ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Сергея Александровича Корнеева «О сложности реализации систем одночленов схемами композиции», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

Теория синтеза управляющих систем является обширной областью математической кибернетики. В рамках этой теории традиционно рассматриваются вопросы имплементируемости и сложности реализации систем функций схемами из некоторого класса управляющих систем, определяющего модель вычислений. Обычно при этом вводятся функционалы сложности схем, позволяющие устанавливать сложность каждой схемы (относительно выбранного функционала), а сложность реализации системы функций понимается как минимальная сложность реализующей эту систему схемы. Для сложностной характеризации множества систем из одной функции удобно бывает ввести так называемую функцию Шеннона сложности (относительно выбранного функционала) реализации системы из данного множества в рассматриваемом классе управляющих систем, — функцию целого неотрицательного аргумента n, представляющую собой максимальную сложность реализации зависящей от n переменных системы из данного множества. За более чем 70 лет изучения функций Шеннона глубокие результаты по их оценке были получены десятками ученых, среди которых нельзя не упомянуть К. Э. Шеннона, О. Б. Лупанова, Д. Ю. Маллера, С. В. Яблонского, Л. А. Шоломова, С. А. Ложкина, О. М. Касим-Заде.

В диссертации С. А. Корнеева изучаются вопросы сложности реализации систем мономов (одночленов) схемами из функциональных элементов (СФЭ) в таких специальных базисах из элементов с не более чем двумя входами, которыми определяются следующие стандартные вычислительные модели:

а) схемы композиции (базис из элементов композиции мономов, по входным мономам U, V и «встроенному» моному R, показатель степени каждого аргумента которого не больше, чем минимум показателей степеней того же аргумента в U, V, вычисляющих моном UV/R),

б) классическая модель (базис содержит лишь элемент умножения мономов), в) схемы умножения-деления (базис содержит лишь элементы умножения и деления мономов),

г) модель вычисления элементов свободной абелевой группы (отличие от классической модели заключается в том, что на входы схем наряду с переменными могут подаваться обратные им величины),

д) λ-схемы (базис состоит из элементов умножения мономов и элементов возведения в любую рациональную степень из промежутка (1; 2]).

Понятие СФЭ здесь используется для удобства и вполне может быть замещено последовательностью базисных операций над мономами. Под сложностью реализации системы мономов понимается минимальное число элементов (базисных операций), необходимое для реализации этой системы мономов.

Отметим сразу же, что исследуемые в рассматриваемой диссертации вопросы имеют не только кибернетическое, но и общематематическое значение.

Историю исследований сложности порождения мономов можно возводить к 1939 году, когда в классической модели А. Брауэром была установлена асимптотика $\log_2 n$ сложности реализации монома x^n. Впоследствии Р. Беллман сформулировал задачу о сложности реализации монома от q переменных (*задача Беллмана*), а Д. Кнут сформулировал задачу о сложности реализации p степеней одной переменной (*задача Кнута*). Э. Г. Штраус установил в классической модели асимптотику сложности реализации одного произвольного монома при неограниченно растущей суммарной его степени (1964 г.), чем существенно продвинул решение задачи Беллмана. Э. Яо в 1976 г. получил схожий по формулировке результат для задачи Кнута. В обоих случаях оказалось, что асимптотика определяется максимальной степенью переменной и ведет себя как ее двоичный логарифм. В 1992–1994 гг. В. В. Кочергиным и С. Б. Гашковым асимптотики сложности для задач Беллмана и Кнута были найдены при растущих числе переменных и максимальной степени переменной. Н. Пиппенджер в 1980 г. сформулировал задачу о сложности реализации системы мономов (*задача Пиппенджера*) и фактически ввел функцию Шеннона для поставленной задачи как функцию трех аргументов p, q, K, представляющую собой наибольшую сложность реализации системы из p мономов q переменных, в которой каждый показатель степени переменной по абсолютной величине не превосходит K (абсолютная величина существенна в контексте схем умножения-деления и модели вычисления элементов свободной абелевой группы). Тогда же Н. Пиппенджером была найдена асимптотика роста этой функции Шеннона при неограниченном росте величины $pq \log_2 K$. В 2006–2009 гг. В. В. Кочергин доказал нетривиальную нижнюю оценку для общего случая задачи Пиппенджера, а также установил асимптотики в задаче Пиппенджера для случаев реализации p мономов двух переменных, двух мономов q переменных и трех мономов трех переменных. Все описанные выше результаты были получены в рамках классической модели. Схемы композиции в научный оборот были введены Ю. В. Мерекиным, установившим в 2003 г. в этой модели точное значение для задачи Беллмана (для аналогичной задачи Кнута также известно точное значение, но с трудно устанавливаемым авторством). Е. Н. Трусевич в 2014 г. фактически нашла точное значение для задачи Пиппенджера в случае реализации двух мономов двух переменных схемами композиции. В. В. Кочергин в 1993 и 2007 гг. установил при некоторых ограничениях асимптотики функций Шеннона для задачи Пиппенджера в случаях схем умножения-деления и модели вычисления элементов свободной абелевой группы соответственно.

Диссертационная работа С. А. Корнеева расширяет область известных методов и фактов о сложности решения задач порождения мономов. Основной моделью вычислений в диссертации являются схемы композиции, однако, ряд результатов получен и для иных моделей вычислений.

Рассматриваемая диссертация объемом в 124 страницы состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается общая характеристика работы: обосновывается актуальность темы диссертации, оценивается степень разработанности темы диссертации, формулируются цели и задачи исследования, доказывается научная новизна результатов диссертации, поясняется теоретическая и практическая значимость работы, кратко описываются методология и методы исследования, приводятся положения, выносимые на защиту, перечисляются связанные с апробацией работы мероприятия, указываются публикации автора по теме диссертации, фиксируется структура диссертации, излагается содержание работы, выражаются благодарности.

В первой главе «Основные определения и известные результаты», состоящей из пяти параграфов, вводятся используемые обозначения (параграф 1.1), определяются схемы композиции (параграф 1.2), описываются постановки задач и известные результаты (параграф 1.3), истолковываются классическая (параграф 1.4) и иные (параграф 1.5) модели вычисления систем мономов.

Вторая глава «Вычисление систем из двух одночленов» состоит из параграфов 2.1 и 2.2. В параграфе 2.1 приводится значительное количество вспомогательных утверждений (12 лемм и 5 утверждений), которые используются не только в данной главе, но — частично — и в последующих главах, и которые подводят читателя к доказательству основных результатов главы — двух точных формул из теорем 2.1 и 2.2 параграфа 2.2 для сложности вычисления произвольной системы из двух ненулевых (тождественно не равных единице) мономов, существенно зависящей в точности от q переменных. Вторая из этих формул явно показывает, что главный член асимптотического разложения сложности реализации такой системы мономов определяется некоторой подсистемой из двух мономов от двух переменных. В завершение главы несколько уточняется результат Е. Н. Трусевич.

Третья глава «Вычисление систем одночленов от двух переменных» состоит из четырех параграфов. В параграфе 3.1 приводится пример, демонстрирующий, что удаление любого одного монома может изменить асимптотику сложности вычисления системы мономов от двух переменных, что указывает на существенное отличие схем композиции от классической модели и схем умножения-деления, в которых асимптотика определяется некоторой подсистемой из двух мономов от двух переменных. В параграфе 3.2 приводятся 6 новых вспомогательных лемм. В параграфе 3.3 в теоремах 3.1 и 3.2 с точностью до слагаемого $2p - 3$ устанавливается значение сложности вычисления произвольной системы из p ненулевых мономов, существенно зависящей в точности от двух переменных. В параграфе 3.4 в теореме 3.3 точно устанавливается значение сложности вычисления произвольной системы из трех мономов, существенно зависящих в точности от двух переменных; в теореме же 3.4 вид формулы из теоремы 3.3 несколько упрощается, однако, новая формула допускает выбор точного значения из двух, отличающихся на 1.

Четвертая глава «Функции шенноновского типа для схем композиции и классической модели» состоит из двух параграфов. В главе вводятся функции шенноновского типа для задачи Пиппенджера — функции, аргументом которых является система мономов, равные максимальной сложности реализации произвольной системы мономов, мажорируемой данной системой. В параграфе 4.1 приводятся 6 вспомогательных лемм. В параграфе 4.2 на основании лемм из параграфа 4.1 при условии стремления к бесконечности суммы всех показателей степеней в системе мономов в теореме 4.1 отыскиваются с точностью до слагаемого порядка pq значения функций шенноновского типа для задачи Пиппенджера в случаях схем композиции и λ-схем, а в теореме 4.2 устанавливается при дополнительном условии ограниченности величины $p + q$ асимптотика функции шенноновского типа для задачи Пиппенджера в случае классической модели.

Пятая глава «Функция Шеннона» состоит из трех параграфов. В параграфе 5.1 доказываются верхние оценки, в параграфе 5.2 — нижняя оценка функции Шеннона для задачи Пиппенджера в случае схем композиции, в параграфе 5.3 доказывается теорема об асимптотическом поведении этой функции Шеннона.

В заключении описываются основные полученные в диссертации результаты и обсуждаются возможные перспективы дальнейшего развития предложенной соискателем теории.

Список литературы содержит 98 библиографических ссылок.

Характеризуя результаты диссертации в целом, следует отметить их новизну и сложность. Диссертант в своем изложении скрупулёзно следует аксиоматическому методу, строя весьма обширную иерархическую систему вспомогательных утверждений, образующих своего рода исчисление. Разработанные автором диссертации методы позволили установить ряд точных значений или асимптотик сложности на уровне индивидуального синтеза для задачи Пиппенджера в случае схем композиции, а также с высокой точностью (на асимптотическом уровне) оценить поведение некоторых функций Шеннона и функций шенноновского типа для задачи Пиппенджера. При доказательстве теорем соискателем были преодолены значительные трудности. Соискателю удалось обнаружить новые свойства и эффекты для схем композиции, например, неопределяемость в общем случае главного члена асимптотического разложения сложности вычисления системы мономов (из некоторой бесконечной последовательности) по некоторой редуцированной подсистеме. Все упомянутые результаты С. А. Корнеева в силу их фундаментальности представляют интерес не только для специалистов по синтезу управляющих систем, для специалистов по теории функциональных систем или для специалистов по теории алгоритмов, но, более того, для всех математиков. Материалы диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов, обучающихся в университетах по математическим специальностям.

Работа имеет ряд недочетов.

1. На странице 76 в строке 8 снизу вместо «лемму 1» должно быть «лемму 2.1».
2. На странице 82 в строке 9 снизу в формуле в левой части неравенства следовало бы добавить еще одни скобки, дабы избежать возможной двусмысленности.
3. Во включных формулах встречаются переносы без повтора знака последней операции в начале второй строки.
4. Первая часть леммы 4.1 повторяет лемму 2.1.
5. На странице 94 в строках 7–8 сверху следовало бы напомнить, что речь идет о ненулевых матрицах с целочисленными неотрицательными элементами.
6. На странице 95 в строках 10 и 8 снизу в формулах имеются лишние запятые.
7. Список литературы оформлен хотя и в едином стиле, однако, не по ГОСТу и с некоторым количеством опечаток.

Приведенные замечания имеют редакционный характер и никоим образом не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация является научно-квалификационной работой, представляющей собой цельное теоретическое исследование, в котором решены важные задачи, связанные со сложностью построения систем мономов и получены как оценки индивидуальной сложности, так и оценки соответствующих функций Шеннона и функций шенноновского типа.

Диссертация выполнена автором самостоятельно на высоком научном уровне. Результаты работы новы, достоверны и обоснованы.

Содержание автореферата соответствует содержанию диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах, из которых 4 — в изданиях, рекомендованных для защит в диссертационных советах МГУ имени М. В. Ломоносова.

Диссертация Корнеева Сергея Александровича на тему «О сложности реализации систем одночленов схемами композиции» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова. Ее содержание соответствует паспорту специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Диссертация оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Считаю, что соискатель, Сергей Александрович Корнеев, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки).

Официальный оппонент,
доцент кафедры математической
кибернетики факультета ВМК МГУ
имени М. В. Ломоносова, д. ф.-м. н. Д. С. Романов

17 декабря 2021 года

Контактные данные.
Имейл: romanov@cs.msu.ru, тел.: 8 (495) 939-17-72 (р.).
Специальность, по которой официальным оппонентом была защищена докторская диссертация: 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика (физико-математические науки).
Адрес места работы: 119234, Москва, Ленинские горы, дом 1, стр. 52, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, кафедра математической кибернетики.

Подпись Романова Дмитрия Сергеевича заверяю.

Декан факультета ВМК МГУ
имени М. В. Ломоносова,
академик РАН ов