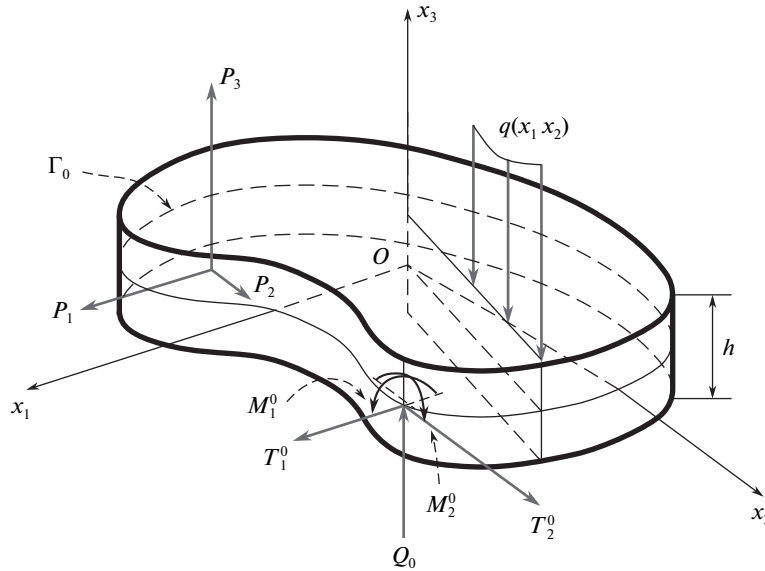


НОВАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ

Рассматривается задача о равновесии неоднородного анизотропного упругого слоя. Классическая постановка задачи в перемещениях состоит из трех дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами относительно трех перемещений и из трех граничных условий, заданных в каждой точке граничной поверхности. Иногда вместо постановки в перемещениях удобно принять классическую постановку задачи в напряжениях [1], или же новую постановку задачи в напряжениях, предложенную Б.Е. Победрей [2]. При постановке в напряжениях необходимо найти шесть компонент тензора напряжений, являющихся функциями трех координат. Какую постановку выбрать, зависит от исследователя и, конечно, от конкретной задачи. Наличие нескольких постановок расширяет возможности выбора метода решения задачи. В настоящей работе для слоя с плоскими граничными поверхностями предлагается новая постановка задачи, которую в отличие от двух других, обозначенных выше, можно назвать смешанной постановкой. Задача для слоя в новой постановке состоит из системы трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех компонент вектора перемещений точек срединной плоскости. Эта система связана с тремя интегро-дифференциальными уравнениями для трех продольных компонент тензора напряжений. Таким образом, в новой постановке, так же как и в других постановках в напряжениях, нужно найти шесть функций. Три из этих функций являются функциями двух координат (перемещения точек срединной плоскости), а другие три — функциями трех координат (три продольные компоненты тензора напряжений). Показано, что все уравнения новой постановки являются уравнениями Эйлера для функционала Рейсснера с дополнительными ограничениями. После того как решена задача в новой постановке, находятся три компоненты вектора перемещений и три поперечные компоненты тензора напряжений в каждой точке слоя. Новая постановка будет полезна при построении различных инженерных теорий пластинок из композиционных материалов.

Ключевые слова: теория упругости, механика композитов, постановка задач, упругий слой, теория пластин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тело, ограниченное двумя плоскими, параллельными лицевыми поверхностями и боковой поверхностью Σ_b . Боковая поверхность может быть построена при движении отрезка, нормального к срединной плоскости, вдоль контура Γ_0 , ограничивающего срединную плоскость Σ_0 тела. Пусть h толщина пластины, а L — характерный размер срединной плоскости. Предполагаем, что $h/L \leq 1$ и будем называть такое тело слоем. Слой находится в равновесии под действием нормальной нагрузки q , распределенной на одной лицевой поверхности (верхней) и на-



грузки $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ на боковой поверхности (фигура). Материал слоя анизотропный, неоднородный и при заданных нагрузках подчиняется обобщенному закону Гука. Введем декартову систему координат $(Ox_1x_2x_3)$. Начало O системы координат расположим в срединной плоскости пластины, а ось x_3 направим по нормали к ней. Обозначим через σ_{ij} , ε_{ij} , u_i компоненты тензоров напряжений, малых деформаций и вектора перемещений. Индексы из малых латинских букв принимают значения 1, 2, 3, а из больших – 1, 2. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование в соответствующих пределах. Индекс после запятой обозначает производную по координате соответствующей значению индекса.

При записи формул будем особо выделять индекс 3. В постановку задачи в перемещениях входят уравнения равновесия, закон Гука и соотношения Коши

$$\sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} = 0, \quad \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijKL}\varepsilon_{KL} + 2C_{ijK3}\varepsilon_{K3} + C_{ij33}\varepsilon_{33} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3}; \quad \varepsilon_{I3} = 1/2(u_{I,3} + u_{3,I}); \quad \varepsilon_{IJ} = 1/2(u_{I,J} + u_{J,I})\Delta_{IJKL}u_{K,L} \quad (1.3)$$

где C_{ijkl} – компоненты тензора модулей упругости материала слоя, имеющего в общем случае анизотропии 21 независимую компоненту. Предполагается, что они являются интегрируемыми функциями координат x_1, x_2, x_3 .

На лицевых поверхностях поперечные напряжения σ_{i3} должны удовлетворять точным граничным условиям

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, -h/2) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, h/2) = -q(x_1, x_2) \quad (1.4)$$

Граничные условия на боковой поверхности имеют вид:

$$\sigma_{IJ}n_J|_{\Sigma_b} = P_I, \quad \sigma_{3J}n_J|_{\Sigma_b} = P_3 \quad (1.5)$$

Распределенные на боковой поверхности нагрузки статически эквивалентны силам T_1^0, T_2^0, Q^0 и моментам M_1^0, M_2^0 относительно координатных осей x_2 и x_1 , распределенным вдоль граничного контура Γ_0 срединной плоскости Σ_0

$$T_I^0 \equiv \int_{-h/2}^{h/2} P_I dx_3, \quad Q_0 \equiv \int_{-h/2}^{h/2} P_3 dx_3, \quad M_I^0 \equiv \int_{-h/2}^{h/2} x_3 P_I dx_3 \quad (1.6)$$

При постановке задачи в напряжениях вместо прямого закона Гука (1.2) и соотношений Коши (1.3) используется обратный закон Гука и условия совместности деформаций

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma_{kl} J_{ijkl} \sigma_{KL} + 2J_{ijK3} \sigma_{K3} + J_{ij33} \sigma_{33} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{IJ,33} - 2\Delta_{IJKL} \varepsilon_{K3,L3} + \varepsilon_{33,IJ} = 0; \quad \epsilon_{JL}(\varepsilon_{IJ,3L} - \varepsilon_{3J,IL}) = 0; \quad \epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \varepsilon_{IJ,KL} = 0 \quad (1.8)$$

где J_{ijkl} — компоненты тензора податливостей, обратного к тензору модулей упругости, ϵ_{IJ} — двумерные символы Леви—Чивиты [3].

2. Сведение задачи теории упругости для слоя к системе интегродифференциальных уравнений. Интегрируя уравнения равновесия (1.1) трехмерной теории упругости по толщине пластины, выразим три поперечные напряжения σ_{i3} через три продольные напряжения σ_{IJ} :

$$\sigma_{I3} = - \int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{IJ,J} dx_3 \equiv -\sigma_{IJ,J}^{(-1)}; \quad \sigma_{33} = - \int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{3I,I} dx_3 = \sigma_{IJ,IJ}^{(-2)} \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем $\phi^{(-n)}$ обозначает n -кратный интеграл в пределах от $-h/2$ до x_3 . Напряжения σ_{i3} , представленные формулами (2.1), очевидно, удовлетворяют граничным условиям на нижней лицевой поверхности слоя $x_3 = -h/2$. Эти же выражения будут удовлетворять граничным условиям на другой лицевой поверхности, если только продольные усилия T_{IJ} и изгибающие моменты M_{IJ} подчиняются уравнениям:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,IJ} = q \quad (2.2)$$

$$T_{IJ} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ} dx_3, \quad M_{IJ} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{IJ} dx_3 \quad (2.3)$$

Поперечные силы Q_1 и Q_2 , действующие в сечениях перпендикулярных осям x_1 и x_2 , выражаются в общем случае через производные от продольных сил и изгибающих моментов:

$$Q_I \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3I} dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} dx_3 \int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{IJ,J} dx_3 - \frac{h}{2} T_{IJ,J} + M_{IJ,IJ} = M_{IJ,IJ} \quad (2.4)$$

Три уравнения (2.2) являются уравнениями равновесия элемента срединной плоскости в классической теории пластинок [4]. Они получены из формул (2.1) при $x_3 = h/2$, т.е. уравнения (2.2) являются необходимыми условиями, при выполнении которых напряжения σ_{i3} будут удовлетворять всем граничным условиям на лицевых сторонах слоя.

Проинтегрируем по x_3 первые два выражения из шести соотношений Коши (1.3) и выразим перемещения u_i через поперечные деформации ε_{i3}

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) + \varepsilon_{33}^{(\bar{1})}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.5)$$

$$u_I(x_1, x_2, x_3) = v_I(x_1, x_2) - x_3 w_{,I}(x_1, x_2) + 2\varepsilon_{I3}^{(\bar{1})}(x_1, x_2, x_3) - \varepsilon_{33,I}^{(\bar{2})}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.6)$$

Здесь и в дальнейшем $\varphi^{(\bar{n})}$ обозначает n -кратный интеграл в пределах от 0 до x_3 . В формулах (2.6) произвольные функции $v_I(x_1, x_2)$ и $w(x_1, x_2)$, появившиеся вследствие интегрирования по x_3 соотношений Коши, по сути дела, продольные и поперечное перемещения точек срединной плоскости слоя. Поперечное перемещение w называют также прогибом слоя. По перемещениям (2.6) найдем деформации ε_{IJ}

$$\varepsilon_{IJ} = e_{IJ} + x_3 \kappa_{IJ} + 2\Delta_{IJPQ} \varepsilon_{P3,Q}^{(-\bar{1})} - \varepsilon_{33,IJ}^{(-\bar{2})} \quad (2.7)$$

где

$$e_{IJ} = (v_{I,J} + v_{J,I})/2, \quad (2.8)$$

$$\kappa_{IJ} = -w_{,IJ} \quad (2.9)$$

есть деформации срединной плоскости и кривизна срединной плоскости после ее изгиба.

Подставим выражения (2.7) в условия совместности (1.8) трехмерной задачи. Первые два из них удовлетворятся тождественно, а третье условие будет выполнено, если $\varepsilon_{IK} \varepsilon_{JL} e_{IJ,KL} = 0$ и $\kappa_{I1,2} = \kappa_{J2,1}$. Первое из этих уравнений является условием совместности деформаций срединной плоскости, выполнение которого необходимо для однозначного нахождения двух продольных перемещений $v_I(x_1, x_2)$ из трех дифференциальных уравнений. Второе выражение дает два условия на кривизны срединной поверхности, при выполнении которых из трех уравнений однозначно находится прогиб $w(x_1, x_2)$ слоя.

По обратному закону Гука (1.7) найдем деформации ε_{IJ} и приравняем их к выражениям (2.7):

$$J_{IJKL} \sigma_{KL} - 2J_{IJK3} \sigma_{KL,L}^{(-1)} + J_{IJ33} \sigma_{KL,KL}^{(-2)} e_{IJ} + x_3 \kappa_{IJ} + 2\Delta_{IJPQ} \varepsilon_{P3,Q}^{(-\bar{1})} - \varepsilon_{33,IJ}^{(-\bar{2})} \quad (2.10)$$

Выразим отсюда напряжения σ_{IJ} и учтем, что согласно (1.7) и (2.1)

$$\varepsilon_{i3} = J_{i3KL} \sigma_{KL} - 2J_{i3K3} \sigma_{KL,L}^{(-1)} + J_{i333} \sigma_{KL,KL}^{(-2)}, \quad (2.11)$$

В результате получим интегродифференциальное уравнение для продольных напряжений

$$\sigma_{IJ} = J_{IJKL}^{-1} e_{KL} + x_3 J_{IJKL}^{-1} \kappa_{KL} - \mathbb{L} \sigma_{IJ} \quad (2.12)$$

где J_{IJKL}^{-1} — компоненты матрицы, обратной к матрице с компонентами J_{IJKL} ; $\mathbb{L}$ — интегро-дифференциальный оператор, который применяется к симметричному тензору второго ранга σ_{IJ} по правилу

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \sigma_{IJ} = & \left\{ J_{IJKL}^{-1} - 2J_{KLP3} \sigma_{PQ,Q}^{(-1)} + J_{KL33} \sigma_{PQ,PQ}^{(-2)} - \right. \\ & - 2\Delta_{KLST} \left[J_{S3PQ} \sigma_{PQ} - 2J_{S3P3} \sigma_{PQ,Q}^{(-1)} + J_{S333} \sigma_{PQ,PQ}^{(-2)} \right]_{,T}^{(-\bar{1})} + \\ & \left. + \left[J_{33PQ} \sigma_{PQ} - 2J_{33P3} \sigma_{PQ,Q}^{(-1)} + J_{3333} \sigma_{PQ,PQ}^{(-2)} \right]_{,KL}^{(-\bar{2})} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Некоторые свойства оператора $\mathbb{L}$ изучены в работе [5]. По формулам (2.3) и (2.13) найдем продольные усилия T_{IJ} и изгибающие моменты M_{IJ}

$$\begin{cases} T_{IJ} = A_{IJKL}e_{KL} + B_{IJKL}\kappa_{KL} - h\langle \mathbb{L}\sigma_{IJ} \rangle \\ M_{IJ} = B_{IJKL}e_{KL} + D_{IJKL}\kappa_{KL} - h\langle x_3\mathbb{L}\sigma_{IJ} \rangle \end{cases} \quad (2.14)$$

Величины $A_{IJKL}(x_1, x_2)$, $B_{IJKL}(x_1, x_2)$, $D_{IJKL}(x_1, x_2)$ в соотношениях (2.14) обозначают продольные жесткости, жесткости взаимного влияния и изгибные жесткости срединной поверхности, которые выражаются через интегралы по толщине слоя от компонент J_{IJKL}^{-1} :

$$A_{IJKL} \equiv h\langle J_{IJKL}^{-1} \rangle, \quad B_{IJKL} \equiv h\langle x_3 J_{IJKL}^{-1} \rangle, \quad D_{IJKL} \equiv h\langle x_3^2 J_{IJKL}^{-1} \rangle \quad (2.15)$$

Угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине слоя. Таким образом, вместо исходных пятнадцати уравнений (1.1)–(1.3) относительно пятнадцати неизвестных получено 18 уравнений (2.2), (2.8), (2.9), (2.12) и (2.14), относительно 18 неизвестных T_{IJ} , M_{IJ} , σ_{IJ} , e_{IJ} , κ_{IJ} , v_I и w .

Эти уравнения легко сводятся к системе из трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех перемещений точек срединной плоскости. Эта система связана с системой из трех интегродифференциальных уравнений для трех продольных компонент тензора напряжений.

$$\begin{aligned} (A_{IJKL}v_{K,L} - B_{IJKL}w_{,KL} - h\langle \mathbb{L}\sigma_{IJ} \rangle)_{,J} &= 0 \\ (B_{IJKL}v_{K,L} - D_{IJKL}w_{,KL} - h\langle x_3\mathbb{L}\sigma_{IJ} \rangle)_{,IJ} &= q \\ \sigma_{IJ} &= J_{IJKL}^{-1}v_{K,L} - x_3 J_{IJKL}^{-1}w_{,KL} - \mathbb{L}\sigma_{IJ} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из граничных условий (1.4), (1.5) остаются только условия на боковой поверхности слоя, которые, с учетом формулы, (2.1) примут вид:

$$\sigma_{IJ}n_I|_{\Sigma_b} = P_J, \quad \sigma_{IJ,J}n_I|_{\Sigma_b} = -P_3 \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16), (2.17) представляют собой уравнения новой постановки в перемещениях задачи теории упругости для слоя. Осталось сформулировать граничные условия для перемещений точек срединной плоскости. Для этого построим функционал, для которого уравнения (2.16), (2.17) являются уравнениями Эйлера. При выводе уравнений (2.16), (2.17) из функционала попутно получим естественные и основные [6, с. 216] граничные условия на контуре срединной плоскости.

3. Вывод уравнений теории упругости для слоя в новой постановке из вариационного принципа. Для решения поставленной задачи воспользуемся вариационным принципом и функционалом Рейсснера [1, с. 132.]. При дополнительных предварительных условиях из общего функционала Рейсснера можно находить вариационные принципы частного характера, в которых функционалы зависят от меньшего числа варьируемых параметров [7, с. 267]. Функционал Рейсснера для слоя, при выбранных нагрузках, примет вид:

$$R = \int_V W_\varepsilon dV - \int_V \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - \Delta_{ijkl}u_{k,l})dV + \int_{\Sigma_+} qu_3 d\Sigma - \int_{\Sigma_b} P_i u_i d\Sigma, \quad (3.1)$$

где W_ε — плотность потенциальной энергии деформации [8, с. 52], выраженная через компоненты тензора деформаций. В функционале R варьируемыми величинами явля-

ются напряжения $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$, деформации $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ и перемещения $u_i(x_1, x_2, x_3)$. В качестве предварительных условий примем выражения (2.1) для поперечных напряжений и первые два выражения из соотношений Коши (1.3), которые позволяют по формулам (2.5), (2.6) найти перемещения u_i точек слоя. После подстановки перемещений (2.5), (2.6) в формулу (3.1) вместо общего функционала R получим частный функционал

$$\begin{aligned} R_* = & \int_V W_\varepsilon dV - \int_V \sigma_{IJ} \left[\varepsilon_{IJ} - \left(e_{IJ} + x_3 \varepsilon_{IJ} + 2\Delta_{IJPQ} \varepsilon_{P3,Q}^{(-1)} - \varepsilon_{33,IJ}^{(-2)} \right) \right] dV + \\ & + \int_{\Sigma_0} q \left(w + \frac{h}{2} \leq \varepsilon_{33} \right) d\Sigma - \int_{\Sigma_b} P_I \left(v_I - x_3 w_{,I} + 2\varepsilon_{I3}^{(-1)} - \varepsilon_{33,I}^{(-2)} \right) d\Sigma - \\ & - \int_{\Sigma_b} P_3 \left(w + \varepsilon_{33}^{(-1)} \right) d\Sigma, \quad \leq f \equiv \frac{1}{h/2} \int_0^{h/2} f(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В функционале R_* варьируемыми величинами являются продольные напряжения $\sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)$, все компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, продольные перемещения $v_I(x_1, x_2)$ и прогиб срединной плоскости $w(x_1, x_2)$. Величины e_{IJ} и ε_{IJ} выражаются через v_I и w по формулам (2.8), (2.9). Варьируя функционал R_* получаем $\delta R_* = \delta R_0 + \delta R_\sigma + \delta R_\varepsilon$, где δR_0 – вклад в вариацию функционала от варьирования перемещений точек срединной плоскости, δR_σ – вклад в вариацию функционала от варьирования продольных напряжений σ_{IJ} , δR_ε – вклад в вариацию функционала от варьирования компонент тензора деформаций. После несложных, но довольно громоздких преобразований получим следующие выражения для вариаций

$$\begin{aligned} \delta R_0 = & - \int_{\Sigma_0} [T_{IJ,J} \delta v_I + (M_{IJ,I} + q) \delta w] d\Sigma + \\ & + \int_{\Gamma_0} \left[(T_{IJ} n_J - T_I^0) \delta v_I + (V - V_0) \delta w - (M_n - M_n^0) \delta \frac{dw}{dn} \right] d\Gamma; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\delta R_\sigma = \int_V \delta \sigma_{IJ} \left[\varepsilon_{IJ} - \left(e_{IJ} + x_3 \varepsilon_{IJ} + 2\Delta_{IJPQ} \varepsilon_{P3,Q}^{(-1)} - \varepsilon_{33,IJ}^{(-2)} \right) \right] dV \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \delta R_\varepsilon = & \int_V \left(\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \varepsilon_{ij} dV - \\ & - h \int_{\Sigma_0} \left[T_{IJ,J} \leq \delta \varepsilon_{I3} \geq + \frac{1}{2} (M_{IJ,I} + q) \leq \delta \varepsilon_{33} \geq + \frac{1}{2} T_{IJ,I} \leq x_3 \delta \varepsilon_{33} \geq \right] d\Sigma + \\ & + \frac{h}{2} \int_{\Gamma_0} \left[(V - V_0) \leq \delta \varepsilon_{33} \geq - (M_n - M_n^0) \delta \frac{d \leq \varepsilon_{33} \geq}{dn} \right] d\Gamma - \\ & - \int_{\Sigma_b} \left[2(\sigma_{IJ} n_J - P_I)^{(-1)} \delta \varepsilon_{I3} + (\sigma_{IJ} n_J - P_I)^{(-2)} \delta \varepsilon_{33,I} - \left(\sigma_{IJ,J} n_I + P_3 \right)^{(-1)} \delta \varepsilon_{33} \right] d\Sigma \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$M_n^0 \equiv M_{IJ}^0 n_J, \quad H_0 \equiv \varepsilon_{KI} M_I^0 n_K, \quad V_0 \equiv Q_0 + dH_0/ds, \quad (3.6)$$

где s — длина дуги контура, ограничивающего срединную поверхность; T_I^0 , Q^0 и M_I^0 — заданные на Γ_0 силы и моменты, определяемые по формулам (1.6) через распределенные на Σ_b нагрузки P_i . Момент внешних сил P_1 и P_2 относительно касательной к контуру Γ_0 обозначен через M_n^0 . Этот момент приводит к повороту нормального к Σ_0 на граничном контуре волокна на угол $dw/dn = w_{,I}n_I$ вокруг касательной к контуру Γ_0 . Величина V_0 не имеет явного физического смысла и ее можно назвать приведенной поперечной силой. Величины M_n и V имеют вид [9]:

$$M_n \equiv M_{IJ}n_I n_J, V \equiv M_{IJ,J}n_I + \frac{dH}{ds} = Q_I n_I + \frac{dH}{ds}, H \equiv \varepsilon_{kl} M_{IJ}n_J n_k \quad (3.7)$$

Поскольку каждое из слагаемых в выражении для δR_* зависит от вариаций своей группы независимых параметров, $\delta R_* = 0$ только в том случае, когда все слагаемые обращаются в нуль, т.е. $\delta R_0 = 0$, $\delta R_\sigma = 0$ и $\delta R_\varepsilon = 0$.

Приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях δv_I , δw и $\delta dw/dn$ в выражении (3.3), получим уравнения (3.8) для усилий и изгибающих моментов в срединной плоскости, а также граничные условия (3.9) для них.

Величина $\delta R_\sigma = 0$ обратится в нуль, если равен нулю коэффициент при $\delta \sigma_{IJ}$ в выражении (3.4). Отсюда следует формула (3.10), по которой находятся продольные деформации ε_{IJ} через поперечные деформации ε_{i3} , деформации e_{IJ} и кривизны κ_{IJ} срединной поверхности.

Приравнявая нулю вариацию функционала δR_ε , получим формулу (3.11), по которой напряжения выражаются через потенциал деформаций, а также граничные условия (3.12) на боковой поверхности слоя.

Итак $\delta R_* = 0$, если выполняются следующие уравнения:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,IJ} + q = 0; \quad (3.8)$$

$$T_{IJ}n_J|_{\Gamma_0} = T_I^0, \quad V|_{\Gamma_0} = V_0, \quad M_n|_{\Gamma_0} = M_n^0; \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{IJ} = e_{IJ} + x_3 \kappa_{IJ} + 2\Delta_{IJPQ} \varepsilon_{P3,Q}^{(-1)} - \varepsilon_{33,IJ}^{(-2)}; \quad (3.10)$$

$$\sigma_{ij} = \partial W_\varepsilon / \partial \varepsilon_{ij}; \quad (3.11)$$

$$\sigma_{IJ}n_J|_{\Sigma_b} = P_I, \quad \sigma_{IJ,J}n_I|_{\Sigma_b} = -P_3 \quad (3.12)$$

В упругом случае

$$W_\varepsilon = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} / 2 \Rightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = J_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.13)$$

Отсюда, и из формулы (3.10) и соотношений (2.1) получается интегродифференциальное уравнение (2.12), затем из него следуют соотношения (2.14), которые нужно подставить в уравнения (3.8). В итоге приходим к системе (2.16) трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех перемещений точек срединной плоскости. Эта система связана с тремя интегро-дифференциальными уравнениями для трех продольных компонент тензора напряжений σ_{IJ} .

Статические (естественные) граничные условия на контуре срединной плоскости и на боковой поверхности слоя задаются формулами (3.9) и (3.12). При этом правые части в условиях (3.9) определяются через распределенные по Σ_b реальные нагрузки P_i .

Функционал δR_* обращается в нуль также и в том случае, когда на контуре Γ_0 заданы кинематические (основные) граничные условия

$$\nu_i|_{\Gamma_0} = \nu_i^0, \quad w|_{\Gamma_0} = w_0, \quad \frac{dw}{dn}|_{\Gamma_0} = \vartheta^0; \quad u_i|_{\Sigma_b} = u_i^0 \quad (3.14)$$

Возможны и другие комбинации граничных условий, обращающих в нуль функционал δR_* . Важно, что на контуре Γ_0 должны быть заданы четыре условия, а на боковой поверхности Σ_b – три.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Победря Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Ташкент: ФАН, 1988. 192 с.
3. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 223 с.
4. *Зубчанников В.Г.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. школа, 1990. 368 с.
5. *Горбачев В.И., Симаков В.А.* Оперторный метод решения задач о равновесии упругой, неоднородной, анизотропной полосы // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 55–64.
6. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
8. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
9. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Лекции по теории упругости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 205 с.

Москва
E-mail: vigorby@mail.ru

Поступила в редакцию 20.08.2010