МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА, 1988, № 1, с. 3—6

УДК 537.84

Н. Г. Тактаров

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕДАХ

Явления тепло- и массопереноса в намагничивающихся средах, а также в электрохимических системах рассматриваются в монографии [1]. При наличии свободных поверхностей, а также межфазных поверхностей раздела необходимо учитывать происходящие на них так называемые поверхностные явления, которые при определенных условиях могут оказывать существенное влияние на характер движения среды в объемной фазе. Наличие поверхностной намагниченности и поляризации проявляется при этом, как правило, только в случае, когда соответствующие объемные величины достаточно малы. При наличии же двойного электрического слоя поверхностные (электрокапиллярные) явления существенны при любой диэлектрической проницаемости объемных фаз. Общие вопросы построения моделей поверхностных явлений в намагничивающихся и поляризующихся средах рассматриваются в работах [2, 3]. Ниже приведены различные частные случаи общих уравнений, пригодные для решения конкретных задач. Основная проблема замыкания системы поверхностных уравнений движения заключается в нахождении выражений для внутренних магнитного и электрического полей.

Для нахождения внутренних полей используется свойство гармонических (т. е. удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$) внутри межфазного слоя функций. Можно показать, что для таких функций имеет место равенство $\varphi_s=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ при $\lambda\to 0$, где

$$\varphi_s=\frac{1}{2\lambda}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}\langle\varphi\rangle_\Sigma dz,$$

z — поперечная к слою координата, 2λ — толщина слоя; φ_1 и φ_2 — значения φ внутри слоя в окрестности поверхностей Σ_1 и Σ_2, ограничивающих этот слой, соответственно.

1. Намагничивающаяся среда. Граничные условия для магнитного поля в этом приближении [4] при отсутствии поверхностных разрывов, простых и двойных токовых слоев принимают вид

$$\{\mathbf{H}_\tau\}=-4\pi\nabla_s M_{ns},\quad \{B_n\}=-4\pi\nabla_\alpha M_s^\alpha, \tag{1}$$

где $\mathbf{M}_s=M_{ns}\mathbf{n}+M_s^\alpha\mathbf{e}_\alpha$ — поверхностная намагниченность.

Уравнения для магнитного поля внутри межфазного слоя при отсутствии электропроводности [5] имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\langle\mathbf{h}\rangle_\Sigma=0,\qquad \mathrm{div}\,\langle\mathbf{b}\rangle_\Sigma=0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай $M_{ns}\neq 0$, $M_{\alpha s}=0$. Предполагаем, что связанные магнитные заряды [6] расположены на поверхностях Σ_1 и Σ_2, ограничивающих межфазный слой, и отсутствуют внутри слоя (предположение о структуре слоя); тогда внутри слоя $\mathrm{div}\,\langle\mathbf{m}\rangle_\Sigma=-\langle q_{\text{свз}}\rangle_\Sigma=0$. Отсюда с учетом (2) следует, что $H_{ns}=-4\pi M_{ns}$. Вводя согласно (2) скалярный потенциал магнитного поля, удовлетворяющий уравнению $\Delta\langle\psi\rangle_\Sigma=0$ ($\langle\mathbf{h}\rangle_\Sigma=-\nabla\langle\psi\rangle_\Sigma$), можно показать, что $H_{\alpha s}/2\lambda=(H_{\alpha 1}+H_{\alpha 2})/2$

при $\lambda \to 0$, где 2λ — толщина слоя. При выводе последнего равенства использована непрерывность $\langle h_\alpha \rangle_\Sigma$ на поверхностях Σ_1, Σ_2. Из непрерывности $\langle b_n \rangle_\Sigma$ на Σ_1, Σ_2 следует $B_{ns} = B_{n1} = B_{n2}$ при $\lambda \to 0$. Второе условие (1) принимает в этом случае вид $\{B_n\} = 0$, а первое остается без изменения.

Для нахождения электрического поля внутри слоя запишем уравнения Максвелла в собственной системе координат K'', движущейся со скоростью среды межфазного слоя $\mathbf{v}_s$:

$$\mathrm{rot}\langle \mathbf{e}'' \rangle_\Sigma = -c^{-1} \partial \langle \mathbf{b}'' \rangle_\Sigma / \partial t, \quad \mathrm{div}\, \langle \mathbf{d}'' \rangle_\Sigma = 0. \tag{3}$$

По предположению поляризация в собственной системе координат $\langle \mathbf{p}''_m \rangle_\Sigma = 0$ отсутствует, когда $\langle \mathbf{e}'' \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{d}'' \rangle_\Sigma$. Взяв rot от обеих частей первого уравнения (3) и учитывая, что внутри слоя $|\langle \mathbf{h} \rangle_\Sigma| \gg |\langle \mathbf{m} \rangle_\Sigma|$, находим $\triangle \langle \mathbf{e}'' \rangle_\Sigma = 0$. Отсюда в силу непрерывности $\langle e''_\alpha \rangle_\Sigma$ и $\langle d''_n \rangle_\Sigma$ на Σ_1 и Σ_2 следует при $\lambda \to 0$

$$E''_{\alpha s} = (E''_{\alpha 1} + E''_{\alpha 2})/2, \quad D''_{ns}/2\lambda = (D''_{n1} + D''_{n2})/2. \tag{4}$$

Переход от системы K'' к K', движущейся со скоростью $\mathbf{v}_{ns}$, осуществляется по известным формулам. Далее, поскольку $P''_{ns} = 0$, имеем $E''_{ns} = D''_{ns}/2\lambda$.

В случае $M_{ns} = 0$, $M_{\alpha s} \neq 0$ в связи с отсутствием двойного слоя связанных магнитных зарядов скалярный потенциал непрерывен: $\psi_1 = \psi_2 = \psi_s$ при $\lambda \to 0$, где

$$\psi_s = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \langle \psi \rangle_\Sigma \mathrm{d}z.$$

Из непрерывности потенциала следует $H_{\alpha s}/2\lambda = H_{\alpha 1} = H_{\alpha 2}$. Первое условие (1) принимает при этом вид $\{\mathbf{H}_\tau\} = 0$, а второе остается без изменения.

Из второго уравнения (2) следует $\langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma = \mathrm{rot}\, \langle \mathbf{a} \rangle_\Sigma$, где $\langle \mathbf{a} \rangle_\Sigma$ — векторный потенциал. Имеют место равенства

$$\langle b_n \rangle_\Sigma = \varepsilon^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \langle a_\beta \rangle_\Sigma, \quad \mathrm{rot}_\tau \langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma = \mathrm{rot}_\tau \langle \mathbf{h} \rangle_\Sigma + 4\pi\, \mathrm{rot}_\tau \langle \mathbf{m} \rangle_\Sigma,$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — двухмерный тензор Леви-Чивита, τ означает касательную проекцию вектора. Если по предположению $\langle \mathbf{m} \rangle_\Sigma$ не зависит от координаты z и $\langle m_n \rangle_\Sigma = 0$ (предположение о структуре слоя), то $\mathrm{rot}_\tau \langle \mathbf{m} \rangle_\Sigma = 0$, а поскольку еще и $\mathrm{rot}\, \langle \mathbf{h} \rangle_\Sigma = 0$, будем иметь $\mathrm{rot}_\tau \langle \mathbf{b} \rangle_\Sigma = 0$. Отсюда следует, что $\triangle \langle a_\alpha \rangle_\Sigma = 0$. В силу гармоничности $\langle a_\alpha \rangle_\Sigma$ ($\alpha = 1, 2$) внутри слоя и непрерывности $\langle b_n \rangle_\Sigma$ на Σ_1 и Σ_2 имеем $B_{ns} = (B_{n1} + B_{n2})/2$, $H_{ns}/2\lambda = B_{ns}$. Электрическое поле находится аналогично предыдущему и имеет вид (4). При вычислении $D''_{ns}/2\lambda$ здесь использовано свойство гармоничности функции $\langle d''_n \rangle_\Sigma$, которое выполняется при условии $\varepsilon^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \langle m_\beta \rangle_\Sigma = 0$, справедливом, в частности, в случае $\langle m_\alpha \rangle_\Sigma = \chi \langle h_\alpha \rangle_\Sigma$, где $\chi = \mathrm{const}$.

В случае двойного токового слоя и при отсутствии простого токового слоя магнитное поле в межфазном слое имеет вид (при $\lambda \to 0$)

$$H_s{}^\alpha/2\lambda = (4\pi/c) j_{\beta s} \varepsilon^{\alpha\beta}, \qquad B_{ns} = (B_{n1} + B_{n2})/2.$$

Здесь $j_{\beta s} = j_{\beta s1} = -j_{\beta s2}$. Предположения о структуре слоя: $\langle m_\alpha \rangle_\Sigma = \chi \langle h_\alpha \rangle_\Sigma$, $\chi = \mathrm{const}$; $\langle m_\alpha \rangle_\Sigma$, $\langle h_\alpha \rangle_\Sigma$ не зависят от координаты z. Поскольку $M_{ns} = 0$, справедливо равенство $H_{ns}/2\lambda = B_{ns}$.

Нетрудно получить выражение для внутреннего магнитного поля и для случая, когда $j_{\beta s1} \neq -j_{\beta s2}$, если учесть, что $\langle h_\alpha \rangle_\Sigma$ испытывает разрывы на Σ_1 и Σ_2, связанные с поверхностными токами, а $\langle b_n \rangle_\Sigma$ непрерывна на Σ_1, Σ_2.

Электрическое поле в межфазном слое находится аналогично предыдущему и имеет вид

$$E''_{\alpha s} = (E_{\alpha 1} + E_{\alpha 2})/2, \quad D''_{ns}/2\lambda = [D''_{n1} + D''_{n2} + 4\pi(\sigma_1 - \sigma_2)]/2,$$

где σ_1, σ_2 — плотность электрического заряда на поверхностях Σ_1, Σ_2, ограничивающих слой.

2. Поляризующаяся среда. В поляризующейся среде при наличии двойного электрического слоя свободных зарядов в нестационарных условиях, вообще говоря, $|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$, где σ_1, σ_2 — заряды на граничных поверхностях Σ_1, Σ_2. Равенство $\sigma_1 = -\sigma_2$ может поддерживаться только в стационарных условиях. Предполагаем, что внутри межфазного слоя нет свободных и связанных зарядов (предположение о структуре) тогда уравнения для электрического поля внутри слоя примут вид

$$\mathrm{rot}\,\langle \mathbf{e}\rangle_\Sigma = 0, \qquad \mathrm{div}\,\langle \mathbf{d}\rangle_\Sigma = 0. \tag{5}$$

Из этих уравнений следует, что

$$D_{ns}/2\lambda = [D_{n1} + D_{n2} + 4\pi(\sigma_1 - \sigma_2)]/2, \quad E_{ns} = -\Delta\varphi/2\lambda. \tag{6}$$

При выводе (6) сделано предположение о независимости $\langle \mathbf{p}_m\rangle_\Sigma$ от поперечной координаты z и учтено, что скачок величины $\langle d_n\rangle_\Sigma$ на Σ_1 и Σ_2 равен соответственно $4\pi\sigma_1$ и $4\pi\sigma_2$. Из уравнений (5) следует также, что $\langle \mathbf{e}\rangle_\Sigma = -\nabla\langle\varphi\rangle_\Sigma$ и $\triangle\langle\varphi\rangle_\Sigma = 0$. Нетрудно показать, что $\varphi_s = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ при $\lambda \to 0$, где

$$\varphi_s = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} \langle\varphi\rangle_\Sigma dz.$$

Имеет место равенство $\mathbf{E}_{\tau s} = (\mathbf{E}_{\tau 1} + \mathbf{E}_{\tau 2})/2$, при выводе которого используется условие непрерывности $\langle \mathbf{e}_\tau\rangle_\Sigma$ на поверхностях Σ_1, Σ_2. Если выполняются условия $|q_s| = |\sigma_1 + \sigma_2| \ll |\sigma_1|$, $|\sigma_2|$ и $|D_{n1}|$, $|D_{n2}| \ll 4\pi\sigma$, то можно написать $D_{ns}/2\lambda \approx 4\pi\sigma$, где $\sigma \approx \sigma_1 \approx -\sigma_2$; q_s — плотность заряда простого электрического слоя, примыкающего к двойному. В общем случае для обеих плотностей заряда σ_1 и σ_2 необходимо выписывать независимые уравнения неразрывности.

Вопрос о нахождении внутреннего магнитного поля $\mathbf{H}_s$ в общем случае рассматривается в [5]. Уравнения для внутреннего магнитного поля в подвижной системе координат K'' имеют вид [5]

$$\mathrm{rot}\,\langle \mathbf{h}''\rangle_\Sigma = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\langle \mathbf{d}''\rangle_\Sigma}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,\langle \mathbf{j}^{*\prime\prime}{}_m\rangle_\Sigma, \quad \mathrm{div}\langle \mathbf{b}''\rangle_\Sigma = 0. \tag{7}$$

Предполагаем, что в собственной системе K'' намагниченность отсутствует, $\langle \mathbf{m}''\rangle_\Sigma = 0$, тогда $\langle \mathbf{h}''\rangle_\Sigma = \langle \mathbf{b}''\rangle_\Sigma$. Взяв rot от обеих частей первого уравнения (7) и учитывая, что для двойного слоя $|\langle \mathbf{e}\rangle_\Sigma| \gg \gg |\langle \mathbf{p}_m\rangle_\Sigma|$, в силу чего $\langle \mathbf{d}''\rangle_\Sigma$ можно заменить на $\langle \mathbf{e}''\rangle_\Sigma$, находим, что $\triangle\langle \mathbf{b}''\rangle_\Sigma = 0$ и $\triangle\langle \mathbf{h}''\rangle_\Sigma = 0$ внутри слоя. При этом сделано предположение о структуре слоя: токи $\langle \mathbf{j}^{*\prime\prime}{}_m\rangle_\Sigma$ сосредоточены на поверхностях Σ_1, Σ_2. Из гармоничности $\langle \mathbf{h}''\rangle_\Sigma$ и $\langle \mathbf{b}''\rangle_\Sigma$ внутри слоя следует

$$B''_{ns} = (B''_{n1} + B''_{n2})/2; \quad H''_{\alpha s}/2\lambda = [H''_{\alpha 1} + H''_{\alpha 2} + (4\pi/c)\varepsilon_{\gamma\alpha}(j_{s1}{}^{\gamma} - j_{s2}{}^{\gamma})]/2, \tag{8}$$

где $j_{s1}{}^{\gamma}$, $j_{s2}{}^{\gamma}$ — токи на поверхностях Σ_1, Σ_2. При выводе (8) учтено, что $\langle b''_n\rangle_\Sigma$ непрерывна на Σ_1 и Σ_2, а $\langle h''_\alpha\rangle_\Sigma$ испытывает разрывы, связанные с поверхностными токами $\mathbf{j}_{s1}$ и $\mathbf{j}_{s2}$ на Σ_1, Σ_2. Переход от системы K'' к K', движущейся со скоростью $\mathbf{v}_{ns}$, осуществляется по формулам

$$\mathbf{H}''_s = \mathbf{H}'_s - (1/c)\mathbf{v}_{\tau s}\times\mathbf{D}_s, \quad \mathbf{H}'' = \mathbf{H}' - (1/c)\mathbf{v}_{\tau s}\times\mathbf{D}.$$

Отметим, что из условия $\langle \mathbf{m}''\rangle_\Sigma = 0$ следует $\mathbf{M}_s = -(1/c)\mathbf{v}_s\times\mathbf{P}_s$.

Для поляризующегося поверхностного континуума при отсутствии простого и двойного электрического слоя, а также поверхностных разрывов величин граничные условия для электрического поля [4] принимают вид

$$\{\mathbf{E}_\tau\} = -4\pi\nabla_s P_{ns}, \quad \{D_n\} = -4\pi\nabla_\alpha P_s{}^{\alpha}, \tag{9}$$

где $\mathbf{P}_s = P_{ns}\mathbf{n} + P_s{}^{\alpha}\mathbf{e}_\alpha$ — поверхностная поляризация.

Рассмотрим два частных случая. В случае $P_{ns} \neq 0$, $P_{\alpha s}=0$ (т. е. двойной слой из связанных зарядов) аналогично предыдущему находим $E_{\alpha s}=(E_{\alpha 1}+E_{\alpha 2})/2$, а также $E_{ns}=-4\pi P_{ns}/2\lambda$. Последнее равенство следует из того, что $D_{ns}=2\lambda E_{ns}+4\pi P_{ns} \to 0$ при $\lambda \to 0$, поскольку $\langle d_n \rangle_\Sigma$ непрерывна на Σ_1, Σ_2, что означает конечность величины $D_{ns}/2\lambda$ при $\lambda \to 0$ в связи с конечностью величины D_n в объемных фазах *1* и *2*. Окончательно находим $D_{ns}/2\lambda=D_{n1}=D_{n2}$. Второе условие (9) принимает в этом случае вид $\{D_n\}=0$, а первое остается без изменения.

Магнитное поле находится аналогично предыдущему и имеет вид

$$B''_{ns}=(B''_{n1}+B''_{n2})/2; \quad H''_{\alpha s}/2\lambda=(H''_{\alpha 1}+H''_{\alpha 2})/2; \quad H''_{ns}=0 \qquad (10)$$

при тех же предположениях, что и в формулах (8).

В случае $P_{ns}=0$, $P_{\alpha s} \neq 0$ нет двойного слоя связанных зарядов, поэтому электрический потенциал непрерывен $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_s$ при $\lambda \to 0$. Отсюда следует $E_{\alpha 1}=E_{\alpha 2}=E_{\alpha s}$. Первое условие (9) принимает в этом случае вид $\{\mathbf{E}_\tau\}=0$, а второе остается без изменения.

При тех же предположениях, что и в формуле (6), находим $D_{ns}/2\lambda=(D_{n1}+D_{n2})/2$. Магнитное поле внутри слоя находится по формулам (10).

Уравнения движения поверхностного (двухмерного) континуума в перечисленных выше случаях получаются из общих уравнений движения, приведенных в работах [2, 3], подстановкой в них полученных здесь выражений для внутренних полей. При этом необходимо отметить следующее обстоятельство. Например, в случае двойного электрического слоя тождество Гиббса записывается в виде [3]

$$\mathrm{d}\rho_s U_s{}^m=T_s \mathrm{d}\rho_s S_s{}^m+\sum_{k=1}^{N} \xi_{sk} \mathrm{d}\rho_{sk}+(1/4\pi) E_{ns} \mathrm{d}D_{ns}.$$

Если подставить сюда вместо E_{ns} и D_{ns} полученные выше значения $E_{ns}=-\Delta\varphi/2\lambda$ и $D_{ns}/2\lambda=4\pi\sigma$, будем иметь

$$\mathrm{d}\rho_s U_s{}^m=T_s \mathrm{d}\rho_s S_s{}^m+\sum_{k=1}^{N} \xi_{sk} \mathrm{d}\rho_{sk}-\Delta\varphi \mathrm{d}\sigma.$$

Таким образом, фактически внутренние поля E_{ns}, D_{ns} окончательно не вошли в тождество Гиббса. Нетрудно показать, что они не войдут и в уравнения движения, приведенные в [3]. Это относится, в частности, к двухмерному вектору Пойнтинга, имеющему в случае двойного электрического слоя вид $(c/4\pi)\varepsilon^{\alpha\beta} E_{ns} H'_{\alpha s}$, где $H'_{\alpha s}=H''_{\alpha s}+ +(1/c) v_s{}^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} D_{ns}$; здесь величина $H''_{\alpha s}$ берется из (8). Нетрудно видеть, что внутренние поля E_{ns} и $H'_{\alpha s}$ и здесь окончательно не войдут в выражение вектора Пойнтинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я.* Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980. 354 с.
2. *Тактаров Н. Г.* К гидродинамике межфазных слоев в намагничивающихся средах. — Магнитная гидродинамика, 1986, № 2, с. 73—78.
3. *Тактаров Н. Г.* Об одной модели двумерного поляризующегося континуума. — ДАН СССР, 1987, т. 292, № 2, с. 288—291.
4. *Тактаров Н. Г.* К обоснованию условий для электромагнитных величин на поверхности двумерных континуумов. — ДАН СССР, 1985, т. 280, № 5, с. 1079—1083.
5. *Тактаров Н. Г.* Некоторые вопросы построения моделей межфазных слоев в намагничивающихся и поляризующихся средах. — Магнитная гидродинамика, 1987, № 1, с. 137—140.
6. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1031 с.

Поступила 13 февраля 1987 г.