Применение метода конечных элементов для расчёта эффективных харатеристик волокнистых композитов

Некрасов В.В., 3 курс, кафедра механики композитов

механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. Горбачёв В.И.

Постановка первой СКЗ для линейно упругого неоднородного тела.

Задача об эффективных модулях упругости

$$\sigma_{ij,j} = 0\,, \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}\,, \qquad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}u_{m,n}\,, \qquad x \in V \tag{1}$$

$$u_i\big|_{\Sigma} = \gamma_{ij}y_j\,, \qquad y \in \Sigma\,, \qquad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \text{const}. \tag{2}$$

сводится к системе

$$\left(C_{ijkl}u_{k,l}\right)_{,j} = 0 \tag{3}$$

В случае задачи (1), (2) $\langle \underset{\sim}{\varepsilon} \rangle = \underset{\sim}{\gamma}$ независимо от вида ОС.

Компоненты тензора напряжений линейно зависят от тензора $\underset{\sim}{\gamma}$.

$$\sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}(x)\gamma_{kl}\,, \tag{4}$$

где коэффициенты $\tilde{C}_{ijkl}(x)$ предстоит найти из решения первой СКЗ. Усредняя (4) по объёму тела найдем компоненты h_{ijkl} тензора эффективных модулей упругости

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle \gamma_{kl} = h_{ijkl}\langle \varepsilon_{kl} \rangle\,, \qquad h_{ijkl} \equiv \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle \tag{5}$$

Сведение исходной первой СКЗ к вспомогательной задаче. Структурные функции.

Решение исходной СКЗ будем искать в виде

$$u_i = v_i + \bar{u}_i(\underset{\sim}{\gamma})\,, \tag{6}$$

$$u_i(x) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl} \tag{7}$$

Граничные условия

$$N_{ikl}|_{\Sigma} = 0 \tag{8}$$

Из уравнений равновесия (3) получаем уравнения для N-функций

$$\left(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\right)_{,j}\gamma_{kl} = 0\,; \quad \Rightarrow \quad \left(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\right)_{,j} = 0 \tag{9}$$

Напряжения

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \left(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\right)\gamma_{kl} = \tilde{C}_{ijkl}(x)\gamma_{kl} \tag{10}$$

$$h_{ijkl} = \langle\tilde{C}_{ijkl}\rangle = \left\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\right\rangle \tag{11}$$

Сведение вспомогательной задачи к серии классических задач теории упругости.

Введем следующие обозначения:

$$u_i^{(kl)}(x) \equiv N_{ikl}(x) \quad \text{— фиктивные перемещения} \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(kl)}(x) = \Delta_{ijmn} u_{m,n}^{(kl)}(x) \quad \text{— фиктивные деформации} \tag{13}$$

$$\sigma_{ij}^{(kl)}(x) = C_{ijmn}(x)\varepsilon_{mn}^{(kl)}(x) \quad \text{— фиктивные напряжения} \tag{14}$$

$$X_i^{(kl)}(x) = C_{ijkl,j}(x) \quad \text{— фиктивные объёмные нагрузки} \tag{15}$$

Тогда постановка задачи для фиктивных перемещений

$$\left(C_{ijmn} u_{m,n}^{(kl)}\right)_{,j} + X_i^{(kl)} = 0\,, \qquad u_m^{(kl)}\Big|_\Sigma = 0 \tag{16}$$

По решениям фиктивных задач сразу можно найти

$$u_i(x) = \left[\Delta_{ijkl} x_j + u_i^{(kl)}(x)\right]\gamma_{kl} \tag{17}$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \left[\Delta_{ijkl} + \varepsilon_{ij}^{(kl)}(x)\right]\gamma_{kl} \tag{18}$$

$$\sigma_{ij}(x) = \left[C_{ijkl}(x) + \sigma_{ij}^{(kl)}(x)\right]\gamma_{kl} \tag{19}$$

$$\boxed{h_{ijkl} = \left\langle\, C_{ijkl}(x) + \sigma_{ij}^{(kl)}(x)\,\right\rangle} \tag{20}$$

Цилиндрическое тело, неоднородное в поперечном сечении. Волокнистый композит.

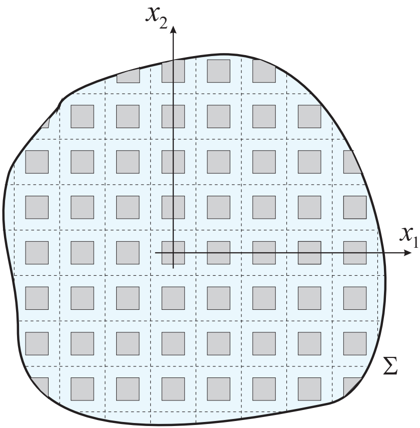


Рис. 1: Поперечное сечение стержня, армированного квадратными волокнами. Границы ячеек периодичности показаны штриховыми линиями.

Вспомогательная задача

$$\begin{gathered}\left(C_{iJkl} + C_{iJmS} N_{mkl,S}\right)_{,J} = 0 \\ N_{mkl}\big|_{\Sigma} = 0\end{gathered} \tag{21}$$

Выражения для фиктивных объёмных сил в случае кусочно-постоянных модулей

$$X_i = C_{ijkl,j} = \left(C^{+}_{iJkl} - C^{-}_{iJkl}\right) n_J \delta(\Gamma) \tag{22}$$

Интенсивность этих нагрузок равна

$$q_i = \left(C^{+}_{iJkl} - C^{-}_{iJkl}\right) n_J \tag{23}$$

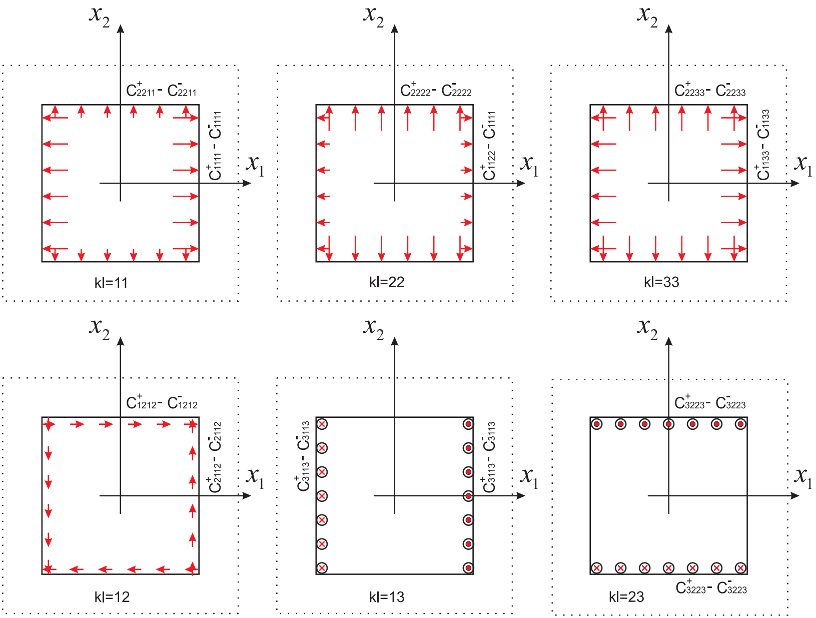


Рис. 2: Фиктивные нагрузки на контактной границе матрицы с волокном

Методика расчёта эффективных модулей упругости волокнистых композитов методом конечных элементов

Задача (21) эквивалентна задаче о минимизации функционала (в обозначениях (12)-(15)).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{iJmL}\, u_{m,L}\, u_{i,J}\, d\Omega - \int_{\Omega} X_i u_i\, d\Omega, \tag{24}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 2C_{1112} & 2C_{1113} & 2C_{1123} \\ & C_{2222} & 2C_{2212} & 2C_{2213} & 2C_{2223} \\ & & 2C_{1212} & 2C_{1213} & 2C_{1223} \\ & & & 2C_{1313} & 2C_{1323} \\ & & & & 2C_{2323} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Введём

$$\begin{gathered} [\varepsilon] = \{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}], \\ [\delta] = \{\delta\}^T = [u_1, u_2, u_3], \\ [X] = \{X\}^T = [X_1, X_2, X_3] \end{gathered} \tag{26}$$

Тогда матричная форма записи функционала (24)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon][C]\{\varepsilon\}\, d\Omega - \int_{\Omega} [\delta]\{X\}\, d\Omega \tag{27}$$

Методика расчёта эффективных модулей упругости волокнистых композитов методом конечных элементов

$$\mathcal{L} = \sum_{(e)} \mathcal{L}_{(e)}, \quad \mathcal{L}_{(e)} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{(e)}} [\varepsilon][C]\{\varepsilon\}\, d\Omega - \int\limits_{\Omega_{(e)}} [\delta]\{X\}\, d\Omega \tag{28}$$

$$u_k^{(e)}(x_1, x_2) = \sum_{q=1}^{Q_{(e)}} \Phi_{i_q}^{(e)}(x_1, x_2)\, v_k^{(i_q)}, \ (x_1, x_2) \in \Omega_{(e)}, \tag{29}$$

где $\Phi_{i_q}^{(e)}(x_1, x_2)$ — так называемые функции формы элемента. Выражение (29) можно представить в матричной форме

$$\{\delta^{(e)}\} = [\Phi^{(e)}]_{3\times 3Q_{(e)}} \cdot \{\mathrm{v}^{(e)}\}, \tag{30}$$

где

$$\begin{gathered}[\mathrm{v}^{(e)}] = [v_1^{(i_1)}, v_2^{(i_1)}, \ldots, v_1^{(i_{Q_e})}, v_2^{(i_{Q_e})}, \ v_3^{(i_1)}, \ldots, v_3^{(i_{Q_e})}], \\ [\delta^{(e)}] = [u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, u_3^{(e)}]\end{gathered} \tag{31}$$

По формулам Коши

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\,\{\mathrm{v}^{(e)}\} \tag{32}$$

Подставляя (30) и (32) в (28), найдём

$$\mathcal{L}_{(e)} = \frac{1}{2}[\mathrm{v}^{(e)}][K^{(e)}]\{\mathrm{v}^{(e)}\} - [\mathrm{v}^{(e)}]\{F^{(e)}\}, \tag{33}$$

где $[K^{(e)}]$ — матрица жесткости элемента

$$[K^{(e)}] = \int\limits_{\Omega_{(e)}} [B^{(e)}]^T [C][B^{(e)}]\, d\Omega, \tag{34}$$

а $\{F^{(e)}\}$ — вектор узловых нагрузок на элементе

$$[F^{(e)}] = \int\limits_{\Omega_{(e)}} [\Phi^{(e)}]^T \{X\}\, d\Omega, \tag{35}$$

Имеем выражение

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\mathrm{v}][K]\{\mathrm{v}\} - [\mathrm{v}]\{P\}, \tag{36}$$

где $[\mathrm{v}]$ — вектор-строка узловых перемещений

$$[\mathrm{v}] = [v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_1^{(Q)}, v_2^{(Q)},\ v_3^{(1)}, \dots, v_3^{(Q)}], \tag{37}$$

$[K]$ — глобальная матрица жесткости, а $\{P\}$ — вектор узловых нагрузок, полученный путём суммирования векторов (35)

$$[P] = [P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_1^{(Q)}, P_2^{(Q)}, P_3^{(1)}, \dots, P_3^{(Q)}] \tag{38}$$

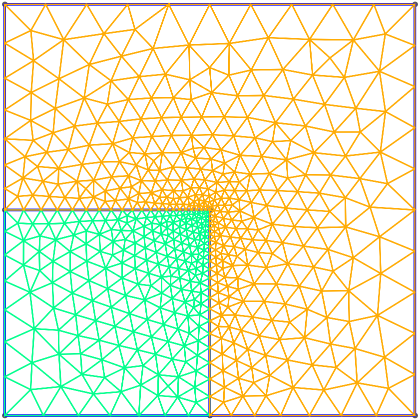
Минимизация (36) по переменным $[\mathrm{v}]$

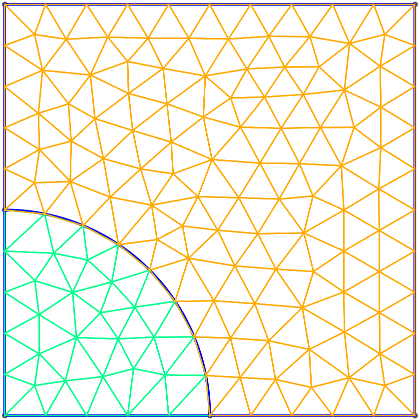
$$[K]\{\mathrm{v}\} = \{P\} \tag{39}$$

После этого по формулам (32) найдём деформации в элементах, а затем из закона Гука — напряжения в элементах. В итоге

$$h_{ijkl} = \frac{1}{\Omega}\sum_e \int\limits_{\Omega_{(e)}} \left[C_{ijkl}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(e)(kl)}\right] d\Omega \tag{40}$$

Дискретизация области





Текущие итоги и дальнейшая работа

В рамках полугодовой работы над курсовой

- Реализована программа на языке Python для расчета эффективных характеристик в случае симметричной ячейки.
- я познакомился с базовыми понятиями и процедурами метода конечных элементов и повторил результат В.И. Горбачева.

В течении следующего семестра планируется

- Сравнить результаты работы моей программы и результаты, представленные В.И. Горбачевым. Сравнить результаты работы программы с аналитическими формулами.
- Попытаться реализовать возможность вычисления эффективных модулей для несимметричной произвольной ячейки.

Используемые материалы и литература

[1] Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости : автореферат дис. доктора физико-математических наук : 01.02.04 / МГУ им. М. В. Ломоносова. - Москва, 1991. - 26 с.

[2] Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. Мир, 1979.

[3] Juan Gómez, Nicolás Guarín-Zapata (2018). SolidsPy: 2D-Finite Element Analysis with Python.
`https://github.com/AppliedMechanics-EAFIT/SolidsPy`

[4] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.
`https://gmsh.info/`

[5] Schlömer, N. meshio: Tools for mesh files [Computer software].
`https://doi.org/10.5281/zenodo.1173115`