 3, в). Углы в точке пересечения меридианов в азимутальной проекции равны соответствующим углам на эллипсоиде.

Конические проекции для сферы и эллипсоида вращения в нормальной ориентировке

определяют как проекции, в которых параллели – концентрические окружности, а меридианы – пучок прямых, проведенных из центра окружностей (рис. 4, а, б). При этом углы в точке пересечения меридианов в проекции пропорциональны соответствующим углам на эллипсоиде вращения (сфере). Поэтому в качестве поверхности, которая может быть спроектирована на плоскость без искажений, рассматривается прямой круговой конус, касательный или секущий. Для трехосного эллипсоида в качестве такой поверхности используем прямой эллиптический конус, касательный к поверхности. Тогда коническими проекциями трехосного эллипсоида будем считать проекции, в которых меридианы – это пучок прямых линий, выходящих из одной точки, а параллели – кривые линии, построенные в соответствии с выбранным характером искажений (рис. 4, в). При этом углы в точке пересечения меридианов в проекции функционально зависят от соответствующих углов на эллипсоиде и от параметров конуса.

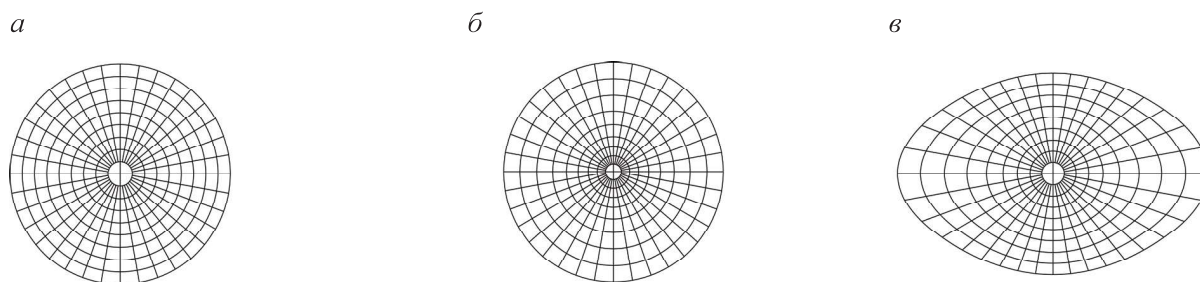


Рис. 3. Макет картографической сетки азимутальной проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а), эллипсоида вращения (б), трехосного эллипсоида (в)
Fig. 3. Layout of cartographic grid of azimuthal projection preserves the lengths along the meridians for a sphere (a), ellipsoid of revolution (b), triaxial ellipsoid (c)

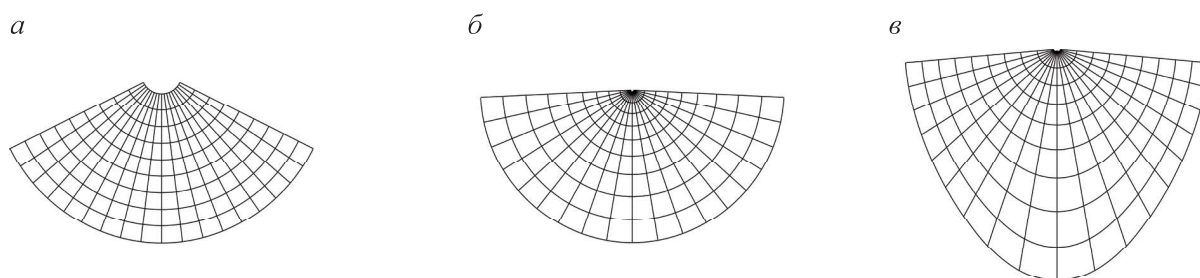


Рис. 4. Макет картографической сетки конической проекции, сохраняющей длины вдоль меридианов, для сферы (а), эллипсоида вращения (б), трехосного эллипсоида (в)
Fig. 4. Layout of cartographic grid of conical projection preserves the lengths along the meridians for a sphere (а), ellipsoid of revolution (б), triaxial ellipsoid (в)

Приведенное выше определение конических проекций позволяет связать в систему различные классы проекций трехосного эллипсоида. При стремлении вершины конуса (точки схода меридианов) в бесконечность получаем цилиндрическую проекцию, а при стремлении к точке полюса – азимутальную.

Заметим, что при переходе к картографическим проекциям трехосного эллипсоида меняется вид сетки и формул, а вид поверхностей, которые могут быть спроектированы на плоскость без искажений, остается прежним. Это пример того, что при усложнении задачи приходится возвращаться к более ранним исследованиям.

Таким образом, очевидно, что определения основных классов картографических проекций сферы и эллипсоида вращения по виду картографической сетки не могут быть распространены на проекции трехосного эллипсоида. При этом сохраняется традиционный подход с использованием вспомогательной поверхности.

Классификация проекций по положению полюса

При выводе цилиндрических и азимутальных проекций учитывается возможность использования поперечных систем координат [4]. То есть положение полюса проекции может быть в точке географического полюса (нормальная ориентировка), в точке с координатами $\Phi = 0, \lambda = 0$

(первый вариант поперечной системы координат) или $\Phi = 0, \lambda = 90^\circ$ (второй вариант поперечной системы координат).

Обычно считается, что оси (полуоси) трехосного эллипсоида находятся в соотношении $a > b > c$ или по крайней мере $a \geq b \geq c$. При выводе некоторых проекций используют квадраты полярного e_{ac}^2 или экваториального e_{ab}^2 эксцентриситетов как формальные параметры, которые могут быть меньше нуля. Это позволяет переходить к системе координат, получаемой поворотом вокруг начала координат, так что одна из экваториальных осей эллипсоида переходит на ось Z . Будем называть такую систему координат поперечной.

Рассмотрим две вышеупомянутые системы поперечных координат. Чтобы избежать путаницы между исходными координатами и координатами в поперечной системе, обозначим в исходной системе (нормальная ориентировка): $x_{norm}, y_{norm}, z_{norm}$ – прямоугольные координаты; $\Phi_{norm}, \lambda_{norm}$ – угловые; $a_{norm}, b_{norm}, c_{norm}$ – полуоси эллипсоида. Соответственно обозначим в новой системе (поперечная ориентировка): $x_{trans}, y_{trans}, z_{trans}$ – прямоугольные координаты; $\Phi_{trans}, \lambda_{trans}$ – угловые; $a_{trans}, b_{trans}, c_{trans}$ – полуоси эллипсоида.

Первый вариант поперечной прямоугольной системы координат получаем из того условия, что полюс в новой системе координат будет в точке пересечения экватора и начального меридиана. Это достигается преобразованием:

$$x_{trans} = -z_{norm}, y_{trans} = y_{norm}, z_{trans} = x_{norm}. \quad (1)$$

В новой системе координат эллипсоид повернется на 90° по часовой стрелке относительно оси Y_{norm} , т. е. точка пересечения оси X_{norm} с эллипсоидом будет расположена на оси Z_{trans} , так что большая экваториальная ось эллипсоида ляжет на ось Z_{trans} , а меридиан 90° вместе с меридианом 270° станут экватором (рис. 5, а, б). При этом $a_{trans} = c_{norm}$, $b_{trans} = b_{norm}$, $c_{trans} = a_{norm}$. Определим зависимость угловых координат в данной поперечной системе Φ_{trans} , λ_{trans} от исходных угловых координат Φ_{norm} , λ_{norm} . Перепишем соотношение (1) в виде

$$x_{norm} = r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm},$$

$$y_{norm} = r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}, \quad (2)$$

$$z_{norm} = r \sin \Phi_{norm}.$$

Заметим, что полярное расстояние r не меняется при повороте. Из формул (1) и (2):

$$x_{trans} = -r \sin \Phi_{norm},$$

$$y_{trans} = r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm},$$

$$z_{trans} = r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm},$$

$$\Phi_{trans} = \arcsin \frac{z_{trans}}{r} = \arcsin(\cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}),$$

$$\lambda_{trans} = \arctg \frac{y_{trans}}{x_{trans}} = -\arctg \frac{\cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}}{\sin \Phi_{norm}}.$$

Получили формулы, известные из сферической тригонометрии.

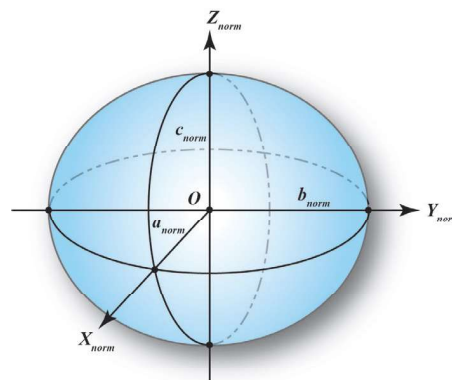
Второй вариант поперечной прямоугольной системы координат находим из того условия, что полюс в новой системе координат будет в точке пересечения экватора и меридиана 90° . Это достигается преобразованием:

$$x_{trans} = -z_{norm}, y_{trans} = -x_{norm}, z_{trans} = y_{norm}. \quad (3)$$

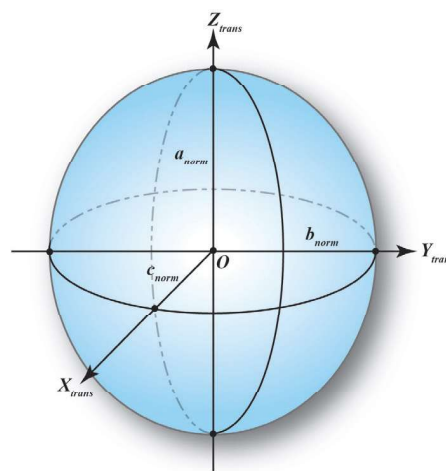
В новой системе координат эллипсоид повернется сначала на 90° по часовой стрелке относительно оси Z_{norm} , меридиан 90° становится начальным; затем произойдет поворот на 90° по часовой стрелке относительно новой оси Y , аналогично

тому, как при получении первого варианта поперечной системы координат, т. е. точка пересечения оси Y_{norm} с эллипсоидом будет

а



б



в

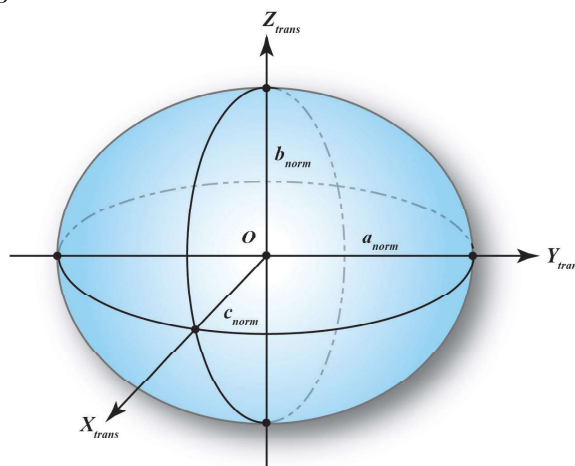


Рис. 5. Исходный эллипсоид в нормальной (а) и в поперечной – первый вариант (б), второй вариант (в) – системах координат
Fig. 5. The initial ellipsoid in the normal (a) and transverse coordinate systems, first option (б), second option (в)

расположена на оси Z_{trans} , так что малая экваториальная ось эллипсоида ляжет на ось Z_{trans} , а исходный начальный меридиан вместе с исходным меридианом 180° станут экватором (см. рис. 5, а, в). При этом $a_{trans} = c_{norm}$, $b_{trans} = a_{norm}$, $c_{trans} = b_{norm}$.

Определим зависимость угловых координат в данной поперечной системе Φ_{trans} , λ_{trans} от исходных угловых координат Φ_{norm} , λ_{norm} . Из формул (2) и (3) получаем

$$x_{trans} = -r \sin \Phi_{norm},$$

$$y_{trans} = -r \cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm},$$

$$z_{trans} = r \cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm},$$

$$\Phi_{trans} = \arcsin \frac{z_{trans}}{r} = \arcsin(\cos \Phi_{norm} \sin \lambda_{norm}),$$

$$\lambda_{trans} = \arctg \frac{y_{trans}}{x_{trans}} = \arctg \frac{\cos \Phi_{norm} \cos \lambda_{norm}}{\sin \Phi_{norm}}.$$

Проекция трехосного эллипсоида в ко-сой ориентировке требуют дальнейших исследований.

Таким образом, для получения проекций трехосного эллипсоида в поперечной ориентировке нет необходимости в пересчете через полярные сферические координаты, как это делается для проекций сферы и эллипсоида вращения. Переход осуществляется путем поворота эллипсоида вокруг осей, что значительно проще.

Классификация проекций трехосного эллипсоида по характеру искажений

Традиционная классификация картографических проекций по характеру искажений несколько изменяется для трехосного эллипсоида. Проекция для сферы и эллипсоида вращения подразделяют на равноугольные, равновеликие и произвольные. В произвольных проекциях обычно рассматривают равнопромежуточные вдоль меридианов и равнопромежуточные вдоль параллелей проекции. В равноугольных проекциях сохраняется подобие бесконечно малых фигур, в равновеликих — отношение площадей на референц-поверхности и плоскости, а в произвольных проекциях

искажаются длины, площади и углы. Произвольные проекции являются компромиссом при выборе в пользу искажений той или иной характеристики. Для равнопромежуточных проекций соблюдается свойство, в соответствии с которым масштаб длин по одному из главных направлений постоянен и, в частности, равен единице.

Получение строго равноугольных проекций трехосного эллипсоида связано с введением на поверхности ортогональной системы криволинейных координат (например, для равноугольной проекции Якоби используется в качестве промежуточной система эллиптических координат [11]).

Вывод формул цилиндрических, азимутальных и конических проекций трехосного эллипсоида упрощается за счет того, что одна из плоских координат зависит только от долготы. Это справедливо для проекций, сохраняющих длины вдоль меридианов, и для равновеликих проекций. Однако именно это свойство не позволяет получить формулы равноугольных цилиндрических, азимутальных и конических проекций [6]. Вводится понятие квазиравноугольных проекций, сохраняющих некоторые свойства равноугольных. Квазиравноугольные проекции, в окрестности каждого меридиана близкие к равноугольным проекциям эллипсоида вращения, соответствующего меридианному сечению, будем для краткости называть проекциями меридианного сечения. Они выводятся из условия равенства отношений дифференциала дуги меридиана и длины перпендикуляра, проведенного к этому меридиану до пересечения с меридианом $\lambda + d\lambda$, на эллипсоиде и в проекции. Необходимость рассмотрения этих проекций связана с тем, что такие проекции практически сохраняют подобие малых форм. Чем меньше сжатие трехосного эллипсоида, тем больше он стремится к эллипсоиду вращения и квазиравноугольная проекция становится ближе к равноугольной. В дополнение к проекциям меридианного сечения также рассматриваются квазиравноугольные проекции, сохраняющие угол между меридианом и параллелью.

Напомним, что равнопромежуточной проекцией считается та, в которой масштаб длин по одному из главных направлений постоянен и, в частности, равен единице. В случае равнопромежуточных проекций трехосного эллипсоида масштаб длин сохраняется по меридианам, но главные направления могут совпадать с линиями картографической сетки, а могут и не совпадать с ними, поэтому корректнее говорить о проекциях трехосного эллипсоида, сохраняющих длины вдоль меридианов, нежели о равнопромежуточных вдоль меридианов.

Что касается равновеликих проекций трехосного эллипсоида, то они получаются так же, как и проекции для сферы и эллипсоида вращения, исходя из условия сохранения отношения площадей на трехосном эллипсоиде и плоскости.

Таким образом, в классификации проекций трехосного эллипсоида по характеру искажений следует выделять равноугольные, квазировноугольные, равновеликие и проекции, сохраняющие длины вдоль меридианов.

Заключение

Особенности получения проекций трехосного эллипсоида и вид их картографических сеток позволяют прийти к выводу, что необходимо разделять проекции по виду используемой референц-поверхности, так как проекции трехосного эллипсоида не укладываются в традиционную классификацию проекций сферы и эллипсоида вращения. Классификационные признаки их проекций справедливы и для трехосного эллипсоида, но внутри этих признаков существуют отличия по способу получения

проекций, по виду картографической сетки, по способу получения проекций в поперечной ориентировке и по искажениям.

Материалы, использованные в статье, выполнены по государственным заданиям № АААА-А19-119022190168-8 (М. Э. Флейс) и АААА-А16-116032810094-9 (М. В. Нырцов).

The materials used in the article were made according to state assignments No. АААА-А19-119022190168-8 (M. E. Fleis) and АААА-А16-116032810094-9 (M. V. Nyrtsov).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беспалов Н. А. Методы решения задач сфероидической геодезии. — М.: Недра, 1980. — 287 с.
2. Бугаевский Л. М. Теория картографических проекций регулярных поверхностей. — М.: Златоуст, 1999. — 144 с.
3. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Пособие по математической картографии. — М.: Недра, 1964. — 456 с.
4. Граур А. В. Математическая картография. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1956. — 372 с.
5. Соловьев М. Д. Математическая картография. — М.: Недра, 1969. — 287 с.
6. Флейс М. Э., Нырцов М. В., Борисов М. М. Исследование свойства равноугольности цилиндрических проекций трехосного эллипсоида // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 451. — № 3. — С. 336–338.
7. Archinal B. A., Acton C. H., A'Hearn M. F. et al. (2018) Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130:22, 46 p. DOI: 10.1007/s10569-017-98-05-5.
8. Bugaevskii L. M., Snyder J. P. (1995) Map Projections. A Reference Manual. Taylor&Francis, 352 p.
9. Grafarend E. W., You R.-J., Syffus R. (2014) Map Projections: Cartographic Information Systems, 2 ed. Berlin: Springer, 941 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36494-5.
10. Kessler Fritz, Battersby Sarah (2019) Working with Map Projections. A Guide to their Selection. CRC Press, 317 p. DOI: 10.1201/9780203731413.
11. Nyrtsov M. V., Fleis M. E., Borisov M. M., Stooke P. (2014) Jacobi Conformal Projection of the Triaxial Ellipsoid: New Projection for Mapping of Small Celestial Bodies. *Cartograph from Pole to Pole*. Ed. M. Buchroithner, N. Prechtel, D. Burghardt. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 235–246. DOI: 10.1007/978-3-642-32618-9_17.

Classification of the triaxial ellipsoid projections

¹Nyrtsov M. V., ²Fleis M. E.

¹Lomonosov Moscow State University

119991, Russia, Moscow, Leninskie Gory, 1

²Institute of Geography, Russian Academy of Sciences

119017, Russia, Moscow, Staromonetny lane, 29

¹nyrtsovmaxim@geogr.msu.ru ²fleis.maria@yandex.ru

There are generally accepted classifications of cartographic projections of a sphere and an ellipsoid of revolution according to various criteria. The projections of a triaxial ellipsoid have a number of differences from the projections of a sphere and an ellipsoid of revolution; therefore, the existing classifications need to be clarified. The definitions of the main classes of cartographic projections of a sphere and an ellipsoid of revolution by the type of cartographic grid cannot be extended to projections of a triaxial ellipsoid. At the same time, the traditional approach with the auxiliary surface is maintained. To obtain projections of a triaxial ellipsoid in transverse orientation, there is no need to recalculate through polar spherical coordinates as is done for projections of a sphere and an ellipsoid of revolution. The transition is carried out by rotating the ellipsoid around the axes, which is much simpler. In the classification of the projections of a triaxial ellipsoid according to the distortions, it is necessary to distinguish conformal, quasi-conformal, equal-area projections and projections that preserve lengths along the meridians.

Classification, map projection, mathematical cartography, triaxial ellipsoid.

For citations: Nyrtsov M. V., Fleis M. E. (2021) Classification of the triaxial ellipsoid projections. *Geodezia i Kartografiya*, 972 (6), pp. 18–26 (In Russian). DOI: 10.22389/0016-7126-2021-972-6-18-26

REFERENCES

1. *Bespalov N. A.* Metody resheniya zadach sferoidicheskoi geodezii. Moskva: Nedra, 1980, 287 p. (In Russian).
2. *Bugaevskii L. M.* Teoriya kartograficheskikh proektsii regul'yarnykh poverkhnostei. Moskva: Zlatoust, 1999, 144 p. (In Russian).
3. *Ginzburg G. A., Salmanova T. D.* Posobie po matematicheskoi kartografii. Moskva: Nedra, 1964, 456 p. (In Russian).
4. *Graur A. V.* Matematicheskaya kartografiya. 2-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe. Leningrad: Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1956, 372 p. (In Russian).
5. *Solov'ev M. D.* Matematicheskaya kartografiya. Moskva: Nedra, 1969, 287 p. (In Russian).
6. *Fleis M. E., Nyrtsov M. V., Borisov M. M.* Issledovanie svoistva ravnougol'nosti tsilindricheskikh proektsii trekhosnogo ellipsoida. *Doklady Akademii nauk*, 2013, 451, 3, pp. 336–338 (In Russian).
7. *Archinal B. A., Acton C. H., A'Hearn M. F.* et al. (2018) Report of the IAU Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130:22, 46 p. DOI: 10.1007/s10569-017-98-05-5.
8. *Bugaevskii L. M., Snyder J. P.* (1995) Map Projections. A Reference Manual. Taylor&Francis, 352 p.
9. *Grafarend E. W., You R.-J., Syffus R.* (2014) Map Projections: Cartographic Information Systems, 2 ed. Berlin: Springer, 941 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36494-5.
10. *Kessler Fritz, Battersby Sarah* (2019) Working with Map Projections. A Guide to their Selection. CRC Press, 317 p. DOI: 10.1201/9780203731413.
11. *Nyrtsov M. V., Fleis M. E., Borisov M. M., Stooke P.* (2014) Jacobi Conformal Projection of the Triaxial Ellipsoid: New Projection for Mapping of Small Celestial Bodies. *Cartograph from Pole to Pole*. Ed. M. Buchroithner, N. Prechtel, D. Burghardt. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 235–246. DOI: 10.1007/978-3-642-32618-9_17.