

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Проскурнина Ивана Андреевича
«Минимальные эквивариантные деформации»,
представленной на соискание учёной степени кандидата физико-
математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация И.А.Проскурнина посвящена вещественно-аналитическим морсификациям ростков функций на плоскости, имеющим минимальное число критических точек.

Морсификация ростка функции – это его деформация, все критические точки которой являются невырожденными (морсовскими). Вопрос о минимальном числе вещественных критических точек морсификации данного ростка является очень естественным, но даже в случае плоскости далёк от своего полного решения. Для ростка нулевого индекса на плоскости неконструктивный ответ был дан С.М.Гусейн-Заде – он доказал существование деформации, вообще не имеющей критических точек. Позже J.A.Gonzalez и I.Luengo предложили метод эффективного построения такой деформации в некоторых частных случаях. В общем виде задача о минимальном числе критических точек у морсификации данного ростка ставилась В.А.Васильевым и С.М.Гусейн-Заде.

В диссертации И.А.Проскурнина получены следующие новые результаты о минимальных вещественно-аналитических морсификациях ростков функций на плоскости.

- 1) Для ростка, множество уровня которого состоит только из гладких ветвей, доказано, что минимальное число критических точек в его морсификации равно модулю индекса его градиента. Предъявлена явная конструкция минимальной морсификации.
- 2) Для полуквазиоднородного ростка (т.е. с невырожденной главной квазиоднородной частью) доказано, что минимальное число критических точек в его морсификации равно модулю индекса его градиента. Предъявлена явная конструкция минимальной морсификации.
- 3) Для полуоднородного ростка (т.е. с невырожденной главной однородной частью), инвариантного относительно действия произвольной конечной группы, вычислено минимальное число критических точек у его инвариантной морсификации и предъявлена явная конструкция минимальной инвариантной морсификации. Оказывается, что для приводимого действия минимальное число критических точек равно модулю индекса градиента исходного ростка. В случае же неприводимого действия оно увеличивается на 2.

Первая глава диссертации является введением. В ней, в частности, изложена история рассматриваемых вопросов и сформулированы основные результаты.

Во второй главе конструктивно доказано существование минимальной деформации полуоднородного ростка векторного поля на плоскости, имеющей лишь невырожденные особые точки. Число последних равно модулю индекса исходного ростка. Этот результат является новым, представляет самостоятельный интерес и используется в дальнейшем.

В третьей главе доказываются существование минимальных морсификаций полуквазиоднородных ростков. Сначала доказываются существование таких морсификаций у квазиоднородных ростков. Оказывается, что тут есть два случая – «хороших» и «плохих» квазистепеней. (Производная любой функции «плохой» квазистепени является вырожденной.) А затем строятся минимальные морсификации полуквазиоднородных ростков.

В четвертой главе для ростков, множества нулей которых состоят из гладких ветвей, доказано существование минимальных морсификаций. При этом существенно используются результаты, полученные во второй главе.

Пятая глава посвящена деформациям эквивариантных ростков. В ней конструктивно доказано существование минимальной инвариантной морсификации для полуоднородных инвариантных ростков функций двух переменных. Кроме того, в ней доказаны теоремы о нормальных формах эквивариантных ростков (обобщающие на эквивариантный случай теорему Тужрона и лемму Морса с параметрами), а также найдена общая классификация особенностей, эквивариантно простых относительно неприводимого действия конечной группы.

В заключении перечислены основные результаты диссертации работы и возможные направления дальнейшего исследования.

Список литературы состоит из 44 наименований и включает 3 работы автора по теме представленной диссертации, опубликованные в рецензируемых изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ имени М.В.Ломоносова.

Считаю нужным высказать следующие замечания:

1) Доказательство теоремы 6 на стр. 31 предшествует её формулировке и заканчивается неясной фразой «Поэтому на самом деле мы доказываем следующую теорему». Это обстоятельство затрудняет понимание доказательства теоремы 2 о полуквазиоднородных ростках (одного из основных результатов диссертации).

2) Лемма 5 на стр. 33 сформулирована неточно – из-за пропущенного условия вещественности всех ветвей она вообще неверна.

3) Доказательство (стр. 77 и далее) одного из основных результатов диссертации о минимальных инвариантных морсификациях (случай приводимого действия конечной группы) скомкано и содержит отсылку к предыдущей главе, предлагающую читателю самостоятельно применить изложенную в ней конструкцию.

Эти замечания не влияют на достоверность результатов диссертации и на её общую положительную оценку. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно, являются новыми и актуальными. Они строго доказаны, опубликованы в трёх рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ имени М.В.Ломоносова, а также докладывались и обсуждались на различных математических семинарах и конференциях. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Проскурнина Ивана Андреевича «Минимальные эквивариантные деформации» соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология (физико-математические науки).

Доктор физико-математических наук,
Профессор механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

И.А.Богаевский

06.10.2021

Подпись И.А.Богаевского заверяю.

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
член-корреспондент РАН



А.И.Шафаревич

07.10.2021